МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОУ ВПО «СИБИРСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ»

Ю.А. Кравченко

ОСНОВЫ КОНСТРУИРОВАНИЯ СИСТЕМ ГЕОМОДЕЛИРОВАНИЯ

Книга 1

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАЦИОННОГО ГЕОМОДЕЛИРОВАНИЯ

Часть 1

Новосибирск
СГГА
2008

УДК 528.91
К772

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор
Томского государственного университета
А.В. Скворцов

Кандидат технических наук, доцент Новосибирского
государственного архитектурно-строительного университета
А.Ф. Задорожный

Кравченко, Ю.А.

К 772 Основы конструирования систем геомоделирования. Книга 1. Теоретические основы информационного геомоделирования. Часть 1 [Текст] : монография / Ю.А. Кравченко. – Новосибирск: СГГА, 2008. – 196 с.

ISBN 978-5-87693-298-3 (ч. 1)
ISBN 978-5-87693-297-6 (кн. 1)
ISBN 978-5-87693-296-9

Содержатся математические основы информационного моделирования геопространства (начальные сведения из теории множеств, элементы логики как содержательной теории и классической формальной теории, основные понятия теории графов), необходимые для понимания структуры и функционирования современных и перспективных систем информационного геомоделирования.

Для студентов старших курсов, аспирантов и специалистов в области информационного геомоделирования, геоинформатики и картографии.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СГГА

Научный редактор: кандидат технических наук,
профессор Сибирской государственной геодезической академии
Ю.Г. Костына

УДК 528.91

ISBN 978-5-87693-298-3 (ч. 1)
ISBN 978-5-87693-297-6 (кн. 1)
ISBN 978-5-87693-296-9

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 5
1. Элементы теории множеств 9
1.1. Множества 9
1.2. Мощность множества 11
1.3. Подмножества 12
1.4. Диаграммы Эйлера – Венна 13
1.5. Теоретико-множественные операции 13
1.6. Тождества алгебры множеств 18
1.7. Упорядоченные множества 20
1.8. Прямое произведение множеств 20
1.9. Проекции 21
1.10. Соответствия 22
1.11. Отображения 24
1.12. Отношения 25
1.13. Точечные множества 27
1.13.1. Границы точечных множеств 28
1.13.2. Интервалы и окрестности 28
1.13.3. Открытые и замкнутые множества и области 29
1.14. Метрические пространства 30
1.15. Линейные пространства 32
Библиографический список 35
2. Элементы логики 36
2.1. Предмет логики 36
2.2. Исторические сведения 38
2.3. Эмпирические и абстрактные объекты 40
2.4. Символы 41
2.5. Термины 43
2.6. Определение терминов 47
2.7. Формальные языки 49
2.8. Логика высказываний 52
2.8.1. Суждения 52
2.8.2. Высказывания 54
2.8.3. Логические операторы 56
2.8.4. Формулы алгебры логики 63
2.8.5. Логические функции 64
2.8.6. Тождества алгебры логики 67
2.8.7. Нормальные формы 73
2.8.8. Правила вывода 80
2.9. Логика предикатов 85
2.9.1. Символы логики предикатов 86
2.9.2. Предикаты 88
2.9.3. Силлогизмы 91
2.9.4. Кванторы 94

2.9.5. Формальные системы 99
2.9.6. Аксиомы и правила вывода 106
2.10. Неклассическая логика 113
2.11. Размытые множества 116
Библиографический список 126
3. Элементы теории графов 127
3.1. Геометрические графы 127
3.2. Абстрактные графы 129
3.3. Неориентированные графы 130
3.4. Ориентированные графы 134
3.5. Цепи, циклы и грани 136
3.6. Связность графов 138
3.7. Идентификация элементов графа 144
3.8. Операции и отношения на графах 145
3.9. Эйлеровы и гамильтоновы графы 152
3.10. Деревья 155
3.11. Планарные графы 162
3.12. Двойственные графы 165
3.13. Раскраска графов 166
3.14. Характеристики графов 169
3.15. Представление графов 171
Библиографический список 177

ПРЕДИСЛОВИЕ

Информационное геомоделирование началось с создания в Массачусетском технологическом институте в 1957 г. первой в мире цифровой модели местности (ЦММ, DTM) – цифровой модели рельефа, предназначавшейся для проектирования автомобильных дорог. Хотя применение существовавших в то время «больших» ЭВМ приводило к удорожанию проектных работ, эти затраты с избытком компенсировались снижением стоимости строительства проектируемых объектов. С течением времени, с одной стороны, произошло осознание значимости информационного геомоделирования при решении многих задач, а с другой – развитие элементной базы ЭВМ привело к улучшению их технических характеристик в сотни и тысячи раз при таком же снижении стоимости обработки данных.

По данным ООН, для принятия более 60 % решений требуется геопространственная информация. Поэтому закономерно, что применение вычислительных машин для моделирования географического пространства находит все большее применение и в настоящее время наблюдается экспансия геоинформатики во многие сферы человеческой деятельности.

Для Российской Федерации изучение и информационное моделирование собственной территории имеет особое значение, поскольку ее территория составляет около 1/7 от площади поверхности Земли. Деятельность органов власти всех уровней и субъектов хозяйственной деятельности, связанных с эксплуатацией пространственно протяженных объектов, при недостатке пространственной информации осуществляется неэффективно. Геопространственные данные будут важным компонентом Федеральной целевой программы «Электронная Россия» и общегосударственных информационных ресурсов. Их значимость для экономики и обороны страны подтверждается началом разработки новой Федеральной целевой программы «Создание инфраструктуры пространственных данных (ИПД) РФ». Кроме того, в 2010 г. планируется полномасштабное развертывание отечественной спутниковой системы определения координат ГЛОНАСС, создание которой отнесено к важным государственным программам, находящимся под личным контролем президента РФ.

Создание ИПД, полное развертывание системы ГЛОНАСС и снятие многих ограничений на распространение и использование геопространственных данных дают основания для прогнозов об экспоненциальном росте числа их потребителей в России в ближайшие 5–10 лет, сравнимом с развитием мобильной связи. Функционирование банков геоданных коллективного пользования с удаленным доступом явится качественно новым уровнем обеспечения потребителей геоинформации. Однако, проникновение геоинформационных систем в различные сферы, сопровождающееся ростом многообразия требований пользователей, обостряет традиционные проблемы российской геоинформатики:

1) отсутствие унификации представления геопространства в целом, осложняющее интеграцию геопространственных данных, представленных в разных системах координат;

2) отсутствие стандартов представления геоданных, влекущее за собой неэффективность информационного обмена между различными ГИС;

3) отсутствие формальной теории картографии и языка картографического отображения, следствием чего являются низкий уровень автоматизации картографических работ и трудности обмена электронными картографическими изображениями.

Решение указанных проблем требует качественных изменений методологии геоинформационного моделирования. Перспективным направлением в развитии систем информационного геомоделирования, имеющим стратегическое значение, представляется их интеллектуализация, разработка как систем, основанных на обработке знаний.

За прошедшие 50 лет развития геоинформационного моделирования произошло накопление критической массы знаний, вызвавшее выделение геоинформатики в самостоятельную область знаний. Многими авторами отмечается ее интегрирующий характер, необходимость привлечения теорий, до этого существовавших независимо друг от друга. В соответствии с некоторыми воззрениями, которые мы характеризовали бы как крайние, геоинформатика трактуется даже как некая метатеория.

Вместе с тем, необходимо отметить, что в геоинформатике, как техническом знании, можно выделить две взаимосвязанные, но различные области. Первая из них занимается методологией *создания* систем информационного геомоделирования и может быть названа теоретической геоинформатикой. Предметом изучения второй научной дисциплины, которая может быть названа практической геоинформатикой, служит *использование* геоинформационных систем как технических средств, проблематика создания информационных моделей геопространства и решения с их помощью задач в различных проблемных областях.

Очевидно, что выбор геоинформационных систем, их эффективная эксплуатация, унификация и стандартизация представления геопространства, создание качественных геоинформационных моделей требуют понимания фундаментальных принципов геомоделирования. Однако, в существующих книгах по геоинформатике, как правило, рассматриваются преимущества геоинформационных моделей и технологий перед традиционными методами представления и обработки информации о геопространстве и методы создания информационных моделей геопространства. Решения проблем представления декларативных и процедурных знаний, внутренней организации данных в системах информационного моделирования, т. е. описания систем геомоделирования «изнутри» рассеяны по страницам многочисленных журналов.

Кроме того, в области геоинформационного образования сложилась ситуация, которую можно признать парадоксальной. Существуют научная специальность 25.00.35 – «Геоинформатика» и соответствующие диссертационные советы по защите кандидатских и докторских диссертаций, но высшие учебные заведения России не готовят специалистов по этой специальности. Геодезические вузы выпускают специалистов по информационным системам и технологиям, т. е. общей информатике. Изучение геоинформатики сводится в основном к изучению применения конкретных геоинформационных систем. Некоторые работники высшей школы считают такую подготовку достаточной. В итоге практика современного информационного геомоделирования в целом нередко основывается на интуитивных представлениях. По убеждению автора, информационное геомоделирование в своем развитии достигло такой точки, когда требуется переход от «вавилонского» этапа к «греческому», формализация теории, приближение к точности физико-математического знания.

Топографо-геодезическое и картографическое производство по своей природе является информационным, на наших глазах происходит его трансформация в геоинформационное. Чтобы не отстать от требований времени, геомоделирование и картографическая теория должны базироваться на фундаментальных принципах информационного моделирования.

Необходимо также учитывать, что промышленно развитые страны движутся в сторону информационного общества, в котором информация играет все большую роль и для ее обработки привлекается все больше ресурсов. В этих странах сформировалась концепция национальных информационных ресурсов и предпринимаются серьезные усилия по их формированию. Интеграция России в мировую экономику ставит вопрос о ее месте среди других стран.

Возможно, что начинается или уже началась технологическая гонка в сфере образования. Геоинформатика, как область знания, не является исключением. Высшая школа несет ответственность за подготовку специалистов по геоинформатике, которые будут работать в XXI в. Подтверждением значимости геоинформационного моделирования служит новая инициатива в области образования, представленная администрацией президента США. Ее авторы к трем важнейшим направлениям в области образования наряду с нано- и биотехнологиями отнесли геоинформационные технологии.

Данная книга представляет собой попытку заполнить определенную нишу в образовании специалистов геодезического и картографического профиля. По мнению автора, книга будет полезна для производственников, не получивших в свое время подготовки в области информационного геомоделирования. Изложенный в ней круг вопросов должен быть включен в программу обучения специалистов по геоинформатике. Если при подготовке инженеров содержание книги может использоваться в сокращенном виде, то для аспирантов оно является программой-минимумом. Книгу не следует рассматривать как сборник готовых решений и рецептов. Скорее, она является введением в круг проблем геоинформационного моделирования, задает подходы к их решению и общее направление, в котором нужно двигаться.

В структурном отношении монография состоит из двух книг. Первая из них содержит теоретические основы геоинформационного моделирования, необходимые для понимания второй книги. Вторая книга включает решения основных проблем, возникающих при информационном геомоделировании: представления геопространства в целом, создания моделей физической земной поверхности (и геополей), моделирования дискретных объектов геопространства, а также основы формальной картографии.

Бесспорно, эта книга могла быть намного лучше, если была бы написана коллективом авторов. Поэтому факт ее появления можно рассматривать как своеобразный эксперимент, а содержание – как первое приближение к теории геоинформационного моделирования. Автор будет благодарен за любые замечания и предложения по улучшению ее содержания.

В заключение автор считает своим долгом выразить благодарность профессору СГГА, д.т.н. И.Г. Вовку; заведующему кафедрой информационных систем и технологий НГАСУ (Сибстрин), к.т.н. А.Ф. Задорожному; профессорам ТГУ д.т.н. А.И. Рюмкину и д.т.н. А.В. Скворцову, прочитавшим рукопись полностью или частично и давшим полезные замечания и советы, хотя автор не всегда им следовал. Автор также выражает глубокую признательность ректору СГГА, профессору, д.т.н. А.П. Карпику за содействие в издании данной книги.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.1. Множества

Понятие множества является наиболее общим фундаментальным понятием математики. По существу, оно относится к неопределяемым, исходным понятиям, присутствующим в любой математической теории. Такие понятия можно пояснить, но дать им строгие определения через другие понятия не представляется возможным.

Под *множеством* понимают совокупность (набор, собрание) вполне определенных *различных* объектов, рассматриваемых как единое целое. Из данного определения следует, что в множество не могут входить одинаковые объекты. Примерами множеств могут служить множество всех букв алфавита или цифр, множество целых чисел, множество всех улиц города или названий этих улиц (это разные множества), множество понятий (абстрактных объектов), множество условных знаков, множество номенклатурных листов топографических карт, множество изображений и т. д.

Объекты, составляющие множество, могут быть различными по своей природе. Основанием для объединения некоторых объектов в то или иное множество служит наличие у них общего свойства, называемого *характеристическим*. Отсюда следует, что наряду с характеристическим свойством, объекты должны обладать и другими свойствами, вследствие чего мы получаем возможность различать и идентифицировать их.

Образующие множество объекты называют *элементами множества.* Для обозначения конкретных множеств используют прописные буквы латинского алфавита, при необходимости – с индексами. Элементы множеств обозначают строчными буквами латинского алфавита, которые могут снабжаться нижними индексами.

Наряду с понятием множества иногда используется понятие семейства. *Семейством* называют совокупность элементов, в которой некоторые элементы могут повторяться. Следовательно, множество является частным случаем семейства.

В настоящее время известны две точки зрения на понятие множества: *агрегатная* и *атрибутивная*. Автором первой трактовки, интуитивно очевидной, является создатель теории множеств Г. Кантор (1845–1918), рассматривавший множество как структурно сложный объект или агрегат, состоящий из некоторого числа компонентов. Однако, при таком понимании множества возникают определенные проблемы. В частности, трудно понять, что собой представляют пустое множество (см. ниже) и множество, состоящее из одного элемента.

Поэтому во второй половине XX в. трактовка множества была подвергнута тщательному анализу с позиций теории предикации. Признание получила точка зрения немецкого математика Г. Вейля (1885–1955) на множества как на атрибут (свойство) объектов. В рамках атрибутивной трактовки множеств выражение «x является элементом множества X» есть то же, что «x обладает свойством X». Такова трактовка понятия множества, доминирующая в настоящее время.

В зависимости от числа элементов, множества подразделяют на *конечные* – с конечным числом элементов и *бесконечные* – в противном случае. Так, множество десятичных цифр является конечным, а множество целых чисел – бесконечным.

Факт принадлежности элемента x множеству X записывается как

$$x \in X, \qquad (1.1)$$

где $\in$ – *символ принадлежности множеству*. В таких случаях говорят, что x *является элементом* множества X. Также говорят, что между множеством и его элементом существует *отношение принадлежности*. Если требуется перечислить несколько элементов, принадлежащих множеству X, то используется сокращенная форма записи:

$$x_1, \ldots, x_n \in X, \qquad (1.2)$$

что понимается как $x_1 \in X$, …, $x_n \in X$. Если x не является элементом множества X, то этот факт записывают как

$$x \notin X, \qquad (1.3)$$

где $\notin$ – *символ непринадлежности множеству*.

Для задания множеств используются два способа: перечисление и описание. При задании множества с помощью перечисления используют пару скобок { }, внутри которой указываются все элементы множества. Например, множество нечетных цифр может быть представлено как $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. При задании множества с помощью описания указывается его характеристическое свойство. Так, если требуется задать множество гласных букв, то это можно сделать следующим образом: $X = \{x \in A$: x – гласная буква$\}$, где A – множество всех букв алфавита. Такая запись читается как «множество X состоит из элементов x множества A, обладающих тем свойством, что x является гласной». Если множество A, из которого берутся элементы, очевидно, то указание на принадлежность x множеству A может опускаться. Предыдущее определение множества гласных букв мы могли бы записать в виде $X = \{x$: x – гласная буква$\}$.

Характеристическое свойство множества может указываться в виде уравнений или неравенств. Например, множество корней квадратного уравнения может быть представлено как $X = \{x : ax^2 + bx + c = 0\}$, а бесконечное множество точек, принадлежащих отрезку $[a, b]$, можно определить как $X = \{x : a \le x \le b\}$.

Очевидно, что задание конечных множеств возможно как с помощью перечисления, так и с помощью описания. Указание бесконечных множеств возможно только с помощью описания. Для описания конечных множеств с очень большим числом элементов и бесконечных множеств может использоваться *частичное перечисление*, если из него ясен порядок продолжения последовательности элементов. Так, множество всех четных чисел мы могли бы определить как $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$. Определения подобного типа могут быть названы *неявными*, или *контекстуальными*.

Важное значение в теории множеств имеет *пустое множество*, под которым понимается множество, не содержащее ни одного элемента. Это означает, что ни один элемент в рассматриваемой области не обладает заданным характеристическим свойством. Пустое множество в теории множеств играет такую же роль, как 0 в алгебре. Для обозначения пустого множества используется символ $\varnothing$. Без понятия пустого множества некоторые множества не могли бы быть описаны. Кроме того, понятие пустого множества дает возможность оперировать любыми множествами без выяснения фактического числа их элементов. Так, мы можем говорить об отображении объектов некоторого типа на топографических картах, совершенно не заботясь о том, есть ли объекты такого типа на определенном номенклатурном листе карты.

Для обозначения некоторых часто встречающихся множеств принято использовать те или иные определенные символы. Так, множество целых чисел обозначают обычно символом N, а множество вещественных чисел – символом R.

Порядок следования элементов в множестве не имеет никакого значения. Два множества X и Y считаются *равными*, что обозначается как

$$X = Y, \qquad (1.4)$$

если они состоят из одних и тех же элементов. В сущности, два равных множества представляют собой одно и то же множество. Из определения равенства множеств вытекают соотношения:

1) X = X (свойство рефлексивности);
2) если X = Y, то Y = X (свойство симметричности);
3) если X = Y и Y = Z, то X = Z (свойство транзитивности).

Два множества X и Y не равны, что записывается как

$$X \neq Y, \qquad (1.5)$$

если хотя бы некоторые элементы множества X не принадлежат Y или множество Y содержит элементы, отсутствующие в X.

1.2. Мощность множества

При изучении множеств может возникнуть вопрос о числе их элементов. Для конечных множеств определение числа элементов не является проблемой, поскольку любое сколь угодно большое, но конечное число элементов может быть хотя бы в принципе перечислено, чего нельзя сказать о бесконечных множествах. Для сравнения числа элементов бесконечных множеств Г. Кантором было предложено его обобщение – понятие *мощности множества*. При этом *мощность конечного множества* принято считать равной числу его элементов.

Сравнительная количественная оценка бесконечных множеств основана на идее взаимно однозначного соответствия между двумя множествами. Если каждому элементу множества X по некоторому закону поставлен в соответствие только один элемент множества Y, и каждому элементу множества Y при этом оказывается поставленным в соответствие один и только один элемент множества X, то говорят, что между двумя множествами установлено *взаимно однозначное соответствие*. Установить взаимно однозначное соответствие между двумя множествами возможно только при условии, что оба множества содержат одно и то же число элементов. Поэтому для доказательства равномощности двух бесконечных множеств достаточно доказать, что между их элементами может быть установлено взаимно однозначное соответствие.

Г. Кантором было показано, что бесконечные множества могут быть неравномощными и что *наименьшей мощностью* среди всех бесконечных множеств обладает множество натуральных чисел. Мощность множества натуральных чисел принято обозначать первой буквой еврейского алфавита с индексом «ноль» $\aleph_0$ (алеф-нуль). Множество натуральных чисел и любое равномощное ему множество называют *счетными множествами*. Кантором была доказана равномощность множества всех рациональных чисел и множества натуральных чисел, что означает, что множество рациональных чисел *счетно*. Кантор также доказал, что множество всех действительных чисел *не счетно*. Мощность множества всех действительных чисел называют *мощностью континуума* и обозначают символом $\aleph$ или c.

1.3. Подмножества

Множество X называют *подмножеством* множества Y, если каждый элемент множества X принадлежит также и множеству Y, что кратко записывают в виде

$$X \subseteq Y. \tag{1.6}$$

Символ $\subseteq$ называют *символом включения*. Используя символ включения, мы допускаем, что множество Y может не содержать ни одного элемента, не принадлежащего X. Если известно, что множество Y помимо элементов множества X содержит какие-либо другие элементы, то для записи отношения между множествами X и Y используют выражение типа

$$X \subset Y, \tag{1.7}$$

где $\subset$ – *символ строгого включения*. Пустое множество является подмножеством любого множества:

$$\varnothing \subseteq X, \tag{1.8}$$

где X – произвольное множество.

Всякое непустое подмножество X множества Y, отличное от множества Y, называют *правильной частью*, или *собственной частью*, множества Y.

Из определения подмножества вытекают следующие его свойства:

1) $X \subseteq X$ (рефлексивность);
2) $((X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq Z)) \rightarrow (X \subseteq Z)$ (транзитивность).

Определения теории множеств часто удобно давать с использованием символов математической логики:

$\forall$ – так называемый квантор общности, имеющий смысл «всякий», «любой», «каждый», «для всех» и т. п.;

$\rightarrow$ – символ импликации, означающий «влечет за собой» или «следует»;

$\wedge$ – символ конъюнкции, обозначающий «и»;

$\vee$ – символ дизъюнкции, значением которого является «или»;

$\equiv$ – символ эквивалентности, имеющий смысл «то же самое, что».

С помощью этих символов можно дать формальное определение подмножества в виде выражения

$$(X \subseteq Y) \equiv (\forall x: (x \in X) \to (x \in Y)), \qquad (1.9)$$

которое можно прочитать так: для каждого x из утверждения «x принадлежит X» следует утверждение «x принадлежит Y». Скобки в последнем выражении не обязательны и поставлены, как и в других выражениях ниже, с целью облегчить восприятие структуры выражения.

Связь между символами включения и строгого включения формально можно представить выражением

$$(X \subset Y) \equiv ((X \subseteq Y) \wedge (X \neq Y)). \qquad (1.10)$$

Одним из фундаментальных понятий теории множеств является понятие универсального множества. *Универсальным множеством* называют множество, содержащее в себе любое другое множество. Универсальное множество обозначают символом U или I и иногда называют также *полным,* или *единичным.* В различных ситуациях роль универсального множества могут играть разные множества. В частности, для множеств целых и вещественных чисел универсальным множеством будет множество всех чисел. Из определения универсального множества следует, что в рассматриваемой области любое множество является подмножеством универсального множества.

1.4. Диаграммы Эйлера – Венна

Для наглядного представления различных множеств и отношений между ними принято использовать так называемые *диаграммы Эйлера – Венна* (рис. 1.1). Множества на них изображают, как правило, в виде окружностей, а универсальное множество – в виде охватывающего прямоугольника. Отдельные области внутри этого прямоугольника соответствуют разным подмножествам универсального множества.

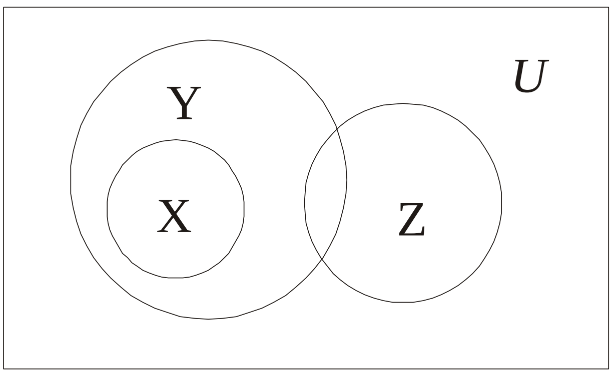


Рис. 1.1. Диаграмма Эйлера – Венна

На рис. 1.1 представлены три множества X, Y, Z и универсальное множество U. Множество X является подмножеством множества Y: каждый элемент множества X принадлежит множеству Y. Множества X и Z не имеют общих элементов. Некоторые элементы множества Y при-надлежат множеству Z и, наоборот, некоторые элементы множества Z являются элементами множества Y.

1.5. Теоретико-множественные операции

Множества являются математическими объектами, над которыми, как и над числами, можно выполнять те или иные операции. К таким операциям относятся пересечение, объединение, разность и дополнение множеств, ставящие определенным образом в соответствие двум множествам X и Y некоторое третье множество Z.

Объединением, или *суммой*, множеств X и Y называют множество Z, каждый элемент которого принадлежит множеству X или множеству Y, и обозначают как

$$Z = X \bigcup Y, \qquad (1.11)$$

где $\bigcup$ – *символ операции объединения множеств*.

Некоторые из элементов множества Z могут принадлежать как множеству X, так и множеству Y. На рис. 1.2 объединение множеств X и Y представляет собой всю заштрихованную область.

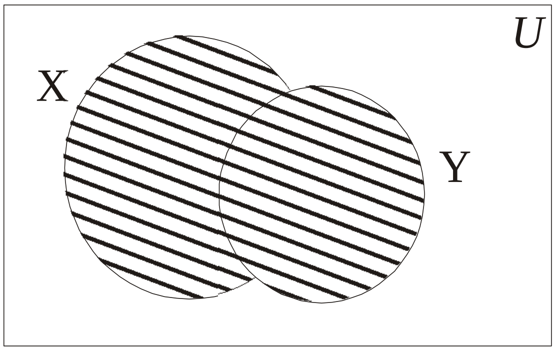


Рис. 1.2. Объединение множеств

Формальное определение операции объединения двух множеств задается с помощью выражения

$$(x \in (X \bigcup Y)) \equiv ((x \in X) \vee (x \in Y)). \qquad (1.12)$$

Операция объединения множеств обладает свойством *коммутативности*

$$X \bigcup Y = Y \bigcup X \qquad (1.13)$$

и свойством *ассоциативности*

$$(X \bigcup Y) \bigcup Z = X \bigcup (Y \bigcup Z) = X \bigcup Y \bigcup Z. \qquad (1.14)$$

Объединение любого множества X с пустым множеством не добавляет новых элементов к множеству X, поэтому

$$X \bigcup \varnothing = X. \qquad (1.15)$$

Данное выражение аналогично алгебраическому выражению $x + 0 = x$. Универсальное множество обладает свойством, не имеющим аналога в алгебре:

$$X \bigcup U = U, \qquad (1.16)$$

где X – произвольное множество.

Операция объединения множеств может быть обобщена на произвольное число множеств. *Объединением*, или *суммой*, множеств X_1, …, X_n называют множество элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств X_1, …, X_n:

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i = X_1 \bigcup \ldots \bigcup X_n. \qquad (1.17)$$

Пересечением, или *произведением*, двух множеств X и Y называют множество Z, каждый элемент которого принадлежит и множеству X, и множеству Y:

$$Z = X \bigcap Y, \qquad (1.18)$$

где $\bigcap$ – *символ операции пересечения множеств*.

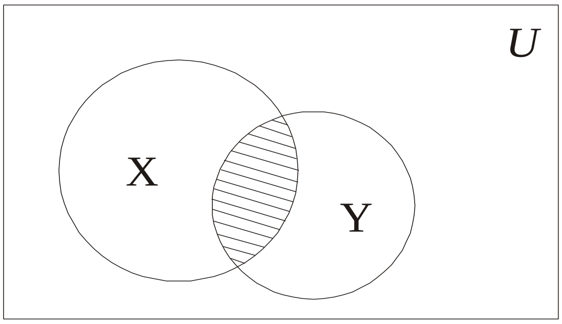


Рис. 1.3. Пересечение множеств

На рис. 1.3 пересечением множеств X и Y является заштрихованная область. Из определения и из рис. 1.3 следует, что пересечение двух множеств представляет собой их *общую часть*.

Формальное определение пересечения двух множеств может быть представлено выражением

$$(x \in (X \bigcap Y)) \equiv ((x \in X) \wedge (x \in Y)) \quad . \quad (1.19)$$

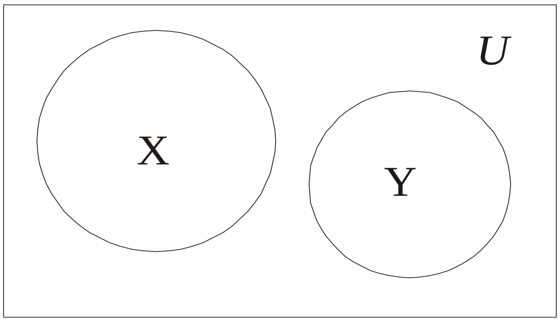


Рис. 1.4. Непересекающиеся множества

Пересечение двух непустых множеств может быть пустым множеством. Множества X и Y называются *непересекающимися* (рис. 1.4), если они не имеют общих элементов:

$$X \bigcap Y = \varnothing. \quad (1.20)$$

Говорят, что два множества X и Y находятся в *общем положении*, если выполнены три условия:

1) существует хотя бы один элемент множества X, не принадлежащий Y;
2) существует хотя бы один элемент множества Y, не принадлежащий X;
3) существует хотя бы один элемент, принадлежащий как X, так и Y.

Между двумя множествами X и Y возможны пять типов отношений:

1) $X = Y$ (множества X и Y совпадают);
2) $X \subset Y$ (X является подмножеством Y);
3) $Y \subset X$ (Y является подмножеством X);
4) $X \bigcap Y = \varnothing$ (X и Y не имеют общих элементов);
5) $(X \bigcap Y) \neq \varnothing$ и $X \neq Y$ (множества X и Y находятся в общем положении) (рис. 1.5).

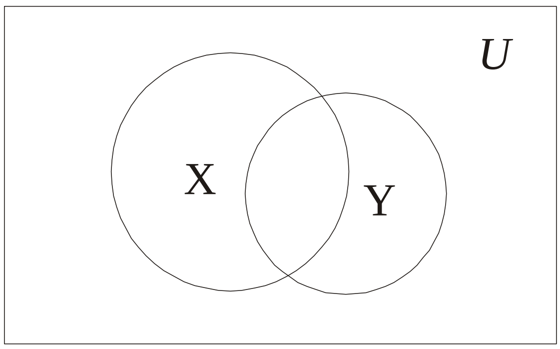


Рис. 1.5. Множества в общем положении

Понятие пересечения двух множеств может быть обобщено на случай произвольного числа множеств. *Пересечением* (*произведением*) множеств X_1, …, X_n называется множество X всех элементов, каждый из которых входит в каждое из множеств X_1, …, X_n:

$$X = \bigcap_{i=1}^{n} X_i = X_1 \bigcap \ldots \bigcap X_n. \quad (1.21)$$

Пересечение множеств обладает свойством *коммутативности*

$X \bigcap Y = Y \bigcap X$, (1.22)

и свойством *ассоциативности*

$(X \bigcap Y) \bigcap Z = X \bigcap (Y \bigcap Z) = X \bigcap Y \bigcap Z$. (1.23)

Свойство коммутативности и ассоциативности пересечения множеств может быть проиллюстрировано с помощью рис. 1.6, на котором представлено пересечение трех множеств. В силу свойств ассоциативности и коммутативности операция пересечения множеств в выражении $X = X_1 \bigcap ... \bigcap X_n$ может выполняться в произвольном порядке.

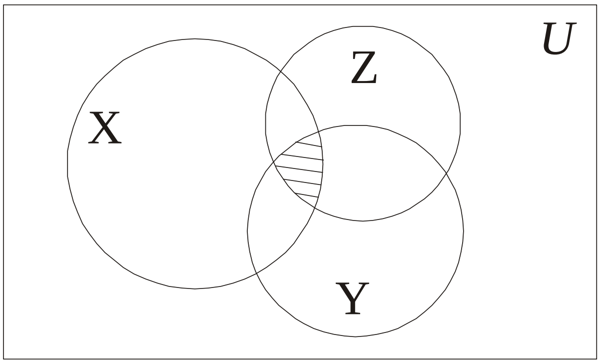


Рис. 1.6. Пересечение трех множеств

В теории множеств имеет место соотношение

$X \bigcap \varnothing = \varnothing$, (1.24)

аналогичное алгебраическому соотношению $x \cdot 0 = 0$. Отсюда и из (1.15) следует, что пустое множество играет в теории множеств такую же роль, как 0 в алгебре.

Разностью множеств X и *Y* называется множество *Z* всех тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству *X*, но не принадлежат множеству *Y*:

$Z = X \setminus Y$,

где \ – *символ разности множеств*. На рис. 1.7 разностью $X \setminus Y$ является заштрихованная область.

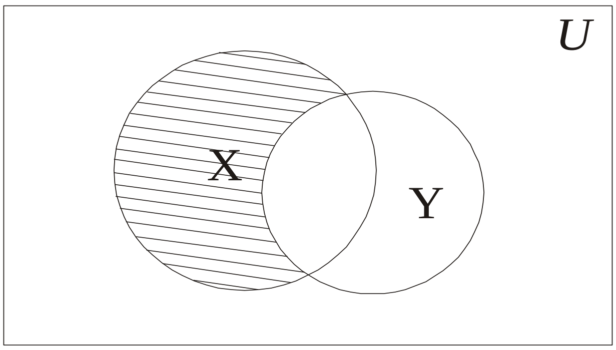


Рис. 1.7. Разность множеств

Формально разность двух множеств можно определить с помощью выражения

$(x \in X \setminus Y) \equiv ((x \in X) \wedge (x \notin Y))$. (1.25)

Очевидно, что разность множеств не обладает ни свойством коммутативности,

$X \setminus Y \neq Y \setminus X$, (1.26)

ни свойством ассоциативности

$(X \setminus Y) \setminus Z \neq X \setminus (Y \setminus Z)$. (1.27)

Поэтому в отличие от операций объединения и пересечения множеств, определяемых для произвольного числа множеств, операция разности множеств может быть определена только для двух множеств.

Дополнением множества X (до универсального множества) называют множество $\overline{X}$, состоящее из элементов универсального множества, не принадлежащих множеству X:

$$\overline{X} = U \setminus X. \qquad (1.28)$$

Формально дополнение множества можно определить с помощью выражения

$$\overline{X} = \{x : (x \in U) \wedge (x \notin X)\}. \qquad (1.29)$$

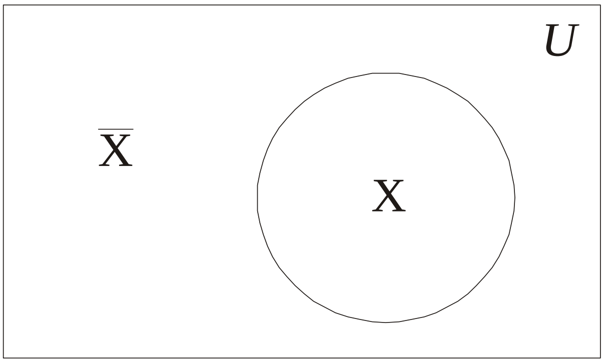


Рис. 1.8. Дополнение множества

Дополнение множества представлено на рис. 1.8.

Из определения дополнения множества следует, что если $x \in X$, то $x \notin \overline{X}$. И наоборот, если $x \in \overline{X}$, то $x \notin X$. Эти довольно тривиальные соотношения играют существенную роль при выводе и доказательстве более сложных отношений теории множеств.

Элементы универсального множества принадлежат либо множеству X, либо множеству $\overline{X}$, т. е. множества X и $\overline{X}$ не имеют общих элементов. Поэтому всегда имеет место соотношение

$$X \cap \overline{X} = \varnothing. \qquad (1.30)$$

С другой стороны, универсальное множество не содержит элементов, которые не принадлежали бы ни X, ни $\overline{X}$. Следовательно, всегда справедливо соотношение

$$X \cup \overline{X} = U. \qquad (1.31)$$

В силу симметрии дополнением множества $\overline{X}$ является само множество X. Следовательно,

$$\overline{\overline{X}} = X. \qquad (1.32)$$

Дополнением множества X в множестве Y называют разность между Y и его частью X:

$$\overline{X_Y} = Y \setminus X. \qquad (1.33)$$

Совокупность множеств $X_1, \ldots, X_n$ называют *системой множеств* и обозначают также с помощью фигурных скобок, например, $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$. Система множеств $S = \{X_1, \ldots, X_n\}$ называется *разбиением множества* X, если выполняются следующие условия:

1) любое множество X_i ($i = 1, \ldots, n$) является подмножеством множества X

$\forall X_i \in S : X_i \subseteq X$; (1.34.1)

2) любые два множества X_i и X_j $(i \neq j)$ являются непересекающимися

$\forall X_i \in S, \forall X_j \in S : (X_i \neq X_j) \to (X_i \cap X_j = \varnothing)$; (1.34.2)

3) объединение всех множеств $X_1, \ldots, X_n$ совпадает с множеством X

$X_1 \cup \ldots \cup X_n = X$. (1.34.3)

1.6. Тождества алгебры множеств

С помощью теоретико-множественных операций объединения, пересечения, разности и дополнения множеств можно получать разнообразные выражения. Если имеются различные выражения, в которых участвуют одни и те же множества, например, $A(X, Y, Z)$ и $B(X, Y, Z)$, то может возникнуть вопрос об их сравнении, об их равенстве или неравенстве. Если два таких выражения представляют собой одно и то же множество, то они тождественны и тогда

$A(X, Y, Z) = B(X, Y, Z)$.

Сравнение выражений можно проводить с помощью диаграмм Эйлера – Венна. С этой целью рассмотрим некоторые примеры.

1. Требуется доказать тождество

$(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$. (1.35)

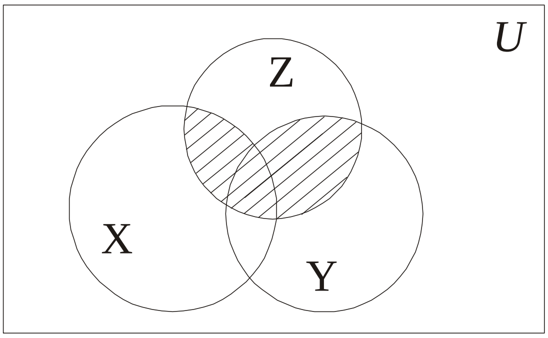


Рис. 1.9. К доказательству тождества 1.35

Из рис. 1.9 непосредственно следует, что данное соотношение действительно имеет место. Можно отметить, что оно аналогично дистрибутивному закону обычной алгебры: $(x + y)z = xz + yz$.

2. Требуется показать справедливость тождества

$(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$. (1.36)

Его правильность подтверждается рис. 1.10. В отличие от предыдущего соотношения, данному тождеству нет аналога в обычной алгебре. Соотношения (1.35) и (1.36) являются выражением *свойства дистрибутивности* операций объединения и пересечения множеств.

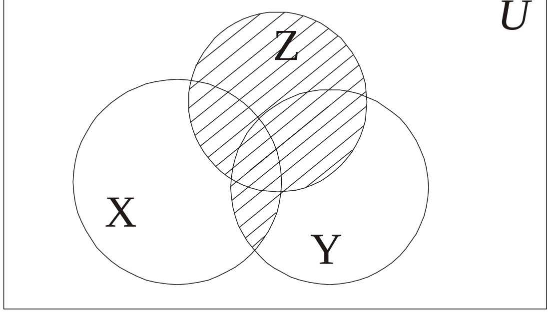


Рис. 1.10. К доказательству тождества 1.36

3. Показать, что если $X \subseteq Y$, то $X \cap Y = X$ и $X \cup Y = Y$. Множество Y содержит все элементы X и, возможно, другие элементы, не входящие в X. Поэтому пересечение – общая часть множеств X и Y – должно совпадать с X

$(X \subseteq Y) \to ((X \cap Y) = X)$. (1.37)

Объединение множеств X и Y содержит все элементы множества Y, а множество Y содержит все элементы множества X, поэтому множество X не добавит ни одного элемента к Y и к $X \bigcup Y$, т. е.

$$(X \subseteq Y) \to ((X \bigcup Y) = Y). \qquad (1.38)$$

Использование диаграмм Эйлера – Венна для доказательства тождеств в некоторых случаях может оказаться проблематичным. Кроме того, в математике доказательством считается именно аналитическое доказательство, использование диаграмм Эйлера – Венна таковым не является.

В теории множеств используются два способа аналитических доказательств тождества двух произвольных выражений. Первый из них состоит в следующем. Пусть имеются два выражения $A(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и $B(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, в которых участвуют одни и те же множества. Обозначим множество, обозначаемое первым выражением, как X, а соответствующее второму выражению – как Y. Если мы докажем, что $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$, то тем самым будет доказано равенство множеств X и Y, поскольку одновременное выполнение указанных соотношений возможно только в случае равенства X и Y. Из равенства двух множеств будет следовать тождество обозначающих их выражений.

Рассмотрим применение данного правила на примере доказательства *первого тождества де Моргана*:

$$\overline{X \bigcup Y} = \overline{X} \bigcap \overline{Y}. \qquad (1.39)$$

Обозначим произвольный элемент множества в левой части как x. Из $x \in \overline{X \bigcup Y}$ следует, что $x \notin X \bigcup Y$. Но тогда $x \notin X$ и $x \notin Y$. Из $x \notin X$ и $x \notin Y$ получаем соответственно $x \in \overline{X}$ и $x \in \overline{Y}$. Следовательно, $x \in \overline{X} \bigcap \overline{Y}$.

В данном доказательстве элемент x является произвольным элементом множества в левой части. Любое утверждение о *произвольном* элементе множества есть утверждение о *всех* элементах этого множества. Если произвольный элемент левой части принадлежит множеству в правой части, то это означает, что *все* элементы множества (то есть само множество) в левой части принадлежат множеству в правой части. Таким образом, множество в левой части является подмножеством множества в правой части или

$$\overline{X \bigcup Y} \subseteq \overline{X} \bigcap \overline{Y}. \qquad (1.40.1)$$

Обозначим теперь произвольный элемент множества в правой части как y. Из $y \in \overline{X} \bigcap \overline{Y}$ следует $y \in \overline{X}$ и $y \in \overline{Y}$. Тогда $y \notin X$ и $y \notin Y$. Это означает, что $y \notin X \bigcup Y$. Следовательно, $y \in \overline{X \bigcup Y}$. Таким образом,

$$\overline{X} \bigcap \overline{Y} \subseteq \overline{X \bigcup Y}. \qquad (1.40.2)$$

Из $\overline{X \bigcup Y} \subseteq \overline{X} \bigcap \overline{Y}$ и $\overline{X} \bigcap \overline{Y} \subseteq \overline{X \bigcup Y}$ следует $\overline{X \bigcup Y} = \overline{X} \bigcap \overline{Y}$, что и требовалось доказать.

Второй способ доказательства тождества двух выражений заключается в доказательстве равенства заданных выражений или их дополнений некоторому третьему выражению. Рассмотрим данный способ доказательств на примере *второго тождества де Моргана*

$$\overline{X \bigcap Y} = \overline{X} \bigcup \overline{Y}. \qquad (1.41)$$

Дополнение множества в левой части тождества будет равно дополнению множества в правой части $\overline{\overline{X \bigcap Y}} = \overline{\overline{X} \bigcup \overline{Y}}$. Левая часть полученного выражения есть $X \bigcap Y$. Правая часть выражения также представляет собой пересечение $X \bigcap Y$, что следует из первого тождества де Моргана: $\overline{\overline{X} \bigcup \overline{Y}} = \overline{\overline{X}} \bigcap \overline{\overline{Y}} = X \bigcap Y$. Если равны дополнения двух множеств, то равны и сами множества, т. е. $\overline{X \bigcap Y} = \overline{X} \bigcup \overline{Y}$, что и требовалось доказать.

1.7. Упорядоченные множества

Выше отмечалось, что порядок следования элементов в множестве не имеет значения. Но существуют ситуации, в которых порядок следования элементов необходимо учитывать. В таких случаях используются упорядоченные множества. *Упорядоченным множеством,* или *кортежем*, называют последовательность элементов, то есть такой набор элементов, в котором каждый элемент занимает вполне определенное место. Элементы упорядоченного множества называют *компонентами.* Примерами кортежей могут служить последовательность букв в слове, порядок слов в предложении, запись числа с помощью десятичных цифр, дни недели и т. п. В отличие от множества, упорядоченное множество может содержать одинаковые компоненты. Так, некоторые буквы в слове или цифры в представлении числа могут совпадать.

Для обозначения кортежей используются строчные или прописные буквы латинского алфавита (возможно, с индексами), а для обозначения их компонент – строчные буквы. Чаще всего компоненты кортежа обозначаются строчными буквами с индексами, в качестве которых используются их порядковые номера – наиболее естественный способ идентификации компонент. Вся совокупность элементов кортежа заключается в круглые скобки, например, $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (a, b)$, $z = (8, 1, 5, 2)$…

Число элементов кортежа называют его *длиной*. Кортежи с 2, 3, …, n компонентами называют соответственно *двойками*, *тройками*, …, *n-ками*.

1.8. Прямое произведение множеств

Прямым (или *декартовым*) *произведением двух множеств* X и Y называют множество, обозначаемое $X \times Y$ и состоящее из всех тех и только тех пар, первая компонента которых принадлежит множеству X, а вторая – множеству Y. Формально прямое произведение двух множеств определяется как

$$X \times Y = \{\forall (x, y) : x \in X, y \in Y\}. \qquad (1.42)$$

Таким образом, элементы прямого произведения – это все кортежи вида (x, y). Очевидно, что число элементов прямого произведения будет равно $m \times n$, где m – число элементов множества X, а n – число элементов множества Y.

Пример прямого произведения двух множеств: если $X = (a, b, c)$ и $Y = (1, 2)$, то $X \times Y = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$.

Обобщением операции прямого произведения двух множеств является *прямое произведение n множеств* $X_1, \ldots, X_n$, обозначаемое $X_1 \times \ldots \times X_n$ и состоящее из всех тех и только тех кортежей длины n, первая компонента которых принадлежит множеству X_1, вторая компонента – множеству X_2, …, n-я компонента – множеству X_n. Формальное определение прямого произведения множеств:

$$X_1 \times \ldots \times X_n = \{(\forall x_1, ..., \forall x_n) : x_1 \in X_1 \wedge ... \wedge x_n \in X_n\}. \qquad (1.43)$$

Если хотя бы одно из множеств $X_1, \ldots, X_n$ является пустым множеством, то их прямое произведение также является пустым множеством

$$X_1 \times ... \times X_n = \varnothing. \qquad (1.44)$$

Верно и обратное: если прямое произведение множеств $X_1 \times ... \times X_n = \varnothing$, то хотя бы одно из множеств $X_1, \ldots, X_n$ является пустым множеством. Таким образом,

$$(X_1 \times ... \times X_n = \varnothing) \equiv (X_1 = \varnothing \vee ... \vee X_n = \varnothing). \qquad (1.45)$$

Если все члены прямого произведения являются одним и тем же множеством X, то такое произведение называют n-й (*декартовой*) *степенью множества X*

$$X^n = X \times X \times ... \times X \ (n \text{ раз}). \qquad (1.46)$$

Элементами n-й декартовой степени множества служат все возможные кортежи, составленные из n элементов множества X.

Показатель степени n может быть любым неотрицательным целым числом. При $n = 1$

$$X^1 = X. \qquad (1.47)$$

В соответствии с принятым соглашением, считается, что

$$X^0 = \varnothing. \qquad (1.48)$$

С помощью кортежей вида (x, y), (x, y, z) принято указывать положение точек соответственно на плоскости и в пространстве. Если x и y являются не прямоугольными координатами, а некоторыми другими, то с помощью кортежа (x, y) может быть указано положение точки на любой *поверхности*. Обобщением понятия обычного трехмерного пространства является понятие *n-мерного пространства*, или *гиперпространства*, точками которого называют кортежи длиной n $(x_1, \ldots, x_n)$.

1.9. Проекции

Наиболее часто компонентами кортежей являются целые и вещественные числа. Если X – множество вещественных чисел, то X^2 и X^3 представляют собой соответственно вещественную плоскость и трехмерное вещественное пространство. Упорядоченные множества называют *точками пространства*, или *векторами*. Кортежи вида (x, y) или (x, y, z) могут рассматриваться соответственно как точка (или радиус-вектор) на плоскости или в трехмерном пространстве.

Компоненты x_1, x_2, x_3 кортежа (x_1, x_2, x_3) называют *проекциями кортежа* или *проекциями вектора* на оси 1, 2 и 3 соответственно и обозначают как

$$Пр_1(x_1,x_2,x_3)=x_1;\ Пр_2(x_1,x_2,x_3)=x_2;\ Пр_3(x_1,x_2,x_3)=x_3. \quad (1.49)$$

Можно рассматривать также проекции сразу на две оси, например,

$$Пр_{13}(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_3). \quad (1.50)$$

Проекция кортежа на пустое множество осей является *пустым кортежем*:

$$Пр_{\varnothing}X=\Lambda. \quad (1.51)$$

Если X является множеством кортежей длины n, то *проекцией множества* X называют множество проекций кортежей из X.

Примеры. Если x представляет собой кортеж x = (7, 2, 5, 1), то его проекциями будут $Пр_1(x)=7$, $Пр_2(x)=2$ и т. д. Если X – множество кортежей X={(1, 3, 4, 5), (1, 3, 6, 7), (2, 3, 6, 2), (3, 3, 3, 3), (5, 3, 4, 6)}, то его проекциями будут $Пр_1X=\{1, 2, 3, 5\}$, $Пр_2X=\{3\}$, $Пр_3X=\{4, 6, 3\}$, $Пр_4X=\{5,7,2,3,6\}$.

Проекцией прямого произведения на какую-либо ось будет соответствующее множество. Так, если $X=X_1\times\ldots\times X_n$, то

$$Пр_iX=X_i, \quad (1.52)$$

где $i=1, \ldots, n$.

1.10. Соответствия

Элементы двух множеств X и Y можно так или иначе сравнивать, сопоставлять друг с другом. Если способ сопоставления двух множеств определен, то есть для каждого элемента $x\in X$ указан соответствующий ему элемент $y\in Y$, то говорят, что между двумя множествами X и Y установлено *соответствие.* При определении такого соответствия не требуется, чтобы в нем участвовали *все* элементы множеств X и Y. Таким образом, в общем случае *соответствие является подмножеством прямого произведения множеств* X и Y.

Чтобы *определить соответствие*, необходимо указать:

– множество X, называемое *областью отправления соответствия*, элементы которого сопоставляются с элементами другого множества;

– множество Y, называемое *областью прибытия соответствия*, с элементами которого сопоставляются элементы множества X;

– множество $Q\subseteq X\times Y$, называемое *графиком соответствия* и устанавливающее закон, по которому осуществляется соответствие. Множество Q содержит все пары (x, y), участвующие в соответствии.

Иначе, соответствие, обозначаемое q, есть тройка множеств

$$q=(X,Y,Q), \quad (1.53)$$

где

$$Q\subseteq X\times Y. \quad (1.54)$$

С определением соответствия связаны еще два множества. Первым из таких множеств является

$$Пр_1Q\subseteq X, \quad (1.55)$$

называемое *областью определения соответствия* и образованное только теми элементами множества *X*, для которых *определено* такое соответствие. Говорят, что для остальных элементов области отправления соответствие *не определено*. Второе множество – это множество

$$Пр_2 Q \subseteq Y\,, \qquad (1.56)$$

называемое *областью значений соответствия* и образованное только элементами множества *Y*, участвующими в сопоставлении.

Если пара $(x, y) \in Q$, то говорят, что элементу *x* *соответствует* элемент *y*. Иногда для записи факта существования соответствия между элементами *x* и *y* используют стрелку: $x \to y$.

Если между двумя множествами установлено соответствие, то можно рассматривать соответствие в обратном направлении, переставив в каждой паре элементы *y* и *x*. Для каждого соответствия $q = (X, Y, Q)$, $Q \subseteq X \times Y$ существует *обратное соответствие*

$$q^{-1} = (Y, X, Q^{-1})\,, \qquad (1.57)$$

где

$$Q^{-1} \subseteq Y \times X\ . \qquad (1.58)$$

Для обозначения обратного соответствия между элементами *x* и *y* может использоваться обратная стрелка: $x \leftarrow y$.

Очевидно, что обратным соответствием обратного соответствия будет прямое соответствие

$$(q^{-1})^{-1} = q\,. \qquad (1.59)$$

В качестве примеров прямого и обратного соответствий можно рассмотреть ситуацию с использованием картографических условных знаков. Пусть область отправления соответствия – множество картографируемых объектов, а область прибытия соответствия – множество всех возможных условных знаков. При вычерчивании карты используется прямое соответствие, сопоставляющее каждому объекту определенный условный знак. При чтении карты необходимо использовать обратное соответствие, указывающее для каждого условного знака обозначаемый им объект.

Композицией соответствий называют последовательное применение двух соответствий. В композиции соответствий участвуют три множества *X*, *Y* и *Z*, на которых определены два соответствия:

$$q = (X, Y, Q),\ Q \subseteq X \times Y\,; \qquad (1.60)$$

$$p = (Y, Z, P),\ P \subseteq Y \times Z\,, \qquad (1.61)$$

где область значений соответствия *q* совпадает с областью определения соответствия *p*:

$$Пр_2 Q = Пр_1 P\,.$$

Соответствие *q* для каждого элемента $x \in Пр_1 Q$ устанавливает один или несколько элементов $y \in Пр_2 Q$. Затем для каждого полученного таким образом элемента *y* соответствие *p* определяет один или несколько элементов $z \in Пр_2 P$. В итоге каждому элементу из области определения первого соответствия

$x \in Пр_1 Q$ сопоставляется некоторое число элементов из области значений второго соответствия $z \in Пр_2 P$.

Композицию двух соответствий q и p обозначают как $q(p)$, а ее график – как $Q \circ P$. Композиция двух соответствий q и p представляется как

$$q(p) = (X, Z, Q \circ P),\ Q \circ P \subseteq X \times Z. \qquad (1.62)$$

1.11. Отображения

Пусть заданы множества X и Y и график соответствия $F \subseteq X \times Y$ такой, что $Пр_1 F = X$. Такое всюду определенное на X соответствие называют *отображением* и говорят, что отображение F *действует из* X *в* Y, и записывают как

$$F : X \to Y \text{ или } y = F(x) \text{ или } y = Fx, \qquad (1.63)$$

где $x \in X$, и $y \in Y$.

Отображение является частным случаем соответствия, поэтому для него справедливы понятия обратного отображения и композиции отображений. Вместо термина «отображение» в линейной алгебре и функциональном анализе используют также термин «*оператор*». Если X и Y – числовые множества, то отображение называют также *функцией.*

Иногда под отображением понимают только *однозначное* отображение. В общем случае каждому элементу $x \in X$ отображение F ставит в соответствие некоторое подмножество $Fx \subseteq Y$, которое называют *образом элемента* x, а сам элемент x – *прообразом* всех элементов Fx. Все подмножество FX называют *образом множества* X.

Отображения обладают следующими свойствами.

1) Если A_1 и A_2 – подмножества множества X, то

$$F(A_1 \cup A_2) = FA_1 \cup FA_2, \qquad (1.64)$$

то есть образ объединения двух множеств X и Y равен объединению образов X и Y.

Доказательство:

$$F(A_1 \cup A_2) = \bigcup_{x \in A_1 \cup A_2} Fx = (\bigcup_{x \in A_1} Fx) \cup (\bigcup_{x \in A_2} Fx) = FA_1 \cup FA_2 .$$

2) Соотношение

$$F(A_1 \cap A_2) = FA_1 \cap FA_2, \qquad (1.65)$$

означающее, что образ пересечения двух множеств равен пересечению их образов, имеет место только при однозначном отображении. В общем случае выполняется соотношение

$$F(A_1 \cap A_2) \subseteq FA_1 \cap FA_2, \qquad (1.66)$$

доказательство которого приводить не будем.

Множество X может совпадать с Y, тогда отображение $F : X \to X$ называют преобразованием множества, или отношением, и записывают как

$$(X, F),\ F \subseteq X^2. \qquad (1.67)$$

Пусть F и G – два разных отображения X в X. Композицией этих отображений называют отображение FG, определяемое как

$$(FG)x = F(Gx). \qquad (1.68)$$

Если $F = G$, то справедливы соотношения

$$F^2x = F(Fx); \qquad (1.69)$$

$$F^3x = F(F^2x). \qquad (1.70)$$

В общем случае

$$F^nx = F(F^{n-1}x). \qquad (1.71)$$

Кроме того, считается, что

$$F^0x = x. \qquad (1.72)$$

Данное соотношение дает возможность ввести отрицательные степени отображений. Отображение F^0 можно представить в виде

$$F^0x = F(F^{-1}x) = FF^{-1}x = x.$$

Отсюда следует, что F^{-1} является обратным отображением. Тогда можно считать:

$$F^{-2}x = F^{-1}(F^{-1}x);$$

$$F^{-n}x = F^{-1}(F^{-(n-1)}x). \qquad (1.73)$$

1.12. Отношения

Выше отмечалось, что понятие отношения используется для некоторых отображений, заданных на одном множестве. Для обозначения отношений вводится специальная символика.

Пусть дано отношение (X, F). Говорят, что элемент $y \in Fx$ *находится в отношении* F к элементу x, что записывают как

$$yFx. \qquad (1.74)$$

Если $F \subseteq X^2$, то элементами множества X^2 являются упорядоченные двойки, поэтому и отношение представляет собой множество упорядоченных двоек. Отношения, каждый элемент которых содержит упорядоченные пары, называют *бинарными, или двухместными*.

Бинарные отношения являются математическими объектами и как объекты обладают теми или иными свойствами. К основным свойствам бинарных отношений относятся рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, несимметричность и транзитивность. Отношение F называют:

- *рефлексивным*, если $\forall x : xFx$;
- *антирефлексивным*, если $\forall x : \overline{xFx}$;
- *симметричным*, если $\forall x : \forall y : xFy \to yFx$;
- *антисимметричным*, если $((xFy) \wedge (yFx)) \to (x = y)$;
- *несимметричным*, если $(xFy) \to \overline{yFx}$;

– *транзитивным*, если $((xFy) \wedge (yFz)) \rightarrow (xFz)$.

Наиболее часто встречающимися типами бинарных отношений являются отношения эквивалентности, порядка, доминирования и толерантности.

Отношение называют *отношением эквивалентности* и обозначают как ≡ или ↔, если выполняются три условия:

1. $x \equiv x$ (свойство рефлексивности: объект эквивалентен самому себе);
2. $(x \equiv y) \rightarrow (y \equiv x)$ (свойство симметричности: если x эквивалентен y, то и y эквивалентен x);
3. $((x \equiv y) \wedge (y \equiv z)) \rightarrow (x \equiv z)$ (свойство транзитивности: если x эквивалентен y и y эквивалентен z, то x эквивалентен z).

Два объекта (множества или элементы множеств) являются эквивалентными в том или ином смысле, если один объект может быть заменен другим. Так, все элементы x, образующие множество X, обладают одним и тем же характеристическим свойством и являются эквивалентными в смысле принадлежности к данному множеству. Делая утверждения о каком-либо общем свойстве элементов подмножества (множества), мы тем самым устанавливаем между ними отношение эквивалентности в совершенно определенном смысле, хотя своими другими свойствами элементы могут сильно отличаться.

Подмножество элементов, эквивалентных некоторому элементу x, называют *классом эквивалентности*. Разобьем некоторое множество X на несколько классов эквивалентности. На основании свойства транзитивности элементы каждого класса эквивалентности эквивалентны между собой. При этом каждый элемент может находиться в одном и только в одном классе эквивалентности. Тогда X является *объединением непересекающихся множеств*.

Для обозначения частных случаев отношения эквивалентности используют специальные символы: «=» – для обозначения равенства, «||» – для обозначения параллельности, «~» – для обозначения отношения подобия и т. д.

Отношением нестрогого порядка называют отношение, обозначаемое символом ≤ (или ≥) и отвечающее трем условиям:

1. $x \leq x$ (*свойство рефлексивности*);
2. $((x \leq y) \wedge (y \leq x)) \rightarrow (x = y)$ (*свойство антисимметричности*);
3. $((x \leq y) \wedge (y \leq z)) \rightarrow (x \leq z)$ (*свойство транзитивности*).

Отношением строгого порядка называется отношение, обозначаемое символом < (или >) и отвечающее условиям:

1. $\overline{x < x}$ (свойство антирефлексивности);
2. $\overline{(x < y) \wedge (y < x)}$ (свойство несимметричности);
3. $((x < y) \wedge (y < z)) \rightarrow (x < z)$ (свойство транзитивности).

В качестве общего названия отношения строгого и нестрогого порядка используется термин *отношение порядка.* Отношение порядка характеризует последовательность расположения элементов множества. Примерами множеств с отношением порядка могут служить кортежи, множество натуральных или вещественных чисел, фазы жизненного цикла искусственных объектов (проектируемый, строящийся, действующий, разрушенный) и т. п. Множество называется *упорядоченным*, если любые два его элемента являются сравнимыми, что означает выполнение соотношений $x < y$, или $x = y$, или $y < x$.

Отношением доминирования (обозначается символом >>) называют отношение между элементами x и y множества, если эти элементы обладают двумя свойствами:

1. $\overline{x >> x}$ (свойство антирефлексивности – никакой объект не может доминировать над самим собой);
2. $\overline{(x >> y) \wedge (y >> x)}$ (свойство несимметричности – два элемента не могут доминировать друг над другом).

Отношение доминирования не обладает свойством транзитивности. Его смысл состоит в том, что один элемент превосходит другой по некоторому критерию. Отношение доминирования встречается в обществе. Так, если спортсмен x выиграл у спортсмена y, а y одержал победу над z, то отсюда совсем не следует, что x выиграет у z.

Отношение толерантности – это отношение «ослабленного подобия» между двумя элементами, когда элементы похожи друг на друга, но не эквивалентны. Строго *отношение толерантности* (далее обозначаемое симолом ≅) определяется как нетранзитивное отношение, обладающее двумя свойствами:

1. $x \cong x$ (*свойство рефлексивности* – объект похож сам на себя);
2. $(x \cong y) \wedge (y \cong x)$ (*свойство симметричности* – если x похож на y, то справедливо и обратное).

Из сходства x и y, а также y и z не следует сходство x и z. Так, дороги похожи на реки (как линейные объекты), а реки похожи на озера (как объекты гидрографии). Но едва ли можно усмотреть сходство между дорогой и озером.

Обобщением понятия бинарного отношения является *n-арное или n-местное отношение*, представляющее собой пару множеств (X, F), в которой $F \subseteq X^n$.

Обобщение понятия n-арного отношения может быть продолжено. Пусть X_1, …, X_n – различные множества, среди которых могут быть совпадающие. Пусть $F \subseteq X_1 \times ... \times X_n$ – некоторое подмножество декартова произведения. Если кортеж $(x_1, \ldots, x_n) \in F$ является элементом множества F, то говорят, что элементы *находятся в отношении* F или *удовлетворяют условию* F. Все множество F называют *отношением*.

Такое наиболее общее понимание отношения играет чрезвычайно важную роль в теории баз данных, поскольку позволяет отображать самые разнообразные связи между объектами той или иной предметной области.

1.13. Точечные множества

При изучении функций вида $f(x)$ действительной переменной x часто требуется указать множество значений x, для которых значение $f(x)$ определено и отвечает заданным условиям. Подобным образом могут быть описаны как функции, так и множества. О значениях действительной переменной x (или объектов, которым соответствуют значения x) обычно говорят как о *точках* прямой, а о множестве таких действительных чисел – как о *линейных точечных множествах*.

Таким же образом свойства функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ действительных переменных $x_1, \ldots, x_n$ связывают с множествами *точек* $(x_1, \ldots, x_n)$ в n-мерном пространстве, включающем все точки $(x_1, \ldots, x_n)$. Подобная геометрическая интерпретация является очень наглядной и основывается на *аксиоме непрерывности*, постулирующей взаимно однозначное соответствие между действительными числами и точками прямой.

1.13.1. Границы точечных множеств

Действительное число M является *верхней границей* или *нижней границей* множества S_x действительных чисел x, если для всех $x \in S_x$ соответственно $x \le M$ или $x \ge M$. Говорят, что множество действительных чисел *ограничено* (*имеет абсолютную границу*), если верхнюю границу имеет множество абсолютных величин этих чисел, в противном случае множество *не ограничено*.

Каждое непустое множество S_x действительных чисел x, имеющее верхнюю границу, имеет также *точную верхнюю границу* (или *наименьшую верхнюю границу*) $\sup x$, а каждое непустое множество действительных чисел x, имеющее нижнюю границу, имеет *точную нижнюю границу* (или *наибольшую нижнюю границу*) $\inf x$. Если множество S_x конечно, то его точная верхняя граница $\sup x$ равна наибольшему значению $\max x$, принимаемому числом $x \in S_x$, а точная нижняя граница $\inf x$ равна минимальному значению $\min x$. Пример: множество всех действительных чисел $x < a$ имеет точную верхнюю границу a, но не имеет максимального значения.

Функция $y = f(x)$ или $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ ограничена на множестве точек (x) или $(x_1, \ldots, x_n)$, если ограничено соответствующее множество S_y значений функции y. Таким же образом функция $y = f(x)$ или $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет верхнюю границу, точную верхнюю границу, нижнюю границу, точную нижнюю границу, максимум и/или минимум на множестве S точек (x) или $(x_1, \ldots, x_n)$, если это верно для соответствующего множества S_y значений функции y.

1.13.2. Интервалы и окрестности

Пусть x – действительная переменная. Множество всех значений x, интерпретируемых как точки и удовлетворяющих условиям:

1. $a < x < b$, называют *ограниченным открытым интервалом* и обозначают (a, b);
2. $a < x$, называют *неограниченным открытым интервалом* $(a, +\infty)$;
3. $x < a$, называют *неограниченным открытым интервалом* $(-\infty, a)$;
4. $a \le x \le b$, называют *ограниченным замкнутым интервалом* $[a, b]$.

Замкнутый интервал называют также *отрезком*, *сегментом* или *замкнутым промежутком*. Множество точек (x), удовлетворяющее одному из условий $a \le x < b$, $a < x \le b$, $a \le x$ или $x \le a$, иногда называют *полуоткрытым интервалом*. Интервал I_1, содержащийся в другом интервале I_2, называют *частичным интервалом* интервала I_2.

Если a – некоторое действительное число, то *открытой окрестностью точки* (a) в *пространстве действительных чисел* называют любой открытый интервал вида $(a-\delta, a+\delta)$, содержащий точку a. Иначе можно сказать, что открытая окрестность точки a есть множество всех точек (x), удовлетворяющих условию $|x-a| < \delta$, где δ – некоторое положительное число.

Множество (M, $+\infty$) всех точек (x), удовлетворяющих условию $M < x$, где M – некоторое действительное число, называют (*открытой*) *окрестностью точки плюс бесконечность* в пространстве действительных чисел. Множество $(-\infty, M)$ всех точек (x), удовлетворяющих условию $x < M$, где M – некоторое действительное число, называют (*открытой*) *окрестностью точки минус бесконечность* в пространстве действительных чисел.

В n-мерном пространстве, точки которого представляются как упорядоченные множества (x_1, …, x) действительных чисел, (*открытой*) *окрестностью точки* или δ-окрестностью (a_1, …, a_n), где a_1, …, a_n конечны, называют множество всех точек (x_1, …, x), при некотором положительном δ, удовлетворяющем условиям $|x_1 - a_1| < \delta$, …, $|x_n - a_n| < \delta$.

1.13.3. Открытые и замкнутые множества и области

Точку P называют *предельной точкой* точечного множества S, если каждая окрестность точки P содержит точки множества S, отличные от P. Точка P называется *внутренней точкой* множества S, если P имеет окрестность, целиком содержащуюся в S. Предельная точка множества S, не являющаяся его внутренней точкой, называется *граничной точкой* множества S. Точку P множества S называют *изолированной точкой*, если у нее есть окрестность, не содержащая других точек множества S.

Точечное множество S называют:

– *открытым множеством*, если оно состоит только из внутренних точек;

– *замкнутым множеством*, если оно содержит все свои предельные точки; конечные множества замкнуты;

– *дискретным* (*изолированным*) *множеством*, если оно состоит только из изолированных точек; (дискретное множество на евклидовой плоскости или в евклидовом пространстве конечно или счетно, а конечное множество – дискретно);

– *связным множеством*, если S не может быть представлено в виде объединения двух непересекающихся множеств, каждое из которых не содержит предельных точек другого.

Говорят, что множество точек на евклидовой плоскости или в евклидовом пространстве *ограничено*, если ограничено множество декартовых координат всех его точек. *Областью* (открытой) называют открытое связное множество. Объединение открытой области и ее граничных точек называют *замкнутой областью*. Область D на евклидовой плоскости называется *односвязной*, если любая простая замкнутая кривая, целиком принадлежащая D, может быть стянута в точку с помощью непрерывной деформации, не выходя за пределы области D; в противном случае область называют *многосвязной*.

Поверхностно-односвязной называется область V в трехмерном пространстве, если любая простая замкнутая кривая, целиком лежащая в V, может быть стянута в точку с помощью непрерывной деформации, не выходя из V.

Пространственно-односвязной называют область V в трехмерном евклидовом пространстве, если любая простая замкнутая поверхность, целиком лежащая в V, может быть стянута в точку, не выходя из V.

Примеры: шар является односвязной областью в смысле обоих определений, шаровое кольцо – только в смысле первого определения, а тор – только с точки зрения второго.

Если земную поверхность рассматривать *как поверхность суши и дна океанов*, то множество точек S, образующих земную поверхность, является бесконечным, ограниченным, замкнутым и связным. Другими словами, множество S представляет собой замкнутую область в евклидовом пространстве. Область S является поверхностно-связной.

Если земная поверхность рассматривается только *как поверхность суши*, то она обладает уже несколько отличными свойствами. Множество точек S, образующих поверхность суши, также бесконечно, ограничено и замкнуто, но не связно. Однако множество S может быть представлено как объединение конечного числа связных подобластей $S = S_1 \bigcup S_2 \bigcup \ldots \bigcup S_n$, не имеющих общих границ. Произвольная связная подобласть S_i ($i = 1, \ldots, n$) является ограниченной, замкнутой и может быть либо односвязной, либо многосвязной областью. Граница любой подобласти – некоторая не обязательно гладкая пространственная кривая.

1.14. Метрические пространства

При геомоделировании, как и в других проблемных областях, рассмотрение множеств только как совокупностей объектов имеет мало ценности, так как между объектами предметной области существуют те или иные связи. Поэтому понятие множества должно быть увязано с некоторыми взаимосвязями между его элементами. Принято говорить, что множество S имеет *структуру*, если между элементами S установлены некоторые отношения или над ними заданы определенные операции.

Наиболее простыми пространствами являются метрические, определение которых осуществляется через понятие расстояния между элементами множества. Интуитивно расстояние понимается как некоторая величина, характеризующая близость или удаленность объектов друг от друга. Традиционно расстояние ассоциируется с геометрическим расстоянием $d(A, B)$ между двумя точками A и B, которое определяется как длина отрезка, соединяющего эти точки. Однако, существуют ситуации, когда такое понимание расстояния недостаточно.

Примером из области геомоделирования может служить расстояние между городами, под которым понимается не длина отрезка прямой, а длина соединяющей их дороги (автомобильной или железной). Другим примером является так называемое «манхэттенское расстояние», используемое для характеристики удаленности двух точек в городе, поскольку передвигаться можно только по улицам (рис. 1.11).

Пусть X – произвольное множество. Каждой паре элементов из X может быть поставлено в соответствие некоторое неотрицательное действительное число $d \geq 0$, называемое *расстоянием*, или *метрикой* в X, если для любых $x, y, z \in X$ оно отвечает следующим условиям:

1. $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (*аксиома идентичности*);
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (*аксиома симметрии*);

3) для любых трех чисел $x, y, z \in X$ имеет место $d(x, z) \leq$ $\leq d(x, y) + d(y, z)$ (*аксиома треугольника*) (рис. 1.12).

Метрическим пространством называют пару (X, d), то есть множество X с определенной на нем метрикой d. При этом элементы множества X называют *точками метрического пространства* (X, d).

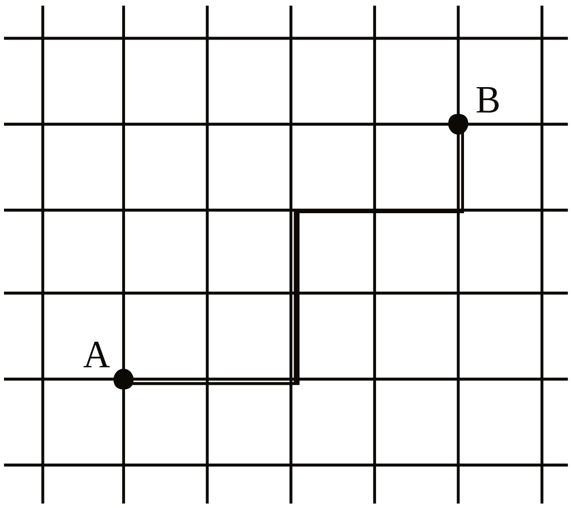


Рис. 1.11. Манхэттенское расстояние

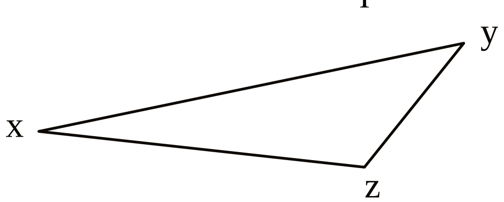


Рис. 1.12. Аксиома треугольника

Таким образом, множество X только тогда является метрическим пространством, когда в нем задана соответствующая метрика $d(x, y)$. На одном и том же множестве X могут быть заданы различные метрики, и тогда им будут соответствовать различные метрические пространства. Так, на рис. 1.11 и 1.12 элементами множества являются точки плоскости, но определены разные метрики, следовательно, это разные метрические пространства.

В качестве примеров можно привести следующие метрические пространства.

1. Пусть R – множество действительных чисел, а x, y – его произвольные элементы. Если между x и y определить расстояние по формуле

$$d(x, y) = |x - y|, \qquad (1.75)$$

то R будет метрическим пространством.

2. Пусть дано множество R^n, элементами которого являются упорядоченные n-ки вещественных чисел вида $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$. Данное множество может быть превращено в метрическое пространство различными способами. Например, метрика для данного множества может быть определена как

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \qquad (1.76)$$

или как

$$d_\infty(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|). \qquad (1.77)$$

Обычно же расстояние между элементами множества R^n определяется формулой

$$d_2(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2)^{1/2}. \qquad (1.78)$$

Метрику $d_2(x, y)$ называют *евклидовой*, а пространство R^n с такой метрикой называют *евклидовым* и обозначают как E_n.

1.15. Линейные пространства

Введение метрики для какого-либо множества во многих случаях не исчерпывает всех его структурных свойств. Так, если X является множеством вещественных чисел, то к важным структурным свойствам X можно отнести возможность получения одних элементов множества как суммы или произведения других элементов множества X. Среди разнообразных классов пространств важную роль играют линейные пространства.

Пространство называется *линейным*, если оно отвечает следующим условиям:

1) каждой паре элементов $x, y \in X$ может быть однозначным образом поставлен в соответствие третий элемент $z \in X$, называемый *суммой* и обозначаемый $x + y$, причем

$x + y = y + x$ (*свойство коммутативности*);

$x + (y + u) = (x + y) + u$ (*свойство ассоциативности*);

в X существует такой элемент 0, что $x + 0 = x$ для всех $x \in X$ (*существование нуля*);

для каждого $x \in X$ существует элемент $-x$ такой, что $x + (-x) = 0$ (*существование противоположного элемента*);

2) для любого числа α и любого элемента $x \in X$ существует элемент $\alpha x \in X$ такой, что

$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Условия 1) и 2) называют соответственно *условиями аддитивности* и *однородности линейного пространства*.

Линейными пространствами являются:

– множество вещественных чисел с обычными операциями сложения и умножения;

– множество R^n всех упорядоченных n-ок вещественных чисел, если операции сложения и умножения на число определены следующим образом:

$x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$;

$\alpha x = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n)$,

где $x, y \in R^n$ и $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$.

При n = 2 и n = 3 эти операции совпадают с правилами действия над векторами соответственно на плоскости и в пространстве. Под нулевым вектором понимается вектор (0, …, 0) с нулевыми компонентами.

Линейное пространство получает свое законченное представление тогда, когда свойства аддитивности и однородности дополняются возможностью измерения величин самих элементов. В частности, вектора можно сравнивать только тогда, когда принято соглашение о том, что понимать под величиной (длиной) вектора. Введение в линейное пространство численных характеристик величин элементов приводит к важному понятию *линейного нормированного пространства*, называемому иногда *банаховым пространством*.

Линейное пространство называют *нормированным линейным пространством*, если для каждого $x \in X$ существует неотрицательное число $\|x\|$, называемое *нормой* x и удовлетворяющее следующим условиям:

$\|x\| = 0$, если и только если $x = 0$;

$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;

$\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Величина $\|x - y\|$ обладает всеми свойствами расстояния $d(x, y)$ в метрическом пространстве, в чем можно убедиться: $\|x - y\| = 0$, если $x - y = 0$, то есть если $x = y$; поскольку $y - x = -(x - y)$, постольку

$\|y - x\| = |-1| \cdot \|x - y\| = \|x - y\|$;

$\|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \le \|x - z\| + \|z - y\|$.

Следовательно, линейное нормированное пространство является метрическим пространством с метрикой $d(x, y) = \|x - y\|$. Рассмотренные ранее в качестве примеров метрические пространства, обладающие свойствами аддитивности и однородности, являются нормированными линейными пространствами. Для их обозначения используются символы:

1) пространство $C_2^{(n)}$ или E_n с нормой

$$\|x\| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right\}^{1/2} \quad \text{или} \quad \|x\| = |x| \ \text{при} \ n = 1; \qquad (1.79)$$

2) пространство $C_1^{(n)}$ с нормой

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|; \qquad (1.80)$$

3) пространство C^n с нормой

$$\|x\| = \max \{|x_1|, \ldots, |x_n|\}. \qquad (1.81)$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Камени Д., Снелл Д., Томпсон Д. Введение в конечную математику. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
2. Клини С.К. Введение в метаматематику. – М.: Изд-во иностр. лит., 1957.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1970. – 720 с.
4. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики. – М.: Энергия, 1972. – 376 с.
5. Шиханович Ю.А. Введение в современную математику. – М.: Наука, 1965.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ЛОГИКИ

2.1. Предмет логики

Логика является научной дисциплиной об общих формах рационального мышления и методах формализации содержательных теорий. В этом определении несколько неявным образом подчеркивается противопоставление *рационального* – относящегося к сфере рассудка, познаваемого в виде определенных логически непротиворечивых конструкций, и *иррационального* – интуитивного, бессознательного, не постигаемого разумом и не выражающегося в логических терминах.

Появление *науки*, возникновение, формирование и дальнейшее развитие *научного знания* стало принципиально новым этапом в развитии человечества. Этот сдвиг стал возможен благодаря работе, которая была проделана философами Древней Греции, впервые выделившими и исследовавшими общезначимые (всегда истинные) способы рассуждений. (*Рассуждения* есть переход от некоторых исходных положений или утверждений к другим, заключительным утверждениям.) Несколько упрощая, можно сказать, что предметом логики являются методы правильных рассуждений.

Иногда основной причиной возникновения логики называют потребности… демократии, необходимость поддержания демократических систем правления в древнегреческих городах-государствах, когда для решения многих вопросов требовалось общенародное согласие. Ведение публичных дискуссий требовало определенной техники ведения споров. При этом выделялись проблема поведения и проблема доказательства утверждений. Из первой проблемы родилась такая дисциплина, как риторика, а из второй – логика.

Для иллюстрации различий в методах рассуждений приведем два примера из [1]. По преданию, Александрийская библиотека была сожжена калифом Омаром. Предварительно он обосновал свои намерения следующим образом: «Если ваши книги согласны с Кораном, то они излишни. Если они не согласны с Кораном, то они вредны. Но вредные или излишние книги следует уничтожить. Значит, ваши книги следует уничтожить». С точки зрения логики рассуждения Омара, если они действительно имели место, безупречны.

Противоположный пример рассуждений: «Дикари раскрашивают свое тело. Некоторые современные женщины раскрашивают свое тело. Следовательно, некоторые современные женщины – дикари». В этом примере исходные утверждения и заключение соответствуют действительности. Тем не менее, с логической точки зрения данное рассуждение не может быть признано правильным [1, с. 11].

Различия между приписываемыми Омару рассуждениями и рассуждениями о дикарях и современных женщинах обусловлены принципиальными различиями между дедуктивными и индуктивными рассуждениями. *Дедукцией* называют переход от общего к частному, а также переход от одних логических формул или высказываний к другим логическим формулам или высказываниям по вполне определенным правилам логического вывода. Исходные логические формулы или высказывания называются *посылками*, а получаемые на их основе другие логические формулы или высказывания – *заключениями*. Дедуктивные рассуждения позволяют получать по истинным посылкам только истинные заключения. Предполагаемые рассуждения Омара были строго дедуктивными. Ложными были исходные посылки в его рассуждениях. Дедукция является также методом доказательства утверждений или логических формул, которое сводится все к тому же логическому выводу. Важным свойством дедуктивных методов рассуждений является возможность получения новых знаний из уже имеющихся.

Противоположностью дедукции является *индукция*, понимаемая как переход от частного к общему или рассуждения по аналогии. При индуктивном выводе высказывания также подразделяются на посылки и заключения. В качестве посылок обычно используются данные наблюдений или экспериментов. При индукции результаты изучения небольшого числа объектов, их выявленные свойства и межобъектные отношения затем переносятся на всю совокупность таких объектов, в том числе и на неисследованные случаи.

Однако индуктивные методы рассуждений не гарантируют правильности или истинности заключений даже при истинных посылках. Посылки при индуктивном выводе делают заключения лишь в какой-то мере правдоподобными.

Индуктивные методы рассуждений оказываются полезным инструментом при осмыслении результатов экспериментов, при эвристическом формировании гипотез и обобщений. Тем не менее, индуктивные заключения всего лишь вероятны, но не достоверны. Поэтому на смену индукции как логике открытия новых истин пришел гипотетико-дедуктивный метод, родоначальником которого считается Г. Галилей.

Гипотетико-дедуктивный метод изучения действительности заключается в дедуктивном выводе следствий из гипотез – посылок, истинностное значение которых не известно. При его использовании принято выделять три последовательных этапа:

1) *формулирование гипотез* – некоторого числа утверждений, истинность которых предполагается;
2) *логический вывод* следствий из выдвинутых гипотез;
3) *проверка* полученных следствий на предмет их истинности в конкретной проблемной области.

При истинности следствий проблема считается решенной, и гипотезы получают право на жизнь как исходные положения определенной теории. При получении ложных следствий гипотезы либо корректируются, либо заменяются новыми и весь цикл гипотетико-дедуктивного метода повторяется.

В соответствии с традиционными воззрениями предмет логики может рассматриваться в трех аспектах: онтологическом, гносеологическом и формально-логическом. Предметом изучения логики с онтологических позиций являются отношения между эмпирическими объектами. Такое понимание логики восходит к Демокриту, толковавшему логику как «логику вещей». В гносеологическом аспекте предмет логики составляют универсальные отношения между понятиями – сущностями вещей. Автором этой концепции является Платон, трактовавший логику как «логику понятий». В формально-логическом аспекте предметом логики являются универсальные отношения между суждениями и умозаключениями. Универсальность или общезначимость логических конструкций определяется не конкретным содержанием высказываний, а исключительно их структурой или формой. Такое определение предмета логики идет от Аристотеля, понимавшего логику как «логику доказательств и опровержений».

Таким образом, предметом изучения логики служат взаимосвязи между суждениями и умозаключениями. При этом логика совершенно отвлекается от содержания конкретных суждений и умозаключений и занимается изучением только их формы (структуры), в связи с чем методы логики принято называть *формальными*.

2.2. Исторические сведения

Как научная дисциплина, логика зародилась более 2 500 лет назад. В ее развитии принято выделять три этапа:

1) античный (500 г. до н. э. – начало н. э.), связанный с именами прежде всего таких философов Древней Греции, как Зенон Элейский (ок. 490–430 до н. э.), Демокрит (ок. 460–370 до н. э.), Сократ (469–399 до н. э.), Платон (427–347 до н. э.), Аристотель (384–322 до н. э.), Евклид (IV – начало III в. до н. э.);

2) схоластический (начало н. э. – первая половина XIX в.), когда наибольшее влияние на развитие логики оказали М. Пселл (1018 – ок. 1096), Р. Луллий (1235–1315), Г. Галлилей (1564–1642), Р. Декарт (1596–1650), Г. В. Лейбниц (1646–1716) и М.В. Ломоносов (1711–1765);

3) современный (первая половина XIX в. – наше время), в становление и развитие которого наибольший вклад внесли А. де Морган (1806–1871), Дж. Булль (1815–1864), Г. Фреге (1848–1925), Дж. Пеано (1858–1932), А. Уайтхед (1861–1947), Д. Гильберт (1862–1943), Б. Рассел (1872–1970) и К. Гедель (1906–1978).

Первые два этапа часто объединяют под общим названием «традиционной формальной логики», которой противопоставляют современный этап, называемый «символической логикой».

Аристотель явился создателем силлогистики – первой системы логического вывода, в основу которой были положены принципы: непротиворечивости, исключенного третьего и тождества. Им впервые были введены в употребление буквенные переменные для обозначения субъектов и предикатов простых категорических высказываний. Главой школы стоиков Хрисиппом (ок. 281–208 до н. э.) и его учениками были введены переменные для обозначения высказываний в целом.

Евклид дал образец применения дедуктивного вывода и математической строгости в своем труде «Начала», явившемся итогом работ математиков древности. Основное содержание этого труда получено чисто дедуктивным путем из небольшого числа исходных положений – аксиом. Сами аксиомы, в соответствии с античными воззрениями, в доказательстве не нуждались и представлялись самоочевидными.

Византийский философ, логик и богослов М. Пселл ввел буквенные переменные для четырех основных категорических высказываний аристотелевской силлогистики.

Заслуга Г. Галилея в том, что для научного познания он впервые применил гипотетико-дедуктивный метод, использовавшийся в античные времена преимущественно как метод ведения *полемики*. (Задачей полемики является победа над оппонентом, доказательство правильности собственной точки зрения, тогда как целью *дискуссии* является выяснение истины). Позднее Р. Декартом был предложен *принцип логической дедукции* как основной принцип научного познания, а его последователями (картезианцами) сформировано представление о логике как необходимом инструменте всех других наук. Однако, в дальнейшем содержание идей Декарта было выхолощено и сведено к представлениям о выводимости знаний, уже имеющихся в исходных посылках. В качестве основного метода научного познания стала рассматриваться индукция. Основное влияние на распространение такой точки зрения оказал Ф. Бэкон (1561–1626), рассматривавший индукцию как основной способ получения нового знания. Декартом же была создана основа формального языка современной математики – буквенная алгебра.

Важнейшая роль в формировании современных взглядов на логику принадлежит Г. В. Лейбницу, развившему представления Р. Декарта и предложившему идею подхода к логическим доказательствам как вычислениям, подобным математическим. Он осуществил перенос декартовской символики в логику; до этого в качестве единственного целостного языка логики использовался естественный. Лейбницем же была обоснована необходимость создания логического языка, использование которого позволило бы точно и однозначно выражать понятия и отношения между ними. Такой язык, по Лейбницу, должен представлять собой *алгебру человеческого мышления*, использование которой позволяло бы путем вычислений выводить новые истины из уже известных. С этой целью им было разработано несколько вариантов «арифметизации» логики. Однако под влиянием И. Канта (1724–1804) и Г.В. Гегеля (1770–1831), отрицательно относившихся к математизации логики, эти идеи не получили должной оценки до середины XIX в.

В дальнейшем работы Дж. Булля, Э. Шредера (1841–1902) и других логиков опровергли тезис о неалгебраической природе логики и привели к формированию взглядов на логику как на особого рода нечисловую алгебру. Но качественным сдвигом в развитии логики человечество обязано немецкому математику и логику Г. Фреге, впервые создавшему *аксиоматическое* исчисление высказываний и предикатов как строгую математическую теорию. В ней содержатся фактически все основные элементы современного логического исчисления. Фреге также были разработаны основы современной логической семантики. Дж. Пеано ввел ряд принятых в современной логике символов, в том числе $\in$ – символ принадлежности множеству, $\bigcup$ – символ объединения множеств и $\bigcap$ – символ пересечения множеств. В наиболее полном и развернутом виде современное логическое исчисление было создано А. Уайтхедом и Б. Расселом в их совместном труде «Принципы математики».

Таким образом, уже из приведенных исторических сведений можно сделать вывод, что развитие логики происходило не прямолинейно и что ее история характеризуется даже некоторой драматичностью.

В структурном отношении в логике принято выделять, прежде всего, логику высказываний и логику предикатов. Дальнейшим развитием классической логики являются многозначная логика, модальная логика, логика классов, конструктивная логика и теория моделей.

2.3. Эмпирические и абстрактные объекты

Особенностью человеческой психики является то, что реальный мир человек воспринимает как совокупность отдельных *объектов*. Поэтому все мышление человека, вероятно, можно назвать *объектно-ориентированным*. В логике все множество объектов принято разделять на эмпирические и абстрактные. При этом *эмпирическим,* или *индивидным объектом*, называют чувственно воспринимаемый объект, обладающий пространственно-временными характеристиками. По отношению к человеку эмпирические объекты подразделяют на *внешние*, существующие объективно, вне зависимости от конкретного человека, и *внутренние* (*перцепции*) – чувственные представления отдельного человека. К перцепциям относят разного рода зрительные и слуховые образы, обонятельные и осязательные ощущения, галлюцинации и т. п. Здесь важно отметить, что перцепции являются не абстрактными объектами, а эмпирическими, поскольку непосредственно связаны с *ощущениями* человека и не имеют какой-либо связи с его мышлением.

Индивидные объекты иногда подразделяют по степени их доступности для чувственного восприятия на *наблюдаемые*, доступные для непосредственного чувственного восприятия, и *ненаблюдаемые*, доступные для чувственного восприятия только с помощью тех или иных приборов. Примерами ненаблюдаемых объектов могут служить подземные инженерные коммуникации, обнаруживаемые с помощью трассоискателей, зоны радиоактивного заражения местности или электромагнитные поля и т. п.

Абстрактными называют объекты, существующие только в мышлении человека и выступающие в качестве продукта и содержания такого мышления. Абстрактными объектами являются свойства эмпирических объектов, понятия, суждения, отношения, умозаключения и другие подобные целостные образования. В отличие от философии логика не рассматривает вопрос об их первичности, а ограничивается лишь констатацией факта принципиальных различий между эмпирическими и абстрактными объектами. Самыми сложными абстрактными объектами являются научные теории.

Наиболее простыми абстрактными объектами являются свойства эмпирических объектов, понимаемые как их *мысленные* характеристики. В отличие от отношений, свойства характеризуют конкретный объект вне его связей с другими объектами. С помощью различных логических отношений из простых свойств могут создаваться более сложные свойства или понятия.

Под *понятием* обычно принято понимать свойство или целостную совокупность свойств, присущих некоторому объекту. В соответствии с таким определением различаются логически простые и логически сложные понятия. Свойства, указанные в определении понятия, образуют *содержание понятия*, а множество эмпирических или абстрактных объектов, обладающих всей совокупностью перечисленных в понятии свойств, – *объем понятия*.

2.4. Символы

Символы с древних времен играют важную роль в жизни человека. Перед отправлением на охоту первобытные люди устраивали ритуальные танцы перед изображением животного и тем или иным образом воздействовали на это изображение, полагая, что таким образом они влияют на объект предполагаемой охоты. С тех пор представления о символах сильно изменились, а их значение для современного человека резко возросло.

Самым убедительным подтверждением значимости символов для человека служит изобретение письменности. Можно считать, что прогресс в развитии человеческого общества в конечном итоге обусловлен использованием символов, поскольку без письменности накопление и передача знаний были бы крайне проблематичны. Более того, устная речь и даже мимика связаны с использованием символов. Таким образом, уже самое элементарное человеческое общение невозможно без использования символов. Более того, использование символов можно обнаружить и у животных.

Для логики значимость символов такова, что, как отмечалось выше, современную логику принято называть символьной. Поэтому в первую очередь мы должны рассмотреть, что же такое символы. В логике *символом* (от греч. symbolon – условный знак), или *знаком*, называют эмпирический объект, используемый для указания на другие эмпирические или абстрактные объекты.

В общем случае используемые в качестве символов эмпирические объекты могут быть различными по своей физической природе. Примерами символов служат цифры, буквы, слова, аббревиатуры, математические символы, иероглифы и другие письменные знаки, азбука Морзе, световые и звуковые сигналы, ноты, условные знаки карт, дорожные знаки, комбинации пробивок на перфокартах, электромагнитные импульсы на машинных носителях информации и т. д. Основным критерием при выборе способа представления символов служит удобство их использования в определенных ситуациях, связанных с передачей или приемом сообщений и называемых *коммуникативными*. Выбор системы символов зависит также от того, какая совокупность объектов описывается с их помощью. По понятным причинам такая система должна обладать необходимым разнообразием.

В широком смысле знак понимается как некоторый объект произвольной природы, которому при определенных условиях, образующих знаковую ситуацию, сопоставляется некоторое значение, могущее быть конкретным физическим предметом или абстрактным понятием. Исследованием свойств знаков и знаковых систем, характерных особенностей отношения «знак – означаемое» занимается *семиотика* (греч. semeiotikon – знак, признак), или *семиология*.

В семиотике выделяют три основных аспекта изучения знаков и знаковых систем:

1) *синтактику*, изучающую внутренние свойства систем знаков безотносительно к их интерпретации (правила построения знаков в рамках знаковой системы);

2) *семантику*, рассматривающую отношения между знаком и обозначаемым (содержанием знака), соотношения между знаками и их интерпретациями, независимо от того, кто служит «адресатом» (интерпретатором);

3) *прагматику*, исследующую связь знаков с «адресатами», т. е. проблемы интерпретации знаков теми, кто их использует, их полезности и ценности для интерпретатора.

Задачей синтактики является описание множества правильно построенных текстов для различных классов знаковых систем, разработка такой теории (списка синтаксических отношений и перечня постулатов), что класс текстов данной знаковой системы исчерпывает класс всех моделей этой теории. Постулаты такой теории исчерпывающим образом представляют множество возможных текстов.

Под *семантической информацией* в логике понимают характеристику содержания, которое передается в некотором сообщении.

В центре внимания прагматики находится изучение категорий полезности, ценности и понятности знаковых систем, а также исследование семантической информации, где существенную роль играет проблема оценки количества семантической информации.

Одним из важных достижений семиотики считается установление принципиальной несводимости семантики к синтаксису.

Поскольку знак является носителем информации, постольку любое знаковое моделирование является информационным. В этой связи семиотика имеет большое значение при исследовании и проектировании информационных систем. Исследования в семиотике осуществляются по двум основным направлениям:

– создание искусственных языков, позволяющих с необходимой степенью адекватности представлять моделируемые объекты и процессы, в том числе процессы обработки информации;

– исследование естественных языков и создание алгоритмов, обеспечивающих обработку текстов на естественном языке (машинный перевод, автоматическое индексирование и реферирование, перевод с естественного языка на формальный язык).

В логике в качестве символов используются письменные знаки. Их разновидностями являются термы, термины, константы, переменные, формулы и метасимволы.

Термом называют символ, *призванный обозначать* какой-либо эмпирический или абстрактный объект. Термы конструируются по определенным синтаксическим правилам, принятым в конкретном языке (естественном или искусственном) либо формальной системе. Наиболее часто правила построения термов задаются с помощью допустимых формул (выражений) с переменными, вместо которых допускается подстановка символов вполне определенного вида.

В логике различают четыре основные типа термов: дескриптивные, пропозициональные (или высказывания) и предикатные термы и логические операторы.

Дескриптивный терм, или *логическая дескрипция* – символ, обозначающий некоторый объект не путем его непосредственного указания, а с помощью теоретического описания. В естественных языках подобием логических дескрипций служат описательные выражения. При этом естественно-языковые дескрипции подразделяются на определенные и неопределенные. *Определенные дескрипции* указывают на конкретные объекты. Например, определенными дескрипциями являются «автор “Войны и мира”», «самая большая планета Солнечной системы», «лучший из миров», «президент России» и т. п. *Неопределенные дескрипции* обозначают произвольный объект из некоторого множества объектов. Например, в утверждении «Права и обязанности гражданина России определяются ее конституцией» дескрипция «гражданин России» является неопределенной, поскольку указывает не конкретного, а любого человека, являющегося гражданином России.

С помощью логических дескрипций обеспечивается однозначное отображение смысла естественно-языковых дескрипций. Каждая логическая дескрипция образуется как результат применения особого *оператора дескрипции* (*йота-оператора*) к конкретному предикату и имеет вид

$$ixP(x), \qquad (2.1)$$

что должно пониматься как «тот объект x, которому присуще свойство P».

По отношению к абстрактным объектам логическая дескрипция носит второстепенный характер, поскольку для каждого абстрактного объекта всегда может быть определен соответствующий теоретический термин. Но для эмпирических объектов логическая дескрипция – это единственный способ теоретического указания на эти объекты. Необходимость использования логических дескрипций для указания на эмпирические объекты объясняется тем, что смысл эмпирических объектов может быть установлен только непосредственным указанием на них.

2.5. Термины

Термином называют символ, *обозначающий* некоторый эмпирический или абстрактный объект и отвечающий требованиям предметности, однозначности и осмысленности. Различие между термом и термином в том, что терм является всего лишь синтаксически правильно построенным символом, который может не обозначать ни один объект. Самым известным примером такого терма может служить «глокая куздра». Таким образом, термин всегда является термом, но терм может не быть термином.

В соответствии с *принципом предметности* символ только тогда является термином, когда существует объект обозначения. В примере с «глокой куздрой» нарушено именно это требование. Согласно *принципу однозначности* символ является термином, если и только если он обозначает один объект, а не несколько. Для конкретных терминов такая трактовка очевидна. Например, термины «Земля», «Солнце» или «Луна» указывают на вполне определенные объекты и никаких вопросов не вызывают. Но в естественных языках часто используются *обобщенные* или *собирательные понятия*. Примером может служить термин «планета Солнечной системы», обозначающий не несколько эмпирических объектов (Земля, Марс, Юпитер, …) одновременно, а единственный абстрактный объект – *понятие* планеты Солнечной системы.

Принцип осмысленности означает, что смысл термина заключается только в том, что термин обозначает некоторый объект.

Из определения термина следует, что при его употреблении необходимо различать *обозначающее* (сам термин – некоторый эмпирический объект) и *обозначаемое* (тот эмпирический или абстрактный объект, на который он указывает). Более глубокая трактовка терминов и связанных с ними понятий была дана Ф.Л. Фреге. По Фреге, термин может характеризоваться своим значением и смыслом. *Значением термина* называют обозначаемый им объект, а под *смыслом термина* понимают то абстрактное содержание, в соответствии с которым происходит соотнесение термина с обозначаемым им объектом. Обозначаемый термином объект принято называть *денотатом*, а также *десигнатом*, *номинатом* или *референтом* термина. Отношение между термином и его денотатом называют *отношением именования*.

Соотношение между термином, значением и смыслом термина может быть проиллюстрировано с помощью так называемого *семантического треугольника*, или *треугольника Фреге*. На рис. 2.1 термин *обозначает* или *именует* (N) свой денотат и *выражает* (S) свой смысл, а смысл термина *характеризует* (X) денотат термина.

Близким к понятию смысла является понятие *концепта*, под которым подразумевается целостная совокупность свойств объекта, то абстрактное содержание термина, понимание которого является необходимым условием его адекватного употребления.

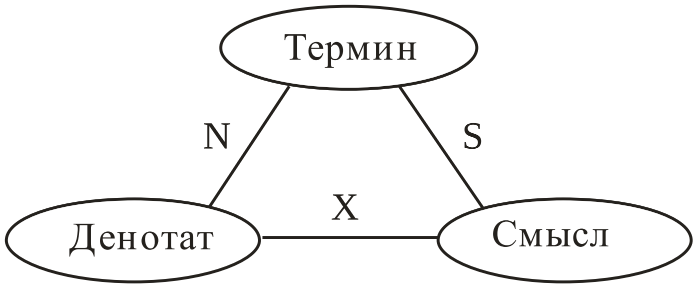


Рис. 2.1. Семантический треугольник

Слова этнического языка не просто служат меткой объектов, позволяющей выделять их среди других объектов, но обычно и характеризуют их по каким-то свойствам. Один и тот же знак (символ, термин) в разных ситуациях может обозначать разные предметы, выделяя их на основании общего концепта.

Денотат термина, являющийся эмпирическим объектом, называют *эмпирическим значением*, или *эмпирическим* (*индивидным*) *денотатом* термина, а сам термин – *эмпирическим* (*индивидным*) *термином*. Денотат термина, являющийся абстрактным объектом, называют *абстрактным значением*, или *абстрактным денотатом* термина, а сам термин – *теоретическим термином* (рис. 2.2).

Рис. 2.2. Термин и объект

Особенностью терминов является то, что отношения между терминами и денотатами могут быть неоднозначными, что проявляется в существовании синонимии и омонимии (полисемии). Хрестоматийным примером синонимов служат выражения «Утренняя звезда» и «Вечерняя звезда», используемые для указания на один и тот же объект – планету Венера. В естественных языках под значением терминов понимают эмпирические объекты, а под смыслом терминов – абстрактные объекты. Поэтому в соответствии с обыденным пониманием термины «Утренняя звезда» и «Вечерняя звезда» отличаются своим смыслом.

В логике такое толкование смысла некоторые авторы считают неудовлетворительным, так как оно приводит к ряду проблем, называемых *антиномиями (парадоксами) отношения именования*. Поэтому два выражения считают *тождественными по смыслу*, если они тождественны по значению, указывают на один и тот же денотат. Верно и обратное: если термины тождественны по смыслу, то они тождественны по значению, что представляется очевидным и не вызывает каких-либо возражений.

Чтобы обойти логические сложности, возникающие при такой трактовке, было предложено новое определение смысла термина, согласно которому *смысл термина* представляет собой суждение о том, что термин обозначает соответствующий эмпирический или абстрактный объект. Таким образом, с логической точки зрения «Утренняя звезда» и «Вечерняя звезда» являются тождественными по смыслу терминами. Однако, и с такой трактовкой смысла термина трудно согласиться, поскольку в ней, по существу, исчезает понятие смысла.

Отношение между тождественными по смыслу терминами называют *синонимией*, а сами тождественные по смыслу термины – *синонимами*. Ситуацию, когда с одним денотатом связано несколько терминов, отражает рис. 2.3, на котором N означает отношение именования, а S – отношение синонимии.

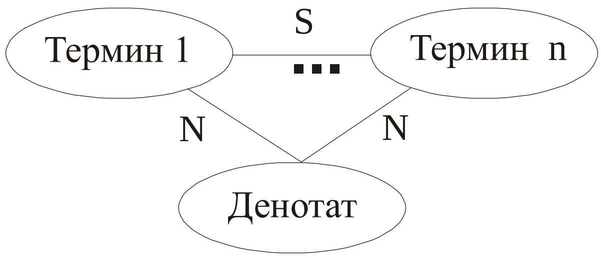


Рис. 2.3. Отношение синонимии

Синонимия возникает довольно часто при варьировании грамматических форм, когда изменяется незначительная часть слова (символа). Примерами подобных синонимов, с позиции логической семантики, являются ноль и нуль, тоннель и туннель. В русском языке синонимы также образуются как использованием разных приставок и суффиксов при неизменности корня (например, жилище, жилье), так и использованием различных корней в окружении тех же приставок и суффиксов (бесконечный, безграничный, беспредельный, бескрайний…). Другой распространенный источник синонимии – заимствование слов из других языков.

Омонимом называют символ, имеющий разные значения, обозначающий несколько разных денотатов (рис. 2.4). С точки зрения семиотики, в естественных языках *омонимия* (*полисемия*) играет положительную роль, так как позволяет сократить словарный запас языка. Без полисемии человеку пришлось бы запоминать слов в несколько раз больше. Кроме того, полисемия позволяет придать языку образность. Отрицательная сторона омонимии – неоднозначность символов. При каждом употреблении такого символа его значение и смысл определяются *контекстом* – совокупностью высказываний (фрагментом устной или письменной речи), в пределах которой употребляется данный термин. Многозначность естественных языков приводит к тому, что вне контекста смысл высказывания может быть понят неправильно, то есть содержанию высказывания может быть поставлен в соответствие смысл, отличный от предполагавшегося автором высказывания.

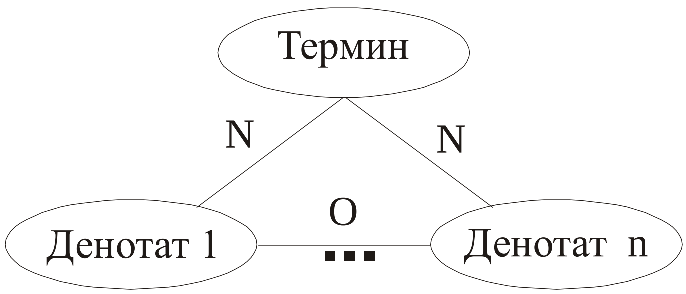


Рис. 2.4. Отношение омонимии

Омонимия возникает по разным причинам, нередко в результате лишь очень отдаленного сходства тех или иных объектов. В некоторых случаях термины одной области переносятся в другую, но смысл их при этом меняется очень сильно. Примерами могут служить понятия операции (банковской, военной и медицинской), канала (водного, связи), вируса (в медицине, информатике) и т. д.

Одни и те же символы (слова естественного языка) могут являться как синонимами, так и омонимами. Так, символ «операция» может использоваться для обозначения того или иного действия, и тогда он используется как синоним. Но в медицине, банковском или военном деле этот же символ используется как омоним.

При построении формальных теорий требуется однозначность терминов, поэтому в формальных или формализованных языках полисемия не допускается.

В действительности меняются отношения не только между символом и денотатом, но также между символом и концептом, что происходит вследствие уточнения эмпирических и теоретических знаний.

2.6. Определение терминов

В формализованных научных теориях, при знаковом моделировании любой предметной области, а также во фрагментах относительно законченных рассуждений важную роль играют определения терминов. *Определением*, или *дефиницией* символа (термина), называют установление смысла вновь вводимого символа или уточнение смысла символа, уже используемого в естественном или формальном языке.

Определения могут быть явные и неявные (или контекстуальные). *Неявным*, или *имплицитным*, называют определение, в котором значение определяемого термина задается контекстом либо набором аксиом.

Явные определения имеют структуру

$$Dfd \equiv Dfn, \qquad (2.2)$$

где *Dfd* – *определяемое*, или *дефиниендум*, (лат. definiendum); *Dfn* – *определяющее*, или *дефиниенс* (лат. definiens); символ ≡ может пониматься как *символ отношения семантического тождества* или символ отношения эквивалентности. По существу, определение устанавливает отношение синонимии между символами. Основной причиной для ввода терминов являются прагматические соображения. Новый символ вводится, как правило, в качестве удобного сокращения других, структурно более сложных символов.

Так, на основе понятия многоугольника мы можем ввести понятие четырехугольника, из него вывести понятие параллелограмма, далее дать определение понятия прямоугольника и, наконец, из последнего – определить понятие квадрата. Без такого термина для именования квадратов нам каждый раз пришлось бы использовать более сложный символ, что-то вроде такой языковой конструкции, как «многоугольник с четырьмя сторонами, все стороны которого равны, и все углы – прямые». Хотя «квадрат» является сложным символом (как слово, состоящее из 7 букв), его структура намного проще, чем структура изобретенного нами эквивалентного символа. Другими примерами ввода новых терминов по соображениям удобства могут служить аббревиатуры и сложные слова в естественных языках: ГИС, ЛЭП, АЭС, картография, геоинформатика и т. п.

В качестве еще одного примера явного определения символов можно привести теоретико-множественное описание автоматизированной информационной системы (АИС) в [3, с. 98–99], где автоматизированной информационной системой называется совокупность состояния информационного фонда и пяти функций:

АИС = $(t, f, \phi, \varphi, \psi, V)$,

где t – текущее состояние информационного фонда;

– $f(p, t)$ – функция информационного поиска;

– $\varphi(q, t)$ – функция завершающей обработки;

– (q, t) – функция обновления информации;

– $\psi(s, \varphi)$ функция изменения вида завершающей обработки;

– $V(z, J)$ – функция управления.

Строгое явное определение символа должно отвечать требованиям:

1) *взаимозаменимости*: определяемое и определяющее должны быть такими, чтобы при замене одного из них другим истинностное значение высказывания (в более широком плане – контекста) не изменялось;

2) *недопустимости порочного круга*: если определяемое X определяется через определяющее Y, то определяющее Y не должно определяться через определяемое X ни прямо, ни косвенно (через третий символ Z);

3) *однозначности*: каждому определяемому должно соответствовать только одно определяющее.

Явное определение может быть синтаксическим или семантическим. *Семантическое определение* устанавливает смысл символа путем непосредственного указания на объект, являющийся значением данного символа. Если значением символа является эмпирический объект, то семантическое определение называют *эмпирическим* или *остенсивным*. Если символ указывает на абстрактный объект (конкретное понятие), то семантическое определение называют *теоретическим* (рис. 2.5).

Эмпирические и теоретические определения в равной степени используются в практической деятельности человека. В раннем возрасте человек имеет дело преимущественно с эмпирическими определениями: ребенку, познающему окружающий мир, указывают на индивидные объекты и называют их *имена* (термины). В научных определениях главную роль играют теоретические определения.

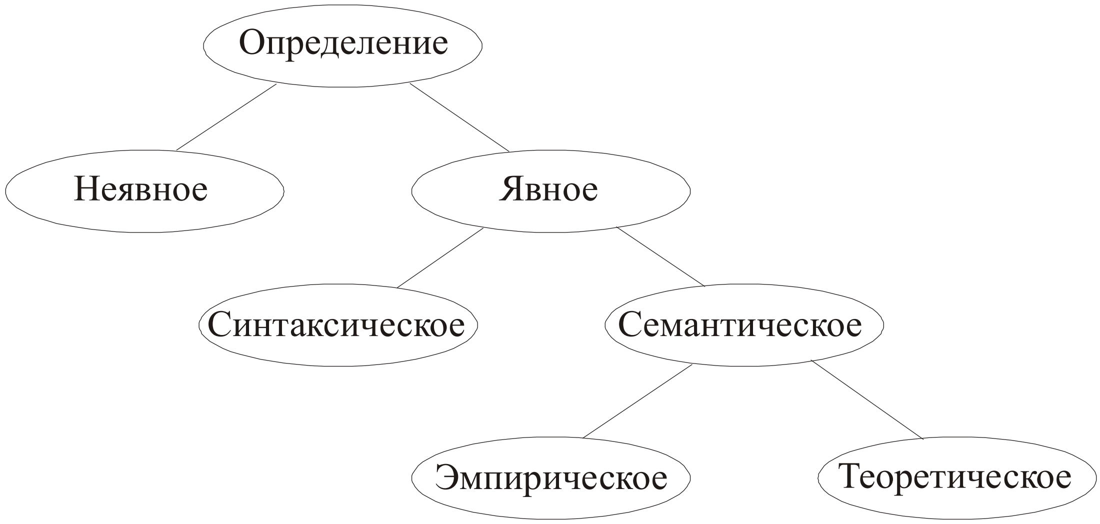


Рис. 2.5. Типы определений

Синтаксическое определение символа X есть высказывание о том, что символ X представляет собой терм, тождественный по смыслу некоторому другому терму Y. Структура синтаксического определения описывается формулой

$$X = Df.Y, \qquad (2.3)$$

где X и Y обозначают переменные, вместо которых допускается подстановка конкретных терминов, а составной символ «$=Df.$» является *оператором дефиниции*, формирующим высказывание о том, что термин X (дефиниендум) вводится как тождественный термину Y (дефиниенсу). В естественных языках смысл оператора дефиниции передается выражением «Символ X вводится как *тождественный* (или является тождественным) *по смыслу* символу Y». Примерами синтаксических определений могут служить следующие обозначения:

$$x^3 = x \cdot x \cdot x;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n;$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max(x_i - x_{i-1}) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

В свою очередь, определяющее может быть определено с помощью другого синтаксического либо семантического определения. Таким образом, определениям присуща известная степень транзитивности. В конечном итоге, как в естественных, так и в формальных языках роль *первоопределений*, или *протоопределений*, играют семантические определения.

Синтаксические определения предполагают наличие той или иной формальной системы или формального языка, устанавливающих конкретные требования к структуре синтаксически правильных выражений.

2.7. Формальные языки

Языком называется система символов, предназначенная для отображения (описания, представления, репрезентации) некоторой конкретной системы эмпирических или абстрактных объектов. В зависимости от степени своей системности и уровня организации, языки подразделяются на *естественные* и *формальные*. Недостатками естественных (этнических) языков считаются их *избыточность* и *неоднозначность* или многозначность смысла – полисемия.

Формальные языки отличаются от естественных более высоким уровнем системности, строгими и однозначными правилами построения языковых конструкций. Формальные языки разрабатываются с целью *непротиворечивого, точного* и *компактного* описания объектов, свойств и отношений конкретной предметной области. Наиболее известными формальными языками являются языки программирования – специализированные языки для представления программ для ЭВМ, включающие средства описания данных и алгоритмов их преобразования.

Примером простого формального языка является *нотация* (способ записи) *Бэкуса – Наура*, используемая для описания синтаксиса алгоритмических языков. Основной элемент этого языка – метаформула, имеющая вид:

<определяемое> ::= <определяющее>.

Фразы, заключаемые в угловые скобки, являются метасимволами, вместо которых могут подставляться другие релевантные символы. Составной символ «::=» читается как «по определению есть». Вместо этого символа мог бы использоваться символ равенства «=», но он не используется по той причине, что может входить в определяющее. Примером выражения в нотации Бэкуса – Наура может служить определение оператора присваивания:

<оператор присваивания> ::= <переменная> <=> <выражение>.

Данное выражение интерпретируется следующим образом: «оператор присваивания по определению есть знак равенства, слева от которого стоит переменная, а справа – выражение».

Для разделения элементов в определяющем при их перечислении используется вертикальная черта. Например,

<простое выражение> ::= <константа> | <переменная>,

что следует понимать как «простое выражение по определению есть константа или переменная».

Необязательные элементы в определяющем, то есть элементы, которые могут отсутствовать, заключаются в квадратные скобки [ ]. Например, определение выражения можно представить как:

<выражение> :: = < простое выражение> [*<знак операции> < простое выражение>*].

В соответствии с данным определением, например, x, y, $x + y$ и $x + 1$ являются выражениями, а $x + y + 1$ таковым не является.

Для определения некоторых конструкций в определяющем может использоваться рекурсия. Например, можно было дать другое определение выражения:

<выражение> ::= <простое выражение> | <выражение> <знак операции> <простое выражение>.

В этом определении *<выражение>* присутствует слева и справа от символа «::=», но определение является вполне корректным. Согласно этому определению, x, $x + y$ или $x + y + 1$ и более сложные арифметические выражения, не содержащие скобок, также будут арифметическими выражениями.

Нотация Бэкуса – Наура применима для описания довольно узкого класса объектов и не может содержать каких-либо сведений о смысле выражений, но далее она иногда будет применяться нами при описании структур данных.

Достаточно богатые по своим выразительным возможностям языки содержат два *уровня символической репрезентации объектов*: объектный уровень и метауровень. *Объектный уровень* предназначен для описания *внеязыковых* объектов. *Метауровень* предназначен для описания символов самого языка и языковых конструкций. Языки, содержащие средства символической репрезентации как на объектном уровне, так и на метауровне, определяются как *семантически замкнутые языки*. Языки, содержащие средства символической репрезентации только на объектном уровне, называют *семантически незамкнутыми*. Объектный уровень и метауровень называют также соответственно *объектным языком* и *метаязыком*.

Как правило, символы используются в составе некоторого множества символов или системы символов, в совокупности образующих *алфавит*. По своей роли символы подразделяются на *основные* (*терминальные*) и *вспомогательные*. *Константой* называют символ, всегда указывающий на одно и то же значение. *Переменной* называют символ, вместо которого допускается подстановка некоторых других символов определенного вида. Переменные различаются своим типом. *Тип переменной* определяется совокупностью допустимых значений переменной и совокупностью допустимых операций над значениями переменной. *Метапеременной* называют переменную, вместо которой допускается подстановка других переменных. В логике высказываний и логике предикатов пропозициональные метапеременные принято обозначать прописными буквами греческого алфавита.

Формулой называют переменную, построенную из других переменных и *операторов* – символов тех или иных операций над переменными. Если в качестве элементов формулы используются метапеременные, то ее принято называть *метаформулой*.

Наиболее общим понятием является *метасимвол* – термин (символ), обозначающий некоторый символ. Таким образом, вместо каждого метасимвола возможна подстановка других символов вполне определенного вида. Использование метасимволов требуется в тех случаях, когда предметом рассмотрения являются не денотаты символов, а сами символы. Метапеременные и метаформулы являются частными случаями метасимволов.

В общем случае метасимволы используются в ситуациях двух типов. В первом случае – для непосредственного указания на совокупность конкретных символов. Например, «Вместо Ф могут быть подставлены $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$». В других случаях назначением метасимволов является указание общей синтаксической структуры допустимых выражений. Так, например,

$\Phi \vee \Psi$ представляет не формулы вида $\varphi \vee \psi$, где φ и ψ – конкретные высказывания, а их общую синтаксическую конструкцию.

Необходимость использования метасимволов возникает при изучении или описании конкретных языков, допустимых языковых конструкций или выражений. Общие принципы построения формальных языков изучаются *математической лингвистикой.*

2.8. Логика высказываний

Логика высказываний является разделом логики, в котором изучаются функционально-истинностные взаимосвязи между высказываниями. Как научная теория, логика высказываний имеет два аспекта: семантический и синтаксический. В семантическом аспекте логика высказываний предстает как *содержательная теория* отношений между суждениями – денотатами высказываний. В синтаксическом аспекте логика представляет собой определенное логическое исчисление – *исчисление высказываний* – формальный аппарат, предназначенный для представления отношений между высказываниями. Близким к исчислению высказываний является понятие *алгебры высказываний*, или *алгебры логики* – раздела математической логики, изучающего логические операции над высказываниями на основе алгебраических методов.

Высказывания в алгебре логики рассматриваются только в их истинностном аспекте. Внутренняя структура высказываний не изучается, в центре ее внимания находятся свойства особого вида операций – логических операций.

Абстрактное содержание различных суждений в логике высказываний представляется вполне однозначным и однообразным образом. Предметом изучения при этом является не содержание конкретных высказываний, а их логическая структура, представленная в виде определенных аналитических выражений – пропозициональных формул.

2.8.1. Суждения

В процессе мышления человек формирует те или иные *суждения* – структурно сложные абстрактные объекты, отражающие объективную связь между объектами и их свойствами. С грамматической точки зрения суждения являются повествовательными предложениями естественного языка, в которых что-либо утверждается о свойствах тех или иных объектов. Структурно каждое суждение подразделяется на следующие элементы:

1) *субъект* – понятие о том объекте, о котором говорится в предложении;

2) *предикат* – свойство, характеризующее данный объект (или свойство, *предицируемое* объекту);

3) *отношение предикации* – отношение между объектом и присущим ему свойством.

Различие между свойством и отношением проявляется в том, что в отличие от свойств, между объектом и отношением не может быть отношения предикации. Данное свойство отношений позволяет четко разграничить свойства и отношения. Так, бессмысленно говорить о том, что денотаты «больше», «находиться между», «быть святее» и т. п. предицируемы тем или иным объектам. Однако, денотаты выражений «больше 1 000», «между Калининградом и Владивостоком» или «святее папы римского» являются уже не отношениями, а конкретными свойствами, которые вполне корректно могут быть предицированы тем или иным объектам.

Конкретные утверждения о свойствах объектов могут быть либо истинными, либо ложными. Понятие *истины* при этом трактуется как соответствие между содержанием утверждений и реальной действительностью, фактическим состоянием предметной области. Если содержание суждения соответствует реальности, то его называют *истинным*, в противном случае суждение называют *ложным*.

Выше отмечалось, что множество может быть задано указанием его характеристического свойства – свойства, которым обладают все элементы множества. Описательный способ задания множеств устанавливает связь между теорией множеств и логикой высказываний. Всю совокупность объектов некоторой предметной области можно рассматривать как универсальное множество U. Разные объекты этой совокупности обладают различными свойствами и в соответствии с этим могут образовывать различные разбиения множества U на подмножества.

Высказываемые при этом суждения о тех или иных свойствах объектов будут истинными для одних объектов, принадлежащих U, и ложными – для других. Подмножество X элементов множества U, обладающих некоторым фиксированным свойством P, называется *множеством истинности* для данного свойства. Следовательно, всякое суждение относительно любого свойства некоторого объекта есть суждение о принадлежности объекта к тому или иному подмножеству или множеству. Таким образом, определение истинности или ложности любого суждения может быть сведено к изучению *отношения принадлежности* к соответствующему множеству. Отношение принадлежности множеству является самым общим видом отношений.

Допустим, что универсальное множество U представляет собой множество городов Российской Федерации. Каждый город может характеризоваться определенным набором свойств. В соответствии со значениями этих свойств множество городов может быть разбито на подмножества. Пусть города, являющиеся административными центрами субъектов федерации, образуют множество X; города с числом жителей более 1 000 000 человек – множество Y, а города, расположенные за Полярным кругом, – множество Z (рис. 2.6).

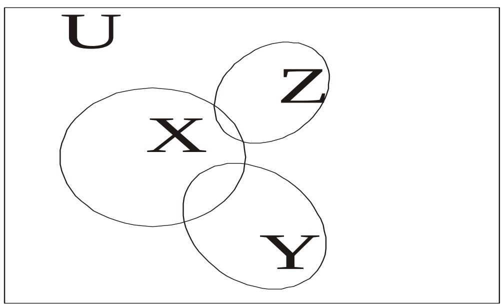


Рис. 2.6. Множество городов

И пусть x – некоторый город $x \in U$. Мы можем делать те или иные утверждения о свойствах города x. Например, «x является административным центром». Если $x \in X$, то данное высказывание истинно, в противном случае оно ложно. Или «число жителей города x более миллиона». Это высказывание истинно, если и только если $x \in Y$.

Относительно свойств города x можно выносить более сложные суждения. Так, можно утверждать, что «x – город с числом жителей более 1 000 000 и x является административным центром». Областью истинности такого высказывания будет множество V, являющееся пересечением множеств X и Y: $V = X \bigcap Y$.

Можно также утверждать «x – миллионный город и x находится за Полярным кругом». Множество истинности данного высказывания является пустым, поскольку в России севернее Полярного круга нет ни одного города с таким населением: $Y \bigcap Z = \varnothing$, что и отражает рис. 2.6.

Такая трактовка суждений согласуется с атрибутивным толкованием множеств. Пустое множество в этом случае означает пустое множество истинности некоторого высказывания. Если множество истинности суждения является пустым, то такое суждение называется *тождественно ложным*. Последнее утверждение о городе x является примером тождественно ложного суждения. Если множество истинности суждения совпадает с универсальным множеством, то такое суждение называют *тождественно истинным*. Тождественно истинными суждениями являются, например, такие утверждения, как «Город x имеет органы местного самоуправления» или «Город x имеет юридические границы».

2.8.2. Высказывания

Высказыванием называют *пропозициональный терм* – символ, предназначенный для обозначения некоторого суждения. Определение «*пропозициональный*» используется для указания на термины, имеющие отношение к высказываниям, например, пропозициональный терм, пропозициональная связка или пропозициональная функция. Наряду с термином «высказывание», в логике используют понятие *пропозициональной буквы*, или *пропозициональной переменной* – символа, обозначающего произвольное высказывание, и близкое к нему по смыслу понятие *пропозиции*, которым обозначается соответствующее суждение или его смысловое содержание.

В классической логике высказывания отождествляются с некоторыми утверждениями, суждениями, которые могут быть либо истинными, либо ложными. Высказывание можно также определить как истинное, если истинно обозначаемое им суждение, и как ложное – в противном случае.

Высказывания принято подразделять прежде всего на аналитические и синтетические. Истинность или ложность *синтетических высказываний* может быть установлена только эмпирическим путем. Так, высказывание «Река Амур является судоходной» является синтетическим, поскольку его истинность может быть установлена только эмпирически. Синтетические высказывания не являются предметом изучения в логике.

Для доказательства истинности или ложности *аналитических высказываний* требуется выполнить определенный анализ их структуры. Например, аналитическим является высказывание «Сумма углов треугольника ABC равна 180°». В геометрии доказывается, что сумма углов *любого* плоского треугольника равна 180°. Если треугольник ABC является плоским, то очевидно, что сумма его углов также равна 180°.

В современной логике принято считать, что истинное высказывание обозначает целостное суждение, тогда как ложное высказывание является лишь правильно построенным выражением, пропозициональным термом, не имеющим какого-либо суждения в качестве своего денотата.

Логика высказываний полностью абстрагируется от содержания конкретных высказываний и изучает не конкретные высказывания, а структуру высказываний. По своей структуре высказывания подразделяются на простые и составные. *Простые высказывания* – высказывания, с точки зрения логики высказываний представляющие целостные, не расчленяемые объекты, о которых известно только значение их истинности, только то, что они являются либо истинными, либо ложными. Иногда простые высказывания называют также *атомарными*. При этом изучение простых высказываний, доказательство их истинности или ложности не является предметом логики высказываний. Доказательством истинностных значений конкретных простых высказываний занимаются соответствующие науки. Так, определение истинности хрестоматийного высказывания «Волга впадает в Каспийское море» является задачей географии, а доказательство истинности высказывания «Земля имеет форму эллипсоида» является проблемой высшей геодезии.

Любые высказывания иногда обозначаются прописными первыми буквами латинского алфавита. Далее таким образом будут обозначаться конкретные высказывания, а произвольные высказывания – строчными последними буквами латинского алфавита, возможно, с индексами (что является другим распространенным способом), например, x, y_1, z_j и т. п.

Каждому высказыванию в зависимости от его истинности приписывается либо значение «*истина*», либо значение «*ложь*». При этом под истиной понимается объективная реальность, адекватно отраженная в мышлении. Значения «истина» и «ложь» иногда обозначаются соответственно как «*И*», «*T*» (от англ. *Truth* – истина) и как «*Л*», «*F*» (от англ. *False* – ложь). Но чаще всего истинному высказыванию ставится в соответствие символ 1, а ложному – символ 0. Далее будут использоваться именно эти обозначения. Значения 1 и 0, обозначающие истинностные значения высказываний, называют *истинностными значениями*, а множество {1, 0} называют *множеством истинностных значений*.

Простые высказывания соответствуют простым суждениям. Но суждения могут быть сложными, состоять из нескольких простых суждений, соединенных союзами «и», «или», «если, то» и т. п. Составным суждениям ставятся в соответствие *составные высказывания* – высказывания, состоящие из нескольких простых высказываний, каждое из которых может быть либо простым, либо сколь угодно сложным, объединенным в одно высказывание с помощью логических операторов. Задачей логики высказываний является определение истинности составных высказываний на основе значений истинности входящих в них простых высказываний и свойств используемых логических операторов.

Если имеется несколько простых высказываний x_1, …, x_n, каждое из которых может быть либо истинным, либо ложным, то их совокупность можно рассматривать как кортеж (x_1, …, x_n). Осуществляя над этими высказывания некоторые логические операции, можно получать новые высказывания, которые также будут истинными или ложными в зависимости от соответствующих множеств истинности. Истинность или ложность каждого составного высказывания будет зависеть как от истинности исходных высказываний, так и от структуры получаемого нового высказывания.

Таким образом, каждую логическую операцию можно рассматривать как определенное отображение φ множества значений кортежа $(x_1,...,x_n)$ на множество истинностных значений $\{1, 0\}$:

$$\varphi : (x_1, ..., x_n) \to \{1, 0\}. \quad (2.4.1)$$

Если это отображение однозначно, то его называют *логической функцией* или *булевой функцией* и обозначают как

$$\varphi(x_1, ..., x_n). \quad (2.4.2)$$

Для обозначения различных логических функций далее будут использоваться строчные буквы греческого алфавита φ, ψ, ϕ...

Исчисление высказываний основано на простой и вместе с тем важной концепции – *отождествлении* высказываний с их истинностными значениями. Несколько утрируя, можно утверждать, что в логике высказываний каждое высказывание – это его истинностное значение и не более того. При этом предметом изучения в исчислении высказываний являются свойства логических операций, каждая из которых определяется значениями исходных высказываний.

2.8.3. Логические операторы

Существует три способа описания логических функций:

- *табличный* – с помощью так называемых истинностных таблиц;
- *аналитический* – посредством формул;
- *графический* – с применением логических схем. *Логические схемы* представляют собой условные графические обозначения логических операций, применяемые обычно при описании схем электронных устройств; ниже они использоваться не будут.

Истинностной таблицей называют таблицу, устанавливающую связь между истинностным значением составного логического высказывания в целом и значениями истинности входящих в него простых высказываний. Обычно в левой части таких таблиц перечисляются все возможные комбинации истинностных значений исходных высказываний, а в правой части для каждой такой комбинации указывается соответствующее значение истинности самой функции.

Логическим оператором, или *пропозициональной связкой*, называют термин, обозначающий некоторое логическое отношение или логическую операцию. Таким образом, каждый логический оператор есть символ, денотатом которого является абстрактный объект – определенное логическое отношение. В логике высказываний основными логическими операторами (пропозициональными связками) являются операторы отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквивалентности, логического следования и дедуктивной выводимости, обозначающие соответствующие одноименные операции. С помощью логических операторов осуществляется преобразование одних (исходных) высказываний в другие высказывания. Значение истинности получаемых при этом высказываний зависит от истинности исходных высказываний и свойств конкретных логических операторов и определяется с помощью истинностных таблиц, аксиом или схем аксиом.

Отрицание – логический оператор, называемый также *оператором логического отрицания*, преобразующий исходное высказывание в высказывание с противоположным истинностным значением, то есть такое высказывание, что если первое высказывание истинно, то второе ложно, и наоборот, если первое высказывание ложно, то второе истинно. Для обозначения оператора логического отрицания иногда используется префиксный символ $\neg$ (например, $\neg A$), иногда – черта сверху: $\overline{A}$. Ниже будет использоваться последний способ.

Отрицанием A, или *дополнением* A, называют также высказывание, построенное из любого другого высказывания и оператора логического отрицания, то есть, если A – некоторое высказывание, то $\overline{A}$ (читается как «не-A», «неверно, что A», «A не имеет места») – отрицание высказывания A. Например, если A обозначает высказывание «Солнце вращается вокруг Земли», то $\overline{A}$ означает противоположное высказывание «Неверно, что Солнце вращается вокруг Земли». Значения истинности высказываний-отрицаний определяются табл. истинности 2.1.

Таблица 2.1. Отрицание

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

Произвольное высказывание и его отрицание связаны отношением контрадикторности. *Контрадикторностью* называется отношение между двумя высказываниями A и B такое, что если A истинно, то B ложно, а если A ложно, то B истинно. Отсюда следует, что два контрадикторных высказывания не могут быть одновременно истинными или одновременно ложными. Контрадикторными высказываниями являются, например, «Москва является столицей России» и «Москва не является столицей России». Соотношение между объемами двух понятий, соответствующих контрадикторным высказываниям, представлено на рис. 2.7, на котором X обозначает объем некоторого понятия, а *не*-X – объем соответствующего контрадикторного понятия.

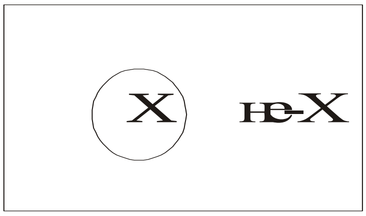


Рис. 2.7. Контрадикторные понятия

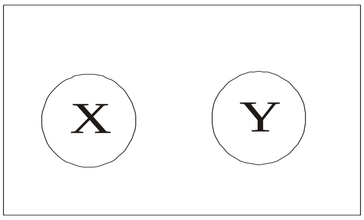


Рис. 2.8. Контрарные понятия

Контрадикторные высказывания следует отличать от контрарных высказываний. *Контрарностью* называют отношение между двумя высказываниями *A* и *B* такое, что если *A* истинно, то *B* ложно, а если *B* истинно, то *A* ложно. Следовательно, два контрарных высказывания не могут быть одновременно истинными, но могут быть одновременно ложными. Примером контрарных высказываний могут служить два таких высказывания, как «Яблоко зеленое» и «Яблоко красное». Истинным может быть только одно из этих высказываний. Но ложными могут быть оба высказывания, поскольку яблоко может оказаться желтым. Соотношение между объемами двух контрарных высказываний представлено на рис. 2.8, где *X* и *Y* соответствуют объемам двух контрарных понятий.

Иногда различают отрицание внешнее и отрицание внутреннее. Под внешним отрицанием высказывания *A* понимают отрицание всего высказывания *A* в целом. Так, внешним отрицанием высказывания «Формализация картографии возможна» будет высказывание «Неверно, что формализация картографии возможна». Внутреннее отрицание заключается в отрицании свойства, указанного в исходном высказывании. Внутренним отрицанием будет высказывание «Формализация картографии является невозможной» или «Формализация картографии не является возможной».

В классической логике высказываний внешнее и внутреннее отрицания считаются эквивалентными. В случае простых по своей структуре высказываний такое понимание внутренних и внешних отрицаний интуитивно очевидно. Но высказывания типа «Все картографы знают логику» допускают такие отрицания как «Неверно, что все картографы знают логику» или «Не все картографы знают логику» и «Все картографы не знают логику». Трактовка отрицаний для высказываний подобного типа будет рассматриваться далее в разделе, посвященном логике предикатов.

Двойным отрицанием называют отрицание высказывания, которое уже является отрицанием. Примером двойного отрицания может служить высказывание «Не верно, что Земля не является круглой». Двойное отрицание обозначается двойной чертой сверху: $\overline{\overline{x}}$, где x – произвольное высказывание. В классической логике высказываний считается, что высказывание, являющееся двойным отрицанием, обозначает исходное высказывание или эквивалентно исходному высказыванию: $\overline{\overline{x}} = x$.

Дизъюнкция, или *логическое сложение*, – это логический оператор, называемый также *оператором дизъюнкции*, преобразующий два заданных высказывания *A* и *B* в третье высказывание, истинное, если истинно хотя бы одно из исходных высказываний, и ложное, если ложны оба высказывания одновременно. Для обозначения оператора дизъюнкции обычно используется символ $\vee$. Считается, что в естественных языках некоторым, но не полным аналогом оператора дизъюнкции служит союз «или». Свойства оператора дизъюнкции могут быть определены с помощью истинностной табл. 2.2.

Таблица 2.2. Дизъюнкция

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Дизъюнкцией, или *дизъюнктивным высказыванием*, называют также высказывание, построенное из других высказываний с помощью оператора дизъюнкции. Если высказывание «Земля имеет форму шара» обозначить как A, а высказывание «Земля плоская» – как B, то дизъюнктивное высказывание «Земля имеет форму шара или Земля плоская» формально можно представить как $A \vee B$, где A и B называются *дизъюнктивными членами*.

Если областью истинности высказывания x является множество X, а областью истинности высказывания y – множество Y, то областью истинности высказывания $x \vee y$ будет множество $X \bigcup Y$.

Из определения дизъюнкции следуют соотношения $x \vee 0 = x$; $x \vee 1 = 1$, где x – произвольное высказывание. Их справедливость может быть установлена по истинностной таблице операции дизъюнкции. Таким образом, если образовать дизъюнктивное высказывание из любого высказывания и константы 0, то дизъюнктивное высказывание будет иметь то же значение, что и исходное высказывание. Действительно, если высказывание x было ложным, то дизъюнкция $x \vee 0$ также будет ложной, а если высказывание x было истинным, то и дизъюнктивное высказывание будет истинным.

Верно и обратное: если имеется дизъюнктивное высказывание, представляющее собой дизъюнкцию некоторого высказывания и константы 0, то истинностное значение простого высказывания будет совпадать с истинностным значением дизъюнктивного. Следовательно, простое высказывание может рассматриваться как эквивалент дизъюнктивного высказывания $x \vee 0$.

Равенства $x \vee 0 = x$ и $x \vee 1 = 1$ дают возможность упрощать некоторые формулы алгебры логики.

Конъюнкция или логическое умножение – логический оператор, преобразующий два исходных высказывания A и B в третье высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба исходных высказывания одновременно, и ложное, если ложно хотя бы одно из них. Участвующие в операции конъюнкции высказывания A и B называются *конъюнктивными членами*. Для обозначения оператора конъюнкции используется символ $\wedge$ (иногда «&» или «·»). Свойства оператора конъюнкции устанавливаются истинностной табл. 2.3. Операция конъюнкции, как следует из табл. 2.3, сходна по своим свойствам с операцией умножения целых чисел.

Если областью истинности высказывания x является множество X, а областью истинности высказывания y – множество Y, то областью истинности высказывания $x \wedge y$ будет множество $X \cap Y$.

С помощью табл. 2.3 можно установить справедливость соотношений $x \wedge 0 = 0$ и $x \wedge 1 = x$, где x – любое высказывание. Таким образом, если образовать конъюнктивное высказывание из любого простого высказывания и константы 1, то конъюнктивное высказывание будет иметь то же значение, что и простое высказывание. Действительно, если высказывание x было ложным, то конъюнкция $x \wedge 1$ также будет ложной, а если высказывание x было истинным, то и конъюнктивное высказывание будет истинным.

Таблица 2.3. Конъюнкция

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Обратное также верно: если имеется конъюнктивное высказывание, представляющее собой конъюнкцию некоторого высказывания и константы 1, то истинностное значение простого высказывания будет совпадать с истинностным значением конъюнктивного, и простое высказывание может рассматриваться как эквивалент конъюнктивного высказывания $x \wedge 1$.

Равенства $x \wedge 1 = x$ и $x \wedge 0 = 0$ дают возможность приводить некоторые сложные формулы алгебры логики к более простому виду.

В естественном языке примерный смысл символа $\wedge$ передается с помощью союза «и», являющегося лишь некоторым аналогом термина «конъюнкция». Если высказывания «Земля имеет форму шара» и «Земля плоская» обозначить соответственно как A и B, то конъюнкцией этих высказываний будет $A \wedge B$ («Земля имеет форму шара и Земля плоская»).

Проблема определения истинности исходных (элементарных) высказываний находится вне логики высказываний. С геометрической точки зрения, одно из исходных высказываний в нашем примере (A или B) является ложным. Какое именно из них является ложным, зависит от проблемной ситуации, решаемых задач. При картографировании или информационном моделировании небольших участков земной поверхности можно не учитывать кривизну земной поверхности и считать, что ложным является высказывание A. Но если задачей является моделирование и построение картографических изображений больших участков земной поверхности, когда нельзя не учитывать ее кривизну, то можно считать ложным высказывание B (Земля плоская).

Поскольку одно из высказываний в данном примере является ложным, то ложным является и высказывание, являющееся их конъюнкцией. Данный вывод очевиден с содержательной точки зрения: Земля не может быть круглой и плоской одновременно. Но этот вывод можно получить и чисто формально, без обращения к смыслу исходных высказываний, только на основании ложности одного из них.

Исключающая дизъюнкция – это логический оператор, называемый также *оператором исключающей дизъюнкции*, преобразующий два заданных высказывания A и B в третье высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинно только одно из высказываний A или B, и ложное в остальных случаях. Для обозначения оператора исключающей дизъюнкции обычно используется символ $|$. В естественных языках аналогом оператора исключающей дизъюнкции служит союз «или…, или». Свойства оператора исключающей дизъюнкции задаются истинностной табл. 2.4.

Сложение целых чисел, принадлежащих множеству $\{0, 1\}$, в отличие от умножения, выводит за пределы этого множества. Но иногда вводится операция $\oplus$ *сложения по модулю 2*, результат выполнения которой совпадает с истинностной табл. 2.4: $0 \oplus 0 = 0$, $0 \oplus 1 = 1$, $1 \oplus 0 = 1$, $1 \oplus 1 = 0$. По этой причине операцию исключающей дизъюнкции иногда называют также сложением по модулю 2.

Исключающей дизъюнкцией называют также высказывание, построенное из других высказываний с помощью оператора исключающей дизъюнкции. Если в качестве примера использовать те же высказывания A и B, то составное высказывание «Или Земля имеет форму шара, или Земля плоская», полученное в результате применения оператора исключающей дизъюнкции к исходным высказываниям, можно представить как A|B.

Таблица 2.4. Исключающая дизъюнкция

A	B	$A \mid B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Различие между дизъюнкцией и исключающей дизъюнкцией в том, что первая истинна, если истинно хотя бы одно из высказываний A и B, а вторая истинна, если истинно только одно из исходных высказываний. Таким образом, исключающая дизъюнкция отличается большей категоричностью.

Импликацией, или *логическим оператором импликации*, называют символ, преобразующий два высказывания A и B в некоторое третье высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно, и истинно во всех остальных случаях (то есть когда A ложно, а B истинно; когда A и B оба истинны; когда A и B оба ложны). Для обозначения оператора импликации используется символ $\rightarrow$. Свойства оператора импликации задаются истинностной табл. 2.5.

Таблица 2.5. Импликация

A	B	A→B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Импликацией, или *импликативным высказыванием,* называют также составное высказывание, полученное из двух других высказываний с помощью оператора импликации. В естественных языках смысл оператора импликации примерно передается с помощью союза «если…, то» или «когда…, тогда». Пусть $A \rightarrow B$. Тогда говорят, что «Если A, то B» или «Из A следует B». Высказывание A, входящее в левую часть импликативного высказывания, называют *посылкой,* или *антецедентом*. Высказывание B в правой части импликативного высказывания при этом называют *заключением,* или *консеквентом*.

Областью истинности импликативного высказывания $x \rightarrow y$ является множество $\overline{(\overline{X} \cup Y) \cap (X \cup \overline{Y})}$, где X и Y обозначают соответственно множества истинности высказываний x и y.

В определении импликации следует обратить внимание на то, что из истинного высказывания не может следовать ложное высказывание, иначе все импликативное высказывание будет ложным. Но если антецедент импликативного высказывания является ложным высказыванием, то истинностное значение импликативного высказывания в целом оказывается не зависящим от истинности его консеквента и всегда будет истинным. Таким образом, на основании ложной посылки может быть получено как истинное, так и ложное заключение.

Эквиваленцией, эквивалентностью, равнозначностью, или *логическим оператором эквивалентности,* называют символ, преобразующий два высказывания A и B в третье высказывание, истинное тогда и только тогда, когда исходные высказывания A и B имеют одно и то же истинностное значение. Для обозначения логического оператора эквивалентности используется символ ≡. Выражение $A \equiv B$ читается как «A эквивалентно B» или как «A тогда и только тогда, когда B». Свойства оператора эквивалентности определяются в соответствии с истинностной табл. 2.6.

Эквивалентностью, или *эквивалентным высказыванием,* называют также высказывание, полученное из других высказываний с помощью оператора эквивалентности.

Таблица 2.6. Эквивалентность

A	B	A ≡ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Сравнение истинностных таблиц операций эквивалентности и исключающей дизъюнкции показывает, что эти операции являются противоположными в том смысле, что истинностное значение эквивалентного высказывания, полученного из двух простых высказываний, противоположно истинностному значению высказывания, образованного из тех же двух высказываний с помощью исключающей дизъюнкции, а именно, если эквивалентное выказывание истинно, то высказывание исключающей дизъюнкции – ложно, и наоборот. Таким образом, эквивалентность может рассматриваться как отрицание исключающей дизъюнкции, а последняя – как отрицание эквивалентности.

Все перечисленные, а также другие логические операторы являются *терминами* как логических операций, так и соответствующих логических отношений между высказываниями.

2.8.4. Формулы алгебры логики

Формулой алгебры логики, или *пропозициональной формой*, называют всякое сложное высказывание, полученное из некоторого числа исходных высказываний с помощью логических операций. Формулы для описания логических функций представляют собой конечные символьные конструкции или *выражения*, в которых множество операндов, действия над ними и порядок выполнения действий указываются в явном виде. Произвольные формулы далее будут обозначаться строчными буквами греческого алфавита.

Приведенное определение пропозициональной формы по своей сути является семантическим. Более строгим является следующее синтаксическое определение, содержащее рекурсию:

1) все пропозициональные буквы являются пропозициональными формами, то есть $\varphi = Df.x$;

2) если φ и ψ – пропозициональные формы, то $\overline{\varphi}$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ и $(\varphi \equiv \psi)$ также пропозициональные формы;

3) никакие другие выражения не являются пропозициональными формами.

Формулы алгебры логики содержат пропозициональные буквы, пропозициональные связки (знаки логических операций) и технические символы. В сложных выражениях с несколькими аргументами и различными операциями устанавливается определенный порядок их выполнения, или *старшинство* логических операций. В порядке убывания старшинство логических операций определяется следующим образом:

1) операция отрицания;
2) операция конъюнкции;
3) операция дизъюнкции;
4) операция импликации.

Говорят также, что разные операции обладают различным *приоритетом*, и в первую очередь выполняются операции с более высоким приоритетом. Несколько операций с одинаковым приоритетом принято выполнять обычно слева направо, хотя в некоторых случаях следующие непосредственно друг за другом двуместные операции с одним приоритетом (дизъюнкция и конъюнкция) могут выполняться в любой очередности, что будет показано дальше.

Техническими символами являются пара круглых скобок и запятая. Круглые скобки используются для явного указания или изменения порядка выполнения операций. Операции внутри скобок выполняются в первую очередь. В случае вложенных скобок в первую очередь выполняются операции в самых внутренних скобках. Скобки могут использоваться также для придания большей наглядности сложным выражениям. С этой же целью иногда используются квадратные и фигурные скобки.

2.8.5. Логические функции

Составное высказывание (пропозициональная форма) может содержать несколько исходных высказываний. Каждое исходное высказывание может рассматриваться как некоторая переменная, способная принимать два истинностных значения. Истинностное значение составного высказывания зависит от значений этих переменных и свойств используемых логических операций, поэтому составное высказывание можно понимать как некоторую *логическую функцию* от этих переменных – *аргументов* функции.

Логической функцией, *пропозициональной функцией*, *истинностной функцией*, или *функцией алгебры логики*, называют всякую функцию от n истинностных аргументов, принимающую истинностные значения. Логические функции называют также *булевыми функциями* в честь английского математика и логика Дж. Буля, впервые применившего алгебраические методы для решения логических задач. Таким образом, каждая логическая функция есть определенное отображение множества истинностных значений на множество истинностных значений

$$\varphi : \{x_1, ..., x_n\} \to \{1, 0\}. \qquad (2.5)$$

Логические функции от n аргументов будем обозначать малыми буквами греческого алфавита: $\varphi(x_1, ..., x_n)$, $\psi(x, y, z)$ и т. д. Пусть некоторая формула содержит набор переменных $(x_1, ..., x_n)$. Если в данной формуле всем переменным присвоить их истинностные значения и выполнить указанные в формуле логические операции согласно их истинностным таблицам, то полученное значение будет значением некоторой функции φ на наборе переменных $(x_1, ..., x_n)$. Говорят, что данная формула *реализует* функцию $\varphi(x_1, ..., x_n)$.

Если число аргументов логической функции равно n, то число всех возможных комбинаций их значений будет равно 2^n. В частности, для логической функции от двух аргументов такими сочетаниями являются (0, 0), (0, 1), (1, 0) и (1, 1). Как было показано выше, комбинациям значений аргументов могут быть поставлены в соответствие разные сочетания истинностных значений, представляющих различные логические операции: дизъюнкции, конъюнкции, отрицания и т. д.

Логическая функция может принимать также два истинностных значения, поэтому число всех комбинаций значений функций для 2^n комбинаций значений аргументов будет составлять $N = 2^{2^n}$. Так, для функции одной переменной $\varphi(x)$, то есть при n = 1, число всех логических функций N = 4.

Этими функциями являются истинностные константы 0 и 1, функция $\varphi(x) = x$ и ее логическое отрицание $\psi(x) = \overline{x}$.

Число N всех возможных логических функций от двух истинностных аргументов составляет 16. Таким функциям будут соответствовать все возможные комбинации истинностных значений от (0, 0, 0, 0) до (1, 1, 1, 1) включительно. Каждый такой набор есть некоторая фиксированная логическая функция. Перечень всех возможных логических функций от двух переменных, их названий и обозначений приводится в табл. 2.7. Каждая из этих логических функций может рассматриваться как конкретная *логическая операция*. Некоторые из них (отрицание, дизъюнкция, исключающая дизъюнкция, конъюнкция, импликация и эквивалентность) рассматривались выше.

Перечисленные в табл. 2.7 логические операции не являются независимыми: любые из этих операций могут быть представлены с помощью других операций. Набор логических операций, позволяющий выразить с его помощью любую логическую функцию, называется *полным набором.* Говорят также, что система логических функций $\varPhi$ является *функционально полной*, если любая функция алгебры логики может быть реализована формулой, содержащей только символы функций из $\varPhi$.

Таблица 2.7. Функции логики высказываний

Аргументы					
Обозначение	Значение				Наименование
x	0	0	1	1	первый операнд
y	0	1	0	1	второй операнд
Функции					
Обозначение	Значение				Наименование
0	0	0	0	0	константа 0 (ложь)
$x \wedge y$	0	0	0	1	конъюнкция
$\overline{x \to y}$	0	0	1	0	отрицание импликации
x	0	0	1	1	x
$\overline{y \to x}$	0	1	0	0	отрицание обратной импликации
y	0	1	0	1	y
$x \mid y$	0	1	1	0	исключающая дизъюнкция
$x \vee y$	0	1	1	1	дизъюнкция
$\overline{x \vee y}$	1	0	0	0	антидизъюнкция (функция Пирса)
$x \equiv y$	1	0	0	1	эквивалентность
$\overline{y}$	1	0	1	0	отрицание y
$y \to x$	1	0	1	1	обратная импликация
$\overline{x}$	1	1	0	0	отрицание x
$x \to y$	1	1	0	1	импликация
x / y	1	1	1	0	антиконъюнкция (функция Шеффера)
1	1	1	1	1	константа 1 (истина)

Следующие наборы логических функций являются полными наборами:

1) отрицание и дизъюнкция;

2) отрицание и конъюнкция;
3) функция Шеффера;
4) функция Пирса и другие.

Функционально полные системы функций обозначаются также как $\{x \vee y, \bar{x}\}$, $\{x \wedge y, x \vee y, \bar{x}\}$ и т. п.

Таким образом, каждая пропозициональная форма задает некоторую истинностную функцию и одна и та же истинностная функция может задаваться различными пропозициональными формами. Две пропозициональные формы, задающие одну и ту же истинностную функцию, называют *равными*, *тождественными* или *равносильными*. Отношение между двумя равносильными пропозициональными формами $\varphi(x_1,..., x_n)$ и $\psi(x_1,..., x_n)$ записывается как

$\varphi(x_1, ..., x_n) = \psi(x_1, ..., x_n)$. (2.6)

С помощью отрицания и дизъюнкции операция конъюнкции может быть представлена как $(x \wedge y) = \overline{(\bar{x} \vee \bar{y})}$, что может быть установлено по таблицам истинности. В свою очередь, дизъюнкция может быть представлена с помощью отрицания и конъюнкции: $(x \vee y) = \overline{(\bar{x} \wedge \bar{y})}$.

Наиболее употребительным является набор логических функций из отрицания, дизъюнкции и конъюнкции. С его помощью, в частности, может быть представлена как операция импликации:

$(x \to y) = (\bar{x} \vee y)$,

так и операция эквивалентности:

$(x \equiv y) = ((\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y})$.

В справедливости этих равенств можно убедиться с помощью таблиц истинности для дизъюнкции и конъюнкции.

Пропозициональная форма, истинная при любых значениях ее аргументов, называется *общезначимой*, или *тавтологией*. Если рассматривать истинностные таблицы пропозициональных формул, являющихся тавтологиями, то значения во всех строках правого столбца таких таблиц будут равны 1.

Примерами тавтологий являются формулы $(x \vee \bar{x})$, что соответствует формальному выражению логического *закона исключенного третьего*, а также $(\overline{x \wedge \bar{x}})$ и $(x \equiv \bar{\bar{x}})$. Примеры истинностных таблиц для общезначимых формул содержатся в табл. 2.8.

Таблица 2.8. Тавтологии $x \vee \bar{x}$ и $x \equiv \bar{\bar{x}}$

x	$\bar{x}$	$x \vee \bar{x}$	$x \equiv \bar{\bar{x}}$
0	1	1	1
1	0	1	1

Приведенные в табл. 2.8 примеры общезначимых формул достаточно очевидны. Менее очевидна общезначимость формулы $x \to (y \to x)$ (табл. 2.9).

Пропозициональная форма, ложная при любых истинностных значениях ее аргументов, называется *противоречием*. Примерами противоречий могут служить формы $(x \wedge \bar{x})$ и $(x \equiv \bar{x})$. Истинностная таблица формулы, являющейся противоречием, содержит во всех строках правого столбца значение 0.

Таблица 2.9. Тавтология $x \to (y \to x)$

x	y	$y \to x$	$x \to (y \to x)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Функция логики высказываний φ называется *двойственной* к функции ψ, если ее истинностную таблицу можно получить из истинностной таблицы для ψ заменой истинностных значений всех аргументов и значения самой функции ψ на противоположные значения. Очевидно, что в силу симметрии и функция ψ будет двойственной по отношению к φ. Таким образом, двойственные функции удовлетворяют равенствам:

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \overline{\psi(x_1, \dots, x_n)}; \qquad (2.7.1)$$

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \overline{\varphi(x_1, \dots, x_n)}. \qquad (2.7.2)$$

Двойственными функциями являются дизъюнкция и конъюнкция. Отрицание является двойственной функцией к самой себе. Функция, совпадающая со своей двойственной функцией, называется *самодвойственной*. Самодвойственная функция на противоположных наборах значений аргументов $(x_1, \dots, x_n)$ и $(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)$ принимает противоположные значения.

Таким образом, если в формуле $\varphi(x_1,..., x_n)$ символы каждой логической функции заменить на символы двойственной функции, то получится двойственная формула, реализующая функцию $\varphi * (x_1, \dots, x_n)$, двойственную функции φ Если при этом выполнялось равенство $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \psi(x_1, \dots, x_n)$, то будет иметь место и равенство $\varphi * (x_1, \dots, x_n) = \psi * (x_1, \dots, x_n)$, называемое двойственным предыдущему. Данное свойство логических функций называют *принципом двойственности*.

2.8.6. Тождества алгебры логики

Одной из задач логики высказываний является доказательство равносильности двух различных формул, а также создание и изучение методов таких доказательств. Первый способ доказательства тождественности двух различных пропозициональных форм заключается в сравнении их истинностных таблиц. Если истинностные значения двух форм, содержащих n переменных, совпадают при любом наборе значений переменных из 2^n возможных, то такие формы равнозначны и задают одну и ту же логическую функцию.

Другой способ определения равнозначности двух пропозициональных форм состоит в определении их множеств истинности. Если множества истинности двух форм совпадают, то такие формы тождественны и описывают одну и ту же логическую функцию.

Так, в теории множеств доказана тождественность двух выражений: $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$. Левая часть данного тождества соответствует множеству истинности пропозициональной формы $(x \wedge y) \vee z$. Правая часть задает множество истинности для формы $(x \vee z) \wedge (y \vee z)$. Из совпадения множеств истинности этих двух пропозициональных форм следует равенство самих форм. Этот же результат – доказательство тождественности данных форм – можно получить и первым способом, то есть с использованием таблиц истинности.

Третий способ доказательства равносильности двух пропозициональных форм является аналитическим и заключается в выполнении преобразований формул в соответствии со свойствами логических операций (или законов логики высказываний) и определенных правил преобразований. При равнозначности двух пропозициональных форм одна из них последовательными преобразованиями может быть сведена к другой либо обе они могут быть сведены к некоторой третьей форме. Подобные преобразования выполняются на основе тождеств алгебры логики.

Перечисляемые ниже выражения (2.8.1)–(2.8.24) являются основными *тождествами алгебры высказываний*. Некоторые из них называют *свойствами логических операций*, или *законами логики высказываний*.

Соотношение

$$\bar{\bar{x}} = x \qquad (2.8.1)$$

называют *законом двойного отрицания*. В соответствии с законом двойного отрицания можно опускать отрицание отрицания. Поэтому его называют также *законом снятия двойного отрицания*.

Закон двойного отрицания часто используется в качестве доказательства от противного, которое состоит в допущении, что высказывание *x*, справедливость которого следует установить, не верно. Тогда истинным будет высказывание $\bar{x}$, которое и принимается в качестве исходного высказывания. Но если из высказывания $\bar{x}$ как следствие получено противоречие, то в силу непротиворечивости следует вывод о том, что предположение об истинности высказывания $\bar{x}$ оказалось ошибочным, то есть имеет место $\bar{\bar{x}}$ (Неверно, что не-*x*) и в действительности высказывание *x* является истинным.

Выражения

$$x \vee x = x \qquad (2.8.2)$$

и

$$x \wedge x = x \qquad (2.8.3)$$

называются *свойством идемпотентности*, а также *законом идемпотентности*.

Тождества

$$((x \vee y) \vee z) = (x \vee (y \vee z)) \qquad (2.8.4)$$

и

$$((x \wedge y) \wedge z) = (x \wedge (y \wedge z)) \qquad (2.8.5)$$

выражают *свойство ассоциативности* операций дизъюнкции и конъюнкции. Данное свойство называют также *законом ассоциативности*, или *сочетательным законом*. Свойство ассоциативности позволяет записывать без скобок формулы, содержащие только символы отрицания и дизъюнкции или только символы отрицания и конъюнкции:

$(x \vee y) \vee z = x \vee y \vee z$;

$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge y \wedge z$.

Кроме того, операторы конъюнкции в формуле, содержащей только эти операторы, иногда могут опускаться, например:

$x \wedge y \wedge z = xyz$

или

$x_1 \wedge ... \wedge x_n = x_1 ... x_n$.

Равнозначность в формулах

$$x \vee y = y \vee x \qquad (2.8.6)$$

и

$$x \wedge y = y \wedge x \qquad (2.8.7)$$

выражает *свойство коммутативности* операций дизъюнкции и конъюнкции (*закон коммутативности*, или *переместительный закон*). Члены формулы $x_1 \vee ... \vee x_n$ называют иногда *слагаемыми*, а члены формулы $x_1 \wedge ... \wedge x_n$ – *сомножителями*. Свойство коммутативности дизъюнкции и конъюнкции дает возможность расставлять слагаемые и сомножители в выражениях вида $x_1 \vee ... \vee x_n$ и $x_1 \wedge ... \wedge x_n$ в произвольном порядке.

Тождества

$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \qquad (2.8.8)$$

и

$$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z) \qquad (2.8.9)$$

являются выражением *свойства дистрибутивности* операций дизъюнкции и конъюнкции (*закон дистрибутивности*, или *распределительный закон*). Первое из этих выражений имеет арифметический аналог:

$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.

Второе выражение такого аналога не имеет:

$(a \cdot b) + c \neq (a + c) \cdot (b + c)$.

Тождества

$$(x \wedge (x \vee y)) = x \qquad (2.8.10)$$

и

$$(x \vee (x \wedge y)) = x \qquad (2.8.11)$$

называют *законами поглощения*.

Соотношения

$$\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}; \qquad (2.8.12)$$

$$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y} \qquad (2.8.13)$$

называют *законами де Моргана*. Если $\varphi(x_1, ..., x_n)$ – некоторая пропозициональная форма, содержащая только операции логического отрицания и дизъюнкции, либо отрицания и конъюнкции, то на основании законов де Моргана легко получить ее отрицание. Для этого в исходной формуле необходимо заменить все аргументы их отрицаниями, оператор дизъюнкции – оператором конъюнкции, а оператор конъюнкции – оператором дизъюнкции. Например, если дана форма

$$\varphi = (x_1 \wedge x_2) \vee (\overline{x_3} \wedge \overline{x_4}) \vee x_5,$$

то ее отрицанием будет

$$\overline{\varphi} = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \wedge (x_3 \vee x_4) \wedge \overline{x_5}.$$

Формула

$$x \wedge \overline{x} = 0 \qquad (2.8.14)$$

выражает *закон противоречия*, или *принцип непротиворечивости*: никакое высказывание и его отрицание не могут быть истинными одновременно. Принцип непротиворечивости является выражением отношения контрадикторности между двумя высказываниями x и $\overline{x}$ и означает, что каковы бы ни были высказывание x и контрадикторное ему высказывание $\overline{x}$, конъюнктивное высказывание $x \wedge \overline{x}$ всегда будет ложным.

Соотношение

$$x \vee \overline{x} = 1 \qquad (2.8.15)$$

является выражением *закона исключенного третьего*: всегда истинно либо высказывание x, либо его отрицание $\overline{x}$, никакое третье высказывание не может быть истинным. Иногда закон исключенного третьего отождествляется с *принципом двузначности*: всякое высказывание либо истинно, либо ложно. Однако закон исключенного третьего говорит о том, что из двух контрадикторных высказываний только одно высказывание истинно.

Данный закон включает в себя еще и принцип непротиворечивости, в соответствии с которым два контрадикторных высказывания не могут быть одновременно истинными. Закон исключенного третьего представляется интуитивно очевидным. Тем не менее, он подвергается критике со стороны сторонников интуиционизма, конструктивизма и других новых направлений в логике.

Формулы

$$(x \vee y) = \overline{(\overline{x} \wedge \overline{y})}; \qquad (2.8.16)$$

$$(x \vee y) = (\overline{x} \to y); \qquad (2.8.17)$$

$$(x \wedge y) = \overline{(\overline{x} \vee \overline{y})}; \qquad (2.8.18)$$

$$(x \wedge y) = \overline{(x \to \overline{y})}; \qquad (2.8.19)$$

$$(x \to y) = (\overline{x} \vee y); \qquad (2.8.20)$$

$$(x \to y) = \overline{(x \wedge \overline{y})}; \qquad (2.8.21)$$

$$(x \equiv y) = (x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}); \qquad (2.8.22)$$

$$x \vee (y \wedge \overline{y}) = x; \qquad (2.8.23)$$

$$x \wedge (y \vee \overline{y}) = x \qquad (2.8.24)$$

позволяют выражать одни операции через другие, в том числе исключать операции импликации и эквивалентности.

Приведенные тождества алгебры логики и следующие два правила позволяют из одних формул получать другие.

1. Если даны две равные $\varphi = \psi$ формулы, и некоторая третья формула ω содержит φ в качестве своей составной части, и формула ω^* получена из ω заменой φ на ψ, то $\omega^* = \omega$. Данное правило называют *правилом подстановки*.

2. Если $\varphi(x_1, ..., x_n)$ и $\psi(x_1, ..., x_n)$ – две формулы, содержащие одни и те же переменные, и $\varphi(x_1, ..., x_n) = \psi(x_1, ..., x_n)$ и φ^* получена из φ, а ψ^* – из ψ подстановкой формул $\omega_1, \ldots, \omega_n$ вместо переменных $(x_1, ..., x_n)$, то $\varphi^* = \psi^*$.

Рассмотрим следующий пример аналитических преобразований с применением основных тождеств и указанных правил. Пусть требуется выполнить преобразования формулы

$x \to y = \bar{x} \vee y$,

являющейся тождеством (2.8.20).

На основании правила 2 вместо y подставим $y \to z$ и получим равенство

$$x \to (y \to z) = \bar{x} \vee (y \to z). \qquad (2.9)$$

На основании тождества (2.8.20) и указанных правил в правой части $(y \to z)$ можно заменить на $(\bar{y} \vee z)$ и получить

$$x \to (y \to z) = \bar{x} \vee (\bar{y} \vee z).$$

Применив свойство ассоциативности дизъюнкции, равенство приведем к виду

$$x \to (y \to z) = (\bar{x} \vee \bar{y}) \vee z.$$

В соответствии с законом де Моргана (2.8.12) $(\bar{x} \vee \bar{y})$ можно заменить на $\overline{x \wedge y}$. Тогда выражение примет вид

$$x \to (y \to z) = \overline{x \wedge y} \vee z.$$

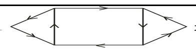
Вследствие тождества (2.8.20) его правую часть можно заменить на $(x \wedge y) \to z$. В итоге получим окончательную формулу

$$x \to (y \to z) = (x \wedge y) \to z. \qquad (2.10)$$

Подобные преобразования используются для доказательства равенства или неравенства различных формул алгебры логики. Однако алгебра логики не содержит каких-либо рекомендаций или правил относительно порядка применения этих правил, то есть *метаправил*. Выбор применяемых правил в значительной мере основывается на интуиции, навыке, а также на эвристике и догадках. В нашем распоряжении имеется и такой «мощный» метод, как перебор всех вариантов. Поэтому значительный интерес представляют такие аналитические способы задания логических функций, которые позволяли бы унифицировать определение истинности высказываний любой сложности, а также доказательство их тождественности.

Определение пропозициональной формы, отождествление высказываний с их истинностными значениями и правило 2 дают возможность обобщения тождеств (2.8.1)–(2.8.24) исчисления высказываний. Если имеется некоторая формула, в которую входят несколько пропозициональных переменных, то их элементарность уже не играет никакой роли. Мы можем рассматривать любую пропозициональную переменную как обозначение некоторой пропозициональной формы. Следовательно, в формулах (2.8.1)–(2.8.24) каждый символ пропозициональной переменной может быть заменен на символ пропозициональной формы. Результатом такой замены является сводка основных тождеств, представленная в табл. 2.10, каждая формула которой – эквивалент соответствующей формулы (2.8).

Таблица 2.10. Обобщение тождеств логики высказываний

$\overline{\overline{\varphi}} = \varphi$	(2.11.1)
$\varphi \vee \varphi = \varphi$	(2.11.2)
$\varphi \wedge \varphi = \varphi$	(2.11.3)
$((\varphi \vee \psi) \vee \phi) = (\varphi \vee (\psi \vee \phi))$	(2.11.4)
$((\varphi \wedge \psi) \wedge \phi) = (\varphi \wedge (\psi \wedge \phi))$	(2.11.5)
$\varphi \vee \psi = \psi \vee \varphi$	(2.11.6)
$\varphi \wedge \psi = \psi \wedge \varphi$	(2.11.7)
$(\varphi \vee \psi) \wedge \phi = (\varphi \wedge \phi) \vee (\psi \wedge \phi)$	(2.11.8)
$(\varphi \wedge \psi) \vee \phi = (\varphi \vee \phi) \wedge (\psi \vee \phi)$	(2.11.9)
$(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) = \varphi$	(2.11.10)
$(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) = \varphi$	(2.11.11)
$\overline{\varphi \wedge \psi} = \overline{\varphi} \vee \overline{\psi}$	(2.11.12)
$\overline{\varphi \vee \psi} = \overline{\varphi} \wedge \overline{\psi}$	(2.11.13)
$\varphi \wedge \overline{\varphi} = 0$	(2.11.14)
$\varphi \vee \overline{\varphi} = 1$	(2.11.15)
$(\varphi \vee \psi) = \overline{(\overline{\varphi} \wedge \overline{\psi})}$	(2.11.16)
 Рис. 3.29. Сильно связный орграф	(2.11.17)
$(\varphi \wedge \psi) = \overline{(\overline{\varphi} \vee \overline{\psi})}$	(2.11.18)
$(\varphi \wedge \psi) = \overline{(\varphi \to \overline{\psi})}$	(2.11.19)
$(\varphi \to \psi) = (\overline{\varphi} \vee \psi)$	(2.11.20)
$(\varphi \to \psi) = \overline{(\varphi \wedge \overline{\psi})}$	(2.11.21)
$(\varphi \equiv \psi) = (\varphi \wedge \psi) \vee (\overline{\varphi} \wedge \overline{\psi})$	(2.11.22)
$\varphi \vee (\psi \wedge \overline{\psi}) = \varphi$	(2.11.23)
$\varphi \wedge (\psi \vee \overline{\psi}) = \varphi$	(2.11.24)

2.8.7. Нормальные формы

Выше отмечалось, что любая логическая функция может быть реализована с помощью различных пропозициональных форм. Особую роль в логике высказываний играют так называемые *нормальные формы*. Для представления высказываний в виде нормальных форм вводятся такие вспомогательные обозначения как $x^0 = \overline{x}$, $x^1 = x$ и σ, равное 0 или 1.

Тогда произвольная конъюнкция

$$x_1^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n} = 1, \qquad (2.12)$$

если и только если $x_i = \sigma_i$ (i = 1, …, n). Конъюнкция (2.12) будет истинна, если и только если все ее конъюнктивные члены будут равны 1. Очевидно, что каждый конъюнктивный член $x_i^{\sigma_i} = 1$ только в тех случаях, когда $x_i = \sigma_i$:

1) из $x_i = 1$ и $\sigma_i = 1$ следует $x_i^1 = x_i = 1$;
2) из $x_i = 0$ и $\sigma_i = 0$ следует $x_i^0 = \overline{x_i} = 1$.

Если формула

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n}, \qquad (2.13)$$

где $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ – некоторый двоичный набор, содержит только символы конъюнкции, причем некоторые переменные в ней могут повторяться, то ее называют *элементарной конъюнкцией*. Всякая дизъюнкция элементарных конъюнкций называется *дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ).

Формула, содержащая только операции отрицания и дизъюнкции, истинна, если истинным является хотя бы один из ее членов, и ложна, если ложны все ее члены. Отсюда следует, что для доказательства истинности дизъюнктивной нормальной формы необходимо доказать истинность хотя бы одного ее члена. Если дизъюнктивная форма одновременно содержит некоторые переменные и их отрицания, то такая форма является тавтологией, то есть тождественно истинна.

Теорема. Любая пропозициональная форма $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, за исключением формы, являющейся противоречием, может быть представлена в виде

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\sigma_1, \ldots, \sigma_k} x_1^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge x_k^{\sigma_k} \wedge \varphi_k(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n), \qquad (2.14)$$

где символ $\bigvee_{\sigma_1, \ldots, \sigma_k}$ означает операцию дизъюнкции по всем наборам $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ и σ_i (i = 1, …, k) в каждом наборе принимает значения 0 или 1.

Для доказательства данной теоремы устанавливаем, что $x_i = \sigma_i$ (i = 1, …, k). Тогда в левой части формулы (2.14) получим $\varphi = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k, x_1, x_2, \ldots, x_n)$. В ее правой части на основании свойства (2.12) получим то же выражение. Представление любой истинностной функции в виде (2.14) называют *разложением функции по k переменным*.

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) называют дизъюнктивную нормальную форму, в которой нет равных элементарных конъюнкций и все элементарные конъюнкции содержат одни и те же переменные, причем каждую переменную или ее отрицание – только один раз. Входящие в СДНФ члены вида $\left(x_1^{\sigma_n}, \ldots, x_n^{\sigma_n}\right)$ называют ее *дизъюнктивными членами*.

Теорема. Любая пропозициональная форма $\varphi\left(x_1, \ldots, x_n\right)$, за исключением формы, являющейся противоречием, то есть тождественно равной 0, может быть представлена в виде СДНФ:

$$\varphi\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \bigvee_{\varphi\left(\sigma_1, \ldots, \sigma_n\right)=1} x_1^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n}. \qquad (2.15)$$

В правой части (2.15) дизъюнкция выполняется по всем наборам $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, для которых имеет место $\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1$. Эта теорема следует непосредственно из предыдущей теоремы. Разложив функцию $\varphi\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ по n переменным, получим

$$\varphi\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \bigvee_{\sigma_1, \ldots, \sigma_n} x_1^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n} \wedge \varphi\left(\sigma_1, \ldots, \sigma_n\right). \qquad (2.16)$$

Так как $\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ равна либо 0, либо 1, то на основании (2.14) из последнего соотношения следует соотношение (2.15), где правая часть выражения является СДНФ функции $\varphi\left(x_1, \ldots, x_n\right)$.

Таким образом, любая истинностная функция может быть реализована с помощью СДНФ (2.15), где дизъюнкция берется по тем двоичным наборам $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, на которых функция φ равна 1. Отсюда следует способ представления в виде СДНФ пропозициональных функций, заданных своими истинностными таблицами.

Пусть некоторая пропозициональная функция задана истинностной табл. 2.11. Требуется представить эту функцию в виде СДНФ.

Для получения нужной СДНФ выделим в табл. 2.11 те строки, в которых значение функции φ равно 1. Такими строками являются 2, 4, 6 и 7. Теперь строим по ним соответствующую СДНФ:

$$\varphi(x, y, z) = (x^0 \wedge y^0 \wedge z^1) \vee (x^0 \wedge y^1 \wedge z^1) \vee (x^1 \wedge y^0 \wedge z^1) \vee (x^1 \wedge y^1 \wedge z^0)$$

и

$$\varphi(x, y, z) = (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z}).$$

Таблица 2.11. Таблично заданная функция

Строка	x	y	z	φ
1	0	0	0	0
2	0	0	1	1
3	0	1	0	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	0
6	1	0	1	1
7	1	1	0	1
8	1	1	1	0

Если формула

$$\varphi = x_1^{\sigma_1} \vee ... \vee x_n^{\sigma_n}, \qquad (2.17)$$

где σ = (σ1, …, σn) – двоичный набор, содержит только символы дизъюнкции, и некоторые переменные могут быть одинаковыми, то ее называют элементарной дизъюнкцией. Всякая конъюнкция элементарных дизъюнкций называется конъюнктивной нормальной формой (КНФ).

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) называют конъюнктивную нормальную форму, в которой нет одинаковых элементарных дизъюнкций, и все элементарные дизъюнкции содержат одни и те же переменные, причем каждую переменную или ее отрицание – только один раз. Входящие в СКНФ члены вида $(x_1^{\sigma_1} \vee ... \vee x_n^{\sigma_n})$ называют конъюнктивными членами.

Теорема. Любая пропозициональная форма, кроме формы, являющейся тавтологией, может быть представлена в виде совершенной конъюнктивной нормальной формы. Для доказательства данной теоремы приведем некоторые свойства дизъюнкции и конъюнкции.

Дизъюнкция двух различных конъюнктивных членов, содержащих n аргументов, является тавтологией, если и только если один из ее членов содержит отрицание хотя бы одного аргумента, входящего в другой член, например,

$$(w \vee x \vee y) \vee (x \vee \overline{y} \vee z) = 1$$

или

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \vee (x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4) = 1.$$

Конъюнкция двух разных дизъюнктивных членов, содержащих n аргументов, является противоречием, если и только если один из ее членов содержит отрицание хотя бы одного аргумента, входящего в другой член, например,

$$(w \wedge x \wedge y) \wedge (x \wedge \overline{y} \wedge z) = 0$$

или

$$(x_1 \wedge ... \wedge x_i) \wedge (\overline{x_i} \wedge ... \wedge x_n) = 0.$$

Дизъюнкция всех 2^n попарно различных дизъюнктивных членов от n аргументов является тавтологией:

$$\underset{\sigma_1, ..., \sigma_n}{\vee} x_1^{\sigma_1} \wedge ... \wedge x_n^{\sigma_n} = 1, \qquad (2.18)$$

где символ $\underset{\sigma_1, ..., \sigma_n}{\vee}$ означает операцию дизъюнкции по всем возможным наборам σ1, …, σn и σi (i = 1, …, n) в каждом наборе принимает значения 0 или 1.

Справедливость данного утверждения может быть доказана методом математической индукции. При $n=1$ выражение (2.18) принимает вид $x_1 \vee \overline{x_1} = 1$. Его справедливость следует из тождества (2.8.15). Если соотношение справедливо при n = k, то есть

$$\underset{\sigma_1, ..., \sigma_n}{\vee} x_1^{\sigma_1} \wedge ... \wedge x_n^{\sigma_n} = 1,$$

то при n = k + 1 будет иметь место

$$\underset{\sigma_1,...,\sigma_{k+1}}{\vee} x_1^{\sigma_1} \wedge ... \wedge x_{k+1}^{\sigma_{k+1}} = ((\underset{\sigma_1,...,\sigma_k}{\vee} x_1^{\sigma_1} \wedge ... \wedge x_k^{\sigma_k}) \wedge x_{k+1}) \vee$$

$$\vee ((\underset{\sigma_1,...,\sigma_k}{\vee} x_1^{\sigma_1} \wedge ... \wedge x_k^{\sigma_k}) \wedge \overline{x_{k+1}}) = x_{k+1} \vee \overline{x_{k+1}} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Конъюнкция всех 2^n попарно различных конъюнктивных членов от n аргументов является противоречием:

$$\underset{\sigma_1, ..., \sigma_k}{\wedge} x_1^{\sigma_1} \vee ... \vee x_k^{\sigma_k} = 0, \qquad (2.19)$$

где символ $\underset{\sigma_1, ..., \sigma_k}{\wedge}$ обозначает конъюнкцию по всем наборам (σ1, …, σk).

Для доказательства этого равенства вводятся обозначения:

$$D_i = x_1^{\sigma_1} \wedge ... \wedge x_n^{\sigma_n}; \qquad (2.20)$$

$$K_j = x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee ... \vee x_n^{\overline{\sigma_n}}, \qquad (2.21)$$

где индексы i и j равны соответственно числам $\sigma_1...\sigma_n$ и $\overline{\sigma_1}...\overline{\sigma_n}$, представленным в двоичной системе счисления:

$$i = \sigma_1...\sigma_n = \sigma_1 2^{n-1} + \sigma_2 2^{n-2} + ... + \sigma_n 2^0;$$

$$j = \overline{\sigma_1}...\overline{\sigma_n} = \overline{\sigma_1} 2^{n-1} + \overline{\sigma_2} 2^{n-2} + ... + \overline{\sigma_n} 2^0.$$

Представление индексов как двоичных чисел показано в табл. 2.12.

Таблица 2.12. Представление индексов

Разряд	n	$n-1$	…	2	1
Значение i	σ_1	σ_2		σ_{n-1}	σ_n
Значение j	$\overline{\sigma_1}$	$\overline{\sigma_2}$		$\overline{\sigma_{n-1}}$	$\overline{\sigma_n}$

Два числа α и β называются двойственными, если при их представлении в двоичной системе счисления одно из них получается заменой в другом всех 0 на 1 и всех 1 на 0. Из определения индексов i и j следует, что они являются двойственными числами. Если $\sigma_i = 0$, то $\overline{\sigma_i} = 1$ и, наоборот, если $\sigma_i = 1$, то $\overline{\sigma_i} = 0$. Тогда по теореме де Моргана дизъюнктивный член D_i равен отрицанию конъюнктивного члена K_j:

$$D_i = \overline{K_j}, \qquad (2.22)$$

а конъюнктивный член K_j равен отрицанию дизъюнктивного члена D_i:

$$K_j = \overline{D_i}, \qquad (2.23)$$

причем индексы i и j являются двойственными числами по отношению друг к другу.

Применив к выражению (2.18) операцию отрицания, по теореме де Моргана получим

$$\underset{\overline{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}}{\wedge}(x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma_n}}) = 0.$$

В данном выражении операция конъюнкции выполняется по всем наборам $(\overline{\sigma_1}, \ldots, \overline{\sigma_n})$, поэтому оно совпадает с (2.19), справедливость которого и требовалось доказать.

Используя обозначение (2.22), выражение (2.18) можно представить как

$$\underset{i=0}{\overset{2^n-1}{\vee}} D_i = 1, \qquad (2.24)$$

где символом $\underset{i=0}{\overset{2^n-1}{\vee}}$ обозначена операция дизъюнкции от 0 до $2^n - 1$. Пусть некоторая функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ представлена как СДНФ:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = D_{i_0} \vee D_{i_1} \vee \ldots \vee D_{i_k}), \qquad (2.25)$$

где D_{i_l} (l = 0, 1, …, k) – дизъюнктивные члены. Так как $\overline{\varphi} \vee \varphi = 1$, то из (2.24) следует:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \underset{i \ne i_0, i_1, \ldots, i_k}{\wedge} D_i.$$

В полученном выражении дизъюнкция выполняется по всем индексам i в пределах от 0 до $2^n - 1$, не равным i_0, i_1, …, i_k, что исключает дизъюнктивные члены, входящие в (2.24). Применяя теорему де Моргана к последнему выражению, находим представление функции φ в виде совершенной конъюнктивной нормальной формы:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \overline{\overline{\varphi}} = \bigwedge_{j \neq \overline{i_0}, \overline{i_1}, \ldots, \overline{i_n}} K_j \quad , \qquad (2.26)$$

где $\overline{i_l}$ обозначает число, двойственное числу i_l (l = 0, 1, …, k); символ $\bigwedge_{j \neq \overline{i_0}, \overline{i_1}, \ldots, \overline{i_n}}$ обозначает конъюнкцию по всем j в пределах от 0 до $2^n - 1$, не равным $\overline{i_l}$ (l = 0, 1, …, k).

Следовательно, чтобы получить представление функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ в виде СКНФ, необходимо:

1) образовать дизъюнкцию дизъюнктивных членов, не входящих в СДНФ;

2) заменить аргументы их отрицаниями, символ дизъюнкции – на символ конъюнкции, а символ конъюнкции – символом дизъюнкции.

В качестве примера возьмем ту же функцию $\varphi = (x \to \overline{y}) \equiv z$. Ее истинностные значения представлены в табл. 2.11. Отметим те строки из таблицы, в которых значение функции равно 0. Такими строками являются 1, 3, 5 и 8. Значения аргументов в соответствующих строках представляют собой наборы (0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 0) и (1, 1, 1). Следовательно,

$$\overline{\varphi}(x, y, z) = D_0 \vee D_2 \vee D_4 \vee D_7 = (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge y \wedge z).$$

Применяя к полученному выражению отрицание, то есть заменяя значения аргументов на противоположные, символ дизъюнкции – на символ конъюнкции и символ конъюнкции – символом дизъюнкции, находим представление функции φ в виде СКНФ:

$$\varphi(x, y, z) = ((x \to \overline{y}) \equiv z) = (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z) \wedge (\overline{x} \vee y \vee z) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}).$$

Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы являются удобным с алгоритмической точки зрения способом представления высказываний. В конечном итоге нас интересует только значение истинности конкретных высказываний. В отличие от представления сложных высказываний в виде произвольных пропозициональных форм представление высказываний как СДНФ и СКНФ дает возможность определить их истинностное значение по сравнительно простым и однообразным правилам, вытекающим из свойств операций дизъюнкции и конъюнкции.

Используя тождества логики высказываний, можно построить ДНФ или КНФ для любой пропозициональной функции, представленной в виде формулы. С этой целью в преобразуемой формуле в первую очередь удаляются операторы импликации и эквивалентности в соответствии с тождествами (2.8.20)–(2.8.22). Затем, используя равенства (2.8.1), (2.8.12) и (2.8.13), формулу приводят к такому виду, чтобы в ней оператор отрицания относился только к переменным, и чтобы не было повторяющихся отрицаний. Наконец, с помощью законов дистрибутивности (2.8.8) и (2.8.9) можно получить КНФ и ДНФ.

Рассмотрим пример приведения пропозициональной формы к нормальной дизъюнктивной форме. Пусть исходной является формула

$$(x \to \bar{y}) \equiv z\,. \qquad (2.27)$$

На основании тождества (2.8.20) можно записать, что

$$((x \to \bar{y}) \equiv z) = ((\bar{x} \vee \bar{y}) \equiv z)\,.$$

Заменив оператор эквивалентности в правой части данного выражения в соответствии с тождеством (2.8.22), получим

$$((x \to \bar{y}) \equiv z) = ((\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge z) \vee (\overline{(\bar{x} \vee \bar{y})} \wedge \bar{z})\,.$$

Применив один из законов де Моргана (тождество (2.8.13)) к правой части, находим, что

$$((x \to \bar{y}) \equiv z) = ((\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge z) \vee ((x \wedge y) \wedge \bar{z})\,.$$

Последние вложенные скобки в правой части могут быть опущены, поэтому

$$((x \to \bar{y}) \equiv z) = ((\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z})\,. \qquad (2.28)$$

Применив к правой части данного выражения закон дистрибутивности (2.8.8), то есть

$$((\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge z) = (\bar{x} \wedge z) \vee (\bar{y} \wedge z)\,,$$

получим дизъюнктивную нормальную форму, равнозначную исходной форме

$$((x \to \bar{y}) \equiv z) = (\bar{x} \wedge z) \vee (\bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z})\,. \qquad (2.29)$$

Та же исходная пропозициональная форма (2.27) может быть приведена к конъюнктивной нормальной форме. Чтобы получить соответствующую КНФ, используем выражение (2.28), полученное как промежуточный результат при выводе ДНФ. Предварительно введем обозначение

$$u = (\bar{x} \vee \bar{y})\,.$$

Тогда выражение примет вид

$$((x \to \bar{y}) \equiv z) = ((u \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z}))\,.$$

Применив к правой части закон дистрибутивности (2.8.9), получим формулу

$$((x \to \bar{y}) \equiv z) = ((u \vee (x \wedge y \wedge \bar{z})) \wedge (z \vee (x \wedge y \wedge \bar{z})))\,,$$

к которой опять применяем тот же закон дистрибутивности (2.8.9). В результате приходим к выражению

$$((x \to \bar{y}) \equiv z) = ((u \vee x) \wedge (u \vee y) \wedge (u \vee \bar{z}) \wedge (z \vee x) \wedge (z \vee y) \wedge (z \vee \bar{z}))\,.$$

Подставив значение u, находим конъюнктивную нормальную форму

$$((x \to \bar{y}) \equiv z) = ((\bar{x} \vee \bar{y} \vee x) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee y) \wedge$$

$$\wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (z \vee x) \wedge (z \vee y) \wedge (z \vee \bar{z}))\,.$$

Поскольку $(x \vee \bar{x}) = 1$ и $(x \vee 1) = x$, постольку

$$(\bar{x} \vee \bar{y} \vee x) = \bar{y}$$

и

$(\bar{x} \vee \bar{y} \vee y) = \bar{x}$.

Подставив данные выражения в последнее тождество, получим

$((x \to \bar{y}) \equiv z) = ((\bar{y}) \wedge (\bar{x}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (z \vee x) \wedge (z \vee y) \wedge (z \vee \bar{z}))$.

Кроме того, $(z \vee \bar{z}) = 1$ и $\varphi(x_1, ..., x_n) \wedge 1 = \varphi(x_1, ..., x_n)$. Поэтому тождество примет следующий окончательный вид:

$$((x \to \bar{y}) \equiv z) = (\bar{y}) \wedge (\bar{x}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (z \vee x) \wedge (z \vee y). \qquad (2.30)$$

Формула, содержащая только операции отрицания и конъюнкции, истинна, если истинны все ее члены, и ложна, если ложным является хотя бы один из ее членов. Следовательно, для доказательства ложности конъюнктивной формы достаточно доказать ложность ее любого члена. Если конъюнктивная форма включает одновременно некоторые переменные и их отрицания, то такая форма является противоречием, то есть тождественно ложна.

2.8.8. Правила вывода

Преобразования пропозициональных форм, получение по одним формулам других формул, эквивалентных первым, можно рассматривать как логический вывод. Таким образом, понятие логического вывода выше было введено имплицитно. Поэтому сейчас необходимо дать его строгое определение.

С семантической точки зрения *логический вывод* представляет собой рассуждение – установление истинности одних высказываний при условии истинности других, исходных высказываний. В процессе рассуждений создается последовательность взаимосвязанных суждений, одни из которых принимаются в качестве аксиом или допущений, а каждое последующее утверждение логически следует из них или предшествующих утверждений. Последним в такой последовательности является суждение, справедливость которого обосновывается с помощью данного рассуждения. Таким образом, логический вывод является формой дедуктивных умозаключений.

С синтаксической точки зрения *логическим выводом формулы* φ, называемой *заключением*, из формул вида $\varphi_1, ..., \varphi_n$, называемых *посылками*, является последовательность формул вида

$$\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi, \qquad (2.31)$$

если каждая посылка этой последовательности является аксиомой или гипотезой или получена из предыдущих формул последовательности с применением правил вывода, принятых в соответствующей формальной системе.

Правилом вывода называют правило перехода от одной пропозициональной формулы к другой пропозициональной формуле, основанное на синтаксических особенностях используемого логического исчисления или формальной системы. Тогда логический вывод можно определить как последовательность пропозициональных формул, построенных в соответствии с правилами вывода, отражающими отношение логического следования.

Отношением логического следования называют такое отношение между двумя пропозициональными формулами вида Φ и Ψ, что общезначимой (всегда истинной) является формула $\Phi \to \Psi$, где Φ и Ψ – метапеременные для подстановки конкретных формул; а символ $\to$ – оператор импликации. Отсюда следует, что формула $\Phi \to \Psi$, по существу, является метавысказыванием, то есть высказыванием о высказываниях.

Отношение логического следования лежит в основе любого правила вывода. *Логическим следованием* с семантической точки зрения называют такое отношение между двумя пропозициональными формулами, что всегда, когда одна формула имеет модель, другая формула также имеет модель. Рассуждение логически правильно, если между посылками и заключением рассуждения существует отношение логического следования.

Отношением логического следования с синтаксической точки зрения называют отношение между двумя формулами Φ и Ψ такое, что общезначимой является формула $\Phi \to \Psi$, где Φ и Ψ – метапеременные, вместо которых могут подставляться конкретные формулы. Примером отношения логического следования может служить отношение между формулами $\varphi \wedge \psi$ и φ. Очевидно, что из первой формулы логически следует вторая, то есть всегда, когда истинна первая формула, тогда истинна и вторая.

Тот факт, что из формулы Φ логически следует формула Ψ, записывается как *метавысказывание*

$$\Phi \mapsto \Psi, \qquad (2.32)$$

где символ $\mapsto$ оператор логического следования. Если формула Φ общезначима, то есть, логически следует из любой формулы, то этот факт представляется как $\mapsto \Phi$. Примером общезначимой формулы является формула $\mapsto (\Phi \vee \overline{\Phi})$, выражающая принцип исключенного третьего.

Если из формулы Φ не следует формула Ψ, то для передачи этого факта будем использовать запись $\Phi \sim \Psi$. Если из формулы Φ логически следует формула Ψ и, кроме того, из Ψ логически следует Φ, то говорят, что Φ и Ψ являются *эквивалентными* формулами, что записывается как метаформула

$$\Phi \leftrightarrow \Psi, \qquad (2.33)$$

где символ $\leftrightarrow$ обозначает оператор *двустороннего логического следования*.

Отношение логического следования следует отличать от отношения (оператора) импликации. Отношение импликации между двумя высказываниями определяется их семантикой, тем или иным отношением, имеющим место в предметной области. Отношение логического следования не зависит от предметной области и определяется исключительно структурой пропозициональных формул, когда из одной формулы логически следует другая, эквивалентная ей формула.

Отношение импликации между двумя высказываниями обусловлено причинно-следственными отношениями в конкретной проблемной области. Так, истинность импликативного высказывания «Если у ребенка высокая температура, то необходимо вызвать врача» определяется реальной действительностью, и его заключение не может быть получено из посылки никакими логическими средствами.

Отношение логического следования порождает из одной формулы другую вне зависимости не только от конкретных высказываний, но вообще вне зависимости от самого факта соотнесения формул с какими-либо высказываниями. Существование формул в рамках некоторого логического исчисления является самодостаточным для отношения логического следования.

Таким образом, правило вывода – это правило перехода от одних пропозициональных формул к другим пропозициональным формулам или принимаемое в качестве постулата метавысказывание о том, что из любых формул, имеющих некоторый определенный вид (строение), логически следуют некоторые другие формулы также вполне определенного вида. Правила вывода выбираются при этом так, чтобы обеспечивалась адекватная формализация отношения логического следования между соответствующими формулами.

В логике высказываний наиболее известными и общеупотребительными являются четыре правила вывода, или модуса: поненс, понендо толленс, толлендо поненс и толленс.

Модус поненс (модус утверждающий) – правило вывода, в соответствии с которым из принимаемого в качестве посылки *антецедента* некоторой пропозициональной формулы и самой формулы в качестве заключения получают *консеквент* данной формулы. Для записи данного правила используется схема:

$$\frac{\Phi \to \Psi, \Phi}{\Psi}, \tag{2.34}$$

где над горизонтальной чертой через запятую указаны посылки, а под ней – заключение – общепринятый в исчислении высказываний способ записи правил вывода. Здесь символ $\to$ означает логический *оператор импликации*. При такой записи правил вывода формула, стоящая под чертой, называется *непосредственно выводимой* из формул, стоящих над чертой.

В естественном языке аналогом правила модус поненс служат умозаключения вида: «Если *A*, то *B*. *A*. Следовательно, *B*». Пример: «Если ширина реки не больше 30 м, то она должна вычерчиваться в одну линию. Ширина реки *X* не больше 30 м. Следовательно, река *X* должна вычерчиваться одной линией». Если бы высказывание «Ширина реки *X* не больше 30 м» было ложным, то данное правило было бы неприменимым, и мы были бы вынуждены продолжить поиск подходящего правила. В некоторых системах логического вывода правило модус поненс часто оказывается не только основным, но и единственным правилом вывода.

Правило модус поненс называют также *правилом отделения*, так как оно позволяет отделить (условно) заключение от посылок. Правило модус поненс является обобщенным отражением отношения логического следования. Это означает, что при условии истинности посылок гарантируется истинность заключения, полученного в результате применения правила модус поненс. Как частный случай отношения логического следования, правило модус поненс дает возможность уже только в силу синтаксического строения одних формул получать другие. Так, например, из двух формул $\varphi \wedge \psi$ и $(\varphi \wedge \psi) \to \omega$ следует формула ω, то есть имеет место $((\varphi \wedge \psi) \wedge ((\varphi \wedge \psi) \to \omega)) \mapsto \omega$. Таким образом, оператор логического следования может использоваться для записи правил вывода. Тогда правило модус поненс с использованием оператора логического следования может быть представлено как

$$(\Phi \wedge (\Phi \to \Psi)) \mapsto \Psi. \qquad (2.35)$$

Но способ записи правил вывода в виде посылок, отделенных от заключения горизонтальной чертой, представляется более наглядным.

Модус толленс (модус отрицающий) – правило вывода, позволяющее из принимаемой в качестве посылки пропозициональной формулы вида $\Phi \to \Psi$, где символ $\to$ соответствует логическому оператору импликации, и формулы вида $\overline{\Psi}$ получать в качестве следствия выражение $\overline{\Phi}$. Для представления правила модус толленс используется схема

$$\frac{\Phi \to \Psi, \overline{\Psi}}{\overline{\Phi}}. \qquad (2.36)$$

В естественном языке правилу модус толленс соответствуют умозаключения типа: «Если *A*, то *B*. Не *B*. Следовательно, не *A*». Пример: «Если объект *X* является объектом гидрографии, то его условный знак должен вычерчиваться голубым цветом. Условный знак вычерчен не голубым цветом. Следовательно, объект *X* не является объектом гидрографии». Данное правило и подобные ему могут применяться в системах распознавания картографических изображений для сужения области поиска решения.

С использованием оператора логического следования правило модус толленс может быть представлено метаформулой

$$((\Phi \to \Psi) \wedge \overline{\Psi}) \mapsto \overline{\Phi}. \qquad (2.37)$$

Модус понендо толленс (модус утверждающе-отрицающий) – это правило вывода, позволяющее из посылок в виде пропозициональных формул $\Phi \mid \Psi$ и Φ получать в качестве следствия формулу вида $\overline{\Psi}$. Здесь символами | и $\bar{\ }$ обозначены соответственно логические операторы *исключающей дизъюнкции* и *отрицания*. Формально правило модус понендо толленс представляется в виде схемы

$$\frac{\Phi \mid \Psi, \Phi}{\overline{\Psi}}, \qquad (2.38)$$

либо как

$$(\Phi \wedge (\Phi \mid \Psi)) \mapsto \overline{\Psi}. \qquad (2.39)$$

В естественном языке правилу модус понендо толленс соответствуют языковые конструкции вида «Либо *A*, либо *B* (но не *A* и *B* одновременно). *A*. Следовательно, не *B*». Примером применения правила модус понендо толленс может служить следующий вывод: «Объект *X* может быть либо естественным, либо искусственным. Объект *X* естественный. Следовательно, объект *X* – не искусственный».

Модус толлендо поненс (модус отрицающе-утверждающий) – правило вывода, позволяющее из принимаемой в качестве посылки пропозициональной формулы вида $\Phi \vee \Psi$, где символ $\vee$ означает логический *оператор дизъюнкции*, и формулы $\overline{\Phi}$ получать в качестве следствия формулу Ψ:

$$\frac{\Phi \vee \Psi, \overline{\Phi}}{\Psi}. \qquad (2.40)$$

Это же правило с применением оператора логического следования может быть записано как

$$((\Phi \vee \Psi) \wedge \overline{\Phi}) \mapsto \Psi \cdot \qquad (2.41)$$

В естественных языках правилу модус толлендо поненс соответствуют рассуждения типа: «*A* или *B*. Не *A*. Следовательно, *B*». Пример применения правила модус толлендо поненс: «Условный знак реки должен вычерчиваться в одну или две линии. Река должна вычерчиваться не в одну линию. Следовательно, она должна быть вычерчена в две линии». Здесь следует обратить внимание на то, что если имеет место Φ, то отсюда не следует $\overline{\Psi}$, поскольку одновременно истинными могут быть оба высказывания. Так, если река должна вычерчиваться в одну линию, то это еще не означает, что она не может вычерчиваться в две линии (на некоторых участках).

Первоначальный вариант исчисления высказываний, опубликованный Фреге в 1879 г., содержал шесть аксиом и два логических оператора: отрицание и импликацию. Позднее было установлено, что при сохранении этих же операторов независимыми являются только любые три аксиомы, а остальные могут быть получены из них. Примерами таких независимых аксиом могут быть следующие:

$$(\varphi \to (\psi \to \varphi));$$

$$((\varphi \to (\psi \to \phi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \phi)));$$

$$((\overline{\varphi} \to \overline{\psi}) \to ((\overline{\varphi} \to \psi) \to \varphi)).$$

Тогда операторы дизъюнкции, конъюнкции и эквивалентности могут быть введены с помощью следующих определений:

$$(\varphi \vee \psi) = Df.(\overline{\varphi} \to \psi);$$

$$(\varphi \wedge \psi) = Df.\overline{(\varphi \to \overline{\psi})};$$

$$(\varphi \equiv \psi) = Df.(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi),$$

где символ $= Df.$ есть оператор дефиниции, который читается как «есть по определению».

В варианте исчисления высказываний, разработанном Фреге, достаточными правилами вывода являются всего два правила: правило подстановки и правило модус поненс. Правило подстановки состоит в том, что в пропозициональной формуле допускается замена пропозициональных переменных любыми пропозициональными формулами. Правило модус поненс рассматривалось выше. Любое построенное подобным образом исчисление образует бесконечную последовательность формул, называемых *теоремами*, которые могут быть получены из аксиом в результате применения зафиксированных правил вывода.

Более компактными оказываются логические исчисления, основанные не на системах аксиом, а на системах *схем аксиом*, образуемых с помощью метапеременных. Так, описанная выше система аксиом может быть заменена следующей системой схем аксиом

$\Phi \to (\Psi \to \Phi)$;

$(\Phi \to (\Psi \to \Omega)) \to ((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Omega))$;

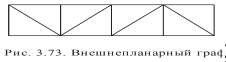
$(\overline{\Phi} \to \overline{\Psi}) \to ((\overline{\Phi} \to \Psi) \to \Phi)$,

где символы Φ, Ψ и Ω – пропозициональные переменные, вместо которых могут подставляться любые пропозициональные формулы. Правило подстановки при этом оказывается избыточным, а правило модус поненс становится единственным и достаточным правилом вывода. Достаточность правила вывода означает, что с его помощью может быть получена любая формула, доказуемая в формальной системе.

В классическом исчислении высказываний используются операторы отрицания, дизъюнкции, конъюнкции и импликации, а также 10 схем аксиом, перечисляемых ниже.


; (2.42.1)

; (2.42.2)



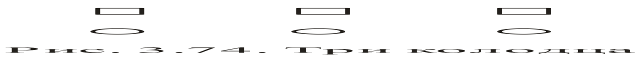
; (2.42.3)

$$(\Phi \wedge \Psi) \to \Psi\,; \qquad (2.42.4)$$

$$\Phi \to (\Phi \vee \Psi)\,; \qquad (2.42.5)$$

$$\Psi \to (\Phi \vee \Psi)\,; \qquad (2.42.6)$$

$$\Phi \to (\Psi \to (\Phi \wedge \Psi))\,; \qquad (2.42.7)$$



; (2.42.8)

$$(\Phi \to \Psi) \to ((\Phi \to \overline{\Psi}) \to \overline{\Phi})\,; \qquad (2.42.9)$$

$$\overline{\overline{\Phi}} \equiv \Phi\,. \qquad (2.42.10)$$

2.9. Логика предикатов

Наряду с определенными возможностями логика высказываний обладает и ограничениями. Не все рассуждения могут быть представлены с помощью исчисления высказываний – формального аппарата логики высказываний.

Примером может служить следующее печальное рассуждение: «Все люди смертны. Любой картограф – человек. Следовательно, любой картограф смертен». В рамках логики высказываний нельзя ни доказать, ни опровергнуть правильность данного вывода. Для доказательства и использования подобных выводов необходимо выполнить анализ структуры высказываний. Но анализ внутренней структуры высказываний не является задачей исчисления высказываний. Этой проблемой занимается логика предикатов.

Логика предикатов является дальнейшим развитием логики высказываний. В семантическом аспекте логика предикатов представляет собой *содержательную теорию*, предметом изучения которой служат наиболее общие взаимосвязи между такими абстрактными объектами, как высказывания. С синтаксической точки зрения логика предикатов является определенным *логическим исчислением*, формализующим внутреннюю структуру высказываний и отношений между ними. Используемый логикой предикатов формальный аппарат называют *исчислением предикатов*.

2.9.1. Символы логики предикатов

Язык логики предикатов первого порядка содержит символы следующих типов: индивидные, функциональные, предикатные, логические и технические.

Совокупность объектов моделируемой области, их свойств и отношений принято называть *предметной областью*. Все множество объектов предметной области обозначим как *M*. Каждому объекту, принадлежащему *M*, можно поставить в соответствие некоторый уникальный символ. Такой символ, обозначающий конкретный объект, называют *индивидной константой*, а также *предметной константой*, или *индивидным именем*. Примерами индивидных констант могут служить символы «Россия» и «государство». Первый из этих символов обозначает индивидный (эмпирический) объект – Россию, а второй – такой абстрактный объект, как понятие государства. В качестве индивидных констант принято использовать строчные начальные буквы латинского алфавита. По необходимости, такие буквы могут снабжаться нижними индексами.

Требуется различать сам объект и его имя. Если говорят об объекте, то используют его имя. Если же речь идет об имени объекта, то в качестве его имени (то есть имени имени) используется имя объекта, взятое в кавычки, как это было сделано в двух примерах выше. В них говорилось не о России или каком-либо государстве, а только об их именах (символах). Если из контекста со всей очевидностью следует, что предметом рассмотрения является символ, а не обозначаемый им объект, то возможно так называемое *автонимное употребление*, когда имя объекта указывает само на себя. Так, вместо текста <«a» есть индивидная константа> вполне допустимо использование фразы <a есть индивидная константа>.

Индивидной, или *предметной переменной*, называют символ, сам по себе не обозначающий объект, но с которым сопоставляется некоторое множество объектов, между элементами которого и индивидными константами ранее было установлено взаимно однозначное соответствие. О самом множестве говорят как об *области определения индивидной переменной*. О предметной переменной также говорят, что она *принимает значения* из соответствующей области определения или что она *пробегает по множеству* объектов. В определенных ситуациях вместо имени индивидной переменной могут подставляться имена индивидных констант из соответствующей области определения индивидной переменной. Индивидные переменные принято обозначать строчными последними буквами латинского алфавита (с индексами или без них).

Индивидные константы и индивидные переменные обычно объединяются под общим именем *индивидных символов*.

Функциональной константой, *функциональной буквой* или *предметной функцией* называется символ, который обозначает (именует) определенную функцию $f(x_1, ..., x_n)$, сопоставляющую кортежам из n индивидных символов – *аргументов функции* – некоторый индивидный объект (или *индивид*), называемый *значением* этой функции. Следовательно, каждая предметная функция:

1) *определена на* M^n;
2) *принимает значения на М*;
3) *является* некоторым конкретным *отображением* $f: M^n \to M$.

Если областью объектов являются действительные числа, то такими функциями могут быть сложение, вычитание, умножение, деление и их произвольные комбинации. Однако не следует думать, что функциональные константы являются обозначениями только математических функций. Пусть, например, x – индивидная переменная, именующая множество государств, а функция $f(x)$ каждому государству x ставит в соответствие его столицу. Тогда $f(Россия) = Москва$. О функции $f(x_1, ..., x_n)$ говорят, что она получена в результате применения n-местной функциональной буквы к предметным переменным $x_1, ..., x_n$.

Нульместные функции принято трактовать как индивидные константы. По существу, нульместная функция ставит в соответствие пустой последовательности объектов некоторый объект, то есть *обозначает* этот объект. В качестве имен предметных функций обычно используются строчные средние буквы латинского алфавита, в том числе с нижними индексами: f_1, f_2, g, h, p, q и т. п. Чтобы указать число аргументов функции f (*местность*, или *арность* функции), используют верхние индексы: f^2, g_1^3 и т. д.

Индивидные константы, функциональные константы и предикаты (см. ниже) называют *дескриптивными* или *нелогическими символами*, а индивидные переменные, логические связки и кванторы – *логическими символами*.

Логические связки, или *пропозициональные константы*, используются для образования формул, под которыми понимают сложные языковые выражения, состоящие из других простых или сложных выражений. Рассматривавшиеся в исчислении высказываний истинностные функции являются частным случаем логических функций, когда их аргументы и сами функции могут принимать только истинностные значения.

Все логические операторы, используемые в исчислении высказываний, переносятся в исчисление предикатов, где с их помощью осуществляется связывание предикатов и формул. Чаще всего используются логические операции $\overline{}$ (отрицание), $\wedge$ (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция) и $\rightarrow$ (импликация). Наряду с этими операциями в логике предикатов вводятся новые операции – кванторы.

В качестве *технических символов* используются символы «(», «)» и «,», то есть левая и правая скобки и запятая. Технические символы однозначным образом разбивают выражение на подвыражения, задают структуру выражения. Запятая при этом используется как разделитель между символами (в перечислении), а скобки – для формирования логически законченных фрагментов выражения, указания их целостности. С целью облегчения восприятия сложных выражений человеком, придания им большей выразительности могут также использоваться квадратные и фигурные скобки.

Основным объектом исследования в логике предикатов является формула. Исходным понятием является понятие *терма*, которое рекурсивно определяется следующим образом:

1) всякая предметная константа или предметная переменная есть терм;
2) если f – n-местная функциональная буква и $t_1, ..., t_n$ являются термами, то $f(t_1, ..., t_n)$ есть терм;
3) никакие другие выражения не являются термами.

На основе термов вводится понятие *элементарной формулы*:

1) всякая пропозициональная буква есть элементарная формула;
2) если P – n-местный предикат и $t_1, ..., t_n$ – термы, то $P(t_1, ..., t_n)$ есть элементарная формула;
3) никакое другое выражение не является элементарной формулой.

Обобщением элементарной формулы является понятие *формулы*, или *правильно построенной формулы* (*ПП-формулы*), которая определяется следующим образом:

1) всякая элементарная формула есть формула;
2) если φ и ψ – формулы, а x – предметная переменная, которая входит в формулы φ и ψ, то каждое из выражений $\overline{\varphi}$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \equiv \psi)$, $\forall x\varphi(x)$ и $\exists x\varphi(x)$ есть формула;
3) никакое другое выражение не является формулой.

Правильно построенными формулами являются, например, следующие выражения: $f(a, x, g(x))$, $\varphi(x) \rightarrow \psi(x)$, $\forall xP(a, x)$.

2.9.2. Предикаты

В логике высказываний высказывания рассматриваются как элементарные (нерасчленяемые) символы, денотатами которых являются истинностные значения. В логике предикатов каждое высказывание рассматривается как структурно сложный символ. Существует прямая аналогия между структурой суждений и структурой высказываний. Говорят, что высказывания имеют *субъектно-предикатную структуру*. При этом под *логическим субъектом* понимается тот объект, о котором идет речь в высказывании, а под *предикатом* – то свойство (элементарное или сложное), которое приписывается субъекту высказывания. Принято также говорить, что данное свойство *предицируется* субъекту высказывания или что между субъектом высказывания и свойством имеет место *отношение предикации*.

Отношением предикации называют отношение между объектом и понятием, присущим данному объекту в качестве свойства. Более глубоким определением отношения предикации является его трактовка как отношения между индивидным концептом и предикатным концептом высказывания, в основе которой лежит разделение индивидных концептов и индивидных объектов.

Индивидным концептом называют понятие, являющееся денотатом логического субъекта, а *предикатным концептом* – понятие, рассматриваемое в качестве денотата логического предиката. На рис. 2.9 произвольное простое высказывание рассматривается как составной символ, представляющий собой совокупность двух символов S и P. Эти символы играют разные роли или выполняют разные функции в высказывании. Символ S является субъектом высказывания, а P – предикатом. Но каждый символ обозначает некоторый денотат. Денотатом субъекта служит индивидный концепт, а денотатом предиката – предикатный концепт. Денотаты субъектов могут быть эмпирическими или абстрактными объектами. Индивидные объекты – это объекты реальной действительности, а индивидные концепты – разновидность абстрактных объектов. Разделение индивидных концептов и индивидных объектов дает возможность, в частности, корректно говорить об эмпирических объектах, существовавших в прошлом.

Рис. 2.9. Отношение предикации

Так, в высказывании «Петр I является основателем Петербурга» утверждается, что субъект по имени «Петр I» обладает свойством, именуемым как «основатель Петербурга». В настоящее время нет такого эмпирического объекта как Петр I, но есть *понятие* (абстрактный объект) о существовавшем в прошлом российском императоре Петре I. Любое утверждение о том, что несуществующему эмпирическому объекту может быть присуще какое-либо свойство, бессмысленно. Поэтому считается, что отношение предикации имеет место между абстрактными объектами, то есть между индивидным концептом и предикатным концептом. При таком понимании высказываний высказывание «Петр I является основателем Петербурга» является не только логически правильным, но и истинным.

В соответствии с современными представлениями, структура каждого элементарного высказывания выражается формулой

$$x \Leftarrow P, \qquad (2.43)$$

где x – индивидная переменная, значениями которой могут быть термины эмпирических объектов; P – *предикатная переменная* для терминов абстрактных объектов, которые в качестве свойств присущи эмпирическим объектам, а символ $\Leftarrow$ обозначает *оператор предикации* – особого рода бинарное логическое отношение между индивидным и предикатным концептами высказывания. В естественных языках смысл оператора предикации примерно передается словом «есть».

При таком понимании отношения предикации формула $\Leftarrow P$ представляет собой другую запись формулы $P(\ )$, где последняя обозначает некоторое свойство. Таким же образом формула $x \Leftarrow P$ является аналогом формулы $P(x)$, моделью которой является суждение о том, что субъект x обладает свойством $P(\ )$. Отношение предикации как отношение между индивидным концептом x и предикатным концептом P является нерефлексивным, несимметричным и нетранзитивным. Отношение предикации представляет собой особое логическое отношение и не может быть сведено к другим отношениям.

И если логика высказываний абстрагируется от внутренней структуры высказываний, то в исчислении предикатов последняя является предметом непосредственного изучения. По этой причине логика предикатов является основой формализации содержательных теорий.

Предикатом называют высказывательную функцию, определенную на некотором множестве M. Иначе, предикат представляет собой n-местную функцию, сопоставляющую каждому упорядоченному набору $(a_1, ..., a_n)$ некоторое высказывание $P(a_1, ..., a_n)$, где $a_1, ..., a_n$ – предметные константы. Но поскольку каждому высказыванию в логике ставится в соответствие его истинностное значение, постольку предикату можно дать другое определение.

Предикатом, предикатной константой или *логической функцией* называют символ, обозначающий функцию от произвольного числа аргументов, принимающую истинностные значения 0 или 1. Аргументы логической функции принимают значения из множества M объектов предметной области.

Таким образом, предикат, или логическая функция, есть отображение множества объектов предметной области на множество истинностных значений

$$f : M^n \to \{0, 1\}. \qquad (2.44)$$

Число аргументов *n* предиката называется *рангом предиката*. Предикат от *n* аргументов называют *n-местным предикатом*. Предикаты могут быть 0-, 1- и *n*-местные. Обозначаются предикаты прописными средними буквами латинского алфавита, в необходимых случаях – с нижними индексами; для обозначения ранга предикатов используются верхние индексы: P, P_1, Q_1^3 и т. п. Под 0-местным предикатом понимается произвольное высказывание.

Наряду с понятием предикатной константы вводится понятие *предикатной переменной* – переменной, значениями которой могут быть конкретные предикаты.

Если на некотором наборе значений аргументов $(a_1, ..., a_n)$ предикат *P* принимает значение «истина», то есть, имеет место $P(a_1, ..., a_n) = 1$, то говорят, что данный набор *удовлетворяет предикату* или что предикат *P* *выполняется* для этого набора аргументов.

Если предикат *P* выполняется для любого набора своих аргументов, то он называется *тождественно истинным*. Если никакой набор аргументов $(a_1, ..., a_n)$ не удовлетворяет предикату *P*, то такой предикат называют *тождественно ложным*. Если предикат *P* выполняется хотя бы для одного набора своих аргументов, то его называют *выполнимым*.

Множество наборов значений аргументов $(a_1, ..., a_n)$, удовлетворяющих предикату *P*, называется *областью истинности* данного предиката. Область истинности предиката *P* при этом представляет собой некоторое отношение на *M*. С другой стороны, каждому *n*-местному отношению на *M* однозначным образом может быть поставлен в соответствие *n*-местный предикат на *M*. Следовательно, изучение предикатов и изучение отношений связаны между собой.

2.9.3. Силлогизмы

Предшественницей логики предикатов является разработанная Аристотелем силлогистика – исторически первая дедуктивная теория, долгое время остававшаяся основой логики. В первую очередь силлогистика занималась изучением условий, при которых из двух простых категорических высказываний может быть получено логически правильное третье категорическое высказывание. В дальнейшем были исследованы более сложные случаи получения правильных заключений при трех и более посылках.

Силлогизмы являются наиболее простыми системами суждений. *Силлогизмом* называют как совокупность логически взаимосвязанных высказываний четырех указанных ниже типов, так и символ, призванный обозначать некоторое умозаключение.

Высказывания первого типа – *общеутвердительные*, имеют вид «Всякий (каждый, любой) *X* есть *Y*» и обозначаются латинской буквой *A* (от «affirmo» – утверждаю). Высказывания второго типа являются *общеотрицательными*, имеют вид «Всякий *X* не есть *Y*» и обозначаются буквой *E* (первая гласная в латинском слове «nego» – отрицаю). Высказывания третьего типа суть *частноутвердительные*, соответствующие всем высказываниям вида «Некоторые *X* есть *Y*» и обозначаемые символом *I* (вторая гласная в слове «affirmo»). Четвертый тип высказываний составляют *частноотрицательные* высказывания, имеющие вид «Некоторые *X* не есть *Y*» и обозначаемые символом *O* (вторая гласная в слове «nego»).

Высказывания перечисленных типов называют *простыми категорическими*, или *простыми утвердительными высказываниями*. Силлогизмы, построенные с использованием простых категорических высказываний, называют *категорическими силлогизмами*. Наиболее распространенные категорические силлогизмы, называемые *простыми*, состоят из трех высказываний и имеют следующий вид:

Каждый (некоторый) *X* есть *Y*;
<u>Каждый (некоторый) *Y* есть *Z*;</u>
Каждый (некоторый) *X* есть *Z*.

В простых силлогизмах первые два высказывания называют *посылками*, а третье – *заключением*. Горизонтальная черта отделяет, как это принято в логике, заключение от посылок. Рассмотрим структуру простых силлогизмов на примере высказываний из области картографии.

A. Всякое кирпичное здание является огнестойким.

B. <u>Всякое огнестойкое здание показывается черным цветом</u>.

C. Всякое кирпичное здание показывается черным цветом.

В данном примере высказывания *A* и *B* являются посылками, а высказывание *C* – заключением.

Связь между отдельными высказываниями, образующими силлогизм, осуществляется посредством *терминов силлогизма.* Термины силлогизма входят в высказывания либо в качестве логического субъекта, либо в качестве предиката. Термин, которому соответствует больший объем понятия, называют *большим термином*. Больший термин является предикатом заключения. В нашем примере – это «показывается черным цветом». Посылку, содержащую в качестве своего субъекта или предиката больший термин, называют *большей посылкой*. В нашем примере большей посылкой служит высказывание *B*.

Термин, обладающий меньшим объемом, называют *меньшим термином*. Меньший термин является субъектом заключения. Посылку, содержащую меньший термин, называют *меньшей посылкой.* В приведенном выше примере – это высказывание *A*, субъект которого («кирпичное здание») является меньшим термином.

В любом простом категорическом силлогизме присутствует еще один термин силлогизма, называемый *средним термином.* Его особенность в том, что он входит только в посылки. Хотя средний термин не входит в заключение, его роль в силлогизме чрезвычайно важна, поскольку он является общим для двух высказываний, образующих посылки, и связывает высказывания с меньшим и большим терминами силлогизма в логически законченную конструкцию. Без такой связи в виде среднего термина силлогизм обратится в независимые высказывания (как в известном выражении «В огороде – бузина, а в Киеве – дядька»). В нашем примере средним термином является «огнестойкое здание».

В зависимости от положения среднего термина силлогизма, различают четыре *фигуры* или схемы силлогизма:

– в первой фигуре средний термин является субъектом в большей и предикатом в меньшей посылке;

– во второй фигуре средний термин служит предикатом в обеих посылках;

– в третьей фигуре средний термин является субъектом в обеих посылках;

– в четвертой фигуре он является предикатом в большей и субъектом в меньшей посылках.

Положение среднего термина может быть продемонстрировано с помощью следующих схем (табл. 2.13).

Таблица 2.13. Фигуры силлогизмов

Высказывания	Фигура							
	1		2		3		4	
	S	P	S	P	S	P	S	P
Большая посылка	С	Б	Б	С	С	Б	Б	С
Меньшая посылка	М	С	М	С	С	М	С	М
Заключение								

В данной таблице символами *S* и *P* обозначены соответственно субъект и предикат (свойство) высказывания, а символами *Б*, *М* и *С* – большой, малый и средний термины силлогизма. Линиями обозначены связи между терминами и высказываниями. Рассмотрим в качестве примера фигуру 1. Большая посылка связывает термины *С* (субъект) и *Б* (предикат). Средний термин устанавливает связь между двумя посылками, что обозначено наклонной чертой. Меньшая посылка связывает *С* (предикат) и *М* (субъект).

Наряду с фигурами определяются также *модусы силлогизма* – схемы силлогизма, имеющие фиксированные фигуру, вид посылок и вид заключения. Составляя различные комбинации из *A*, *E*, *I* и *O* для каждой из посылок и заключения, можно получить 64 (4 × 4 × 4) варианта, или модуса, для каждой из четырех фигур. Следовательно, число всех возможных модусов составит 256. В силлогистике установлено, что из этого числа только 24 модуса являются логически правильными, то есть дающими возможность получения истинных заключений при условии истинности посылок.

Структура силлогизмов и их логическая правильность (или неправильность) могут быть продемонстрированы с помощью диаграмм Эйлера – Венна. Пусть имеется следующий силлогизм С1.

Все *X* есть *Y*.

Все *Y* есть *Z*.

Все *X* есть *Z*.

Соответствующая ему диаграмма представлена на рис. 2.10, где *X*, *Y* и *Z* обозначают объемы соответствующих понятий. Данная диаграмма может рассматриваться как доказательство правильности всех силлогизмов типа С1.

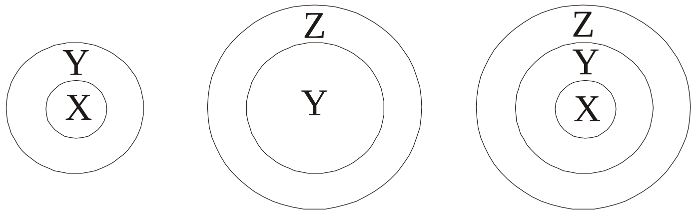


Рис. 2.10. Силлогизм С1

Пусть также имеется силлогизм С2 следующего вида.

Все *X* есть *Z*.

Все *Y* есть *Z*.

Некоторые *X* есть *Y*.

Соотношение между объемами этих понятий представлено на рис. 2.11.

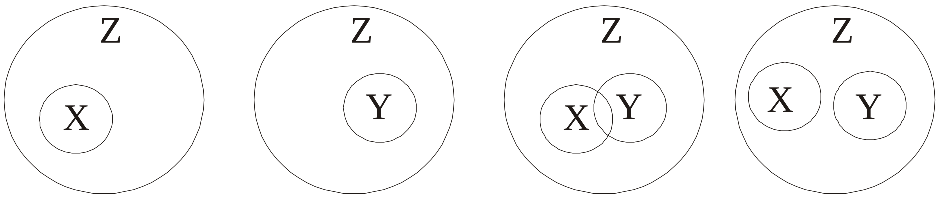


Рис. 2.11. Силлогизм С2

Данная диаграмма показывает, что силлогизм С2 является неправильным, так как из посылок *логически* никак не следует, что множества *X* и *Y* имеют общие элементы. Вполне возможно, что их пересечение является пустым множеством, то есть $X \cap Y = \varnothing$, что и показано на рис. 2.11 справа. Приведенное ранее рассуждение о дикарях и современных женщинах относится к силлогизмам подобного типа в том смысле, что они не являются логически правильными.

Создание логических исчислений означало появление более эффективных методов логического вывода. В частности, было установлено, что силлогистика может быть полностью формализована средствами логики предикатов. Сведения о ней здесь приведены для лучшего понимания как истоков, так и содержательной стороны теории предикатов.

2.9.4. Кванторы

В логике предикатов вводится новый тип логических операторов – кванторы. *Кванторами* называют символы, устанавливающие вместе с переменными множество индивидных объектов, для которых выполняются определенные условия. Различаются два вида кванторов, называемых также *двойственными кванторами*: квантор общности и квантор существования.

Квантор общности, называемый иногда также *квантором всеобщности,* используется для компактного обозначения высказываний типа «для любого x (или «для всех x», «для каждого x») имеет место $P(x)$». Здесь $P(x)$ является некоторой высказывательной функцией. Таким образом, квантор общности служит указанием на то, что область истинности пропозициональной функции совпадает со всей областью значений переменной x. Говорят также, что квантор общности *преобразует конкретную пропозициональную функцию в высказывание* о том, что область истинности этой функции совпадает со всей областью значений переменной x. Для обозначения квантора общности используется символ $\forall$ (перевернутое *A*, произошедшее от английского *All* – все). Тогда высказывание $\forall x P(x)$ истинно, если любой $x \in X$, где X – множество всех значений переменной x, обладает свойством P, то есть имеет место

$$(x \in X) \to P(x). \qquad (2.45)$$

Таким образом, $\forall x P(x)$ является более краткой записью последнего выражения. Используя оператор дефиниции, можно записать

$$\forall x P(x) = Df.((x \in X) \to P(x)). \qquad (2.46)$$

Квантор общности может использоваться для передачи как родовидовых отношений, представляемых высказываниями вида «Все *A* суть *B*», так и указания свойств, для чего используются высказывания того же типа «Все *A* суть *B*». Примерами могут служить соответственно высказывания «Все кошки являются представителями семейства кошачьих» и «В темноте все кошки серы». Хотя с семантической точки зрения структуры этих высказываний существенно различны, с синтаксической точки зрения они обладают одинаковой структурой. Разумеется, здесь имеется в виду абстрактная структура высказываний («Все *A* суть *B*»), а не конкретных предложений русского языка.

Квантор существования используется как краткая форма записи выражений вида «существует x, обладающий свойством P». Квантор существования означает, что область истинности соответствующей пропозициональной функции не пуста, и что существует хотя бы один элемент $x \in X$, для которого $P(x)$ истинно. Для обозначения квантора существования используют символ $\exists$ (перевернутое *E*, от английского *Exists* – существует), например, $\exists x P(x)$. Считается, что квантор существования преобразует пропозициональную функцию $P(x)$ в высказывание о том, что ее область истинности не пуста.

Выражение $\forall x P(x)$ обозначает истинное высказывание, если $P(x)$ истинно для всех $x \in X$, в противном случае ему соответствует ложное высказывание. Выражение $\exists x P(x)$ соответствует истинному высказыванию, если хотя бы для одного $x \in X$ истинно $P(x)$. Если множество объектов, обладающих свойством P, обозначить как Y, то выражение $\exists x P(x)$ будет эквивалентно утверждению о том, что $X \cap Y = \varnothing$. Если в выражениях $\forall x P(x)$ или $\exists x P(x)$ $P(x)$ не зависит от x, то эти выражения обозначают то же, что и $P(x)$.

Операцию применения квантора общности или квантора существования к пропозициональной функции называют *квантификацией*. В результате квантификации пропозициональная функция преобразуется в конкретное высказывание, а именно в высказывание об области истинности данной пропозициональной функции. Так, пусть имеется высказывательная форма «Дорога ведет в Рим». Обозначим соответствующую функцию как $P(x)$, где областью значений переменной x является множество всех дорог, а P соответствует свойству «вести в Рим». Очевидно, что $P(x)$ может принимать различные истинностные значения в зависимости от значения x – конкретной дороги.

Применяя квантор общности и квантор существования к пропозициональной формуле $P(x)$, получаем $\forall x P(x)$, что соответствует известному образному высказыванию «Все дороги ведут в Рим», и $\exists x P(x)$, что следует понимать как «Некоторые дороги ведут в Рим». Первое из данных высказываний, если отбросить его образное содержание и трактовать буквально, является ложным, а второе – истинным. Таким образом, в результате применения разных кванторов к одной и той же пропозициональной формуле можно получить высказывания с различной истинностью.

Квантификация может применяться одновременно к нескольким переменным и нескольким пропозициональным функциям. Часть формулы, на которую распространяется действие квантора, называется *областью действия* этого квантора. Так, в формуле

$$\forall x(P_1(x) \to (P_2(x) \to \exists y P_2(y)))$$

область действия квантора $\forall$ – это вся часть формулы, находящаяся справа от него. Областью действия квантора $\exists$ является только формула $P_2(y)$.

Пусть символы Ф и Ψ являются метапеременными, вместо которых допускается подстановка конкретных формул. Тогда все вхождения переменной x в формулы (подформулы) вида $\forall x$ Ф или $\exists x$ Ф называются *связанными вхождениями* x в формулу (подформулу) вида Ф. Все несвязанные вхождения переменных в формулы называют *свободными вхождениями*.

Любая формула вида Ф преобразуется в конкретное высказывание, если в ней все предикатные переменные заменить конкретными предикатами, а все свободные переменные – терминами, указывающими на конкретные объекты предметной области, то есть предметными константами. Если для любого свободного вхождения переменной x в формулу Ф не верно, что x входит в какую-либо подформулу $\forall x$ Ψ или $\exists x$ Ψ, то переменная y называется *свободной для* x. Результат подстановки переменной y, свободной для x, в формулу Ф записывается как формула Ф(x/y) или Φ_y^x . Чтобы избежать путаницы со штрихом Шеффера, далее будет использоваться последний способ записи.

Переменная, стоящая непосредственно после квантора и входящая в область его действия, называется *связанной переменной*. Входящие в формулу переменные, не являющиеся связанными переменными, называются *несвязанными* или *свободными переменными* этой формулы. Если в формуле все переменные являются связанными, то ее квантификация считается завершенной. Если формула содержит как связанные, так и свободные переменные, то о ней говорят как о *частично квантифицированной*. Такой формуле соответствует частично квантифицированная пропозициональная функция. Следовательно, частично квантифицированная формула не является высказыванием. Примеры частично квантифицированных формул:

$\exists x \left(P(x, y, z) \right)$;

$\forall x \left(P(x) \to Q(y) \right)$;

$\exists x \left(x^2 + y^2 = 1 \right)$.

В неявном виде кванторы встречаются уже у Аристотеля, рассматривавшего 4 вида простых категорических высказываний. С помощью кванторов могут быть выражены любые простые категорические высказывания аристотелевской силлогистики:

– общеутвердительные высказывания – формулой

$$\forall x \left(P(x) \to Q(x) \right); \qquad (2.47)$$

– общеотрицательные – формулой

$$\forall x \left(P(x) \to \overline{Q(x)} \right), \qquad (2.48)$$

– частноутвердительные – формулой

$$\exists x \left(P(x) \wedge Q(x) \right); \qquad (2.49)$$

– и частноотрицательные – формулой

$$\exists x \left(P(x) \wedge \overline{Q(x)} \right). \qquad (2.50)$$

Кванторы общности и существования взаимосвязаны и были введены Г. Фреге, впервые осуществившим формализацию простых категорических высказываний. Связь между квантором общности и квантором существования может быть выражена формулами:

$$\forall x P(x) \equiv \overline{\exists x \overline{P(x)}}; \qquad (2.51)$$

$$\exists x P(x) \equiv \overline{\forall x \overline{P(x)}}, \qquad (2.52)$$

где символ $\equiv$ соответствует оператору эквивалентности. Справедливость этих формул достаточно очевидна. Первая из них утверждает, что два высказывания «Любой объект x обладает свойством P» и «Неверно, что некоторые x не обладают свойством P» являются эквивалентными. Следовательно, совпадают их множества истинности. Из второй формулы следует, что множества истинности двух высказываний «Существует x, обладающий свойством P» и «Неверно, что все x не обладают свойством P» также совпадают.

Приведенные выше формулы дают ответ на вопрос о том, как понимать отрицание квантифицированных формул. Пусть формула $\forall x P(x)$ обозначает высказывание «Все картографы знают логику». Его внешним отрицанием будет высказывание «Неверно, что все картографы знают логику». Как внутренние отрицания можно рассматривать высказывания «Не все картографы знают логику» и «Все картографы не знают логику». Чтобы выяснить, какое внутреннее отрицание соответствует внешнему отрицанию, применим к формуле (2.51) отрицание и получим

$$\overline{\forall x P(x)} \equiv \overline{\overline{\exists x \overline{P(x)}}},$$

а после снятия двойного отрицания

$$\overline{\forall x P(x)} \equiv \exists x \overline{P(x)}, \qquad (2.53)$$

что следует понимать как «Некоторые картографы не знают логику». Таким образом, отрицание формулы, содержащей квантор общности, сводится к отрицанию высказывания о том, что ее областью истинности является все множество значений связанной переменной.

Аналогичным образом поступим при анализе отрицаний высказываний вида «Некоторые *A* суть *B*», то есть формулы (2.52). Пусть имеется высказывание «Некоторые дороги ведут в Рим». Его внешним отрицанием будет высказывание «Неверно, что некоторые дороги ведут в Рим», но при этом остается некоторая неопределенность его трактовки. В качестве внутренних отрицаний можно рассматривать высказывание «Все дороги не ведут в Рим» и прямо противоположное «Все дороги ведут в Рим», что является скорее обобщением исходного высказывания. Применив отрицание к формуле (2.52), получим выражение

$$\overline{\exists x P(x)} \equiv \overline{\overline{\forall x \overline{P(x)}}}$$

или

$$\overline{\exists x P(x)} \equiv \forall x \overline{P(x)}. \qquad (2.54)$$

Полученную формулу следует понимать как «Все дороги не ведут в Рим». Отсюда следует, что отрицание формулы с квантором существования сводится к отрицанию высказывания о том, что ее область истинности не пуста.

С помощью логических операций и кванторов из предикатов можно образовывать другие, более сложные предикаты. Применение квантора общности $\forall x_i$ к предикату $P(x_1, ..., x_n)$, где $1 \le i \le n$, дает $(n-1)$-местный предикат $\forall x_i P(x_1, ..., x_n)$, сопоставляющий набору $(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n)$ высказывание, истинное тогда и только тогда, когда для любого значения *a* переменной x_i истинно высказывание $P(a_1, ..., a_{i-1}, a, a_{i+1}, ..., a_n)$. Аналогично, применение квантора существования $\exists x_i$ к предикату $P(x_1, ..., x_n)$, где $1 \le i \le n$, дает $(n\text{-}1)$-местный предикат $\exists x_i P(x_1, ..., x_n)$, сопоставляющий набору $(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n)$ высказывание, истинное тогда и только тогда, когда хотя бы для одного значения *a* переменной x_i истинно высказывание $P(a_1, ..., a_{i-1}, a, a_{i+1}, ..., a_n)$.

Наряду с квантификацией существует также *конкретизация пропозициональных формул*, под которой понимается подстановка индивидных термов – предметных констант вместо всех входящих в нее свободных индивидных переменных. Истинное высказывание, полученное в результате такой подстановки, называют *моделью* пропозициональной формулы.

Пусть имеется два высказывания «Москва – столица России» и «Петербург – столица России». Обозначим первое из них как φ, а второе – как ψ. Тогда высказывания, соответствующие формулам φ и $\varphi \vee \psi$, будут моделями этих формул в силу их (высказываний) истинности. Но высказывания, соответствующие формулам ψ и $\varphi \wedge \psi$, моделями данных формул не являются, поскольку являются ложными высказываниями.

2.9.5. Формальные системы

Формальные системы являются задачей и результатом процесса *формализации*, понимаемой как отображение (представление, репрезентация) абстрактных объектов с помощью символов.

Наиболее простым видом формализации является *дескриптивная формализация* абстрактных объектов с помощью символов, отличающаяся от остенсивного указания на объекты тем, что в качестве денотатов терминов в этом случае выступают не эмпирические, а абстрактные объекты. Примером дескриптивной формализации в области геоинформационного моделирования может служить создание перечня всех терминов, составляющих содержание топографических карт и планов всего масштабного ряда и обозначающих все объекты, названия свойств и значения качественных свойств, встречающихся на указанных картах и планах. При дескриптивной формализации использование символов, отличных от символов естественного языка, не дает никаких преимуществ, за исключением точности, однозначности и компактности представления, но сопровождается снижением их наглядности и понимаемости.

Дескриптивная формализация является первым и необходимым этапом как естественно-языковой и научной формализации, так и информационного моделирования любой предметной области. *Естественно-языковая формализация* сводится к отображению абстрактных объектов с помощью средств того или иного этнического языка. *Научная формализация* – это отображение абстрактных объектов с помощью средств формального языка, в процессе которого осуществляется более точное определение объектов, свойств и отношений предметной области. В процессе научной формализации используются существующие либо создаются новые символические средства, обеспечивающие возможность получения новых знаний о предмете исследования или моделирования путем синтаксических преобразований символьных выражений.

Возможность получать новые зависимости или факты из уже известных путем анализа и/или преобразования структуры (формы) символьных выражений, то есть чисто формально, явилась основанием для определения понятия формализации и осознания его универсального характера и, как следствие, фундаментального значения. С другой стороны, возможность формальных преобразований, преобразований без обращения к смыслу символьных конструкций служит необходимым условием и предпосылкой для осуществления подобных преобразований автоматом.

Исключительное значение среди различных видов формализации имеет логическая, или дедуктивная, формализация. Значимость логической формализации основана на отображении общих взаимозависимостей между абстрактными объектами (понятиями, суждениями, умозаключениями, …) с помощью дедуктивно упорядоченных систем символов. Объектом логической формализации может служить смысловое, абстрактное содержание (семантика) текстов на естественных языках, содержание любых естественнонаучных и прикладных теорий. Символьная логика при этом определяет общую структуру научных дисциплин, является методологией дедуктивной формализации содержательных теорий. Внутренним содержанием логики при таком ее понимании является создание и изучение структуры универсальных формальных систем.

В результате формализации какой-либо содержательной теории создается соответствующая формальная система. Все множество выделенных и формализуемых объектов, их свойств и отношений принято называть *предметной областью*, или *семантической моделью*, формальной системы. Следует обратить внимание на отличие такой трактовки модели от понятия математической модели. *Математической моделью* называют представление выделенной части внешнего мира с помощью тех или иных математических объектов – формальных средств. Таким образом, определения семантической и математической моделей в определенной степени противоположны.

В результате формализации устанавливается соответствие между объектами содержательной теории и символами – объектами формальной системы. Осуществляемое при формализации установление смысла и значения символов называют *интерпретацией*. Наделение символов смыслом и значением превращает их в термины. При формализации содержательной теории денотатами терминов являются абстрактные объекты – понятия содержательной теории. При формализации уже существующей содержательной теории создаваемая формальная система сразу обладает интерпретацией.

Одна и та же содержательная теория может быть формализована различными способами. Если создается новая формальная система для некоторой уже формализованной предметной области, то говорят о ее *переформализации*. В общем случае одной и той же семантической модели M может соответствовать несколько формальных систем $S_1, \ldots, S_n$ (рис. 2.12).

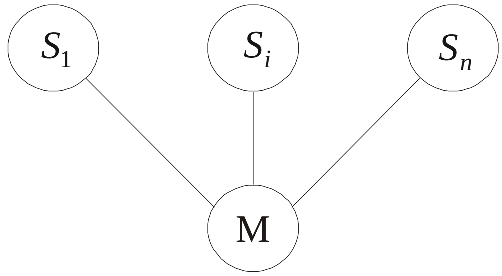


Рис. 2.12. Переформализация

С другой стороны, формальный аппарат, созданный для символьной репрезентации некоторой содержательной теории, может использоваться с большей или меньшей

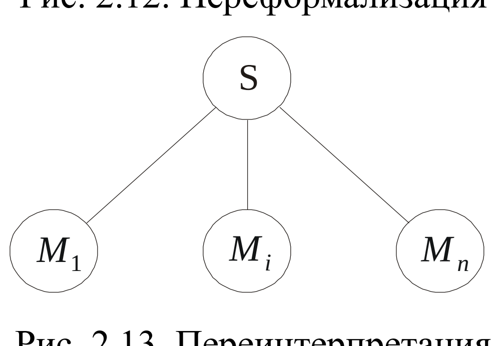


Рис. 2.13. Переинтерпретация

степенью адекватности для формализации других теорий. Наполнение терминов формальной системы смыслом и значением, отличными от первоначальных, называют *переинтерпретацией*. В результате переинтерпретации одной и той же формальной системе S может соответствовать несколько семантических моделей $M_1, \ldots, M_n$ (рис. 2.13).

Таким образом, формальная система определяется как конечное множество принятых по соглашению символов, называемых формулами и термами, и конечное число точных правил оперирования этими символами, которые дают возможность формирования новых комбинаций символов.

Преобразования формул представляют собой элементарные шаги дедуктивных рассуждений. Операции с формулами не должны требовать какого-либо знания смысла символов формальной системы, кроме того, который содержится в аксиомах и правилах преобразований. Сами аксиомы – это произвольные исходные позиции, для которых только потом подыскиваются содержательные системы, подтверждающие истинность формальной системы. Цель формальной системы – порождение последовательностей формул, называемых доказательствами.

Формальные выражения логического исчисления имеют смысл, то есть обозначают некоторое высказывание, только тогда, когда имеется какая-либо интерпретация его символов. Интерпретировать формулу – это значит связать с ней некоторое непустое множество внеязыковых объектов. Определение соответствия между символами формальной системы и множеством нелингвистических терминов называют также *построением семантики*. Построение семантики для формальной системы S состоит в выполнении действий:

1) выделении *области интерпретации*, называемой также *предметной областью*, или *семантической моделью*, – некоторого множества M нелингвистических объектов, их свойств и отношений между объектами;

2) определении функции, сопоставляющей формальным выражениям множества объектов, их свойства и отношения из M.

Строгое определение интерпретации сводится к следующему. Если $M \neq \varnothing$ – некоторое множество нелингвистических объектов, то интерпретация I на множестве M есть функция, сопоставляющая

– каждой индивидной константе a_i – элемент множества M, то есть $I(a_i) \in M$;

– m-местной функциональной константе f_i – функцию с областью определения M^m и областью значений M, то есть $I(f_i) = M^m \to M$;

– n-местной предикатной константе – подмножество кортежей длины n, то есть некоторый элемент из множества всех подмножеств M^n или $I(P_i^n) \in M(M^n)$.

Здесь M^m и M^n обозначают декартовы произведения множества M самого на себя соответственно m и n раз, а $M(M^n)$ – множество всех подмножеств M^n.

Таким образом, интерпретация формул исчисления предикатов состоит в конкретизации предметной области *M* и определении соответствий между символами, входящими в формулы (предметными константами, предметными переменными, функциональными и предикатными буквами), с одной стороны, и элементами, функциями и отношениями на *M* – с другой.

Возможной *реализацией* формального языка называют пару (*M*, *I*(*A*)), где *A* есть словарь такого языка – множество его нелингвистических символов. Интерпретированную формальную систему называют *формальным языком*.

Формула, истинная при любой возможной интерпретации, называется *общезначимой*. Примерами общезначимых формул могут служить $(\Phi \vee \overline{\Phi})$ и $(\Phi \to (\Phi \vee \Psi))$. Две формулы Φ и Ψ рассматриваются как *равнозначные*, что обозначается как Φ = Ψ, если общезначимой является формула $(\Phi \equiv \Psi)$. Примерами равносильных формул являются пары: Φ и $\overline{\overline{\Phi}}$; $(\overline{\Phi} \vee \overline{\Psi})$ и $(\overline{\Phi \wedge \Psi})$.

Если при некоторой интерпретации формула Φ истинна, то говорят, что данная интерпретация *удовлетворяет формуле* Φ. Если имеется некоторое множество формул и при фиксированной интерпретации истинностное значение каждой формулы этого множества равно 1, то говорят, что данная интерпретация *удовлетворяет этому* множеству. Формула Φ *логически следует* из некоторого множества формул Γ, что обозначается как $\Gamma \mapsto \Phi$, если любая удовлетворяющая Γ интерпретация удовлетворяет и Φ. Если некоторое множество формул Γ не удовлетворяется ни при какой интерпретации, то такое множество Γ называют *невыполнимым*, или *неудовлетворимым*. В частности, например, если из множества Γ логически следует формула Φ, то есть имеет место $\Gamma \mapsto \Phi$, то объединение множества Γ и формулы $\overline{\Phi}$ $(\Gamma^* = \Gamma \cup \overline{\Phi})$ является невыполнимым множеством.

Если множество Γ не является невыполнимым, то есть существует какая-либо интерпретация, удовлетворяющая Γ, то множество Γ называют *выполнимым*.

Истинность формальной системы нельзя определить, если не найдена соответствующая ей интерпретация, то есть если формальная система и ее положения не распространены на какую-либо содержательную систему, исходные положения которой определяются независимо от формальной системы. Как правило, формальная система создается как идеализированный образ чего-то другого, что может быть названо «содержательной теорией», и по отношению к чему эта формальная система представляет ее формализацию, образуя синтаксис последней, а содержательная теория – интерпретацию данной формальной системы.

Характерную черту формализации видят в том, что исследователю нет необходимости на каждом шаге дедуктивного вывода вникать в то, что означают составленные из символов формулы, они могут рассматриваться им до определенного момента просто как последовательности знаков.

Формальная система – это система символов, обязательными компонентами которой являются:

1) *алфавит* – множество исходных символов;
2) *правила построения формул* из символов алфавита;
3) *аксиомы* – исходные доказуемые формулы;
4) *правила вывода* из аксиом производных доказуемых формул.

Иначе можно сказать, что формальная система есть конечное множество принятых по соглашению символов, называемых формулами, и конечное число точных правил оперирования этими символами, которые дают возможность формирования новых комбинаций символов.

Алфавитом называется конечное множество элементарных, не разлагаемых символов, из которых могут создаваться другие, с более сложной структурой символы. Число элементарных символов называют *объемом алфавита*. В формализованных языках чаще всего используются буквы латинского и греческого алфавитов, цифры и специальные знаки.

Правила построения формул представляются в виде перечня синтаксически правильных выражений либо в виде алгоритма построения таких выражений. Примером правил построения формул может служить приводившееся ранее определение пропозициональных форм в логике высказываний:

1) все пропозициональные буквы являются пропозициональными формами;

2) если φ и ψ – пропозициональные формы, то $\overline{\varphi}$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ и $(\varphi \equiv \psi)$ также пропозициональные формы;

3) никакие другие выражения не являются пропозициональными формами.

Аксиомами называют общезначимые формулы, являющиеся исходными при логическом выводе в некоторой формальной системе или логическом исчислении. С содержательной точки зрения, аксиомы являются исходными положениями любой дедуктивной теории.

Аксиомы представляют собой конечную систему равенств, из которых путем тождественных преобразований (правил вывода) выводимы все возможные формулы формальной системы. Такая совокупность равенств называется *дедуктивно полной системой равенств*.

Разработка формализованной системы завершается указанием интерпретации. Неформально интерпретация определяется как распространение исходных положений формального языка на какую-либо содержательную систему или любое отображение, которое каждой переменной интерпретируемого языка L сопоставляет истинные или ложные положения содержательной системы.

Исторически первой системой логического вывода является силлогистика Аристотеля, в основу которой были положены принципы непротиворечивости, исключенного третьего и тождества. В соответствии с традиционными представлениями, аксиомы являются самоочевидными и не нуждающимися в доказательстве утверждениями, используемыми в качестве исходных при доказательстве других утверждений.

Система аксиом любой формальной системы должна отвечать требованиям непротиворечивости, независимости и полноты. *Принцип непротиворечивости* означает, что никакие два логически противоположные (контрадикторные) высказывания не могут быть истинными.

Непротиворечивостью, или *формальной непротиворечивостью,* называется свойство формальной системы *S*, заключающееся в том, что в *S* не может быть формулы φ, которая была бы доказуема вместе с ее отрицанием. Формальная система *S* является *непротиворечивой*, если в ней одновременно не существуют формулы Ф и $\overline{Ф}$. Формальные системы, не обладающие свойством непротиворечивости, называют *противоречивыми*. Если совокупность доказуемых формул формальной системы *S* совпадает с совокупностью вообще всех формул в системе *S*, то такая система *S* называется *тривиальной*. Тривиальность в таком случае совпадает с противоречивостью, поскольку из всякой формулы вида $Ф \wedge \overline{Ф}$ дедуктивно выводима любая формула. Следовательно, если система непротиворечива, то есть не является тривиальной, то в ней доказуема не каждая формула.

Кроме формальной непротиворечивости, имеется непротиворечивость содержательная. Говорят, что система *S* является *содержательно непротиворечивой*, если существует семантическая модель (интерпретация), в которой справедливы или общезначимы все формулы данной системы. Построение семантической модели для формальной системы служит методом доказательства ее непротиворечивости.

Под *независимостью аксиомы* от других аксиом формальной системы понимают такое отношение между данной аксиомой и другими аксиомами, что ни данная аксиома, ни ее отрицание не могут быть получены из других аксиом с помощью правил вывода, принятых в данной формальной системе. Говорят также, что аксиома *A* формальной системы *S* является *независимой относительно логического следования*, если ни сама аксиома, ни ее отрицание не являются логическим следствием остальных аксиом.

Понятие независимости аксиом обобщается для любых формул формальных систем. Формула Ф формальной системы *S* называется *независимой* относительно логического следования, если ни Ф, ни ее отрицание $\overline{Ф}$ не являются логическим следствием других формул.

Независимость аксиом и независимость формул называют *независимостью относительно логического следования*. Наряду с этим понятием существует понятие независимости относительно дедуктивной выводимости. Формула Ф формальной системы *S* является *независимой относительно дедуктивной выводимости*, если ни Ф, ни $\overline{Ф}$ не выводимы из остальных доказуемых формул. Если формула Ф независима, то обычно к *S* можно присоединить Ф или $\overline{Ф}$ Но если система *S* является дедуктивно полной, то ее расширение путем присоединения какой-либо недоказуемой формулы приводит к противоречию.

Понятие независимости, сформулированное в отношении формул, распространяется и на правила вывода. Правило вывода в логическом исчислении считается *независимым*, если существует хотя бы одна теорема, которая не может быть выведена из аксиом формальной системы *S* без применения этого правила.

Независимость аксиом и независимость правил вывода в формальной системе *S* означает отсутствие избыточных средств формализации и, как следствие, однозначность выводов, гарантию отсутствия противоречий. Таким образом, требование независимости преследует цель минимизации средств на создание формальной системы. Однако с точки зрения использования формальной системы наличие в ней избыточных средств является не только допустимым, но и желательным, поскольку делает такое использование более удобным.

Понятие независимости является отображением принципа, который может быть назван принципом минимизации средств символической репрезентации и связан с такими традиционными математическими понятиями, как необходимость и достаточность.

Полнота представляет собой металогическое понятие, выражающее связь между общезначимыми и доказуемыми формулами формальной системы *S*. Принято различать полноту в семантическом смысле и полноту в синтаксическом смысле. Логическое исчисление называется *семантически*, или *дедуктивно*, *полным*, если любая общезначимая формула логического исчисления доказуема в нем. Логическое исчисление называют *синтаксически полным*, если к системе его аксиом нельзя без противоречий присоединить никакую недоказуемую формулу в качестве аксиомы.

Логическое исчисление может быть полным в семантическом смысле и неполным в синтаксическом отношении. Примером такого исчисления является классическое исчисление предикатов. Данное исчисление семантически полно, поскольку любая его общезначимая формула доказуема в нем. Однако в синтаксическом аспекте классическое исчисление предикатов не является полным, так как существуют недоказуемые в нем формулы, которые можно без противоречий добавить к его аксиомам. В 1931 г. К. Геделем была доказана теорема о том, что всякая непротиворечивая и достаточно богатая по своим репрезентативным возможностям формальная система является дедуктивно неполной (*теорема о неполноте*).

Полнотой аксиом называют такое отношение между аксиомами формальной системы, что любые общезначимые формулы данной формальной системы могут быть получены с помощью логического вывода из системы аксиом.

В соответствии с определением формальной системы, *логическая*, или *дедуктивная*, *формализация содержательной теории* предполагает выполнение следующих действий:

1) определение терминов исходных понятий и терминов основных отношений между понятиями – логических операторов;

2) введение переменных и правил построения формул из переменных и логических операторов;

3) перечисление аксиом – исходных формул;

4) определение правил логического вывода доказуемых формул из исходных.

Дедуктивная формализация дает возможность уточнения и систематизации содержательных представлений и находит все большее применение в связи с автоматизацией решения задач в самых разнообразных областях человеческой деятельности.

2.9.6. Аксиомы и правила вывода

В классическом исчислении предикатов *логическим выводом* формулы Ф называется последовательность формул

$$\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n, \Phi, \qquad (2.55)$$

в которой каждая формула является

– либо аксиомой,

– либо гипотезой,

– либо получена из предыдущих формул последовательности по правилам вывода.

Различают исходные и производные правила вывода. *Исходные правила вывода* декларируются наряду с аксиомами формальной системы S. Во многих формальных системах исходным служит правило модус поненс. *Производные правила вывода* получают из исходных с помощью особых металогических преобразований.

Метавысказыванием называют высказывание, субъект которого указывает на другое высказывание или пропозициональную формулу. Примером метавысказывания может служить высказывание «Высказывание $P(a)$ является истинным». Метавысказывания могут образовывать бесконечную последовательность. Так, если приведенное выше метавысказывание обозначить как $P_1(a)$, то относительно высказывания $P_1(a)$ можно сделать высказывание $P_2(a)$ «Высказывание $P_1(a)$ является истинным». Затем можно сделать высказывание $P_3(a)$ относительно $P_2(a)$ и т. д. Разновидностью метавысказываний являются металогические высказывания о формулах, в частности, высказывания о том, что конкретная формула является общезначимой, доказуемой, выполнимой и т. п.

Возможность логической выводимости формулы Ф из посылок Φ_1, Φ_2, …, Φ_n выражается с помощью *метавысказываний* вида $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n \Rightarrow \Phi$, где символ $\Rightarrow$ является *символом дедуктивной выводимости*. Если среди посылок содержатся только аксиомы, то есть нет гипотез, то формула Ф называется *доказуемой формулой,* или *теоремой* исчисления предикатов. Произвольная доказуемая формула Ф обозначается как $\Rightarrow \Phi$. Если пропозициональная формула Ф при некоторых значениях ее свободных переменных становится истинным высказыванием, то ее называют *выполнимой формулой*. Если формула Ф истинна при любых значениях ее свободных переменных, то Ф называют *общезначимой формулой*. Принадлежность некоторой формулы Ф к общезначимым выражается с помощью метавысказывания $\mapsto \Phi$, в котором символ $\mapsto$ обозначает оператор *логического следования*.

Классическое исчисление высказываний *непротиворечиво*, что означает невыводимость в нем двух формул, одна из которых является отрицанием другой. Следовательно, все теоремы классического исчисления предикатов суть общезначимые пропозициональные формулы. Классическое исчисление предикатов является также *семантически полным*; это означает, что каждая общезначимая формула в нем дедуктивно выводима.

Еще одним свойством логического исчисления является его разрешимость. Исчисление называется *разрешимым*, если существует алгоритм, позволяющий для любой формулы Ф за конечное число шагов установить доказуемость либо недоказуемость Ф. Классическое исчисление высказываний является разрешимым, поскольку для любой формулы Ф за конечное число элементарных преобразований можно установить, является Ф общезначимой или нет.

Классическое исчисление предикатов называют также *исчислением предикатов первого порядка*, то есть таким исчислением предикатов, в котором допускается квантификация формул только по предметным переменным. Более сложными вариантами исчисления предикатов служат *исчисления предикатов высших порядков*. Частным случаем такого исчисления является *исчисление предикатов второго порядка*, в котором допустима квантификация формул как по предметным, так и по предикатным переменным.

В классическом исчислении предикатов в качестве правил вывода используются аксиомы, представленные в табл. 2.14, и три правила (табл. 2.15).

Формализация семантического понятия логического следования состоит в том, что если формула Ф логически следует из множества формул Г, то в этом исчислении можно построить вывод формулы Ф из посылок Г, то есть из Г логически следует Ф. В исчислении предикатов первого порядка этот вопрос решается положительно, и в нем разработано несколько способов формализации отношения логического следования.

Таблица 2.14. Аксиомы классического исчисления предикатов

$\Phi \to (\Psi \to \Phi)$	(2.56.1)
$(\Phi \to \Psi) \to ((\Phi \to (\Psi \to \Omega)) \to (\Phi \to \Omega)$	(2.56.2)
$\Phi \to (\Psi \to (\Phi \wedge \Psi))$	(2.56.3)
$(\Phi \wedge \Psi) \to \Phi$	(2.56.4)
$(\Phi \wedge \Psi) \to \Psi$	(2.56.5)
$(\Phi \to \Omega) \to ((\Psi \to \Omega) \to ((\Phi \vee \Psi) \to \Omega))$	(2.56.6)
$\Phi \to (\Phi \vee \Psi)$	(2.56.7)
$\Psi \to (\Phi \vee \Psi)$	(2.56.8)
$(\Phi \to \Psi) \to ((\Phi \to \overline{\Psi}) \to \overline{\Phi})$	(2.56.9)
$\overline{\overline{\Phi}} \to \Phi$	(2.56.10)
$\forall x \Phi x \to \Phi_y^x$	(2.56.11)
$\Phi_y^x \to \exists x \Phi$	(2.56.12)

Таблица 2.15. Правила вывода

$\dfrac{\Phi, \Phi \to \Psi}{\Psi}$ (модус поненс)	(2.57.1)
$\dfrac{\Phi \to \Psi}{\Phi \to \forall x \Psi}$ ($\forall$-правило)	(2.57.2)
$\dfrac{\Phi \to \Psi}{\exists x \Phi \to \Psi}$ ($\exists$-правило)	(2.57.3)

В рамках классического исчисления предикатов в качестве исходных выражений могут использоваться различные системы аксиом. Одна из таких систем была приведена выше, другая приводится в табл. 2.16.

Таблица 2.16. Аксиомы классического исчисления предикатов

$\Phi \to (\Psi \to \Phi)$	(2.58.1)
$(\Phi \to (\Psi \to \Omega)) \to ((\Phi \to \Psi) \wedge (\Phi \to \Omega))$	(2.58.2)
$(\Phi \wedge \Psi) \to \Phi$	(2.58.3)
$(\Phi \wedge \Psi) \to \Psi$	(2.58.4)
$\Phi \to (\Psi \to (\Phi \wedge \Psi))$	(2.58.5)
$\Phi \to (\Phi \vee \Psi)$	(2.58.6)
$\Psi \to (\Phi \vee \Psi)$	(2.58.7)
$(\Phi \to \Psi) \to ((\Omega \to \Psi) \wedge (\Phi \vee \Omega) \to \Psi))$	(2.58.8)
$(\Phi \to \Psi) \to ((\Phi \to \overline{\Psi}) \to \overline{\Phi})$	(2.58.9)
$\overline{\overline{\Phi}} \to \Phi$	(2.58.10)
$\forall x(F_x^w A \to F_t^w A)$	(2.58.11)
$\forall x(F_x^w(\Psi \to \Phi) \to (\Psi \to \forall x F_x^w \Phi))$	(2.58.12)
$F_t^w \Phi \to \exists x F_x^w \Phi$	(2.58.13)
$\forall x F_x^w(\Phi \to \Psi) \to (\exists x F_x^w(\Phi \to \Psi)$	(2.58.14)

Правилами вывода являются правило модус поненс

$$\frac{\Phi, \Phi \to \Psi}{\Psi} \qquad (2.59.1)$$

и правило обобщения

$$\frac{\Phi}{\forall x F_x^w \Phi}. \qquad (2.59.2)$$

Эффективность вывода понимается как возможность однозначно установить для любой последовательности формул, является она выводом или нет, путем анализа в ней каждой формулы. В результате анализа должно быть указано, на каком основании каждая формула включена в эту последовательность:

– как аксиома;
– как гипотеза;
– как непосредственно выводимая из предшествующих формул.

Для удобства вывод принято представлять в виде столбца пронумерованных формул, справа от которых дается результат их анализа. Ниже приводится пример вывода формулы $\forall x(P_1(x) \to P_3(x))$ из посылок $\forall x(P_1(x) \to P_2(x))$ и $\forall x(P_2(x) \to P_3(x))$.

1)	$\forall x(P_1(x) \to P_2(x))$	посылка
2)	$\forall x(P_2(x) \to P_3(x))$	посылка
3)	$\forall x((P_1(x) \to P_2(x)) \to (P_1(w) \to P_2(w)))$	А (11)
4)	$P_1(w) \to P_2(w)$	МП (1, 3)
5)	$\forall x(P_2(x) \to P_3(x)) \to (P_2(w) \to P_3(w))$	А (11)

6)	$P_2(w) \to P_3(w)$	МП (2,5)
7)	$(P_2(w) \to P_3(w)) \to (P_1(w) \to (P_2(w) \to P_3(w)))$	А (1)
8)	$P_1(w) \to (P_2(w) \to P_3(w))$	МП (6,7)
9)	$(P_1(w) \to (P_2(w) \to P_3(w)) \to$ $\to ((P_1(w) \to P_2(w)) \to (P_1(w) \to P_3(w)))$	А (2)
10)	$(P_1(w) \to P_2(w)) \to (P_1(w) \to P_3(w))$	МП (8,9)
11)	$P_1(w) \to P_3(w)$	МП (4,10)
12)	$\forall x(P_1(x) \to P_3(x))$	О (11)

Здесь справа от формул приняты следующие обозначения: МП (m, n) означает, что формула в этой строке получена на основании правила модус поненс, примененного к строкам m и n данного вывода; А (n) обозначает аксиому n, а О (n) указывает на то, что данная формула получена в результате применения правила обобщения к строке n данного вывода.

С практической точки зрения исчисления подобного (гильбертовского) типа неудобны, так как процедура вывода слишком *сложна* и *неестественна*. Каждый шаг такого вывода является элементарным, то есть очень мелким – применением правила к одной или двум формулам. Наличие всего двух правил и общее число (которое может быть очень большим) аксиом, гипотез и уже полученных формул могут затруднить вывод настолько, что время вывода превысит человеческие возможности.

Длина вывода может быть значительно уменьшена, если использовать при выводе не столь бедные средства, как элементарные шаги, а более крупные блоки. Укрупнение таких логических блоков может быть получено путем создания производных правил вывода, дополняющих *основные правила вывода* формальной системы. *Производным правилом вывода* в некотором логическом исчислении называют правило, заключение которого может быть получено из его посылок с помощью основных правил и аксиом логического исчисления.

Кроме основных и производных правил, различают правила прямые и непрямые. *Прямые правила вывода* – это правила непосредственного перехода от посылок к заключению. *Непрямыми правилами вывода* называют правила, представляемые в виде метатеорем – правил перехода от одних формальных выводов к другим. Однако применение непрямых правил в исчислениях гильбертовского типа оказывается невозможным. Таким образом, исчисления подобного типа допускают формализацию только прямых способов рассуждений.

Ниже приводятся примеры создания производных правил. Эти же примеры могут рассматриваться как примеры логического вывода.

Вывод 1.

1) Φ	посылка
2) Ψ	посылка
3) $\Phi \to (\Psi \to (\Phi \wedge \Psi))$	А (5)
4) $\Psi \to (\Phi \wedge \Psi)$	МП (1,3)
5) $\Phi \wedge \Psi$	МП (2,4)

Полученный вывод представляет собой прямое производное правило, называемое *правилом введения конъюнкции* из посылок Φ и Ψ:

$$\frac{\Phi, \Psi}{\Phi \wedge \Psi}. \qquad (2.60.1)$$

Вывод 2.

1) $\Phi \to \Psi$ посылка
2) $\overline{\Psi}$ посылка
3) $(\Phi \to \Psi) \to ((\Phi \to \overline{\Psi}) \to \overline{\Phi})$ А (9)
4) $(\Phi \to \overline{\Psi}) \to \overline{\Phi}$ МП (1,3)
5) $\overline{\Psi} \to (\overline{\Phi} \to \overline{\Psi})$ А (1)
6) $\Phi \to \overline{\Psi}$ МП (2,5)
7) $\overline{\Phi}$ МП (6,4)

Данное правило представляет собой уже упоминавшееся ранее правило модус толленс:

$$\frac{\Phi \to \Psi, \overline{\Psi}}{\overline{\Phi}}. \qquad (2.60.2)$$

Вывод 3.

1) $\Phi \to \Psi$ посылка
2) $\Psi \to \Omega$ посылка
3) $(\Phi \to (\Psi \to \Omega)) \to ((\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Omega))$ А(2)
4) $(\Psi \to \Omega) \to (\Phi \to (\Psi \to \Omega))$ А(1)
5) $\Phi \to (\Psi \to \Omega)$ МП (2,4)
6) $(\Phi \to \Psi) \to (\Phi \to \Omega)$ МП (5,3)
7) $\Phi \to \Omega$ МП (1,6)

В результате вывода получено известное, широко применяемое и интуитивно очевидное *правило транзитивности импликации*:

$$\frac{\Phi \to \Psi, \Psi \to \Omega}{\Phi \to \Omega}. \qquad (2.60.3)$$

Таким образом, идея обоснования производных правил и корректности их применения довольно проста: если некоторый вывод однажды построен, то его посылки и заключение оформляются в виде прямого правила перехода от посылок к заключению. В дальнейшем эти правила используются наравне с основными и позволяют существенно сократить длину логического вывода. Хотя в математике такой вывод рассматривается как не совсем строгий и требуется его развертывание в полный путем замены каждого производного правила выводом его заключения из посылок, в инженерных и прочих приложениях использование производных правил вполне достаточно, поскольку прикладные дисциплины используют результаты логики в готовом или «снятом» виде.

Ниже приводится сводка производных правил:

– закон снятия двойного отрицания

$$\frac{\overline{\overline{\Phi}}}{\Phi}; \qquad (2.60.4)$$

– закон введения двойного отрицания

$$\frac{\Phi}{\overline{\overline{\Phi}}}; \qquad (2.60.5)$$

– правило коммутативности дизъюнкции

$$\frac{\Phi \vee \Psi}{\Psi \vee \Phi}; \qquad (2.60.6)$$

– правило коммутативности конъюнкции

$$\frac{\Phi \wedge \Psi}{\Psi \wedge \Phi}; \qquad (2.60.7)$$

– правила де Моргана

$$\frac{\overline{\Phi \wedge \Psi}}{\overline{\Phi} \vee \overline{\Psi}}; \qquad (2.60.8)$$

$$\frac{\overline{\Phi} \wedge \overline{\Psi}}{\overline{\Phi \vee \Psi}}; \qquad (2.60.9)$$

$$\frac{\overline{\Phi} \vee \overline{\Psi}}{\overline{\Phi \wedge \Psi}}; \qquad (2.60.10)$$

$$\frac{\overline{\Phi \vee \Psi}}{\overline{\Phi} \wedge \overline{\Psi}}; \qquad (2.60.11)$$

– правила удаления дизъюнкции посредством отрицания

$$\frac{\Phi \vee \overline{\Psi}, \Psi}{\Phi}; \qquad (2.60.12)$$

$$\frac{\overline{\Phi} \vee \Psi, \Phi}{\Psi}; \qquad (2.60.13)$$

$$\frac{\Phi \vee \Psi, \overline{\Phi}}{\Psi}; \qquad (2.60.14)$$

$$\frac{\Phi \vee \Psi, \overline{\Psi}}{\Phi}; \qquad (2.60.15)$$

– - правила Евклида

$$\frac{\Phi \to \overline{\Phi}}{\overline{\Phi}}; \qquad (2.60.16)$$

$$\frac{\overline{\Phi} \to \Phi}{\Phi}; \qquad (2.60.17)$$

– правила преобразования кванторов

$$\begin{array}{c} \exists x\Phi(x) \\ \hline\hline \overline{\forall x\overline{\Phi(x)}} \end{array}; \qquad (2.60.18)$$

$$\begin{array}{c} \forall x\Phi(x) \\ \hline\hline \overline{\exists x\overline{\Phi(x)}} \end{array}; \qquad (2.60.19)$$

– правила перестановки кванторов

$$\frac{\forall x\forall y\Phi}{\forall y\forall x\Phi}; \qquad (2.60.20)$$

$$\frac{\exists x\exists y\Phi}{\exists y\exists x\Phi}; \qquad (2.60.21)$$

$$\frac{\exists x\forall y\Phi}{\forall y\exists x\Phi}; \qquad (2.60.22)$$

– правило пронесения квантора $\forall$ через конъюнкцию

$$\frac{\forall x(\Phi(x) \wedge \Psi(x))}{\forall x\Phi(x) \wedge \forall x\Psi(x)}; \qquad (2.60.23)$$

– правило пронесения квантора $\exists$ через дизъюнкцию

$$\frac{\exists x(\Phi(x) \vee \Psi(x))}{\exists x\Phi(x) \vee \exists x\Psi(x)}; \qquad (2.60.24)$$

– правило переименования переменных

$$\frac{\forall x P_x^w \Phi}{\forall y P_y^w \Phi}; \qquad (2.60.25)$$

– правила применения эквивалентности

$$\frac{\Phi \to \Psi, \Psi \to \Phi}{\Phi \equiv \Psi}; \qquad (2.60.26)$$

$$\frac{\Phi \equiv \Psi}{\Phi \to \Psi}; \qquad (2.60.27)$$

$$\frac{\Phi \equiv \Psi}{\Psi \to \Phi}. \qquad (2.60.28)$$

Число производных правил в исчислениях гильбертовского типа может быть бесконечным. Однако при этом возникает проблема соотнесения многих формальных выражений с естественными способами рассуждений. Решение данной проблемы заключается в создании исчислений других типов, в которых допускается использование как прямых, так и непрямых типов рассуждений. К таким исчислениям относятся системы *натурального*, или *естественного вывода*.

2.10. Неклассическая логика

Неклассическая логика является общим названием для ряда направлений в современной логике, в которых используются понятия, принципы и методы, отличные от принятых в традиционной. В первую очередь можно отметить другое понимание истинностного значения, отрицания, импликации и логического следования. Общей причиной появления этих направлений послужило существование различного рода парадоксов, объяснение которых с позиций классической логики не может быть признано удовлетворительным. Такими новыми направлениями являются интуиционистская логика, конструктивная логика и многозначная логика.

Интуиционизмом называют концепцию, в соответствии с которой критерием истинности высказываний является их интуитивная убедительность. Однако понятие самой интуитивной убедительности при этом никаким образом не раскрывается. В рамках этой концепции существование какого-либо объекта расценивается как возможность его построения из некоторых простых, интуитивно очевидных элементов. Процесс такого построения также должен быть простым и состоять из очевидных элементарных действий.

В рамках *интуиционистской логики* А. Гейтингом в 1930 г. был предложен один из вариантов исчисления предикатов. В основу этого исчисления была положена следующая система схем аксиом (табл. 2.17).

Таблица 2.17. Система аксиом интуиционистской логики

$\Phi \to (\Psi \to \Phi)$	(2.61.1)
$(\Phi \to \Psi) \to ((\Phi \to (\Psi \to \Omega)) \to (\Phi \to \Omega)$	(2.61.2)
$\Phi \to (\Psi \to (\Phi \wedge \Psi)$	(2.61.3)
$(\Phi \wedge \Psi) \to \Phi$	(2.61.4)
$(\Phi \wedge \Psi) \to \Psi$	(2.61.5)
$(\Phi \to \Omega) \to ((\Psi \to \Omega) \to ((\Phi \vee \Psi) \to \Omega)$	(2.61.6)
$\Phi \to (\Phi \vee \Psi)$	(2.61.7)
$\Psi \to (\Phi \vee \Psi)$	(2.61.8)
$(\Phi \to \Psi) \to ((\Phi \to \overline{\Psi}) \to \overline{\Phi})$	(2.61.9)
$\overline{\Phi} \to (\Phi \to \Psi)$	(2.61.10)
$\forall x \Phi(x) \to \Phi(y)$	(2.61.11)
$\Phi(y) \to \exists x \Phi(x)$	(2.61.12)

В этой таблице символы Φ, Ω и Ψ являются метапеременными, на место которых осуществляется подстановка пропозициональных формул, символы *x* и *y* – индивидные переменные.

Отличие предложенного Гейтингом исчисления от классического исчисления предикатов, прежде всего, состоит в замене классической схемы $\overline{\overline{\Phi}} = \Phi$, выражающей закон двойного отрицания, формулой (2.61.10). При этом сама формула $\overline{\overline{\Phi}} = \Phi$ и формула $\Phi \vee \overline{\Phi}$ оказываются невыводимыми в рамках этого исчисления. Вместо формулы $\overline{\overline{\Phi}} = \Phi$ допускается только формула $\Phi \to \overline{\overline{\Phi}}$; формула $\overline{\overline{\Phi}} = \Phi$ считается неприемлемой, так как путем доказательства от противного не всегда оказывается возможным указать эффективный алгоритм перехода от $\overline{\overline{\Phi}}$ к Ф.

Правилами вывода в данном исчислении предикатов являются:

$$\frac{\Phi \to \Psi, \Phi}{\Psi} \text{ (модус поненс);} \qquad (2.62.1)$$

$$\frac{\Psi \to \Phi(x)}{\Psi \to \forall x \Phi(x)}; \qquad (2.62.2)$$

$$\frac{\Phi(x) \to \Psi}{\exists x \Phi(x) \to \Psi}. \qquad (2.62.3)$$

В 1932 г. А.Н. Колмогоровым была дана интерпретация исчисления, предложенного Гейтингом. В этой интерпретации метапеременные понимаются как высказывания о том, что некоторая задача имеет решение. При этом высказывание считается доказуемым, если приводится метод решения задачи. Тогда конъюнктивное высказывание доказуемо, если указывается метод решения обеих задач. Дизъюнкция двух высказываний считается доказуемой, если дается метод решения хотя бы одной задачи. Импликация двух высказываний трактуется как сведение решения второй задачи к решению первой. Отрицание высказывания считается доказуемым, если приводится доказательство отсутствия решения задачи. Если некоторая задача зависит от индивидной переменной *x*, то высказывание вида $\forall x \Phi(x)$ о ее решении интерпретируется как доказуемое, если указывается метод решения для любого *x*. Высказывание вида $\exists x \Phi(x)$ доказуемо, если указано конкретное значение *x* и решение задачи для этого *x*.

Конструктивная логика изучает объекты и способы их построения. Основное отличие конструктивной логики от классической состоит в том, что в ней отвергаются принципы двойного отрицания и исключенного третьего. Кроме того, в конструктивной логике принимается другая трактовка дизъюнкции и квантора существования. Формула $\Phi \vee \Psi$ считается выводимой, если выводимой является Ф или Ψ. Формула $\exists x \Phi(x)$ считается выводимой, если может быть выведена формула $\exists x \Phi(a)$ для некоторого конкретного терма – предметной константы *a*.

Многозначная логика отличается от классической прежде всего тем, что высказываниям в ней приписывается более двух истинностных значений. Первой такой логикой явилась теория, разработанная в 1920 г. польским логиком Я. Лукасевичем (1878–1956). Объективной причиной появления многозначных логик служит то обстоятельство, что истинность или ложность высказывания может быть определена не во всех ситуациях либо может быть определена лишь с большей или меньшей вероятностью. Очевидным примером такого высказывания может служить высказывание о наступлении какого-либо случайного события, в частности, высказывание о возможном поражении цели при стрельбе или об успешности сдачи предстоящего экзамена по логике. Как истинность, так и ложность такого рода высказываний характеризуется определенной вероятностью.

В известных вариантах многозначной логики классическая логика не отвергается полностью, но считается непригодной для адекватного описания многих ситуаций. И многозначная логика представляет собой различные способы обобщения логики классической. Одним из таких вариантов многозначной логики является *логика вероятностная*.

В вероятностной логике каждому высказыванию наряду с истинностными значениями 0 и 1 приписываются промежуточные значения – действительные числа от 0 до 1, называемые *вероятностью истинности* или *степенью правдоподобия*. При этом каждому истинному высказыванию ставится в соответствие значение 1, а любому ложному высказыванию – значение 0. Гипотетическим высказываниям приписываются значения вероятности, принадлежащие отрезку [0, 1].

Вероятность истинности дизъюнкции двух высказываний определяется как сумма их вероятностей; вероятность истинности конъюнкции двух высказываний определяется как произведение их вероятностей. Вероятность истинности отрицания некоторого высказывания считается равной вероятности противоположного события.

Еще одним вариантом неклассической логики служит *логика модальная*, в которой изучаются модальности и логические исчисления с *модальными операторами*. Модальные операторы являются дополнительными к логическим операторам классической логики. Основными модальными операторами являются *оператор необходимости* □, смысл которого может быть выражен словами «необходимо, что», и *оператор возможности* ◊, трактуемый как аналог выражения «возможно, что». Здесь уже на семантическом уровне можно усмотреть некоторую связь между оператором необходимости и квантором общности, а также между оператором возможности и квантором существования.

Среди других направлений в современной логике могут быть названы логика классов, логика отношений, логическая семантика и др. Таким образом, логика не является вполне завершенной теорией и ее развитие продолжается. При этом новые формальные системы строятся, как правило, в виде расширений классической логики.

2.11. Размытые множества

Определение истинности любого высказывания выше сводилось к выяснению принадлежности элемента x множеству истинности. И ответ на этот вопрос был вполне определенным: элемент либо принадлежал множеству истинности, и тогда высказывание определялось как истинное, либо не принадлежал, и высказывание считалось ложным.

Однако в реальном мире такая определенность не всегда имеет место. Можно сказать, что неточность является характерной чертой человеческого мышления вообще. Не только в обыденной жизни, но и в содержательных научных теориях, особенно в гуманитарных науках, понятия нередко оказываются нечеткими (размытыми, расплывчатыми, диффузными).

Практическая деятельность, будь то деятельность отдельного человека либо деятельность любого коллектива или сообщества, всегда осуществляется в условиях некоторой неопределенности. Один вид такой неопределенности давно известен и хорошо изучен – это *неопределенность вероятностная*, или *стохастическая*, связанная со случайными величинами или процессами. Для решения задач в условиях стохастической неопределенности используются методы теории вероятностей и математической статистики.

Другой вид неопределенности связан с размытостью понятий, нечеткостью целей и ограничений. Такого рода неопределенность называют *лингвистической*.

В области картографии и геоинформатики мы сталкиваемся с обоими видами неопределенности. Примерами стохастической неопределенности являются, в частности, такие характеристики леса, отображаемые на топографических картах, как высота деревьев, средний диаметр деревьев или среднее расстояние между деревьями. Ясно, что все перечисленные величины являются случайными. На картах показываются их усредненные значения, определенные с той или иной ошибкой.

В других случаях трудно определить тот или иной геометрический параметр естественного объекта в конкретной точке. Примером такого параметра может служить ширина реки: берега реки не параллельные прямые, а две произвольные кривые.

Примером лингвистической неопределенности при картографировании и геоинформационном моделировании являются многие естественные объекты: овраг, балка, заболоченный луг, высокотравная или низкотравная растительность и т. п. Любой овраг проходит определенные стадии своего развития и с течением времени превращается в балку. Выполаживание и задерновывание склонов оврага происходят непрерывно и с малой скоростью, и не всегда можно однозначным образом отнести конкретный объект к оврагам или балкам.

Заболоченный луг является также плохо определенным объектом. С одной стороны, заболоченный луг может мало отличаться от луга, с другой стороны – от болота. Очевидно, что заболоченный луг должен существенно отличаться от луга, но что такое «существенно», не совсем ясно. Кроме того, влажность почв может зависеть от сезона. Участки с высокотравной растительностью содержат и низкотравную и могут переходить в участки с другим типом растительности непрерывным образом. Лиственный лес может содержать большее или меньшее количество деревьев хвойных пород, а в хвойном лесу могут встречаться лиственные деревья.

Таким образом, лингвистическая неопределенность в картографии обусловлена трудностью надежной идентификации объектов (чаще всего – естественных), отнесения их к тому или иному типу. Причиной подобных затруднений может быть не только отсутствие четких критериев идентификации, то есть расплывчатое определение понятий, но и сложность или высокая стоимость процесса идентификации.

Кроме семантической размытости понятий картографируемых объектов, можно указать и на размытость объектов в геометрическом смысле. Многие естественные объекты не имеют четкой границы. Такими объектами являются объекты растительности, грунтов, гидрографии и рельефа. Часто один естественный объект переходит в другой не скачком, а плавным образом. Существуют объекты, границы которых на картах вообще не изображаются, например, урочища, горные хребты или горные системы.

Перечисленные выше картографические примеры не являются исчерпывающими и демонстрируют лишь сам факт присутствия лингвистической неопределенности в картографии и геоинформатике.

Наибольшую известность для решения задач в условиях лингвистической неопределенности получили методы *теории нечетких множеств*, развиваемой с 1960-х г. американским математиком Л. Заде и его последователями. Основная идея теории расплывчатых множеств состоит в том, что универсальное множество разбивается на подмножества – классы объектов – и каждому элементу x ставится в соответствие некоторое число в диапазоне от 0 до 1, характеризующее его *степень принадлежности* к некоторому классу X. Это соответствие задается функцией $\mu(x \in X)$, принимающей некоторые (не обязательно все) значения от 0 до 1. Чем больше значение μ, тем больше степень принадлежности элемента x классу X. Значение 1 означает *полную принадлежность* $(x \in X)$, а значение 0 указывает на *полную непринадлежность* $(x \notin X)$ элемента x к X. В частном случае, когда μ принимает в качестве значений *только* 0 и 1, мы имеем дело с двузначной логикой, соответствующей обычным представлениям о множествах, как некоторых «жестких» образованиях.

Наряду с теоретико-множественной трактовкой «размытости», возможно ее другое понимание, когда говорят не о размытых множествах, а о расплывчатых или нечетких свойствах и вместо $\mu(x \in X)$ пишут $\mu X(x)$, где $X(x)$ – расплывчатый одноместный предикат. Такое понимание нечеткости хорошо согласуется с атрибутивной трактовкой множеств.

Ниже дается более подробное и более формальное изложение основных идей теории размытых множеств. Данная теория интересна тем, что в ее рамках осуществлена формализация «неточности мышления», столь характерного для нематематизированных наук. Однако, применение этой теории на практике сопряжено с проблемой определения функций принадлежности μ, которые должны задаваться вне самой теории.

Пусть имеется универсальное множество U, называемое *пространством*. Пусть также множество X является подмножеством множества U. Однако во многих случаях между множеством X и другими элементами множества U нельзя провести четкую границу. Таким образом, если U представляет собой все множество картографируемых (или моделируемых) объектов, то многие типы объектов можно считать размытыми множествами.

Нерасплывчатым, или *неразмытым*, *множеством* *X* называют множество упорядоченных пар

$$X = \{x, \chi_X(x)\},\ x \in U, \qquad (2.63)$$

где

$$\chi_X : U \to \{0, 1\} \qquad (2.64)$$

есть *характеристическая функция*, принимающая значения

$$\chi_X(x) = \begin{cases} 1, x \in X; \\ 0, x \notin X. \end{cases} \qquad (2.65)$$

Таким образом, характеристическая функция может принимать только два значения. Если элемент *x* принадлежит множеству *X*, то значение характеристической функции равно 1, в противном случае – равно 0.

Понятие размытого множества вводится как обобщение определения неразмытого множества. *Расплывчатое* или *размытое множество* *X* в пространстве *U* определяется как совокупность упорядоченных пар

$$X = \{x, \mu_X(x)\},\ x \in U, \qquad (2.66)$$

где

$$\mu_X : U \to [0, 1]. \qquad (2.67)$$

Функция μ_X называется *функцией принадлежности*, а ее значение $\mu_X(x)$ называют *степенью принадлежности* *x* к *X*. Если $\mu_X(x)$ может принимать только значения 0 или 1, то множество (2.66) является четким множеством. Если для любого $x \in U$ значение $\mu_X(x) = 0$, то *X* – *пустое множество* $(X = \varnothing)$. Если для всех $x \in U$ имеет место $\mu_X(x) = 1$, то множество *X* *совпадает со всем пространством* *U*, то есть $(X = U)$.

Размытое множество *X* называют *нормальным*, если

$$\sup_{x \in U} \mu_X(x) = 1, \qquad (2.68)$$

где $\sup\limits_{x \in U} \mu_X(x)$ есть *верхняя граница* множества значений функции принадлежности $\mu_X(x)$; в противном случае множество *X* называют *субнормальным*. Если размытое множество не пусто, то его всегда можно преобразовать в нормальное путем деления функции принадлежности $\mu_X(x)$ на $\sup\limits_{x \in U} \mu_X(x)$.

Множество

$$S(X) = \{x : \mu_X(x) > 0, x \in U\} \qquad (2.69)$$

называется *носителем* множества *X*. Если *X* является обычным множеством, то носитель совпадает с самим множеством: $S(X) = X$.

На размытых множествах вводятся отношения и операции, аналогичные отношениям и операциям на обычных множествах.

Два расплывчатых множества *X* и *Y* называются *равными*, что записывается как

$$X = Y, \qquad (2.70)$$

если для всех x выполняется равенство значений их функций принадлежности

$$\mu_X(x) = \mu_Y(x). \qquad (2.71)$$

Расплывчатое множество X является *подмножеством* расплывчатого множества Y, или *содержится* в множестве Y, или множество Y *включает* множество X, если для всех $x \in X$ имеет место

$$\mu_X(x) \le \mu_Y(x). \qquad (2.72)$$

Размытое множество X^* является *дополнением размытого множества* X, если

$$\mu_{X^*} = 1 - \mu_X. \qquad (2.73)$$

Здесь предполагается, что множество X является нормированным. Множество, являющееся дополнением множества X, обозначается как $\overline{X}$.

Пересечение двух нечетких множеств X и Y, обозначаемое как $X \bigcap Y$, представляет собой множество кортежей

$$(X \bigcap Y) = \{x, \mu_{X \bigcap Y}(x)\}, \qquad (2.74)$$

где функция принадлежности определяется как

$$\mu_{X \bigcap Y}(x) = \min\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\},\ x \in U. \qquad (2.75)$$

Объединение двух размытых множеств X и Y, обозначаемое как $X \bigcup Y$, есть размытое множество

$$(X \bigcup Y) = \{x, \mu_{X \bigcup Y}(x)\}, \qquad (2.76)$$

где функция принадлежности имеет вид

$$\mu_{X \bigcup Y}(x) = \max\{\mu_X(x), \mu_Y(x)\},\ x \in U. \qquad (2.77)$$

Выражения (2.75) и (2.77) могут быть представлены с использованием символов операций конъюнкции и дизъюнкции:

$$\mu_{X \bigcap Y} = \mu_X \wedge \mu_Y; \qquad (2.78)$$

$$\mu_{X \bigcup Y} = \mu_X \vee \mu_Y, \qquad (2.79)$$

что является условной записью.

Операции пересечения и объединения размытых множеств обладают свойствами:

– коммутативности

$$X \bigcap Y = Y \bigcap X; \qquad (2.80.1)$$

$$X \bigcup Y = Y \bigcup X; \qquad (2.80.2)$$

– ассоциативности

$$(X \bigcap Y) \bigcap Z = X \bigcap (Y \bigcap Z) = X \bigcap Y \bigcap Z; \qquad (2.81.1)$$

$$(X \bigcup Y) \bigcup Z = X \bigcup (Y \bigcup Z) = X \bigcup Y \bigcup Z; \qquad (2.81.2)$$

– и дистрибутивности относительно друг друга

$$(X \bigcup Y) \bigcap Z = (X \bigcap Z) \bigcup (Y \bigcap Z); \qquad (2.82.1)$$

$$(X \bigcap Y) \bigcup Z = (X \bigcup Z) \bigcap (Y \bigcup Z). \qquad (2.82.2)$$

Из свойств объединения и пересечения расплывчатых множеств следует, что эти операции могут быть распространены на произвольное число расплывчатых множеств.

Алгебраическим произведением расплывчатых множеств X и Y, обозначаемым через $X \otimes Y$, называют расплывчатое множество

$$(X \otimes Y) = \{x, \mu_{X \otimes Y}(x)\}, \quad (2.83)$$

функция принадлежности которого имеет вид

$$\mu_{X \otimes Y}(x) = \mu_X(x) \cdot \mu_Y(x), \; x \in U. \quad (2.84)$$

Алгебраической суммой размытых множеств X и Y, обозначаемой через $X \oplus Y$, называется множество

$$(X \oplus Y) = \{x, \mu_{X \oplus Y}(x)\}, \quad (2.85)$$

где функция принадлежности определяется как

$$\mu_{X \oplus Y}(x) = \mu_X(x) + \mu_Y(x) - \mu_{X \otimes Y}(x), \; x \in U. \quad (2.86)$$

Операции алгебраического произведения и алгебраической суммы размытых множеств коммутативны и ассоциативны, но не дистрибутивны.

Бинарным размытым отношением R называют множество на прямом произведении $U_1 \times U_2$, где U_1 и U_2 – разные экземпляры пространства U:

$$R = \{(x_1, x_2), \mu_R(x_1, x_2)\}, \; x_1 \in U_1, \; x_2 \in U_2 \quad (2.87)$$

и $\mu_R(x_1, x_2)$ – степень принадлежности кортежа (x_1, x_2) к R.

Обобщением двуместного размытого отношения является *n-местное размытое отношение* R^n в пространстве U, которое определяется как размытое множество на прямом произведении $U_1 \times ... \times U_n$:

$$R^n = \{(x_1, ..., x_n), \mu_{R^n}(x_1, ..., x_n)\}, \quad (2.88)$$

где $x_i \in U_i$, $i = 1, \ldots, n$.

В качестве примера пространства рассмотрим действительную прямую $U = (-\infty, \infty)$. Тогда расплывчатое условие «x_1 намного (насколько?) меньше x_2» (что записывается как $x_1 << x_2$) определяет в U нечеткое множество, функция принадлежности которого может иметь, например, такой вид:

$$\mu_R(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, x_1 \ge x_2 \\ [1 + (x_2 - x_1)^{-2}]^{-1}, x_1 < x_2 \end{cases}. \quad (2.89)$$

Размытое множество Z в пространстве $W = U \times V$ ($U = \{x\}$), ($V = \{y\}$) с функцией принадлежности $\mu_Z(x, y)$ называется *разложимым* по U и V, если возможно представление $Z = X \bigcap Y$, или иначе

$$\mu_Z(x, y) = \mu_X(x) \wedge \mu_Y(y), \quad (2.90)$$

где X и Y – размытые множества соответственно в пространствах U и V с функциями принадлежности $\mu_X(x)$ и $\mu_Y(y)$.

Пусть X – нечеткое множество в пространстве U с функцией принадлежности μ_X. *Образом* нечеткого множества X при отображении $f: U \to V$ из пространства $U = \{x\}$ в пространство $V = \{y\}$ называют нечеткое множество

$Y = f(X),\ Y \in V$ (2.91)

с функцией принадлежности

$$\mu_Y(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu_X(x),\ f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0,\ f^{-1} = \varnothing \end{cases}. \qquad (2.92)$$

Если Y – размытое множество в V с функцией принадлежности μ_Y, то его *прообразом* при отображении f называют размытое множество

$$X = f^{-1}(Y) \qquad (2.93)$$

с функцией принадлежности

$$\mu_X(x) = \mu_Y(f(x)) \forall x \in X,\ \mu_Y(y/x). \qquad (2.94)$$

Если $Y(x)$ – нечеткое множество в пространстве $V = \{y\}$, и его функция принадлежности зависит от x как от параметра, что обозначается как $\mu_Y(y/x)$, то множество $Y(x)$ называется *условным* по x, или просто *условным размытым множеством*. Если областью изменения параметра x при этом является пространство U и каждому $x \in U$ ставится в соответствие размытое множество $Y(x)$ в V, то функция $\mu_Y(y/x)$ определяет отображение из U в пространство размытых множеств в V. Такое отображение называют *нечетким* (или *размытым, расплывчатым*) *отображением* из U в V. Размытое отображение из U в V можно также определить как отображение $Y: U \to V$, ставящее в соответствие каждому $x \in U$ размытое множество $Y(x)$ в V.

Образом размытого множества X в U при нечетком отображении с функцией принадлежности $\mu_Y(y/x)$ называют размытое множество Y, определяемое функцией принадлежности

$$\mu_Y(y) = \sup_{x \in X} \min\{\mu_X(x), \mu_Y(y/x)\}. \qquad (2.95)$$

Расплывчатые множества могут быть использованы при принятии решений в условиях неопределенности. Пусть $U = \{x\}$ – пространство возможных решений. Требуется найти решение при нечеткой цели G и нечетком ограничении C. Тогда размытая цель G отождествляется с фиксированным размытым множеством G в U, а нечеткому ограничению C сопоставляется некоторое размытое множество C в U. Отождествление цели и ограничения с размытыми множествами дает возможность не делать между ними различия при выборе решения.

Рассмотрим несколько искусственный пример. Пусть требуется отображать на карте реки, длина которых значительно превышает L_0 – это цель G. При этом реки длиной примерно от L_1 до L_2 должны изображаться утолщенной линией – это ограничение C. Длину каждой реки будем обозначать через l.

Тогда цель нашей задачи можно рассматривать как размытое множество G с функцией принадлежности, например, такого вида:

$$\mu_G(l) = \begin{cases} 0,\ l \le L_0; \\ [1 + (l - L_0)^{-2}]^{-1},\ l > L_0. \end{cases} \qquad (2.96)$$

Ограничению может быть поставлено в соответствие размытое множество C с функцией принадлежности

$$\mu_C(l) = [1 + 0.1(l - \frac{L_1 + L_2}{2})^4]^{-1}. \qquad (2.97)$$

За единицу измерения длины каждой реки примем величину L_0. Пусть также $L_1 = 0.8L_0$ и $L_2 = 5.2L_0$. Тогда $\frac{L_1 + L_2}{2} = 3$. Значения функций принадлежности множествам G, C и D представлены в табл. 2.18.

Если в пространстве альтернатив U заданы нечеткая цель G и размытое ограничение C, то решение задачи заключается в одновременном выполнении как условия G (цель должна быть достигнута), так и условия C (ограничение должно быть соблюдено). Следовательно, решение D должно принадлежать пересечению множеств G и C. В общем случае, когда имеется n расплывчатых целей G_i ($i = 1, \ldots, n$) и m нечетких ограничений G_j ($j = 1, \ldots, m$), решение D определяется как пересечение всех заданных целей и ограничений:

$$D = G_1 \cap \ldots \cap G_n \cap C_1 \cap \ldots \cap C_m; \qquad (2.98)$$

$$\mu_D = \mu_{G_1} \wedge \ldots \wedge \mu_{G_n} \wedge \mu_{C_1} \wedge \ldots \wedge \mu_{C_m}. \qquad (2.99)$$

Таблица 2.18. Значения функций принадлежности

l	1	1.5	2	2.5	3	4	5	6
μ_G	0	0.20	0.50	0.69	0.80	0.90	0.94	0.96
μ_C	0.38	0.66	0.91	0.99	1	0.91	0.38	0.11
μ_D	0	0.20	0.50	0.69	0.80	0.90	0.38	0.11

Таким образом, решение при нечетких целях и ограничениях представляет собой размытое множество, называемое *нечетким решением*, возникающее при нечетко сформулированных требованиях. Очевидным разумным принципом является выбор альтернатив из D, обладающих максимальной степенью принадлежности к D. Множество таких решений из D называют *оптимальным решением*, а каждое фиксированное решение из этого множества называют *оптимизирующим решением.* Если максимизирующее решение единственно, то максимизирующее и оптимальное решение совпадают.

Из табл. 2.18 следует, что максимизирующее решение является единственным (при $l = 4$). Следовательно, оно же является и оптимальным. Приемлемыми будем считать значения функции принадлежности $\mu_D = 0.5$ (что является в известной мере волевым решением). Тогда можно сделать вывод о том, что решение вычерчивать реки утолщенной линией приемлемо для рек, длина которых находится в пределах от $2L_0$ до $4.5L_0$. Для отображения рек большей длины мы должны найти другое решение. Кроме того, еще раз повторим, что полученное решение будет правильным, если правильно определены функции принадлежности размытым множествам. Но решение этой проблемы находится вне теории размытых множеств, которая устанавливает только способ их использования, но не определения.

Трудности выбора функций принадлежности могут значительно снизить эффективность применения самой теории размытых множеств.

В приведенном выше определении размытого решения предполагалось, что все цели и ограничения обладают одинаковой важностью. Однако в конкретных практических случаях различные цели и ограничения могут характеризоваться разной степенью важности. Тогда нечеткое решение может быть определено как размытое множество *D*, функция принадлежности которого имеет вид

$$\mu_D = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\mu_{G_i}(x) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(x)\mu_{C_j}(x), \qquad (2.100)$$

где $\alpha_i(x)$ и $\beta_j(x)$ – *весовые коэффициенты*, или *веса*, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(x) = 1. \qquad (2.101)$$

В геодезии такие веса принято называть *приведенными к единице*, а в математике – *нормированными* значениями. Весовые коэффициенты должны устанавливаться таким образом, чтобы учитывалась относительная важность целей и ограничений.

В данном выше определении цели и ограничения являлись размытыми множествами в одном пространстве альтернатив. В общем случае цели и ограничения могут являться расплывчатыми множествами в разных пространствах.

Пусть ограничения заданы как размытые множества $C_1, ..., C_m$ в пространстве альтернатив *U*, а цели – как размытые множества в другом пространстве альтернатив *V*. Пусть также задано отображение $f: U \to V$. Тогда цели G_i (i = 1, …, n) могут быть преобразованы и представлены как нечеткие множества $G_i{*}$ (i = 1, …, n) в *U*, являющиеся прообразами множеств G_i (i = 1, …, n) отображения *f*, то есть $G_i{*} = f^{-1}(G_i)$ и $\mu_{G*_i}(x) = \mu_{G_i}(f(x))$ (i = 1, …, n). При этом функция принадлежности решения *D* определяется равенством

$$\mu_D = \mu_{G_1}(f(x)) \wedge ... \wedge \mu_{G_n}(f(x)) \wedge \mu_{C_1}(x) \wedge ... \wedge \mu_{C_m}(x). \qquad (2.102)$$

Таким образом, если цели и ограничения заданы как нечеткие множества в разных альтернативных пространствах, то решение задачи может быть сведено к случаю, когда они задаются как нечеткие множества в одном пространстве альтернатив.

Если допустить некоторые фантазии на тему использования размытых множеств в картографии, то можно указать на возможность применения функций принадлежности для построения картографических изображений. В частности, ширину условного знака реки, вычерчиваемой утолщенной линией, можно связать со значением функции принадлежности. Тогда большее значение ширины условного знака реки будет наглядно отображать большую степень принадлежности каждой конкретной реки к выбранному классу рек.

С функцией принадлежности конкретного объекта к некоторому расплывчатому множеству можно связать и такую картографическую переменную, как интенсивность цвета. Например, понятие судоходности реки можно считать размытым, поскольку судоходность часто не является константой, и длина судоходного периода реки может изменяться в каком-то диапазоне. Одна и та же река в одни годы может быть судоходной, а в другие – несудоходной. Тогда степени принадлежности реки к классу судоходных можно поставить в соответствие по некоторому закону значение интенсивности голубого цвета, используемого для изображения рек: чем выше степень судоходности реки, тем выше интенсивность цвета.

Аналогично можно связать:

– проходимость болота (размытое понятие) с длиной штриха, используемого при вычерчивании условного знака болота;

– заболоченность луга – с длиной штриха в условном знаке или интенсивностью цвета;

– степень огнестойкости зданий в квартале – с интенсивностью цвета заливки условного знака квартала;

– занятость населения или уровень доходов в регионах – с интенсивностью цвета или углом наклона заполняющих штрихов и т. д.

Таким образом, теория размытых множеств в картографии и геоинформатике может использоваться не только для определения и указания степени принадлежности объектов к конкретным классам объектов. Вполне возможно и отображение степени их принадлежности с помощью изобразительных средств или картографических переменных, используемых при создании картографических изображений: размера, ориентации, толщины, интенсивности, цвета условного знака. В таком случае можно надеяться, что применение теории нечетких множеств при создании картографических изображений позволит повысить их качество.

Если мы оглянемся назад и, как писал Р. Уилсон по другому поводу, «бросим беглый тоскующий взгляд» на логику, то заметим, что она содержит арсенал средств, достаточный для решения многих проблем геоинформационного моделирования. И в этой связи приведем высказывание Й. Шумпетера, критиковавшего логическое невежество экономистов прошлого следующим образом: «Они избегали логических ошибок главным образом благодаря тому, что вообще не прибегали к логике» [8, с. 7].

Таким образом, существуют два способа не делать логических ошибок. Первый способ – полное игнорирование существования логики – замечателен своей простотой и доступностью. Второй способ – ее изучение и последовательное применение – несколько труднее. Нам предоставляется возможность выбора.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алешина Н.А. и др. Логика и компьютер. Моделирование рассуждений и проверка правильности программ. – М.: Наука, 1990. – 240 с.

2. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики. – М.: Энергия, 1972. – 376 с.

3. Криницкий Н.А., Миронов Г.А., Фролов Г.Д. Автоматизированные информационные системы. – М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1982. – 384 с.

4. Логический словарь ДЕФОРТ. Под ред. А.А. Ивина, В.Н. Переверзева, В.В. Петрова. – М.: Мысль, 1994. – 270 с.

5. Новиков П.С. Элементы математической логики. – М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1973. – 400 с.

6. Полищук Ю.М., Хон В.Б. Теория автоматизированных банков информации. – М.: Высш. шк., 1989. – 184 с.

7. Робототехника и гибкие автоматизированные производства: В 9-ти кн. Кн. 6. Техническая имитация интеллекта / Назаретов В.М., Ким Д.П.; Под ред. И.М. Макарова. – М.: Высш. шк., 1986. – 144 с.

8. Демидов И.В. Логика. – М.: Дашков и К, 2004. – 348 с.

3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Теория графов является одной из наиболее тонких и элегантных математических теорий и как самостоятельная математическая дисциплина имеет более чем 250-летнюю историю. Простота, наглядность и общность исходных понятий позволяет использовать ее в качестве полезного инструмента при решении разнообразных проблем. Так, теория графов находит широкое применение при решении задач сетевого планирования и управления, при проектировании инженерных коммуникаций, в органической химии, кристаллографии, теории алгоритмов и множестве других областей. Теория графов является методологической основой автоматизированных картографических систем и ГИС в связи с необходимостью представления как геометрических (прежде всего), так и семантических данных.

Надо отметить, что теория графов насыщена терминами, и эта терминология еще не устоялась. Даже для исходного понятия графа иногда используются такие термины, как «сеть», «карта» и другие. Иногда эта терминология может показаться причудливой, поскольку можно встретить такие термины, как «альт», «антидыра», «клика» и т. п., что объясняется стремлением придать строго определяемым понятиям некоторую образность.

3.1. Геометрические графы

Для наглядного представления понятий теории графов используются так называемые геометрические графы в евклидовом n-мерном пространстве. *Евклидово n-мерное пространство*, обозначаемое далее как ε^n, представляет собой бесконечное множество всех кортежей из n действительных чисел $x = (x_1, \ldots, x_n)$, в котором *расстояние* d между двумя произвольными *точками* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ определяется как

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\ .$$

Наиболее употребительными являются двух- и трехмерное евклидовы пространства.

Простой незамкнутой кривой в пространстве ε^n называют непрерывную самонепересекающуюся кривую, соединяющую две его различные точки. Такая кривая может быть получена непрерывной деформацией отрезка прямой, проходящей через эти точки. *Простой замкнутой кривой* называют непрерывную самонепересекающуюся кривую, начальная и конечная точки которой совпадают. Простые кривые называют также *жордановыми кривыми*.

К. Жорданом (1838–1922) в 1882 г. была доказана знаменитая теорема, названная по его имени. В ней доказывается, что всякая простая замкнутая кривая делит плоскость на две области, одна из которых является *внутренней* по отношению к этой кривой, а вторая – *внешней*. Один из вариантов данной теоремы формулируется следующим образом: если на плоскости задана простая замкнутая кривая G, и x и y – две различные точки на ней, то простая незамкнутая кривая, соединяющая эти точки, либо целиком лежит внутри *G*, либо целиком лежит вне *G*, либо пересекает ее в одной точке (рис. 3.1).

Пусть в пространстве ε^n задано множество точек $V = \{v_i\}$, называемых *геометрическими вершинами*, и множество простых кривых $E = \{e_j\}$, называемых *геометрическими ребрами*, таких что

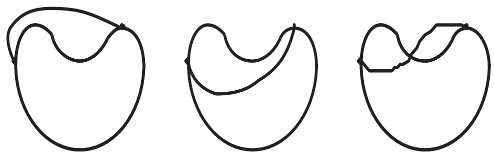


Рис. 3.1. К теореме Жордана

1) каждая замкнутая кривая содержит только одну точку из множества *V*;

2) каждая разомкнутая кривая содержит только две точки из множества *V*, являющихся ее *граничными* точками;

3) никакие две кривые не имеют общих точек, за исключением точек, принадлежащих множеству *V*.

Тогда *геометрический граф G* в пространстве ε^n – это геометрическая структура, содержащая множество геометрических вершин *V* и множество соединяющих их геометрических ребер *E* (рис. 3.2):

G = (*V*, *E*).

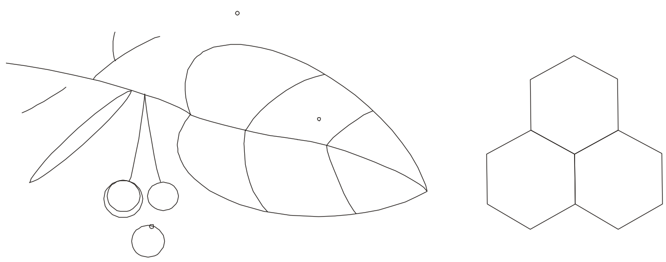


Рис. 3.2. Примеры геометрических графов

Иногда вершины графа называют также точками или узлами. В указанном смысле эти термины далее использоваться не будут, а под узлами будут пониматься некоторые вершины, обладающие вполне определенными свойствами.

Геометрический граф, изображенный на плоскости таким образом, что никакие два ребра не пересекаются, то есть не имеют общих точек, кроме граничных вершин, называется *плоским*. Если множество вершин и множество ребер конечны, то такой геометрический граф называют *конечным*. В противном случае граф не является конечным. Далее будут рассматриваться только конечные графы.

Пусть в некотором пространстве ε^n задан граф *G*. Тогда *дизъюнктной* с графом *G* точкой называется любая точка пространства ε^n, не являющаяся вершиной графа *G* и не лежащая ни на каком его ребре. Обозначим множество точек графа как *P*(*G*). Данное множество включает в себя как все вершины графа, так и все точки его ребер. Множество точек, дизъюнктных с графом *G*, обозначим через *D*(*G*). Из определения следует, что пересечение множества точек графа и множества дизъюнктных с ним точек является пустым множеством $P(G) \cap D(P) = \varnothing$. Множество дизъюнктных с графом *G* точек является дополнением графа *G* до пространства ε^n и может быть получено как разность множеств

$D(G) = \varepsilon^n \setminus P(G)$. Таким образом, пространство ε^n представляет собой объединение множества точек графа *G* и множества дизъюнктных с графом *G* точек и играет роль универсального множества:

$\varepsilon^n = P(G) \bigcup D(P)$.

Пусть на плоскости некоторая точка *x* дизъюнктна с графом *G*, а *y* – другая дизъюнктная с *G* точка. Две дизъюнктные с *G* точки *x* и *y* на плоскости называют *эквивалентными*, если они могут быть соединены простой разомкнутой кривой, все точки которой дизъюнктны с *G*. Данное определение устанавливает отношение эквивалентности на множестве точек плоскости, дизъюнктных с *G*.

Множество всех дизъюнктных с графом *G* точек на плоскости, которые могут быть соединены с некоторой фиксированной точкой *x* простой разомкнутой кривой, называют *гранью*. Таким образом, из теоремы Жордана следует, что грань представляет собой определенный класс эквивалентных точек. Простая замкнутая кривая разбивает плоскость на два класса эквивалентности, или две грани. Одна из граней (внешняя область) не ограничена, ее называют *бесконечной гранью*. Другая грань (внутренняя) имеет конечную площадь и называется *конечной*.

3.2. Абстрактные графы

В определении геометрического графа вершины трактуются как точки геометрического пространства. Но от этого факта можно абстрагироваться и рассматривать вершины как элементы некоторого произвольного конечного множества *V*. Тогда можно считать, что множество ребер *E*, каждое из которых связывает два элемента из множества *V*, задает некоторое соответствие или отображает это множество само в себя. Данное соображение является основанием для ввода понятия абстрактного графа как обобщения графа геометрического.

Для этого по аналогии с декартовым (прямым) или упорядоченным произведением множества *V* самого на себя (обозначаемого как $V \times V$) вводится понятие *неупорядоченного произведения* множества самого на себя. *Неупорядоченная* пара элементов множества *V* обозначается как *v*&*w*. При этом пары *v*&*w* и *w*&*v* считаются эквивалентными. Множество всех различных неупорядоченных пар обозначается как *V* & *V*.

Абстрактный граф G можно определить как пару (*V*, *Г*), состоящую из множества *V* и отображения *Г*, заданного на этом множестве:

$$G = (V, \Gamma), \qquad (3.1)$$

где $\Gamma : V \to V$.

Таким образом, абстрактный граф состоит из объектов двух типов или *элементов графа*: множества *V вершин* и множества *E ребер*. Число всех вершин графа называют *порядком графа*. Число всех вершин и число всех ребер графа обозначают соответственно как $|V|$ и $|E|$. Если граф состоит только из вершин и не имеет ребер, то такой граф называют *вырожденным*, а также *безреберным*, *пустым* или *вполне несвязным*. Следовательно, для вырожденного графа имеем $|E| = 0$ или $E = \varnothing$. Вырожденный граф с n вершинами обозначается как N_n. *Тривиальным графом* называют граф, состоящий из одной вершины, то есть граф N_1.

С содержательной точки зрения, вершины абстрактного графа отождествляются обычно с сущностями или объектами конкретной предметной области, а ребра – с теми или иными отношениями. Понятие абстрактного графа дает возможность игнорировать специфические характеристики геометрического графа и изучать только комбинаторные свойства графов. Продуктивность такого подхода заключается в том, что многие реальные объекты или структуры обладают комбинаторными свойствами, которые удобно рассматривать как граф. Геометрический граф является частным случаем абстрактного графа и его удобной и наглядной интерпретацией.

В зависимости от того, является ли пара вершин каждого ребра упорядоченной или нет, различают две разновидности графов: ориентированные графы и неориентированные графы. *Неориентированным графом* $G(V, E)$ называют множество V *вершин* и множество E неупорядоченных пар вершин, называемых *ребрами*. *Ориентированным графом* (или *орграфом, направленным графом*) $G(V, A)$ называют математическую структуру, состоящую из множества V вершин и множества A упорядоченных пар вершин, называемых *дугами*. Ориентированный и неориентированный графы не являются один разновидностью другого; это самостоятельные математические объекты. Иногда предметом изучения являются *смешанные графы*, содержащие как ребра, так и дуги.

Примерами ориентированных графов служат генеалогическое дерево, схема речной сети, схема нивелирной сети, схема трофических отношений, сетевые графики и т. п. В качестве примеров неориентированного графа можно назвать схемы дорожной или телефонной сети, множество государственных или административных границ, любую контурную карту, множество знакомых, проживающих в одном городе, и др.

3.3. Неориентированные графы

В неориентированном графе ребро определяется как неупорядоченная пара вершин. Ребро, граничными точками которого являются вершины u и v, иногда обозначается как (u, v), а иногда как $\{u, v\}$. Мы будем использовать последнее обозначение, как более логичное. Говорят, что ребро $\{u, v\}$ *соединяет* вершины u и v. Две вершины могут соединяться двумя или более ребрами; такие ребра называют *кратными,* или *параллельными*. *Кратностью ребра* в графе *называется* число ребер, соединяющих две вершины.

Ребро может начинаться и заканчиваться в одной и той же вершине, такое ребро называют *петлей*. Тогда петля будет обозначаться как $\{v, v\}$. Петли, как и ребра, также могут быть кратными.

Иногда, чтобы подчеркнуть некоторые свойства графа, используют понятия простого графа и общего графа. *Простым*, или *обыкновенным*, *графом* называют граф, не содержащий петель и кратных ребер. *Общим графом* называют граф, в котором допускается существование петель и кратных ребер. Если понятия простого и общего графа не вводятся, то под графом обычно понимают общий граф. Наряду с общим графом используются такие термины, как «мультиграф», «гиперграф» и «псевдограф».

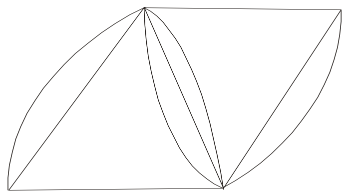


Рис. 3.3. Мультиграф

Мультиграфом называют пару (V, E), где V – непустое множество вершин, а E – *семейство ребер* – подмножеств множества $V \& V$. Следовательно, мультиграф – это граф с кратными ребрами. Петли в мультиграфе не допускаются (рис. 3.3).

Обобщением графов являются гиперграфы. *Гиперграфом* называют пару (V, E), где V – непустое множество *вершин гиперграфа*, а E – семейство непустых (необязательно различных) подмножеств множества V, называемых *ребрами* (или *гиперребрами*) *гиперграфа*. Таким образом, ребро гиперграфа отличается от ребра графа и в общем случае представляет собой последовательность вершин $(v_1, v_2, ..., v_k)$, где $k \geq 2$. На рис. 3.4 представлен пример гиперграфа с 12 вершинами и 3 гиперребрами {(1, 2, 3, 4), (1, 5, 6, 7, 4), (1, 8, 9, 10, 11, 12, 4)}.

Псевдографом называют пару (V, E), где V – непустое множество вершин, а E – семейство ребер, не обязательно различных. Таким образом, в псевдографе допускается наличие не только кратных ребер, но и, в отличие от мультиграфа, даже нескольких петель при одной вершине (рис. 3.5).

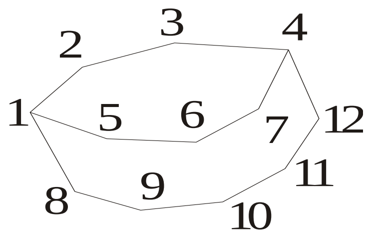


Рис. 3.4. Гиперграф

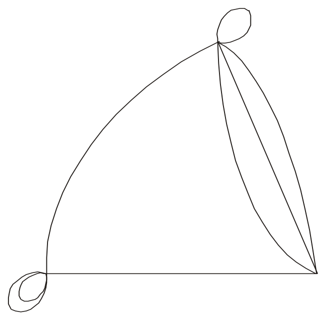


Рис. 3.5. Псевдограф

Граф с одной выделенной в качестве *корня* вершиной (некоторой «начальной» вершиной) называют *корневым графом*.

Если строго следовать терминологии, то совокупность всех ребер графа может быть названа множеством только в случае простого графа. А для обозначения всех ребер общего графа следовало бы использовать термин «семейство». Однако, такие различия обычно не делаются, поскольку кратные ребра считаются при этом все-таки разными ребрами.

Вершины, соединенные ребром, называют *смежными вершинами*. О ребрах, имеющих общую вершину, говорят как о *смежных ребрах*. Петля устанавливает смежность вершины с самой собой. Кроме того, говорят, что граничные вершины ребра *инцидентны* данному ребру. И наоборот, каждое ребро *инцидентно* своим граничным вершинам. В этих определениях следует обратить внимание на то, что *отношение смежности* существует между элементами *одного* множества, а *отношение инцидентности* – между элементами *разных* множеств. Пару элементов (v, e), в которой вершина v и ребро e инцидентны, называют *инцидентором*. *Окружением*, или *окрестностью*, *вершины* называется множество всех вершин графа, смежных с данной вершиной. Множество попарно несмежных ребер называют *независимыми ребрами*.

Данное выше определение графа (3.1) можно назвать явным, поскольку в нем присутствует отображение Γ множества вершин V. Но граф может быть определен и неявным образом как

$$G = (V, E), \qquad (3.2)$$

поскольку множество ребер E неявно задает отношение инцидентности – фундаментальное понятие теории графов.

Число всех ребер, инцидентных вершине v, называют *степенью* (иногда – *валентностью*) вершины v. Степень вершины v принято обозначать как $\rho(v)$. Если некоторая вершина не имеет смежных вершин, то такую вершину называют *изолированной*. Следовательно, граф является вырожденным, если все его вершины изолированные. Изолированную вершину без петель иногда называют *голой вершиной*. *Степенью ребра* $\{u, v\}$ называют пару (s_u, s_v), где s_u – степень вершины u, s_v – степень вершины v.

При определении степени вершины, инцидентной некоторому числу петель, принято считать, что каждая петля увеличивает степень вершины на 2, а не на 1. Вершину, инцидентную только одному ребру, называют *висячей*, или *концевой*. Ребро, одна вершина которого имеет степень 1, называют *концевым*, или *висячим*, *ребром*. Вершина степени 2 может называться *промежуточной*. Вершину, инцидентную более чем двум ребрам, можно называть *узловой*, или *узлом* (рис. 3.6).

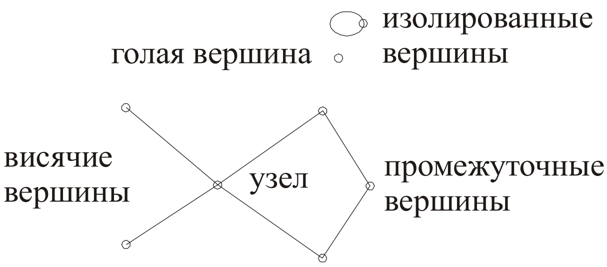


Рис. 3.6. Вершины графа

Поскольку каждое ребро соединяет две вершины, то легко видеть, что сумма степеней всех вершин графа всегда является четным числом, равным

$$\Sigma\rho(v_i) = 2|E|, \ \{i = 1, 2, ..., n = |V|\}. \qquad (3.3)$$

На основе этого факта в теории графов доказывается теорема, называемая иногда также «леммой о рукопожатиях» и утверждающая, что в конечном графе число вершин нечетной степени всегда четно.

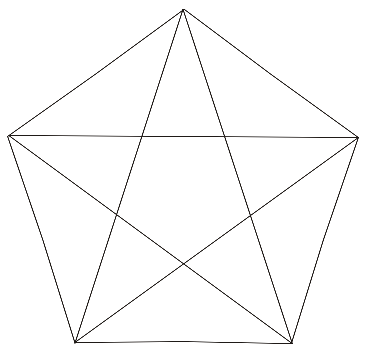


Рис. 3.7. Полный граф

Простой граф, в котором любые две вершины являются смежными (соединены ребром), называют *полным графом* и обозначают через K_n, где n – число вершин (рис. 3.7). Нетрудно установить, что число m всех ребер полного графа составляет

$$m = n(n-1)/2. \qquad (3.4)$$

Граф, все вершины которого имеют одну и ту же степень k, называют *однородным*, или *регулярным, графом степени k*. Отсюда следует, что каждый вырожденный граф является регулярным степени 0, а любой полный граф, содержащий n вершин, – регулярный граф степени n – 1. Регулярные графы степени 3 называют также *кубическими*, или *трехвалентными*.

Независимое множество вершин, или *внутренне устойчивое множество*, – множество попарно несмежных вершин графа. *Дополнением графа G или дополнительным графом* называют граф, имеющий то же множество вершин, что и граф G, но в котором две различные вершины смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в G. Дополнение графа G может быть получено следующим образом:

1) создается полный граф, имеющий то же множество вершин V, что и G;
2) из полученного полного графа удаляются все ребра, принадлежащие G.

Из определения следует, что дополнением полного графа будет вполне несвязный граф. И наоборот, дополнение вырожденного графа будет полным графом. Дополнение регулярного графа будет также регулярным графом.

Если G – некоторый граф $G = (V, E)$, то *частью графа* называют такой граф $H = (V^*, E^*)$, в котором $V^* \subseteq V$ и $E^* \subseteq E$. Множество вершин графа, каждая из которых является граничной вершиной хотя бы одного ребра, называется *покрывающим множеством вершин*, или *вершинным покрытием* графа G. Часть графа, порожденная покрывающим множеством вершин, называется *покрывающим графом*.

Если множество вершин графа G можно разбить на такие два непересекающихся подмножества V_1 и V_2, что каждое ребро соединяет одну вершину из V_1 и одну из вершину из V_2, то такой граф называют *двудольным, двусторонним* или *биграфом* (рис. 3.8). Иногда, чтобы явно указать эти подмножества, двудольный граф обозначают как $G(V_1, V_2)$. Если в двудольном графе все вершины подмножества V_1 раскрасить одним цветом, а вершины из V_2 – другим, то граничные вершины каждого ребра будут иметь разные цвета.

В определении двудольного графа не требуется, чтобы каждая вершина из V_1 была соединена с каждой вершиной из V_2, но если это имеет место, то такой граф называют *полным двудольным графом* (рис. 3.9) и обозначают как $K_{m,n}$, где m и n соответствуют числу вершин в множествах V_1 и V_2. Полный двудольный граф $K_{1,n}$ называют *звездным графом,* а также *звездой*, или *веером* (рис. 3.10). Граф, у которого множество вершин может быть разбито на k таких долей, что граничные вершины каждого ребра принадлежат разным долям, определяется как *k-дольный граф*. *Полный k-дольный граф* – это k-дольный граф, у которого любые две вершины, входящие в разные доли, смежны. Пример трехдольного графа приведен на рис. 3.11.

Если G – простой граф, то его *реберный граф* определяют как граф $L(G)$, вершины которого взаимно однозначно поставлены в соответствие ребрам графа G, и две его вершины смежны тогда и только тогда, когда смежны соответствующие ребра графа G. На рис. 3.12 слева – пример графа, а справа –

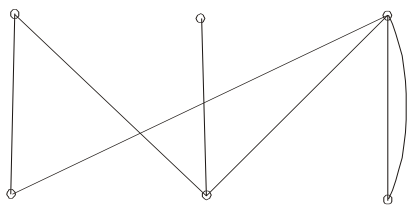


Рис. 3.8. Двудольный граф

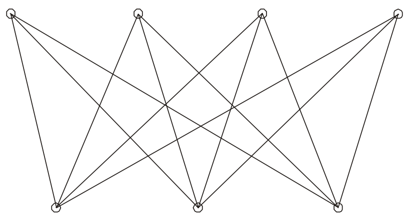


Рис. 3.9. Полный двудольный граф

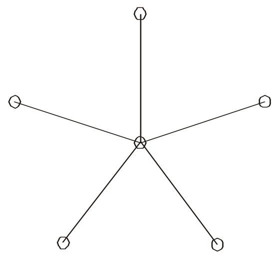


Рис. 3.10. Звездный граф

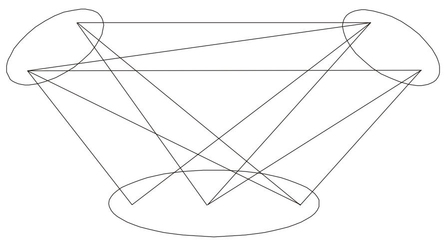


Рис. 3.11. Трехдольный граф

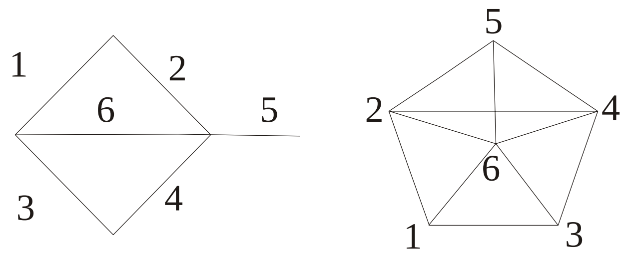


Рис. 3.12. Граф и реберный граф

соответствующий ему реберный граф.

3.4. Ориентированные графы

В ориентированном графе вместо ребер определяются дуги – упорядоченные пары его вершин u и v. При этом дугу обозначают через (u, v) и говорят, что дуга (u, v) *начинается* в вершине u и *заканчивается* в вершине v. Также говорят, что u является ее *началом* или *начальной вершиной,* а v – ее *концом*, или *конечной вершиной*. И если в неориентированном графе ребра $\{v, w\}$ и $\{w, v\}$ означают одно и то же ребро, то в орграфе дуги (v, w) и (w, v)

представляют собой разные элементы. Если существует дуга (v, w) или (w, v), то вершины v и w называют *смежными вершинами*.

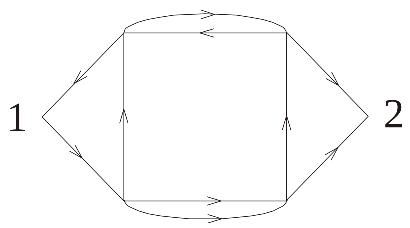


Рис. 3.13. Ориентированный граф

Две вершины орграфа могут соединяться двумя или более дугами одного направления; такие дуги называют *кратными*, или *параллельными*. Иногда ориентированный граф, в котором допускается существование кратных дуг, чтобы подчеркнуть данное обстоятельство, называют *ориентированным мультиграфом*. На рис. 3.13 изображен пример ориентированного графа. Поскольку в нем существуют кратные ребра, то он же является и ориентированным мультиграфом.

Дуга может начинаться и заканчиваться в одной и той же вершине, такую дугу называют *петлей*. Две дуги, имеющие хотя бы одну общую граничную вершину, называют *смежными дугами*.

Ориентированный граф может быть получен из неориентированного графа путем его преобразования, называемого *ориентацией* графа – назначением каждому ребру той или иной ориентации, направления. Обратную операцию – замену дуги ребром с теми же граничными вершинами называют *дезориентацией дуги*. Граф, полученный из орграфа заменой всех дуг на ребра, называют *соотнесенным неориентированным графом*. Вместе с тем, мультиграф, полученный из орграфа дезориентацией всех его дуг, называют *основанием орграфа*. На рис. 3.14 представлено основание орграфа, изображенного на рис. 3.13.

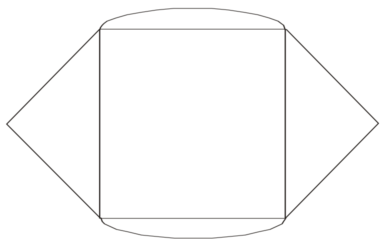


Рис. 3.14. Основание орграфа

Исходящей дугой называют дугу, началом которой является заданная вершина либо вершина, принадлежащая заданному множеству вершин (при этом говорят, что дуга является *исходящей из заданного множества*). Характеристиками каждой вершины в орграфе служат ее полустепени. *Полустепенью исхода* вершины в орграфе называется число дуг, исходящих из вершины. *Полустепенью захода* вершины в орграфе называют число дуг, заходящих в данную вершину.

Обратной дугой называют дугу в цепи, ориентированную против направления движения по цепи. *Обратный орграф* – это орграф, полученный из исходного изменением направления всех дуг на противоположное. *Полным* называют орграф, у которого каждая пара вершин соединена хотя бы одной дугой. *Симметрическим* называют ориентированный граф, дуги которого образуют пары параллельных, но противоположно направленных дуг.

3.5. Цепи, циклы и грани

Из ребер графа могут образовываться различные конструкции. Последовательность ребер $\{v_0, v_1\}$, $\{v_1, v_2\}$, …, $\{v_{k-1}, v_k\}$, в которой конечная вершина каждого ребра, кроме последнего, является начальной вершиной следующего ребра, называется *маршрутом*, соединяющим вершины v_0 и v_k. Вершину v_0 называют *начальной вершиной маршрута*, а вершину v_k – *конечной вершиной маршрута*. *Длина маршрута* равна количеству ребер в порядке их прохождения. Маршрут называют *замкнутым*, или *циклическим*, если его конечная вершина совпадает с начальной: $v_0 = v_k$.

Маршрут называется *цепью*, если все его ребра различны, и *простой цепью*, если все его вершины различны. Замкнутая цепь называется *циклом*. Простая замкнутая цепь, содержащая хотя бы одно ребро, называется *простым циклом*. Следовательно, простым циклом являются любая петля или любая пара кратных ребер. О простой цепи или ребре, связывающих две несмежные вершины простого цикла, говорят как о *хорде*. Цикл длиной не менее 4, не содержащий хорд, называют *дырой*, а дополнение графа дыры – *антидырой*. Пример графа с дырой будет приведен на рис. 3.17. Цикл длины 3 называют *треугольником*.

На рис. 3.15 множество ребер {{1,2}, {3,6}, {6,7}} маршрутом не является. Маршрутом будет множество {{1,4}, {4,3}, {3,6}, {6,4}, {4,3}, {3,7}}. Но данный маршрут не является цепью, поскольку в нем повторяется ребро {4,3}. Примером цепи может служить маршрут {{1,4}, {4,6}, {6,5}, {5,4}, {4,3}, {3,7}}. Данная цепь не является простой, так как вершина 4 обходится дважды. Простой цепью будет множество {{1,2}, {2,3}, {3,4}, {4,5}, {5,6}, {6,7}}. Циклами являются цепи {{1,4}, {4,6}, {6,5}, {5,1}}, а также {{4,6}, {6,5}, {5,4}} и другие.

Длина кратчайшей простой цепи, соединяющей вершины v_i и v_j в графе, называется *расстоянием* $d(v_i, v_j)$ между v_i и v_j. Так, на рис. 3.15 расстояние между вершинами 1 и 7 равно 3. В связном неориентированном графе расстояние удовлетворяет аксиомам метрики. В частности, если расстояние между двумя вершинами $d(u,v) \geq 2$, то найдется такая вершина w, что $d(u,w) + d(w,v) = d(u,v)$.

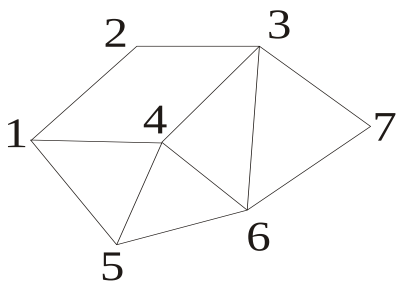


Рис. 3.15. Маршруты

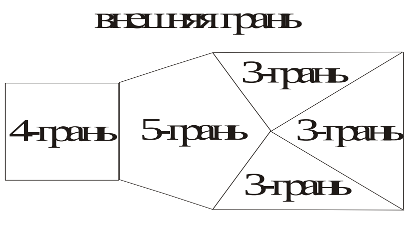


Рис. 3.16. Грани графа

Вершины, расположенные на одном простом цикле, называются *сильно циклически связными вершинами*, а ребра, принадлежащие такому циклу, – *сильно циклически связными ребрами*.

Гранью плоского графа называется максимальное по включению множество точек плоскости, каждая пара которых может быть соединена жордановой кривой, не пересекающей никакое ребро графа (рис. 3.16). Таким образом, каждая точка плоскости принадлежит какой-либо грани графа. Одна из граней плоского графа имеет неограниченную площадь и называется *внешней гранью*, остальные грани ограничены и называются *внутренними гранями* плоского графа. *Бесконечная грань плоского графа* – единственная неограниченная (внешняя) грань плоского графа.

Границей грани называется множество принадлежащих этой грани вершин и ребер плоского графа. Граница грани образует собой простой цикл. Следовательно, между гранями и простыми циклами существует взаимно однозначное соответствие. Из определения границы грани следует, что каждое ребро принадлежит двум смежным граням. Две грани плоского графа, имеющие общее ребро, являются *смежными гранями*.

Графы находят применение при моделировании рельефа земной поверхности. Цифровые модели рельефа часто представляют собой покрывающую всю область моделирования сетку треугольников, вершинами которых являются характерные точки рельефа. В результате топографическая поверхность представляется в виде многогранника, каждая грань которого является треугольником. Проекция многогранника на горизонтальную плоскость образует граф. Такой связный плоский граф, каждая внутренняя грань которого является треугольником, называют *плоской триангуляцией*. Пример плоской триангуляции представлен на рис 3.17. *Прямоугольный граф* – плоский граф с четырехугольными гранями, ребра которого ориентированы в горизонтальном или вертикальном направлениях.

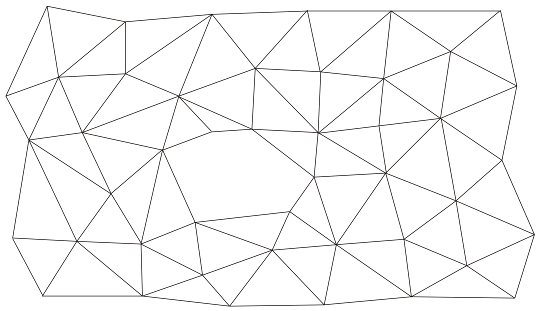


Рис. 3.17. Плоская триангуляция

Ориентированным маршрутом длины n называется последовательность чередующихся вершин и дуг, не обязательно различных, $S=(v_0,e_1,v_1,e_2,...,e_n,v_n)$ такая, что $e_i=(v_{i-1},v_i)$, $1\le i\le n$. Такой маршрут называют (v_0, v_n)-*маршрутом*, его вершины v_0 и v_n называют *крайними вершинами*, а все остальные – *промежуточными, или внутренними*. *Длиной ориентированного маршрута* называют число его дуг.

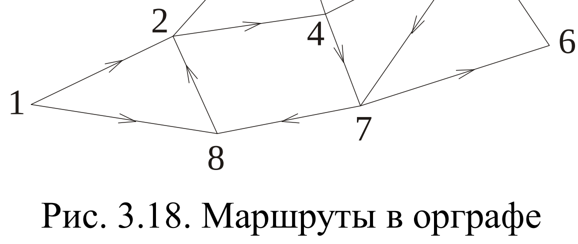


Рис. 3.18. Маршруты в орграфе

Ориентированный маршрут называется *замкнутым*, если его конечная вершина совпадает с начальной вершиной. В противном случае ориентированный маршрут называют *незамкнутым*. Ориентированный маршрут, в котором нет повторяющихся дуг, называют *путем*. Путь, не содержащий повторяющихся вершин, называется *простым путем*. *Длина пути* определяется как число дуг в пути. Путь наименьшей длины из u в v есть *кратчайший путь* между вершинами u и v.

На рис. 3.18 множество дуг {(1,8), (8,2), (1,2)} не является ориентированным маршрутом, поскольку не выполняется условие $e_i = (v_{i-1}, v_i)$. Примером маршрута может служить множество дуг {(1,2), (2,4), (4,7), (7,8), (8,2), (2,4), (4,5), (5,6)}. Данный ориентированный маршрут не является путем, поскольку дуга (2,4) содержится в нем дважды. Путем между вершинами 1 и 6 является ориентированный маршрут {(1,2), (2,4), (4,7), (7,8), (8,2), (2,3), (3,5), (5,6)}. Но он не может быть назван простым путем, поскольку в нем дважды проходится вершина 2. Простым путем является ориентированный маршрут {(1,8), (8,2), (2,4), (4,5), (5,7), (7,6)}. Однако он не является кратчайшим между вершинами 1 и 6. Между этими вершинами существует три кратчайших пути: {(1,2), (2,3), (3,5), (5,6)}, {(1,2), (2,4), (4,5), (5,6)}, {(1,2), (2,4), (4,7), (7,6)}.

Замкнутый путь называют *контуром*, или *ориентированным циклом*. Контур называют *простым* (или *элементарным*), если ни одна вершина в нем не встречается дважды. *Остовным маршрутом* называется маршрут, содержащий все вершины орграфа. На рис. 3.18 примерами простых контуров могут служить пути {(2,4), (4,7), (7,8), (8,2)}, {(2,3), (3,4), (4,7), (7,8), (8,2)}, {(2,3), (3,4), (4,5), (5,7), (7,8), (8,2)} и другие. Остовным маршрутом является ориентированный маршрут {(1,8), (8,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,7), (7,6)}.

Цепью в орграфе, или *полупутем*, называется последовательность вершин $v_1, v_2, \ldots, v_k$, в которой для двух соседних вершин v_i и v_{i+1} существует либо дуга (v_i, v_{i+1}), либо дуга (v_{i+1}, v_i). Таким образом, полупуть – это любая последовательность смежных дуг. Примером полупути служит последовательность вершин (1,2,8) на рис. 3.18. *Антиориентированный путь* – простая цепь в орграфе, у которой любая пара соседних дуг имеет противоположную направленность. На рис. 3.18 примером антиориентированного пути служит множество дуг {(1,8), (8,7), (7,6), (6,5)}. *Антисимметрическим графом* называется ориентированный граф, в котором нет пути из v в u, если существует путь из u в v. *Примитивным орграфом* называют ориентированный граф, в котором каждая пара разных (!) вершин может быть соединена ориентированным маршрутом из некоторого числа k дуг. *Тотальным* называют ориентированный граф, в котором для каждой пары различных вершин u и v существует путь из u в v, или из v в u, или оба пути.

3.6. Связность графов

Неориентированный граф называется *связным*, если любая пара его вершин соединена простой цепью. Если в графе существуют хотя бы две вершины, которые не могут быть соединены простой цепью, то о таком графе говорят как о *несвязном*. Вырожденный граф представляет собой предельный случай несвязного графа. Любой конечный несвязный граф может быть разбит на конечное число связных графов. Максимальный связный подграф графа G называют *компонентой связности*. Множество вершин, принадлежащих одной компоненте связности графа, образует *область связности*. *Связностью* графа называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному, или тривиальному графу. На рис. 3.19 изображен несвязный граф, содержащий две компоненты связности. Его связность равна 2: чтобы любая из компонент связности стала несвязным графом, в ней необходимо удалить 2 вершины.

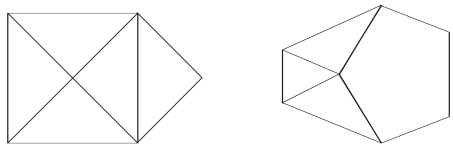


Рис. 3.19. Компоненты связности

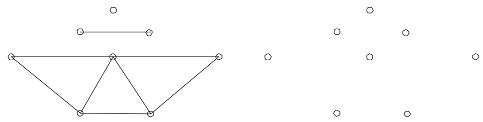


Рис. 3.20. Связное множество вершин

Несвязный граф имеет, по крайней мере, две компоненты связности. Поэтому можно дать другое определение: граф называется несвязным, если число его компонент связности больше 1. Множество вершин, в котором хотя бы одна пара вершин соединена ребром, называется *связным множеством вершин* (рис. 3.20). Это определение более слабое, чем определение связного графа. Из него следует, что любой граф, кроме вырожденного, является связным множеством вершин. Графы (подграфы), не имеющие общих вершин, называют *вершинно-непересекаю-щимися графами* (*подграфами*).

Граф называется *k-связным*, если удаление не менее k вершин приводит к потере свойства связности. *Компонентой k-связности* графа G называют максимальный k-связный подграф графа G. *Вершинной связностью* называется наибольшее число k, для которого граф k-вершинно связен. Под *k-вершинно-связным графом* (*k-связным графом*) понимают граф, вершинная связность которого равна k.

Реберной связностью называется наименьшее число ребер, удаление которых приводит к несвязному, или тривиальному, графу. Для несвязного графа реберная связность равна 0, а реберная связность графа с мостом (см. рис. 3.27) равна 1. Граф называют *k-реберно-связным*, если потеря свойства связности происходит при удалении не менее k ребер.

Диаметром связного графа G называется наибольшее возможное расстояние между любыми двумя вершинами G. *Центром* графа называют его вершину, наибольшее расстояние (называемое *радиусом*)

$$r = \min_{v}(\max_{w} d(v, w))$$

от которой до любой другой вершины графа является наименьшим из всех возможных (рис. 3.21). Для определения радиуса необходимо найти наибольшие расстояния между каждой парой вершин графа; наименьшее из полученных расстояний и будет радиусом графа.

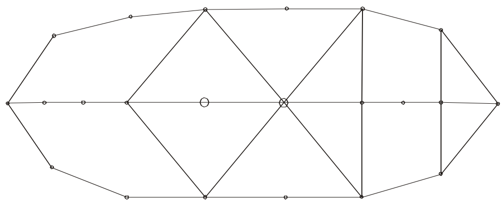


Рис. 3.21. Центр графа

Центром называют также множество центральных вершин графа. *Эксцентриситет вершины* определяется как наибольшее из расстояний между данной вершиной и остальными вершинами графа. Разница между диаметром и эксцентриситетом в том, что диаметр относится к графу в целом, а эксцентриситет характеризует конкретную вершину. Наибольший из эксцентриситетов – это диаметр графа, а наименьший – его радиус. Для *центральной вершины* эксцентриситет равен радиусу графа. *Периферийной вершиной* называется вершина, эксцентриситет которой равен диаметру графа.

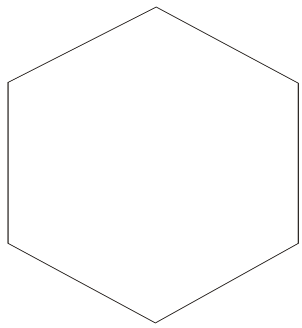


Рис. 3.22. Циклический граф

Связный регулярный граф степени 2 называют *циклическим графом* (рис. 3.22) и обозначают как C_n, где n – число вершин графа. Соединение графа N_1 с циклическим графом $C_{n\text{-}1}$ ($n > 2$) образует граф, называемый *колесом* (рис. 3.23) и обозначаемый через W_n

$$W_n = N_1 + C_{n-1}.$$

Панциклическим называют граф, содержащий простые циклы всех длин от 3 до n = |V| включительно. Примерами панциклического графа могут служить колесо и цепь треугольников (рис. 3.24).

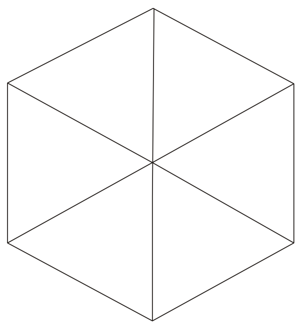


Рис. 3.23. Колесо

Если G является простым графом с n вершинами и k компонентами, то число его ребер m удовлетворяет неравенствам

$$n-k \le m \le (n-k)\cdot(n-k+1)/2. \quad (3.5)$$

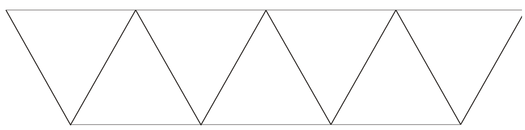


Рис. 3.24. Цепь треугольников

Доминирующее множество графа, или *внешне устойчивое множество*, есть множество W вершин таких, что каждая вершина, не принадлежащая W, смежна с вершиной из W. *Доминирующей вершиной* называется вершина графа, смежная с любой другой его вершиной. На рис. 3.23 доминирующей вершиной является центральная вершина колеса.

Разделяющая вершина, или *шарнир*, *точка сочленения* (рис. 3.25) – это вершина, удаление которой увеличивает число компонент связности графа. Граф, имеющий разделяющую вершину, называется *разделимым графом*. *Разрезающей вершиной* (рис. 3.26) называют вершину v графа G, после удаления которой множество $V(G)\backslash\{v\}$ разбивается на непересекающиеся непустые подмножества V_1 и V_2, между которыми нет ребер графа G, то есть полученный граф становится несвязным.

В этих определениях следует обратить внимание на то, что при удалении разрезающей вершины число компонент связности станет равным двум, а при удалении разделяющей вершины оно может быть больше двух. Таким образом, разрезающая вершина является частным случаем разделяющей. *Сечением графа* называют множество вершин, удаление которых увеличивает число компонент связности.

Разделяющим множеством связного графа G называют такое множество его ребер, удаление которого приводит к несвязному графу. *Разрезом* называют разделяющее множество, никакое собственное подмножество которого не является разделяющим множеством. *Простой разрез* – это разрез, никакое собственное подмножество которого не является разрезом. Разрез, состоящий только из одного ребра, называют *мостом,* или *перешейком* (рис. 3.27). Подграф, соединенный с остальной частью графа перешейком, называется *полуостровом*.

На рис. 3.28 примерами разрезов могут служить множества ребер $\{\{2,3\}, \{3,6\}, \{6,7\}\}$ и $\{\{3,4\}, \{3,7\}, \{6,7\}\}$. Множество $\{\{2,3\}, \{2,6\}, \{3,6\}, \{6,7\}\}$ является разделяющим, но разрезом не является, поскольку таковым является его собственное подмножество $\{\{2,3\}, \{3,6\}, \{6,7\}\}$.

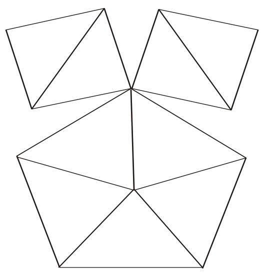


Рис. 3.25. Точка сочленения

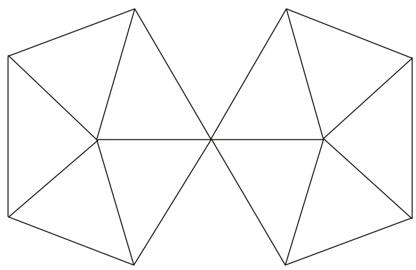


Рис. 3.26. Разрезающая вершина

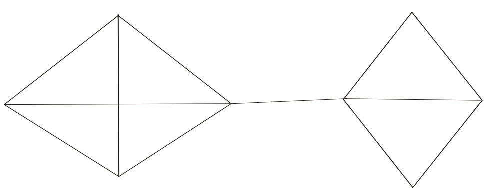


Рис. 3.27. Пример моста

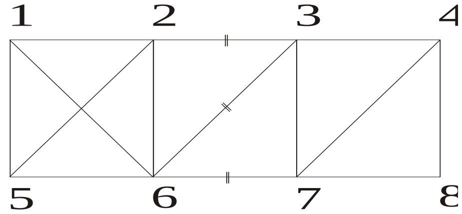


Рис. 3.28. Разрез

В несвязном графе G *разделяющее множество* определяется как множество ребер, удаление которого увеличивает число компонент на 1. Очевидно, что данное определение справедливо и для связного графа. *Разрезом в произвольном* *графе G* называют разделяющее множество, никакое собственное подмножество которого не является разделяющим.

Две вершины графа называют *связными,* или *эквивалентными*, если существует простая цепь из одной вершины в другую. *l-Соединимостью* для пары вершин u и v называют существование по меньшей мере l цепей между u и v, попарно не имеющих общих внутренних вершин и ребер. *Соединяющей вершиной* называют вершину, принадлежащую некоторой части H графа G и инцидентную ребрам как в H, так и в G-H. Ребро, соединяющее вершину u из подмножества $U \subset V$ с вершиной v из дополнения $\overline{U}$ этого подмножества, называют *соединяющим ребром*. В двудольном графе соединяющими ребрами являются все его ребра.

Двудольный граф, порожденный соединяющими ребрами некоторого подмножества $U \subset V$ вершин графа, называют *соединяющим графом*. Двудольный граф с множеством вершин $V = S \bigcup T$, имеющий в точности два наименьших вершинных покрытия M_1 и M_2, причем пусты либо $M_1 \cap S$ и $M_2 \cap T$, либо $M_1 \cap T$ и $M_2 \cap S$, называют *несводимым графом*. *Полунесводимый граф* определяется как двудольный граф с множеством вершин $V = S \bigcup T$, имеющий в точности одно наименьшее вершинное покрытие M, причем пусто либо $M \cap S$, либо $M \cap T$. *Сводимым графом* называется граф, не являющийся ни полунесводимым, ни несводимым.

Для характеристики взаимосвязи различных вершин в ориентированных графах используется понятие достижимости. *Достижимостью, соединимостью вершин*, или *отношением достижимости,* называют такое бинарное отношение R между двумя вершинами u и v орграфа, которое существует тогда и только тогда, когда существует путь из u в v. Если путь из u в v существует, то о вершине v говорят как о вершине, *достижимой* из u. Множество вершин, достижимых из данной вершины, называется *достижимым множеством*. Орграф, в котором для любой пары вершин хотя бы одна является достижимой из другой, называется *односторонним орграфом*, или *односторонне связным графом*.

Для ориентированных графов понятие связности является более сложным, чем для неориентированных, поскольку необходимо учитывать не только наличие дуг между теми или иными вершинами, но и их направленность. Поэтому для орграфов устанавливаются понятия слабой и сильной связности.

Слабо связным графом (или *слабым орграфом*) называют орграф, любая пара вершин которого связана цепью (полупутем). *Сильно связным орграфом* (или *графом взаимно связным, бисвязным графом*) называется ориентированный граф, в котором для каждой упорядоченной пары различных вершин (u, v) существует хотя бы один путь из u в v. Две вершины u и v орграфа, для которых существует как путь из u в v, так и обратный из v в u, называют *сильно связными вершинами* (или *бисвязными*). Таким образом, *сильно связный орграф* – это орграф, любая пара вершин которого сильно связана. Орграф, не обладающий хотя бы свойством слабой связности, называется *несвязным орграфом* (рис. 3.29).

На рис. 3.13 был представлен пример слабо связного графа. В нем существует путь из вершины 1 в вершину 2, но нет обратного пути. Орграф, изображенный на рис. 3.30, представляет собой пример сильно связного ориентированного графа, поскольку в нем существует путь из любой вершины в любую другую вершину. В этом примере следует отметить тот факт, что некоторые дуги участвуют как при движении из вершины 1 в вершину 2, так и обратно из вершины 2 в вершину 1. В частности, такими являются вертикальные дуги. И, наконец, на рис. 3.29 приведен пример несвязного орграфа, в котором нет пути ни из вершины 1 в вершину 2, ни из вершины 2 в вершину 1.

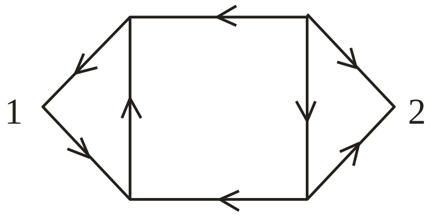


Рис. 3.29. Несвязный орграф

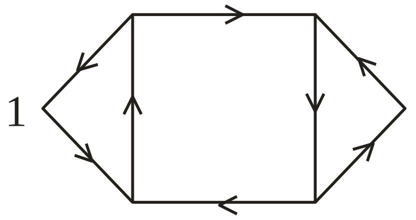


Рис. 3.30. Сильно связный орграф

Хотя все три орграфа имеют одно и то же множество вершин, как мы видим, их свойства различны. Более того, слабо связный граф содержит даже большее число дуг, чем сильно связный граф. Тем не менее, в нем отсутствует возможность достижения любой вершины из любой другой. Таким образом, приведенные примеры орграфов показывают, что наличие пути между двумя произвольными вершинами орграфа определяется не только количеством дуг, и что существенное значение имеет их направление.

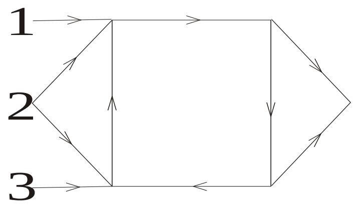


Рис. 3.31. База орграфа

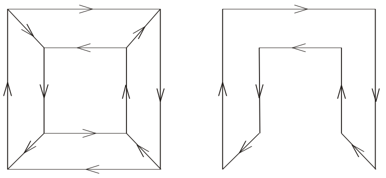


Рис. 3.32. Орграф и база дуг

Сильно связная компонента (*сильно связная область*, *бикомпонента*) определяется как максимальный по включению вершин сильно связный подграф орграфа. Очевидно, что сильно связные компоненты может содержать и несвязный орграф. *Односвязным орграфом* называется орграф, в котором для каждой пары вершин хотя бы одна из них является достижимой из другой (см. рис. 3.13).

Ориентируемым графом называется граф, каждому ребру которого можно приписать такую ориентацию, что полученный орграф будет сильно связным. *Минимально связный граф* – сильно связный орграф, теряющий это свойство при удалении любой дуги.

Подмножество U множества вершин орграфа $G = (V, E)$ такое, что его вершины не достижимы одна из другой и любая вершина из $V \setminus U$ достижима из любой вершины подмножества U, называется *базой вершин*, или *базой орграфа*. На рис. 3.31 базу орграфа составляет подмножество вершин $\{1, 2, 3\}$. *Базой дуг* называют минимальное подмножество множества дуг орграфа, которое сохраняет отношение достижимости в исходном орграфе (см. рис. 3.32). *Базовый орграф* определяется как орграф, базой дуг которого является множество всех его дуг. Иначе можно сказать, что базовый орграф не содержит «лишних» дуг. *Базируемым графом* называют неориентированный граф, который надлежащей ориентацией его ребер может быть превращен в базовый орграф.

3.7. Идентификация элементов графа

В процессе решения задач элементы графов необходимо тем или иным образом идентифицировать, чтобы иметь возможность указывать на них. Наиболее естественным способом их идентификации является нумерация. *Нумерацией вершин* называют взаимно однозначное соответствие между множеством вершин V и множеством целых чисел $[1, n]$ ($n = |V|$). Таким образом, номер каждой вершины графа является уникальным. Граф, вершинам которого поставлены в соответствие (приписаны) целые числа от 1 до $|V|$ и которые могут использоваться в качестве их имен или идентификаторов, называют *перенумерованным графом*. Аналогично может осуществляться нумерация ребер графа. *Плоской нумерацией* называется нумерация вершин графа, при которой расположение вершин графа в целочисленных точках числовой оси дает граф без пересечений (рис. 3.33).

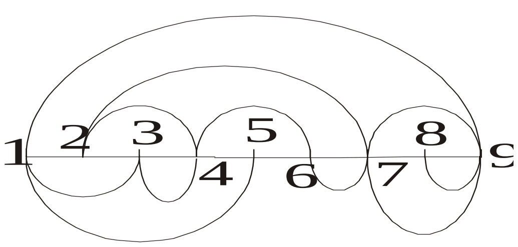


Рис. 3.33. Плоская нумерация

При создании информационных моделей конкретной предметной области наряду с нумерацией элементов графа может потребоваться ассоциирование тех или иных сущностей предметной области с элементами графа или разметка. *Разметкой графа* называют отображение $f: V(G) \to L$ множества вершин V графа G на множество меток L. *Меткой* (или *пометкой*) называют число или символ некоторого алфавита, присвоенный вершине и/или ребру (дуге) и играющий роль их признака или некоторой характеристики. Граф, элементам которого присвоены метки, называют *помеченным графом,* а под *непомеченным графом* понимают произвольный абстрактный граф. *Переменной вершиной* называется вершина, помеченная некоторой переменной.

В отличие от нумерации, в результате разметки вершин различным вершинам могут быть приписаны одинаковые метки, что дает возможность разбиения вершин на некоторое множество групп по тем или иным критериям.

Как разновидность помеченных графов можно рассматривать *графы взвешенные* – графы (или орграфы), элементам которых (вершинам, ребрам или дугам) приписаны целые или вещественные числа, играющие роль их весов. *Весом вершины* называют число, приписанное вершине или ассоциируемое с ней и интерпретируемое как некоторая величина, характеризующая вершину.

Весом ребра называют число, приписываемое ребру, а *весом дуги* – число, приписанное дуге.

Интерпретация весов вершин и ребер (или дуг) зависит от решаемой задачи. Так, при моделировании транспортной сети в некотором регионе естественным образом возникают не только такие характеристики ребер, как длина пути, время в пути, стоимость проезда и т. п., но и кратные ребра. Между различными населенными пунктами (понимаемыми как вершины графа) могут существовать автомобильные, железнодорожные, водные и воздушные пути сообщения. Наличие каждого пути может отображаться с помощью ребра с соответствующими характеристиками.

Весом цепи (*весом цикла*) называется та или иная функция от весов ребер цепи (цикла). *Вес пути* – это некоторая функция от весов дуг, составляющих путь; обычно в качестве такой функции используется сумма весов дуг. *Весом подграфа* называют некоторую числовую функцию от весов его ребер или дуг, чаще всего такой функцией также является сумма весов ребер (дуг).

В графах часто используется понятие длины. Трактовка длины для невзвешенных орграфов рассматривалась выше. Во взвешенном орграфе *длиной ребра* называют вес ребра, обычно соответствующий расстоянию между граничными вершинами ребра. *Длина цепи* во взвешенном графе определяется как сумма длин ребер цепи, в невзвешенном графе под длиной цепи понимается число ребер в ней. *Длиной дуги* называют вес дуги, интерпретируемый как расстояние между вершинами либо некоторая другая величина, характеризующая дугу. *Длиной контура* в невзвешенном орграфе называют число дуг в контуре; а во взвешенном орграфе – некоторую функцию от длин дуг, обычно сумму длин дуг. *Маршрут конечный* – это маршрут с конечным числом входящих в него ребер.

3.8. Операции и отношения на графах

При анализе и синтезе графов с заданными свойствами по необходимости возникает задача сравнения двух графов, определения их равенства или неравенства. Для определения эквивалентности двух графов используется понятие морфизма. *Графовый морфизм* – отображение $f: G \to G^*$, представляющее пару ($f_V: V \to V^*,\ f_E: E \to E^*$) и сохраняющее структуру графа, смежность и метки.

Два графа $G(V, E)$ и $G^*(V^*, E^*)$ называют *изоморфными*, если существует взаимно однозначное соответствие

1) между элементами множеств V и V^*;

2) между элементами множеств E и E^*, сохраняющее отношения инцидентности.

На рис. 3.34 три графа при всей их внешней несхожести являются изоморфными друг другу, что может быть установлено сравнением множеств их ребер.

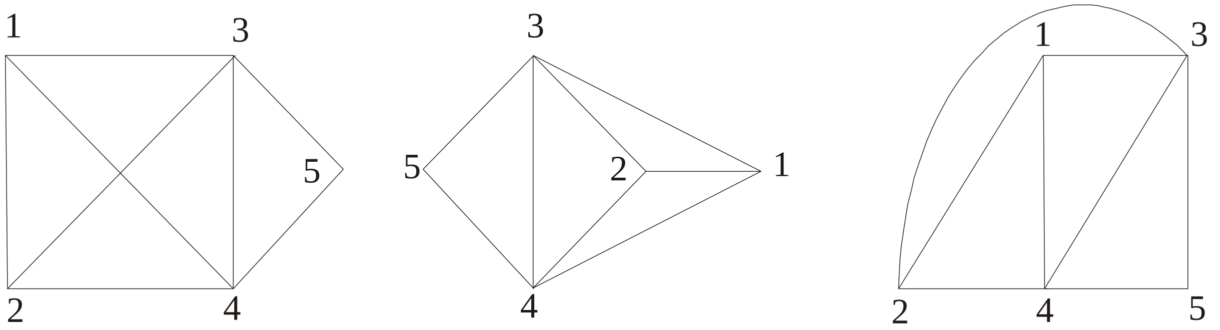


Рис. 3.34. Изоморфные графы

Отношение изоморфизма графов является отношением эквивалентности, поскольку оно обладает свойствами:

1) рефлексивности: любой граф изоморфен самому себе, то есть $G \to G \cong G$;

2) симметричности: если граф G изоморфен графу G^*, то и граф G^* изоморфен графу G, или $G \cong G^* \to G^* \cong G$;

3) транзитивности: если граф G_1 изоморфен графу G_2 и граф G_2 изоморфен графу G_3, то граф G_1 изоморфен также графу G_3, что формально можно представить как $G_1 \cong G_2 \wedge G_2 \cong G_3 \to G_1 \cong G_3$.

Указанные свойства отношения изоморфизма графов следуют непосредственно из его определения.

Изоморфными помеченными графами называют графы, для которых существует изоморфизм, сохраняющий распределение меток в них. *Реберно изоморфными* называют два графа G и H, если существует взаимно однозначное соответствие между их ребрами и если ребра e_1 и e_2 смежны в G, то соответствующие ребра смежны в H, и наоборот.

Если геометрический граф G' изоморфен абстрактному графу G, то его называют *геометрической реализацией* графа G. Определение такого соответствия между абстрактным графом и геометрическим графом называют также *укладкой графа*. В трехмерном пространстве любой граф можно представить таким образом, что кривые, соответствующие ребрам, не пересекаются во внутренних точках. Если возможна укладка графа в двухмерном пространстве (т. е. на плоскости), то такой граф называют *планарным*.

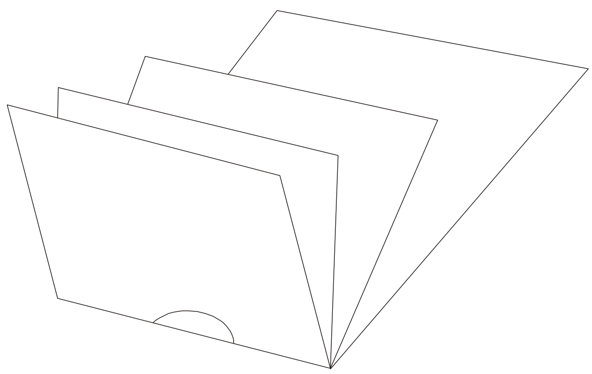


Рис. 3.35. Укладка в пространстве

Для доказательства возможности укладки любого графа в трехмерном пространстве выберем в нем (пространстве) произвольную прямую и проведем через нее полуплоскости, числом равным числу ребер графа (рис. 3.35).

Каждой вершине графа поставим в соответствие некоторую точку на выбранной прямой. А каждому ребру графа поставим в соответствие одну полуплоскость и проведем в ней простую кривую, соединяющую граничные вершины этого ребра. Очевидно, что построенные таким образом простые кривые не будут взаимно пересекаться и будут иметь общие точки только в вершинах графа. Физической моделью такого доказательства может служить тетрадь с нужным количеством листов. Из определения изоморфизма абстрактных и геометрических графов следует, что все рассуждения могут осуществляться в терминах геометрических графов. При этом сохраняется как наглядность, так и общность таких рассуждений.

Автоморфизм графа – изоморфизм графа на себя, отображение множества вершин $f: V \to V$, сохраняющее отношение смежности. При автоморфизме образы вершин $f(u)$ и $f(v)$ смежны, если смежны вершины u и v. О двух вершинах u и v, для которых при некотором автоморфизме α имеет место $\alpha(u)$ = v, говорят как о *подобных вершинах*. Два ребра e_1 и e_2 такие, что существует некоторый автоморфизм α, для которого $\alpha(e_1)$ = e_2, называют *подобными ребрами.*

Пусть задан граф $G(V,E)$. Пусть также заданы множества V_1 и E_1 такие, что

1) 1) $V_1 \subset V$ и $E_1 \subset E$;
2) отображение $\Gamma_1(e) = \Gamma(e)$ для каждого ребра $e \in E_1$;
3) и если $e \in E_1$ и $\Gamma(e) = \{v, w\}$, то $v \in V_1$ и $w \in V_1$.

Тогда граф $G_1(V_1, E_1)$ называют подграфом графа G (рис. 3.36). Иначе можно сказать, что в граф G1 входят только некоторые ребра исходного графа и инцидентные им вершины. Исходный граф G называют при этом надграфом графа G1. Подграф G*(V’, E’) графа G(V, E) определяется также как граф с множеством вершин V* $\subseteq$ V и множеством ребер E* $\subseteq$ E*, каждое из которых инцидентно только вершинам из V*.

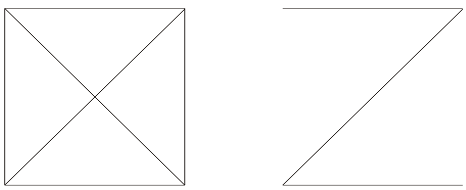


Рис. 3.36. Граф и подграф

Частичным графом G_Λ по отношению к графу G = (V, E) называется граф, содержащий только часть дуг графа G, то есть определяемый условием $G_\Delta = (V, E)$, где $\Delta x \subseteq Ex$.

На графах, как на точечных множествах, могут быть определены те или иные операции. С их помощью можно строить графы из других, более простых, и наоборот, переходить от одного графа к другому, менее сложному, разбивать граф на несколько подграфов и т. д. Прежде всего, можно выделить достаточно простые операции над элементами графов и более сложные операции, когда в качестве их операндов используются графы или подграфы. Среди элементарных операций наиболее употребительны удаление и добавление ребра или вершины, стягивание ребра (отождествление пары вершин), и противоположная ей операция подразбиения ребра.

Удаление ребра e из графа G (рис. 3.37) есть преобразование графа G в граф G \ e, содержащий все вершины и ребра графа G за исключением ребра e. Удаление вершины v из графа G (рис. 3.38) определяется как преобразование графа G в граф G \ v, отличающийся от исходного графа только отсутствием вершины v и всех инцидентных ей ребер. Наряду с включением (добавлением) вершин степени 2 (рис. 3.39) может осуществляться и противоположная операция – исключение вершин степени 2 (удаление или элементарное стягивание) (рис. 3.40). Если степень вершины v равна 2 и имеются ребра {u,v} и {v,w}, то удаляются оба ребра, затем исключается вершина v и создается ребро {u,w}. Чтобы подчеркнуть, что граф H получен из графа G путем удаления вершин степени 2, говорят, что граф H получен элементарным стягиванием, или редуцированием, графа G или что граф H является редуцированным по отношению к графу G. Также говорят, что граф G является стягиваемым к графу H.

Стягиванием ребра {v,w} называют слияние его граничных вершин v и w и удаление образовавшейся петли (рис. 3.41). Таким образом, при удалении ребра число вершин простого графа не изменяется, а при стягивании – уменьшается на 1. При стягивании ребра возможно также появление кратных ребер. Стягиванием графа G называют его преобразование с помощью последовательности операций стягивания ребра. Граф G называется стягиваемым к графу H, если последний может быть получен в результате последовательного стягивания некоторых ребер графа G. Вершину, получающуюся при стягивании некоторого числа вершин в одну вершину, называют псевдовершиной.

Граф H, полученный из графа G последовательностью операций удаления ребра, удаления вершины и сжатия ребра, называют минором графа G.

Под расщеплением вершины понимается преобразование графа путем замены вершины v двумя вершинами u и w, соединенными ребром {u, w}; вершины, смежные с v, тем или иным образом соединяются ребрами с u и w (рис. 3.42). Подразбиением ребра называется удаление ребра {u, w}, добавление новой вершины v (степени 2) и добавление двух новых ребер {u, v} и {v, w} (рис. 3.43). Исходное ребро (u, w) при этом называют подразбитым ребром. Слиянием двух ребер называют замену двух ребер {u, v} и {v, w}, инцидентных вершине v степени 2, одним ребром {u, w}; операция является обратной подразбиению ребра (рис. 3.44). Следовательно, операции слияния двух ребер и подразбиения ребра эквивалентны соответственно операциям исключения вершины степени 2 и включения вершины степени 2.

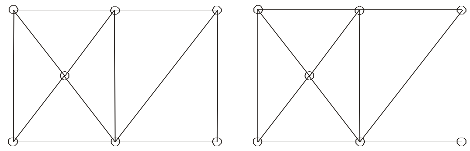


Рис. 3.37. Удаление ребра

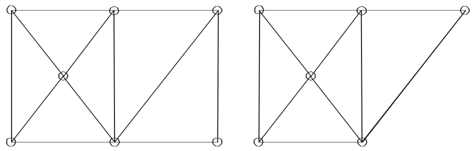


Рис. 3.38. Удаление вершины

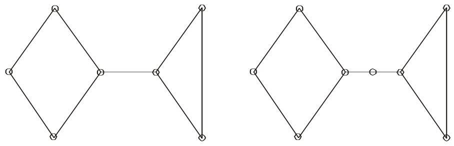


Рис. 3.39. Включение вершины

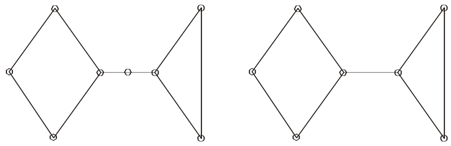


Рис. 3.40. Исключение вершины

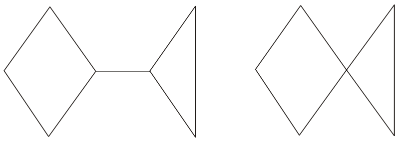


Рис. 3.41. Стягивание ребра

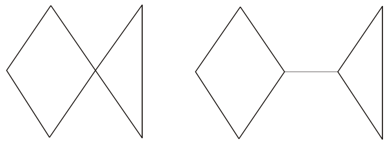


Рис. 3.42. Расщепление вершины

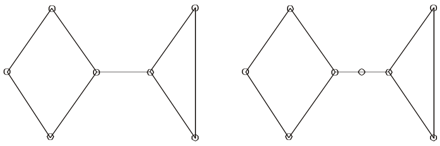


Рис. 3.43. Подразбиение ребра

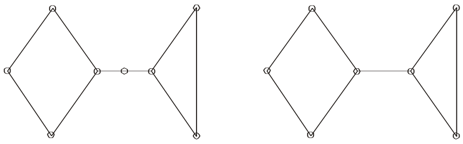


Рис. 3.44. Слияние двух ребер

Подобным же образом можно ввести операции сложения и вычитания циклов, что будет эквивалентно сложению и вычитанию граней.

Гомеоморфизм графа – преобразование графа, получаемое последовательностью подразбиений его ребер. Гомеоморфизмом графа называют также отображение $f: G \to G^*$, сохраняющее отношение эквивалентности ребер. Говорят также, что граф G^* гомеоморфен графу G.

Преобразование графа, состоящее в отождествлении двух его смежных вершин, называют *элементарным гомоморфизмом*. А *гомоморфизм графа* понимается как преобразование графа, представляющее собой последовательность его элементарных морфизмов. Гомоморфизм может рассматриваться как отображение $f: G \to G^*$, сохраняющее отношение смежности вершин. Граф G^* называют *гомоморфным образом* графа G и обозначают через fG. Также говорят, что f есть гомоморфизм графа G на G^*. *Эндоморфизмом графа* называют гомоморфизм графа в себя.

Два графа называют *гомеоморфными* (*тождественными с точностью до вершин степени 2*), если каждый из них может быть получен из некоторого третьего графа включением в его ребра вершин степени 2. Такое включение вершины, например, в ребро $\{u,w\}$ выполняется следующим образом: ребро $\{u,w\}$ удаляется, создается новая вершина v и создаются новые ребра $\{u,v\}$ и

$\{v,w\}$. В качестве «третьего» графа может выступать и один из исходных графов. Примером гомеоморфных графов может служить пара любых циклических графов.

Втягивание вершины, или *отождествление двух вершин*, *слияние двух вершин* определяется как преобразование орграфа, заключающееся в отождествлении двух вершин u и v, связанных единственной заходящей в v дугой (u,v). На рис. 3.45 в качестве примера показано втягивание вершины v. Для преобразования ориентированных графов используется также *расщепление вершины* – преобразование орграфа путем замены вершины v двумя вершинами u и w, соединенными дугой(u, w); при этом дуги, заходившие в вершину v, входят в u, а выходившие из v, выходят из w (рис. 3.46).

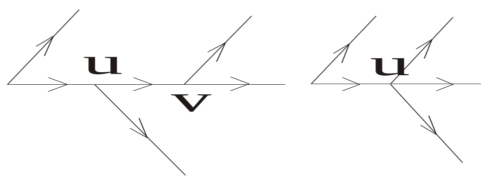


Рис. 3.45. Втягивание вершины

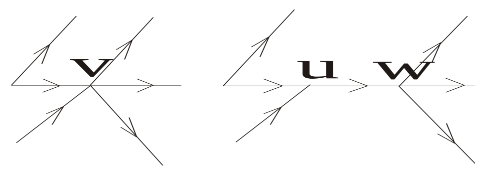


Рис. 3.46. Расщепление вершины

Операции над графами (подграфами) используются как удобные обозначения совокупностей элементарных операций, последовательно выполняемых по определенным правилам над множествами элементов графов (подграфов).

Если заданы два графа $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ и $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$, то объединение $G_1 \cup G_2$ графов G1 и G2 представляет собой граф с множеством вершин $V(G_1) \cup V(G_2)$ и семейством ребер $E(G_1) \cup E(G_2)$ (рис. 3.47). Пересечением графов G1 и G2 называют граф $G = G_1 \cap G_2$, множество вершин которого есть пересечение множеств вершин указанных графов, а множество ребер является пересечением множеств ребер.

Объединение графов с непересекающимися множествами вершин $(V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing)$ называется дизъюнктным объединением графов. Операция соединения двух графов G1 и G2 (см. рис. 3.47), обозначаемая как $G_1 + G_2$, определяется как их объединение, дополненное ребрами из каждой вершины графа G1 в каждую вершину графа G2. Таким образом, операция соединения двух вполне несвязных графов G1 и G2 даст полный двудольный граф $G(V(G_1), V(G_2))$.

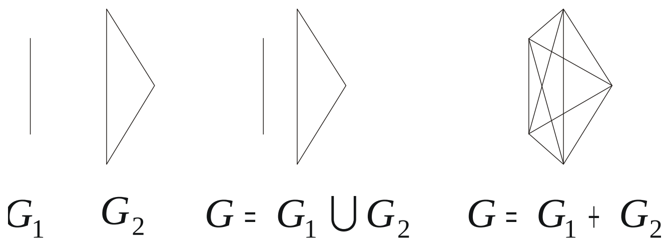


Рис. 3.47. Объединение и соединение графов

Операции объединения, пересечения и дизъюнктного объединения двух графов могут быть обобщены на произвольное число графов.

Конъюнкция графов G1 и G2 определяется как граф $G = G_1 \wedge G_2$ с множеством вершин $V = V_1 \times V_2$, у которого вершины $u = (u_1, u_2)$ и $v = (v_1, v_2)$ смежны тогда и только тогда, когда u1 смежна с v1 и u2 смежна с v2.

Разностью графов G1 и G2 называют граф G = G1 – G2, полученный удалением из G1 всех элементов, соответствующих графу G2. Симметрической разностью графов G1 и G2 называется граф, определяемый формулой $G_1 \oplus G_2 = G_1 \bigcup G_2 \setminus G_1 \bigcap G_2$.

Суперпозицией графов Gi ($1 \le i \le k$), каждый из которых имеет одно и то же множество n вершин, называется граф с тем же множеством вершин, в котором две вершины смежны по ребру i, если они смежны в графе Gi.

Декартовой суммой графов называют граф $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \ldots \oplus G_n$, множество вершин которого есть декартово произведение множеств вершин графов G_i и в G существует ребро $\{v,w\}$, где $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ и $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, тогда и только тогда, когда хотя бы в одном графе G_i есть ребро $\{v_i, w_i\}$.

Произведением графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называется граф $G = (V, E)$, множество вершин которого является декартовым произведением множеств вершин исходных графов $V(G) = V_1 \times V_2$. Различают следующие разновидности произведения графов: декартово произведение, прямое (или тензорное, кронекерово) произведение, сильное произведение, композиция, модульное произведение и большое модульное произведение.

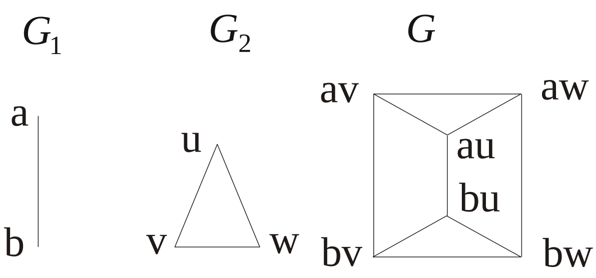


Рис. 3.48. Декартово произведение графов

Декартовым произведением графов (рис. 3.48) называют граф $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$, множество вершин которого является декартовым произведением множеств вершин графов G_i и в G существует ребро $\{v,w\}$, где $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ и $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, тогда и только тогда, когда существует семейство ребер $E_1 = \{v_1, w_1\}, \ldots, E_n = \{v_n, w_n\}$; $E_n \subset G_i$. Граф, который может быть получен как результат декартова произведения двух нетривиальных графов, называется *составным*.

3.9. Эйлеровы и гамильтоновы графы

Связный граф *G* называют *эйлеровым графом*, если существует замкнутая цепь, проходящая через все ребра графа. Такая цепь называется *эйлеровой цепью*. Связный граф G называют *полуэйлеровым*, если цепь, проходящая через все вершины графа, разомкнута. Таким образом, в определении полуэйлерова графа отсутствует требование замкнутости простой цепи. По определению, эйлеров граф отличается от полуэйлерова графа наличием одного ребра и каждый эйлеров граф является полуэйлеровым графом. Простой цикл, включающий все ребра графа, называют *эйлеровым циклом*. Примеры эйлерова и полуэйлерова графов представлены на рис. 3.49, 3.50.

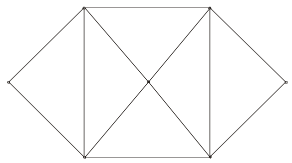


Рис. 3.49. Эйлеров граф (пример 1)

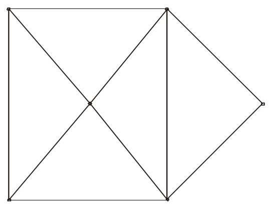


Рис. 3.50. Полуэйлеров граф

Эти названия были даны в честь Л. Эйлера (1707–1783), впервые в 1736 г. решившего известную задачу о кенигсбергских мостах: необходимо доказать, что можно обойти все ребра графа на рис. 3.51 так, что каждое ребро при этом обходится только один раз. Решение этой задачи было получено Эйлером на основе доказанной им теоремы: непустой связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда он не имеет вершин нечетной степени. В другой формулировке данная задача заключается в определении условий, при которых связный граф содержит простой цикл, проходящий через каждое ребро графа.

Некоторые свойства эйлеровых графов устанавливаются следующими теоремами.

1) Если степень каждой вершины графа *G* не меньше двух, то граф *G* содержит цикл.

2) Связный граф *G* является эйлеровым, если и только если каждая его вершина имеет четную степень.

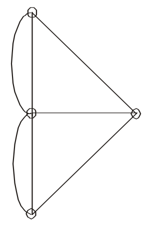


Рис. 3.51. Задача о мостах

Следствиями из этих теорем являются следующие утверждения.

Связный граф *G* является эйлеровым тогда и только тогда, когда семейство его ребер может быть разбито на непересекающиеся циклы. Примером такого разбиения графа, представленного на рис. 3.49, служит рис. 3.52.

Связный граф *G* является полуэйлеровым тогда и только тогда, когда не более двух его вершин имеют нечетную степень. Одна из таких вершин с нечетной степенью будет являться началом цепи, а другая – ее концом.

Еще один пример эйлерова графа приведен на рис. 3.53. Его принадлежность к эйлеровым графам следует из того факта, что все вершины имеют четную степень.

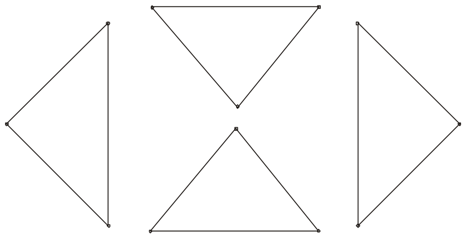


Рис. 3.52. Разбиение эйлерова графа

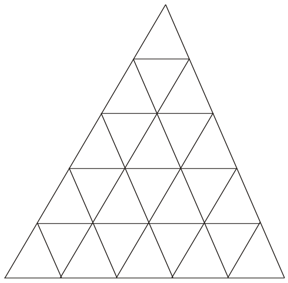


Рис. 3.53. Эйлеров граф (пример 2)

Понятие эйлеровых графов находит применение при решении практических задач. Примером такой задачи, возникающей при инвентаризации автомобильных дорог, может служить следующая. Имеется множество населенных пунктов (вершин) и множество дорог между ними (ребер). Требуется оптимальным образом выполнить съемку всех дорог с помощью GPS, установленной на автомобиле. Первое, что нужно сделать при решении данной задачи, это определить, является ли соответствующий граф эйлеровым.

В ориентированном графе *эйлеровым контуром* называется контур, включающий каждую дугу орграфа только один раз, а сам орграф, имеющий эйлеров контур, называют *эйлеровым орграфом*.

При определении понятия эйлерова графа требовалось найти простую замкнутую цепь, проходящую через все ребра графа. Аналогичным образом можно сформулировать задачу и в отношении вершин: существует ли простая замкнутая цепь, проходящая через каждую вершину графа G только один раз. Если такая цепь существует, то она называется *гамильтоновой цепью*. *Гамильтоново-связный* граф понимается как граф, любые две вершины которого связаны гамильтоновой цепью.

Если гамильтонова цепь существует и она замкнута, то ее называют *гамильтоновым циклом*, а сам граф – *гамильтоновым графом*. Граф, содержащий простую цепь, проходящую через все его вершины, называют *полугамильтоновым*. Гамильтонов граф отличается от полугамильтонова графа одним ребром. Каждый гамильтонов граф является полугамильтоновым. *Произвольно гамильтонов граф* – граф, обход вершин которого в произвольном порядке (без повторяющихся вершин) дает гамильтонов цикл. На рис. 3.54, *а* граф не является ни гамильтоновым, ни полугамильтоновым, на рис. 3.54, *б* – граф полугамильтонов, а на рис. 3.54, *в* – граф гамильтонов.

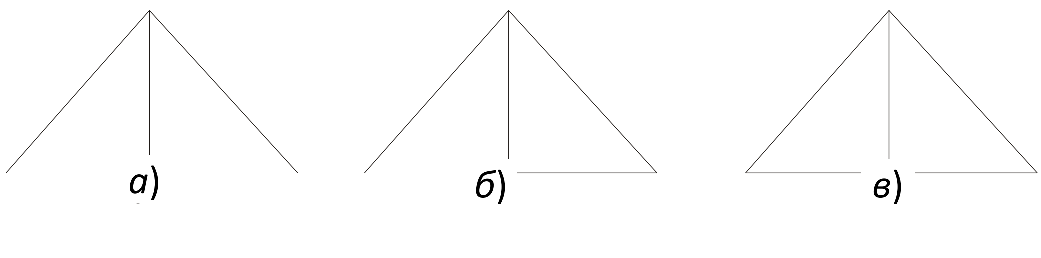


Рис. 3.54. Гамильтонов и полугамильтонов графы

Свое название гамильтоновы графы получили от имени ирландского математика и астронома У. Гамильтона (1805–1865), предложившего в 1859 г. головоломку «Кругосветное путешествие». В ней требовалось по ребрам обойти все вершины додекаэдра – правильного многогранника с 12 пятиугольными гранями, 30 ребрами и 20 вершинами, каждая из которых имеет степень 3 (рис. 3.55).

К определению принадлежности графа к гамильтоновым может быть сведена модифицированная задача коммивояжера. Задано множество населенных пунктов и множество соединяющих их дорог. Необходимо найти простую замкнутую цепь (гамильтонов цикл), проходящую через все населенные пункты.

Критерии принадлежности графа к гамильтоновым до сих пор не определены. Наиболее значительным результатом в области гамильтоновых графов считается теорема английского физика-теоретика Г.Э. Дирака (1902–1984), доказанная им в 1952 г.: если в простом графе с n (n ≥ 3) вершинами степень любой вершины v $\rho(v) \geq n/2$, то граф G является гамильтоновым.

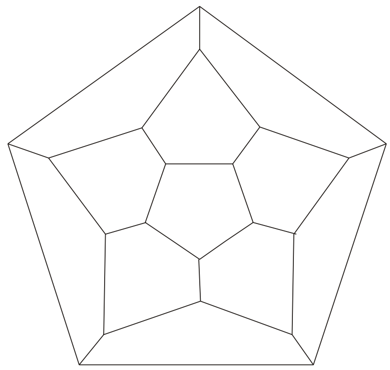


Рис. 3.55. Граф додекаэдра

Маршрут, включающий все вершины или ребра графа, и каждое ребро или вершина при этом содержится в нем только один раз, называется *обходом графа*.

Произвольно вычерчиваемым графом называют граф, обход всех ребер которого возможен при соблюдении всего одного правила: никакое ребро не проходится дважды (рис. 3.56). Таким образом, произвольно вычерчиваемый граф всегда содержит эйлеров цикл, степени всех его вершин четны, а цикломатическое число (см. далее) $\lambda(L \setminus u_0)$ подграфа $L \setminus u_0$ равно 0. *Произвольно проходимый граф* – граф, обход всех вершин которого возможен в произвольном порядке без повторения пройденных вершин (рис. 3.57).

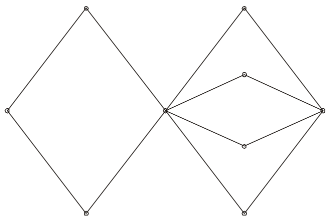


Рис. 3.56. Произвольно вычерчиваемый граф

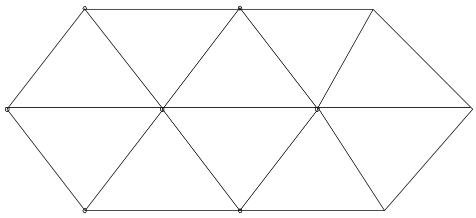


Рис. 3.57. Произвольно проходимый граф

Для ориентированных графов вводится понятие *гамильтонова пути* – пути в орграфе, проходящего через каждую его вершину только один раз. Если гамильтонов путь является замкнутым, то его называют *гамильтоновым контуром*. Иначе гамильтонов контур можно определить как контур в орграфе, проходящий через каждую вершину в точности один раз. Орграф, в котором существует гамильтонов путь из любой вершины в любую другую, называется *гамильтоново-связным орграфом*. Ориентированный граф, содержащий гамильтонов контур или гамильтонов путь между некоторой парой вершин, называется *гамильтоновым орграфом*.

3.10. Деревья

Связный граф с наименьшим числом ребер называется *деревом*, а также *связным графом без циклов*, или *ациклическим графом.* Дерево с конечным числом вершин называют *конечным деревом. Лесом* называют граф без циклов. Иначе можно сказать, что лес – это несвязный граф, каждая компонента которого является деревом. Изолированная вершина может трактоваться как *вырожденное* (*тривиальное, пустое*) *дерево*. Если в дереве некоторая вершина выделена в качестве его «начальной» вершины, то такую вершину принято называть *корнем дерева*, а само дерево – *корневым деревом*. Термин «дерево» обычно используется как краткая форма термина «корневое дерево».

На рис. 3.58, *а* дерево можно трактовать как пример произвольного дерева; на рис. 3.58, *б* – как пример схемы инженерных коммуникаций или улиц населенного пункта; на рис. 3.58, *в* – как пример схемы основных водоразделов некоторой горной системы; на рис. 3.58, *г* дерево является примером линейного дерева (см. ниже).

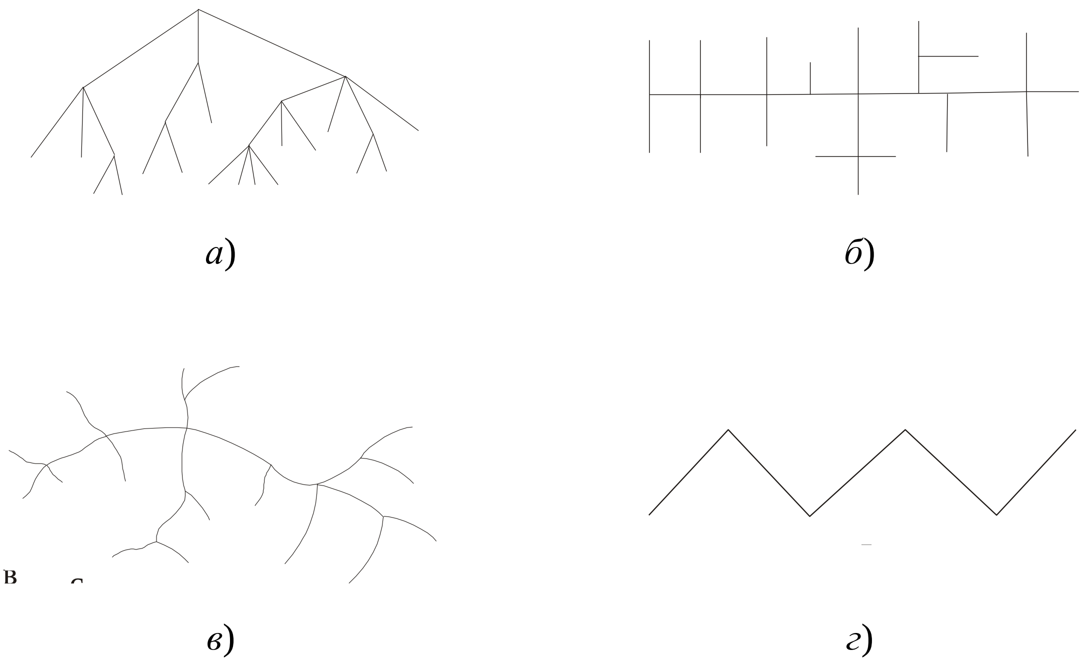


Рис. 3.58. Примеры деревьев

Концевые вершины дерева (вершины степени 1) иногда называют *листьями*. Если из дерева исключить его корневую вершину, то мы получим k непересекающихся множеств V_1, V_2, …, V_k, каждое из которых является деревом и называется *поддеревом корня*, или *ветвью*. На рис. 3.58, *а* корень дерева – это его верхняя вершина. Хотя формально мы можем обозначить как корень любую узловую вершину этого дерева, а также любой из узлов деревьев на рис. 3.58, *б*, *в*.

С содержательной точки зрения деревья представляют собой иерархическую структуру. Поэтому они могут применяться везде, где существует некоторая иерархия. При использовании деревьев для моделирования различных предметных областей та или иная вершина выбирается в качестве корня исходя из смысла отображаемых сущностей. Дерево, в котором не выделен корень, называется *свободным деревом*.

Наряду с «ботанической» терминологией при описании деревьев используется и «генеалогическая». Тогда говорят, что вершины дерева находятся на разных *уровнях*. Вершину верхнего уровня называют *вершиной-предком*, *предком*, *отцом*; вершину нижнего уровня – *потомком*, *сыном* или *дочерней вершиной*; вершину на том же уровне – *братом* и т. п. *Внутренняя вершина* определяется как вершина дерева, имеющая потомков, т. е. не являющаяся листом.

Каждое дерево обладает тем свойством, что две любые его вершины связаны единственной простой цепью. Деревья обладают также рядом других замечательных свойств, которые позволяют дать несколько равнозначных определений дерева. Так, если граф T имеет n вершин, то будут эквивалентными следующие определения дерева:

1) граф T является деревом;
2) граф T не содержит циклов и имеет n – 1 ребер;
3) граф T связен и имеет n – 1 ребер;
4) граф T связен и каждое его ребро является мостом;
5) любые две вершины графа T связаны только одной простой цепью;
6) граф T не содержит циклов, но добавление к нему любого нового ребра (без добавления вершин) дает один цикл.

Из этих определений следует, что если граф G является лесом с n вершинами и k компонентами, то G имеет $n – k$ ребер.

В связном графе удаление ребра из некоторого цикла не нарушает связности графа. Последовательно применяя процедуру удаления одного ребра из числа оставшихся циклов, можно получить дерево, которое будет связывать все вершины графа. Такое дерево называют *остовным деревом*, а также *остовом* или *каркасом* (рис. 3.59). Граф, не имеющий циклов, сам является остовным деревом. Удаляя из каждого цикла графа G различные ребра, можно получить различные остовные деревья графа G.

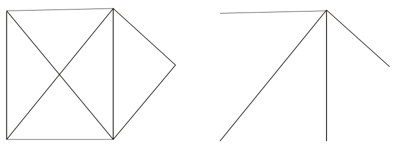


Рис. 3.59. Граф и остов

Если граф G является произвольным графом с n вершинами, m ребрами и k компонентами, то, последовательно удаляя по одному ребру из каждого остающегося цикла, можно получить граф T, называемый *остовным лесом*. Число удаленных при этом ребер называют *циклическим рангом*, или *цикломатическим числом* исходного графа G, которое определяется как

$$\gamma(G) = m - n + k. \quad (3.6)$$

Цикломатическое число характеризует степень связности графа. Цикломатическое число дерева равно 0, а цикломатическое число любого циклического графа равно 1.

Дополнением остовного леса T некоторого общего графа *G* называют граф, полученный из *G* в результате удаления всех ребер *T*. На рис. 3.60 слева дан пример несвязного графа, в центре – его остовный лес, а справа – дополнение остовного леса.

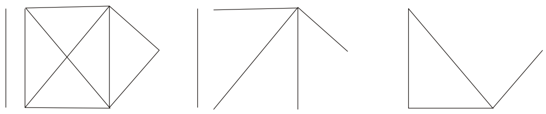


Рис. 3.60. Дополнение остовного леса

Имеет место следующая теорема: если *T* – остовный лес графа *G*, то

1) всякий разрез в *G* имеет общее ребро с *T*;

2) каждый цикл в *G* имеет общее ребро с дополнением *T*.

Если к остовному лесу *T* графа *G* добавить любое не содержащееся в нем ребро графа *G*, то мы получим единственный цикл. Если к остовному лесу *T* графа *G* добавить по отдельности каждое ребро из *G*, не содержащееся в *T*, то мы получим *фундаментальную систему циклов, ассоциированную* с *T*. На рис. 3.61 приводится пример графа, его остов и ассоциированная с ним фундаментальная система циклов.

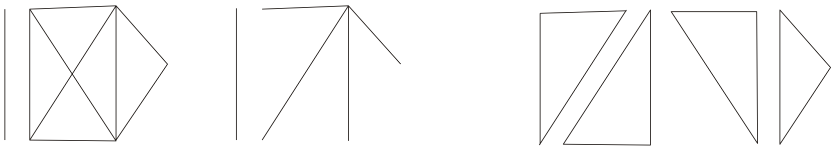


Рис. 3.61. Ассоциированная система циклов

Если остовный лес графа *G* не фиксирован, то говорят о фундаментальной системе циклов графа *G*. Циклы такой фундаментальной системы различны и их число равно циклическому рангу графа *G*.

По аналогии с циклическим рангом вводится понятие *коциклического ранга*, или *ранга разреза*. Коциклическим рангом графа *G* называют число ребер в его остовном лесе и обозначают как $\kappa(G) = n - k$.

При удалении любого ребра, принадлежащего остовному дереву T, множество его вершин разбивается на два непересекающихся множества V_1 и V_2.

Тогда множество всех ребер графа G, соединяющих вершины из V1 с вершинами из V2, будет являться разрезом графа G. О множестве всех разрезов графа G, полученных таким образом, говорят как о фундаментальной системе разрезов, ассоциированной с T. Число таких разрезов равно коциклическому рангу графа G. На рис. 3.62 показана фундаментальная система разрезов, ассоциированная с остовом графа, изображенного на рис. 3.61.

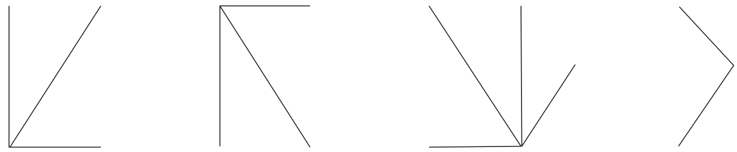


Рис. 3.62. Ассоциированная система разрезов

Особыми случаями деревьев являются линейные и бинарные деревья. *Линейное дерево* – это дерево с двумя концевыми вершинами, или иначе, – дерево в виде простой цепи. *Бинарным* (или *двоичным*) деревом называют дерево, каждый узел которого связан с двумя вершинами нижнего уровня. *Бинарная вершина* есть вершина с двумя потомками в бинарном дереве.

Ориентированный граф без контуров называется *бесконтурным орграфом*, или *ациклическим графом*. *Ориентированное дерево* – корневой орграф, каждая вершина которого достижима из корня, а его основанием является дерево. *Ориентированный лес* определяется как лес, каждая компонента связности которого является *ордеревом*. Иногда, чтобы подчеркнуть направленность дуг, используется понятие *растущего дерева* – ориентированного дерева, все дуги которого ориентированы от корня. В общем случае *поддерево с корнем r* понимается как *поддерево ордерева*, порожденное вершиной r и всеми ее потомками. Ордерево, все дуги которого ориентированы так, что любая вершина достижима из корня, называется также *выходящим деревом*. Классическими примерами выходящего дерева являются генеалогическое дерево и родовидовое отношение.

Братом вершины v называется вершина ордерева, имеющая того же предка, что и v. Вершины ордерева, расположенные на одном уровне и не являющиеся братьями, называются *соседними вершинами*. На рис. 3.63 вершина v является братом вершины u и соседом вершины *w*. Вершина растущего дерева с одним сыном называется *унарной вершиной*.

Характеристикой ветви дерева является *высота ветви*, под которой понимается число ребер в ней. Тогда *высота вершины* в дереве – это наибольшая высота ее ветвей, а *высота дерева* (или *глубина дерева*) есть высота корня дерева.

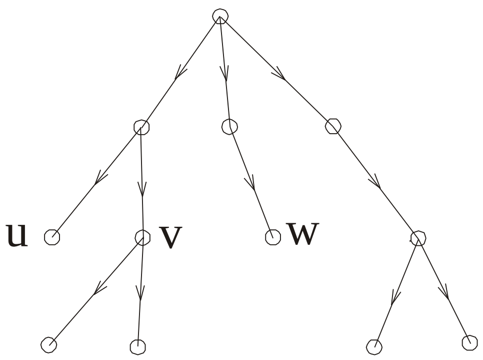


Рис. 3.63. Выходящее дерево

Высота вершины в ордереве определяется как длина самого длинного пути из данной вершины в какой-либо из ее листьев. *Глубиной вершины*, или ее *уровнем*, в ордереве называется длина пути из корня в данную вершину. Таким образом, высота вершины характеризует ее положение относительно листьев, а глубина – положение вершины по отношению к корню дерева. Под *глубиной дерева* понимается наибольшая глубина вершин дерева.

Корневым балансом в бинарном дереве называют величину, характеризующую соотношение между весами левого и правого поддеревьев корня; весами при этом могут служить высоты поддеревьев. *Балансированным по высоте деревом* называется бинарное дерево, для любой вершины которого разность высот левого и правого поддеревьев не больше 1. *Несбалансированное дерево* – дерево, не являющееся сбалансированным (рис. 3.64, 3.65).

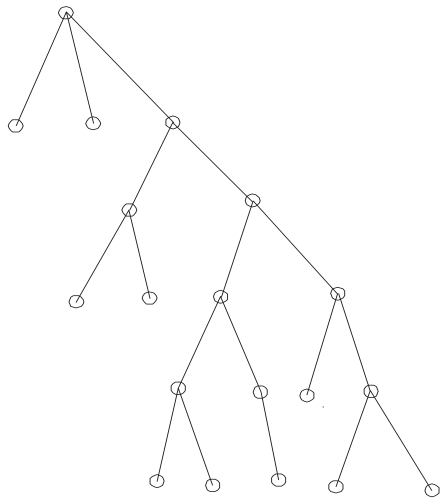


Рис. 3.64. Несбалансированное дерево

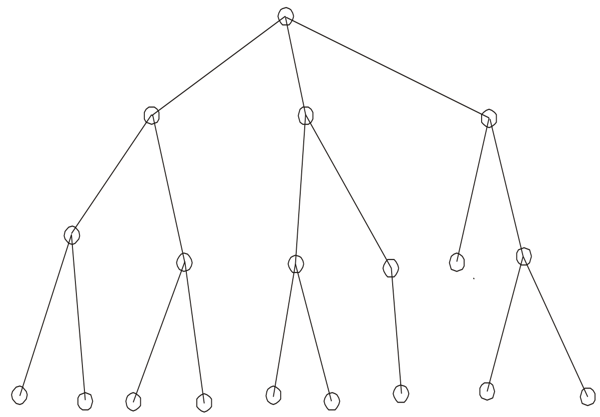


Рис. 3.65. Сбалансированное дерево

Деревья часто используются как способ организации данных, способ их упорядочивания по тому или иному признаку. Очевидным примером использования деревьев служит представление классификации – родовидового отношения между различными понятиями. В этом случае корнем дерева является все множество классифицируемых объектов. На следующем уровне представляются классы объектов, на нижних уровнях – подклассы, группы, подгруппы и т. п. Эти наименования могут быть различными, но в любом случае вершина-предок играет роль родового понятия по отношению к вершинам-потомкам, а потомки являются видами общего понятия, соответствующего вершине-предку.

В качестве еще одного примера можно привести использование деревьев при создании различных перечней, допустим, каталога названий географических объектов. Такой каталог может содержать сотни тысяч или миллионы наименований. Очевидно, что с целью быстрого поиска наименований каталог должен создаваться по лексикографическому принципу (в алфавитном порядке). Однако с течением времени некоторые географические объекты исчезают, а другие, напротив, появляются. Поэтому каталог географических объектов должен поддерживаться в актуальном состоянии, постоянно

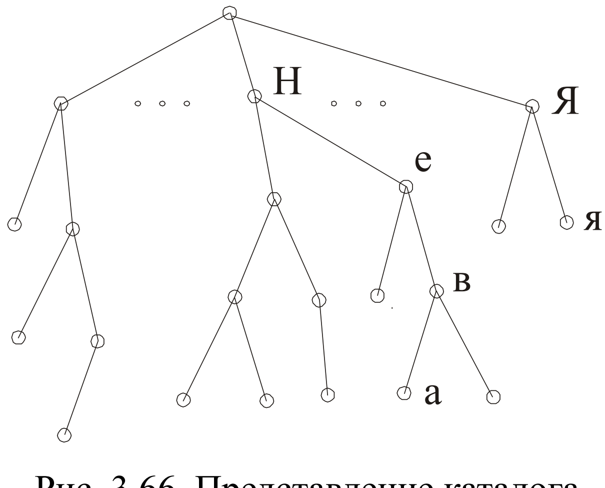


Рис. 3.66. Представление каталога

обновляться.

Представление названий в виде отсортированного массива неэффективно, поскольку внесение любых изменений будет требовать выполнения сортировки. Затраты машинного времени при этом могут оказаться весьма ощутимыми. Более эффективной организацией каталога может оказаться его представление в виде сбалансированного дерева (рис. 3.66). Очевидно, что при больших объемах данных поиск в несбалансированном дереве (см. рис. 3.64) потребует большего времени.

С целью повышения эффективности поиска координат точек земной поверхности для ГИС был разработан специальный вид деревьев, называемых квадротомическими. *Квадротомическим деревом* (или просто *квадродеревом*) называют дерево, каждый узел которого связан с четырьмя вершинами нижнего уровня. Положение объектов земной поверхности задается указанием координат их характерных точек, число которых в большой ГИС может превышать 10^9. Распределение точек на моделируемой поверхности может быть существенно неравномерным. В частности, при моделировании рельефа на участках со сложным рельефом плотность исходных точек может быть очень высокой, а на участках со спокойным, гладким рельефом – низкой.

При решении геометрических задач поиск и выборка координат нужных точек среди большого числа произвольно расположенных на поверхности точек превращается в серьезную проблему. Поэтому требуется определенным образом упорядочить геометрические данные. Квадротомические деревья – один из способов такого упорядочивания.

При создании квадротомических деревьев вся область моделирования разбивается на 4 квадранта. Затем каждый квадрант может рекурсивно разбиваться на четыре квадранта до тех пор, пока число точек, попадающих в один квадрант, не станет меньше некоторого заданного числа (рис. 3.67, 3.68). При добавлении или удалении точек процедура разбиения области на квадранты может повторяться.

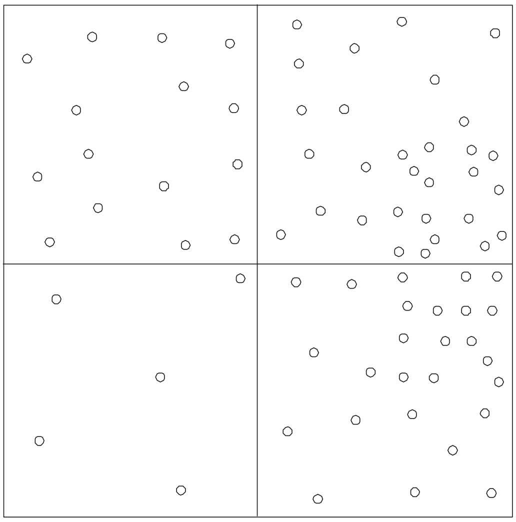


Рис. 3.67. Первичное разбиение

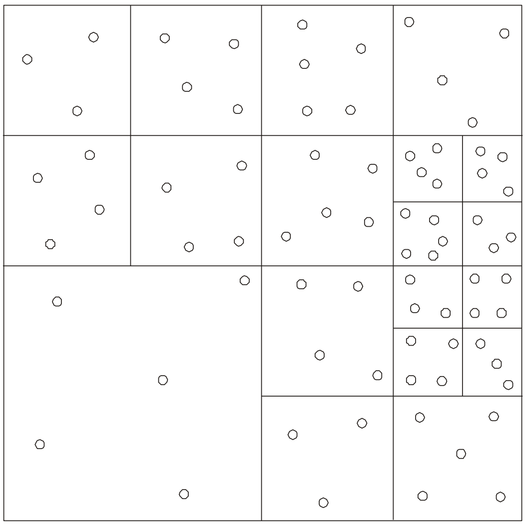


Рис. 3.68. Конечное разбиение

На верхнем уровне квадрантам присваиваются номера 0, 1, 2, 3. Квадрантам на нижних уровнях присваиваются внутренние номера по этой же схеме (рис. 3.69). Полный номер каждого нового квадранта образуется конкатенацией номера квадранта верхнего уровня и внутреннего номера. Так, если квадрант 0 в свою очередь разбивается на 4 квадранта, то им должны присваиваться номера 00, 01, 02, 03.

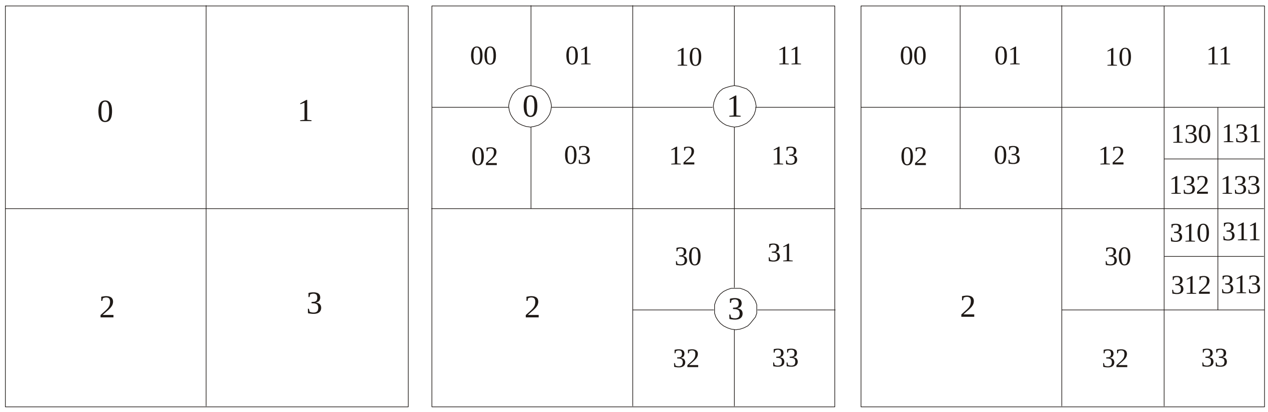


Рис. 3.69. Нумерация квадрантов

Между квадрантами и вершинами квадродерева устанавливается взаимно однозначное соответствие (рис. 3.70). Четырем начальным квадрантам в корневой вершине квадродерева соответствуют четыре вершины нижнего уровня. Таким же образом, каждая промежуточная вершина связана с четырьмя вершинами нижнего уровня. В этих вершинах хранятся указатели на вершины нижнего уровня. В вершинах, являющихся листьями, хранятся не указатели на вершины нижнего уровня, а указатель на блок точек, попадающих в соответствующий квадрант. Такая организация данных позволяет быстро извлекать все множество точек, попадающих в тот или иной квадрант или набор квадрантов.

В системах искусственного интеллекта приходится сталкиваться с проблемой представления так называемых И/ИЛИ-деревьев. Пример такого дерева приводится на рис. 3.71.

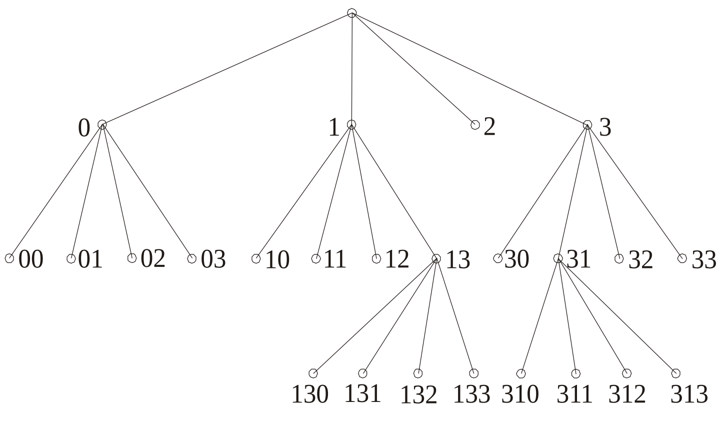


Рис. 3.70. Квадродерево

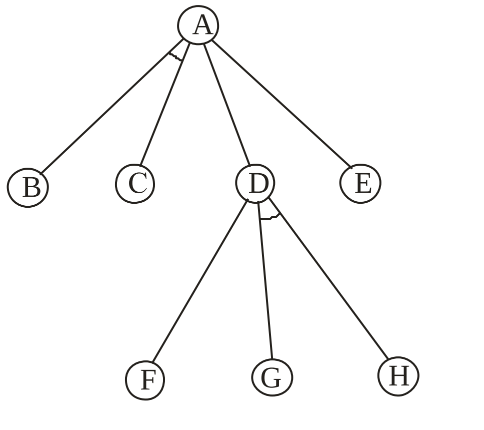


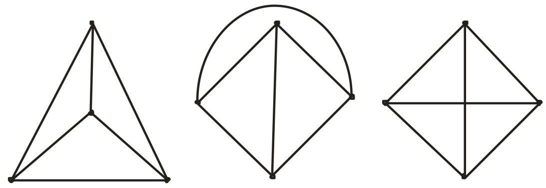
Рис. 3.71. Пример И/ИЛИ-дерева

3.11. Планарные графы

Плоским называют геометрический граф, изображенный на плоскости таким образом, что ни одна пара его ребер не пересекается. *Планарным* графом называют абстрактный граф, изоморфный плоскому графу. Очевидным частным случаем планарных графов являются деревья.

Для картографии и геоинформатики планарные графы представляют интерес хотя бы по той причине, что в них положение пространственных объектов принято указывать в системе координат, связанной с двумерной областью. Такой областью является либо поверхность с краем – при моделировании участка земной поверхности, либо сфера – при моделировании земной поверхности в целом. Поэтому необходимо выяснить условия, когда тот или иной граф является планарным.

На рис. 3.72, *а, б* только геометрические графы являются плоскими, но изоморфные им три абстрактных графа планарны. Частным случаем планарных графов являются внешнепланарные. *Внешнепланарным* называют планарный граф, имеющий такую укладку на плоскости, что все его вершины принадлежат одной грани (рис. 3.73).



а) *б*) *в*)

Рис. 3.72. Планарные и плоские графы

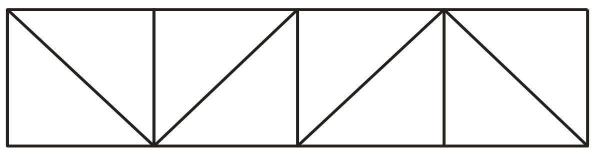


Рис. 3.73. Внешнепланарный граф

Интерес представляет также вопрос, когда планарный граф может быть изображен на плоскости так, что его ребра будут прямолинейными отрезками. Понятно, что графы с петлями и кратными ребрами не могут быть так изображены.

Представляются очевидными, по крайней мере, следующие утверждения:

1) каждый подграф планарного графа планарен;

2) любой граф, содержащий непланарный граф в качестве своего подграфа, сам не может быть планарным.

Отсюда следует, что для доказательства непланарности графа достаточно доказать непланарность хотя бы одного его подграфа. В частности, непланарным является полный двудольный граф $K_{3,3}$. Этот граф возникает при решении известной головоломки о трех домах и трех колодцах: от каждого дома нужно провести путь к каждому колодцу так, чтобы пути не пересекались (рис. 3.74). При этом дома и колодцы на плоскости могут располагаться как угодно. Доказано, что эта задача не имеет решения, что означает непланарность графа $K_{3,3}$. Хотя данный результат правильнее будет

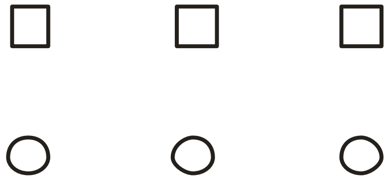


Рис. 3.74. Три колодца

сформулировать наоборот: задача не имеет решения, потому что соответствующий граф $K_{3,3}$ не является планарным. Еще одним примером непланарного графа служит полный граф K_5, изображенный на рис. 3.7.

Установлено, что K_5 и $K_{3,3}$ являются едва ли не единственными непланарными графами, поскольку каждый непланарный граф содержит один из них в качестве своего подграфа. Доказательство этого утверждения основано на понятии гомеоморфизма графов.

Ясно, что стягивание графа можно несколько расширить и удалять не только промежуточные вершины, но и висячие вершины (степени 1). Их исключение никаким образом не отразится на свойстве планарности графа. Если из графа удалить все вершины степеней 0, 1 и 2, то редуцированный таким образом граф будет содержать только узловые вершины степени $\rho(v) \geq 3$. Также легко понять, что при этом могут возникнуть кратные ребра и петли и может произойти трансформация простого графа в общий граф.

Отношение гомеоморфизма графов является отношением эквивалентности и вводится по соображениям удобства, поскольку включение или удаление вершин степени 2 не влияют на свойство планарности графа.

В 1930 г. польским математиком Куратовским (1896–1980) была доказана теорема: граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$. Более общая теорема утверждает, что граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, стягиваемых к K_5 или $K_{3,3}$.

В теории графов установлено, что если граф может быть уложен на сфере, то он может быть уложен и на плоскости. Доказана теорема, утверждающая что граф планарен тогда и только тогда, когда он может быть уложен на сфере.

Для доказательства этой теоремы используется понятие дизъюнктной точки. В принципе, бесконечной можно считать любую фиксированную грань плоского графа G. Данное утверждение становится достаточно очевидным, если учесть, что каждый плоский граф может быть уложен на сфере. На сфере все грани являются конечными. Перенос графа со сферы на плоскость осуществляется с использованием стереографической проекции следующим образом (рис. 3.75).

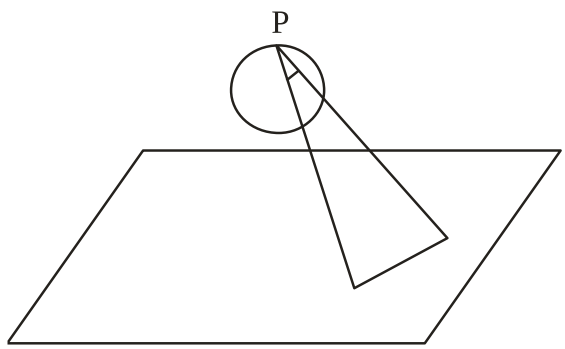


Рис. 3.75. Стереографическая проекция

Пусть G – граф на сфере. Выбирается любая из граней графа и на этой грани выбирается произвольная точка P, дизъюнктная G. Сфера ориентируется по отношению к плоскости таким образом, чтобы расстояние от выбранной дизъюнктной точки до плоскости было максимальным. Выбранная дизъюнктная точка играет роль полюса и центра проектирования. Все вершины и ребра графа G проектируются из точки P на плоскость.

Можно выполнить и обратное проектирование графа G на плоскости на сферу. Для этого выберем на любой конечной грани графа дизъюнктную ему точку и сферу разместим так, чтобы она касалась плоскости этой точкой или ее центр находился на нормали к плоскости, проходящей через выбранную дизъюнктную точку. После этого построим обратную стереографическую проекцию графа на сферу.

Если вершины и ребра выпуклого многогранника вначале спроектировать на описанную вокруг него сферу, а затем изображение многогранника на сфере спроектировать с использованием стереографической проекции на плоскость, то мы получим плоский связный граф с многоугольными гранями, который называют *графом многогранника*.

Для плоских графов Л. Эйлером в 1752 г. была доказана теорема: если G – плоский граф с n вершинами, m ребрами и g гранями, то выполняется равенство

$$n + g = m + 2. \qquad (3.7)$$

Это означает, что в любой плоской укладке графа с n вершинами и m ребрами число граней остается постоянным. Данную формулу называют *формулой Эйлера для многогранников*, так как она связывает число вершин, ребер и граней любого выпуклого многогранника. Из формулы (3.7) вытекает следствие: если G – граф многогранника, то выполняется соотношение (3.7).

Формула Эйлера обобщается для несвязных графов: если G – плоский граф с n вершинами, m ребрами, g гранями и k компонентами, то

$$n + g = m + k + 1. \qquad (3.8)$$

1. Если G – связный простой планарный граф с $n > 2$ вершинами и m ребрами, то $m \leq 3n - 6$.
2. Графы K_5 или $K_{3,3}$ не являются планарными.

Доказана также теорема, что в *любом простом планарном графе существует вершина, степень которой не превышает* 5. Практический вывод из этой теоремы, который может быть использован при анализе графов: если в некотором графе G отсутствуют вершины степени меньше 5, то G не является планарным.

В некоторых случаях требуется определить толщину графа. *Толщиной* $t(G)$ графа G называют наименьшее число планарных графов – подграфов графа G, объединение которых дает G. Эта задача возникает не только при производстве печатных плат. В геоинформатике она может возникнуть при разработке структуры геометрических данных. Мы можем потребовать разбиения геометрических данных на несколько слоев таким образом, чтобы граф каждого слоя представлял собой плоский граф. Тогда при решении некоторых геометрических задач не потребуется находить пересечения ребер внутри слоя, а достаточно будет проверять только пересечения его ребер с ребрами других слоев (разделов, аспектов).

Следует сказать, что некоторые тематические слои в геоинформационной модели могут быть только плоскими. Такими слоями являются государственные и административные границы, гидрография и некоторые другие. Но другие тематические слои могут не являться плоскими. Примером такого слоя может служить сеть инженерных коммуникаций или сеть автомобильных дорог, содержащая развязки в нескольких уровнях, и т. п.

Число слоев, определяющих толщину графа, устанавливается следующей теоремой: если граф G – простой граф с $n > 2$ вершинами и m ребрами, то толщина графа лежит в пределах между $t_1(G) \geq \{\frac{m}{3n-6}\}$ и $t_2(G) \geq [\frac{m+3n-7}{3n-6}]$, где $\{x\}$ означает наибольшее целое число, не превосходящее x, а $[x]$ – наименьшее целое число не меньше x.

3.12. Двойственные графы

Двойственные графы в некоторых случаях существенно облегчают решение задач на графах. Чтобы ввести понятие двойственного графа, выполним некоторые вспомогательные построения. Пусть дан плоский граф G. Внутри каждой грани этого графа выберем произвольную дизъюнктную точку v^*, которая будет вершиной нового графа G^*. Каждому ребру графа G поставим в соответствие отрезок простой кривой, пересекающий данное ребро e и никакое другое ребро исходного графа и соединяющий точки на гранях по разные стороны ребра e. Полученный таким образом граф G^* называют графом, *геометрически двойственным* к G.

Исходный граф G и двойственный ему граф G^* приведены на рис. 3.76. При указанном способе построения каждая висячая вершина в G порождает петлю в G^*, а если две грани имеют несколько *общих* ребер, то в графе G^* им будет соответствовать столько же *кратных* ребер.

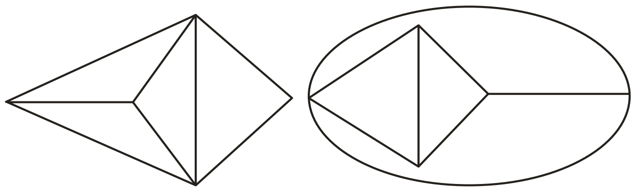


Рис. 3.76. Плоский и двойственный графы

Исходный и двойственный графы являются изоморфными. В таких случаях говорят, что двойственный граф определен с точностью до изоморфизма. Однако, из изоморфизма двух графов G и H не следует изоморфизм двойственных им графов G^* и H^*. Если граф G связный, то G^* также будет связным.

Для двойственных графов справедлива следующая лемма: если G – плоский связный граф с n вершинами, m ребрами и g гранями, то геометрически двойственнный ему граф G^* будет иметь число вершин $n^* = g$, число ребер $m^* = m$ и число граней $g^* = n$.

Двойственный граф G^* является плоским, поэтому можно построить граф G^{**}, двойственный графу G^*. Если G – плоский связный граф, то G^{**} изоморфен G.

Для произвольного планарного графа двойственнный к нему граф может быть определен следующим образом. Выполняется некоторая укладка исходного графа на плоскости (решение может быть неоднозначным). Строится граф, двойственнный к полученной укладке. Поскольку двойственные графы определены только для планарных графов, постольку граф является планарным тогда и только тогда, когда существует двойственный ему граф.

Задача может быть поставлена иначе: требуется определить, является ли планарным заданный произвольный граф. Чтобы найти решение поставленной задачи, необходимо дать определение двойственности графов как обобщение геометрической двойственности, позволяющее определить принадлежность графа к планарным. Такое определение двойственности было получено на основе двойственности между циклами и разрезами планарного графа.

Указанная двойственность устанавливается на основании следующих теорем:

1. Если граф G планарный и граф G* – двойственный ему, то множество ребер графа G образует цикл тогда и только тогда, когда соответствующее множество ребер графа G* образует в нем разрез.
2. Множество ребер графа G образует в нем разрез, если и только если соответствующее множество ребер графа G* образует цикл в G*.

Таким образом, при построении двойственного графа циклы исходного графа преобразуются в разрезы двойственного, а его разрезы трансформируются в циклы.

Граф *G** называют *абстрактно двойственным* к *G*, если между ребрами графов *G* и *G** существует взаимно однозначное соответствие, при котором подмножество ребер из *G* образует цикл в *G* тогда и только тогда, когда соответствующее ему подмножество ребер из *G** образует разрез в *G**. Особенность данного определения состоит в том, что оно основано не на каких-либо свойствах планарных графов, а только на отношении между двумя графами. Если *G* – планарный граф, а *G** – геометрически двойственный к нему, то *G** является абстрактно двойственным к *G*.

Отношение двойственности между двумя графами обладает свойством симметричности, что утверждается следующей теоремой: если граф *G** абстрактно двойствен к графу *G*, то *G* абстрактно двойствен к *G**.

3.13. Раскраска графов

Проблема раскрашивания графов имеет картографическое происхождение и возникла в связи с необходимостью раскрашивания карт при соблюдении некоторых условий. Решение задач раскрашивания графов носит преимущественно качественный характер: требуется показать, что при заданных условиях решение существует.

Как правило, при раскрашивании рассматриваются графы вполне определенного вида, называемые *картами* – связные плоские графы или мультиграфы без мостов. Название произошло от географических карт, на которых изображение границы любого государства представляет собой замкнутую кривую, и соседними считаются страны, имеющие общую границу. При этом также предполагается, что государства не имеют анклавов. Иногда говорят о *плоской карте* – связном плоском графе вместе со всеми его гранями.

Задача раскраски карт заключается в том, чтобы найти наименьшее число красок, при котором никакие две соседние страны (две грани графа) не будут окрашены одним цветом. Карта, грани которой могут быть раскрашены k цветами так, что любые две смежные грани будут раскрашены в разные цвета, называется *k-раскрашиваемой картой*. Для наиболее простого случая доказана теорема, утверждающая, что карта G является 2-раскрашиваемой тогда и только тогда, когда G является эйлеровым графом.

Для планарных графов были доказаны более сильные теоремы. Вначале было установлено, что любой планарный граф является 6-раскрашиваемым, а затем доказана теорема о том, что любой планарный граф 5-раскрашиваем. Была также высказана гипотеза о принадлежности всех планарных графов к 4-раскрашиваемым (*гипотеза четырех красок*), но она не получила (более чем за 100 лет) ни своего подтверждения, ни опровержения. По одним источникам, эта гипотеза впервые была сформулирована немецким математиком А.Ф. Мебиусом (1790–1868), по другим – одним из лондонских студентов, обнаружившим в середине XIX в., что на карте Англии все графства могут быть раскрашены четырьмя красками так, что любые два соседние графства будут иметь разные цвета.

Первое доказательство гипотезы четырех красок было опубликовано английским математиком Кемпе в 1880 г. Но через десять лет Хивудом была обнаружена ошибка в этом доказательстве. В 1979 г. (то есть через 99 лет после опубликования первого доказательства!) К. Аппелем и В. Хакеном было получено доказательство гипотезы 4 красок, выполненное ЭВМ. Но этот результат математическим сообществом не был признан в качестве доказательства. Позднее Д. Коэном было предложено другое, более короткое, решение проблемы четырех красок, полученное опять же с применением ЭВМ. Это доказательство было изложено в книге среднего объема и формата. По мнению самого Коэна, проверка данного доказательства может быть выполнена человеком в течение 2–3 лет при условии ежедневной 8-часовой работы. По мнению скептиков, это занятие абсолютно бесперспективно, поскольку намного превышает пределы человеческих возможностей: никто не может гарантировать, что человек при этом не допустит ни *одной* ошибки.

Пока что установлено, что любой планарный граф, содержащий менее 52 вершин, относится к 4-раскрашиваемым.

Легко видеть, что задача раскраски граней графа и задача раскраски его вершин взаимосвязаны. Если использовать двойственные графы, то задача раскраски граней исходного графа будет сведена к задаче раскраски вершин двойственного графа и наоборот.

Поэтому *раскраской графа* называют также некоторую функцию вида $f: V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$, отображающую множество вершин графа G в множество цветов, идентифицируемых целыми числами от 1 до k. Если хотят указать количество используемых цветов, то говорят о *k-раскраске*. Практический интерес представляют не произвольные раскраски, а раскраски с определенными свойствами. В частности, такими являются раскраски, называемые *правильными*, когда смежные вершины графа оказываются раскрашенными в различные цвета. Вершины, окрашенные в один цвет при некоторой фиксированной раскраске, называют *соцветными вершинами*. Под *числом раскрасок* графа G или *хроматической функцией* понимается число попарно различных k-раскрасок G.

Полной раскраской называют раскраску, обладающую тем свойством, что для любых двух цветов в графе найдутся смежные вершины, окрашенные в эти цвета.

Граф G (без петель) называется *k-раскрашиваемым графом*, если каждой из вершин может быть присвоен один из k цветов и при этом никакие две смежные вершины не будут иметь один и тот же цвет. Если граф является k-раскрашиваемым, но не является $(k - 1)$-раскрашиваемым, то его называют *k-хроматическим*, а соответствующее число k называется *хроматическим числом* графа G и обозначается как $\chi(G)$. Если $\chi(G) = 2$, то такой граф называют *бихроматическим*.

Доказана следующая теорема: если G – планарный граф без петель, а G^* – геометрически двойственный ему граф, то граф G *вершинно k-раскрашиваем* тогда и только тогда, когда граф G^* k-раскрашиваем. Отсюда следует, что гипотеза четырех красок для карт эквивалентна гипотезе четырех красок для планарных графов.

В предельных случаях определение числа цветов не вызывает каких-либо затруднений. В частности, любой граф, имеющий n вершин, может быть раскрашен n цветами. С другой стороны, вершины вполне несвязного (вырожденного) графа могут быть раскрашены одним цветом. При этом никакие две вершины одного ребра не будут закрашены одним цветом, поскольку отсутствуют сами ребра. Таким образом, для вполне несвязного графа G хроматическое число равно $\chi(G) = 1$.

Двуцветным (или *бихроматическим*) *подграфом* называют подграф правильно раскрашенного графа, порожденный вершинами, окрашенными в два заданных цвета. Очевидными случаями бихроматического графа являются двудольный граф, не являющийся вполне несвязным, и дерево, имеющее не менее двух вершин.

Относительно условий, которыми должен обладать 3-хроматический граф, ничего не известно. Но известно, что 3-хроматическими являются циклические графы с нечетным числом вершин, колеса с нечетным числом вершин и некоторые другие. Колеса с четным числом вершин являются 4-хроматическими.

Естественно, хроматическое число произвольного графа не может превосходить числа его вершин. Наиболее значимым результатом для произвольных графов служит теорема, утверждающая, что если наибольшая из степеней вершин графа равна ρ, то он является $(\rho + 1)$-раскрашиваемым.

В геометрической трактовке под раскрашенным графом понимается граф, никакие две смежные вершины которого не раскрашены одним цветом. Но если множество вершин, окрашенных одним цветом, понимать как некоторый класс эквивалентности, то раскрашенному графу можно дать более общее определение. Тогда *раскрашенным графом* называют граф G с заданным на множестве его вершин таким отношением эквивалентности, что никакие смежные вершины G не эквивалентны.

Иногда рассматривается *реберная k-раскраска* графа, под которой понимают некоторую функцию f:$E(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$, ставящую в соответствие каждому ребру значение цвета, обозначаемое целым числом от 1 до k. Тогда граф, допускающий правильную раскраску ребер, называют *реберно раскрашиваемым* графом. О графе, для которого возможна правильная k-реберная раскраска, говорят как о *реберно k-раскрашиваемом* графе.

3.14. Характеристики графов

Решение прикладных задач часто заключается в определении некоторых характеристик графа. Та или иная характеристика графа является *инвариантом графа* – некоторой функцией $f(G)$, принимающей одно и то же значение для любого графа, изоморфного G. Такими инвариантами являются число вершин, число ребер и др. Некоторые инварианты графов рассматривались выше.

Под *критической вершиной* понимается вершина графа, удаление которой изменяет некоторую числовую характеристику графа (число компонент связности, хроматическое число и т. д.). *Критическим* относительно свойства P *ребром* называют ребро графа, удаление которого приводит к графу, уже не обладающему этим свойством. *Критический граф* определяется как граф, каждая вершина которого является критической относительно фиксированного свойства (число компонент связности, хроматическое число и т. д.).

Наряду с числом вершин, числом ребер и связностью графа наиболее употребительными характеристиками графа являются размерность графа, цикломатическое число, хроматическое число, множество внутренней устойчивости и множество внешней устойчивости графа.

Если граф G можно уложить в k-мерном евклидовом пространстве таким образом, что расстояние между любыми двумя смежными вершинами будет равно 1, то наименьшее целое число k называют *размерностью графа*.

Степень связности графа характеризуется *числом вершинной связности* или *числом связности* – наименьшим числом вершин, удаление которых приводит к несвязному или одновершинному графу. *Числом внутренней устойчивости* (или *числом независимости*) называется число вершин в наибольшем независимом множестве графа.

В равной степени связность графа отражает *число реберного покрытия* – число ребер в наименьшем реберном покрытии графа. *Реберное покрытие графа* – это такое подмножество ребер графа, что каждая вершина графа инцидентна хотя бы одному ребру из этого подмножества. *Числом реберной связности* называется наименьшее число ребер, удаление которых приводит к несвязному графу; для одновершинного графа число реберной связности принимается равным 0.

Важной характеристикой графа G служит *число скрещиваний* – наименьшее возможное число пересечений, получаемых при изображении графа на плоскости. Число пересечений графа обозначается через $cr(G)$. Для планарного графа $cr(G) = 0$.

Цикломатическим числом графа называют число

$\nu(G) = m - n + k,$ (3.9)

где n – число его вершин, m – число ребер и k – число компонент связности. Смысл цикломатического числа состоит в том, что оно определяет число независимых циклов в графе. Так, при расчете электрической цепи число независимых контуров в ней равно цикломатическому числу.

Примером из области геодезии, поясняющим независимость циклов, может служить нивелирная сеть. Пусть задан граф (рис. 3.77), вершины которого трактуются как репера, а ребра – как измеренные превышения между реперами. Измеренные превышения образуют два замкнутых полигона, а соответствующие им ребра – два цикла: I = {(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6,1)} и II = {(6,5), (5,4), (4,8), (8,7), (7,6)}. Из геометрических соображений ясно, что сумма превышений в каждом замкнутом полигоне должна быть равна нулю. Таким образом, в данной нивелирной сети возникают два геометрических условия или два условных уравнения, которым должны отвечать результаты измерений. Цикломатическое число графа на рис. 3.77 $\nu(G) = m - n + k = 9 - 8 + 1 = 2$ равно числу независимых замкнутых полигонов нивелирной сети.

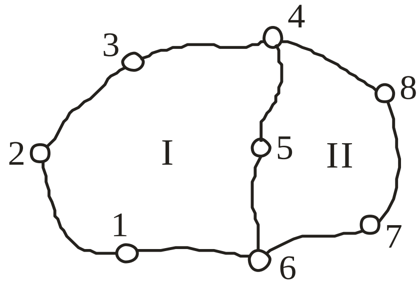
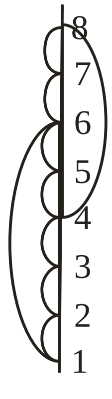


Рис. 3.77. К зависимости циклов



3.78. Проекция на ось Z

Сумма превышений в цикле {(1,2), (2,3), (3,4), (4,8), (8,7), (7,6). (6,1)} также должна быть равна нулю. Но данный цикл не является независимым, поскольку соответствующее ему третье условное уравнение может быть получено как линейная комбинация двух первых. Выбор первых двух уравнений в качестве независимых не является обязательным. С таким же основанием как независимая может рассматриваться любая система двух уравнений из трех возможных. Оставшееся третье уравнение будет зависимым и не должно включаться в систему.

Схема нивелирной сети на рис. 3.77 приведена в традиционном виде – как проекция на горизонтальную плоскость. Но суть геометрических условий, возникающих в данной сети, может быть более ясной, если построить проекцию нивелирной сети на вертикальную ось (рис. 3.78).

Хроматическим числом $\gamma(G)$ графа называют наименьшее целое число p, если вершины графа можно раскрасить p цветами таким образом, что никакие две смежные вершины не будут раскрашены одним цветом.

Если $\gamma(G) = 2$, то граф называется *бихроматическим*. Чтобы граф был бихроматическим, необходимо и достаточно, чтобы в нем отсутствовали циклы нечетной длины.

Внутренне устойчивым множеством называется множество вершин $U \subseteq V$ графа $G = (V, \Gamma)$, если любые две вершины из U не являются смежными. Данное определение формально можно записать как $\forall x(x \in V \rightarrow \Gamma x \bigcap U = \varnothing)$. *Наибольшим внутренне устойчивым множеством* называют множество внутренней устойчивости, содержащее наибольшее число элементов. Число элементов такого множества называют *числом внутренней устойчивости* графа. На рис. 3.79 внутренне устойчивыми множествами являются множества вершин {2, 4, 8} и {1, 3, 5, 7, 9}. Кроме того, последнее множество является также наибольшим внутренне устойчивым множеством.

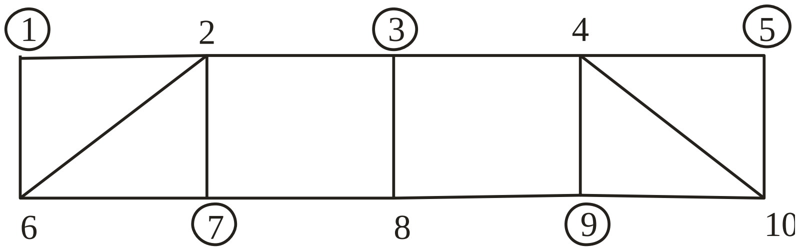


Рис. 3.79. Внутренне устойчивое множество

Множеством внешней устойчивости, или *внешне устойчивым множеством*, называется множество вершин $U \subset V$ графа $G = (V, \Gamma)$, если любая вершина, не принадлежащая U, соединена ребрами с вершинами из U. Формальное определение множества внешней устойчивости: $\forall x(x \notin U \rightarrow \Gamma x \bigcap U \neq \varnothing$. *Наименьшим множеством внешней устойчивости* называют множество внешней устойчивости с наименьшим числом элементов, а число его элементов называют *числом внешней устойчивости* графа.

Число пересечений графа G – минимальная мощность таких множеств S, что G есть граф пересечений на S. *Графом пересечений* называют граф $\Omega(F)$, определенный для покрытия $F = (S_1, S_2, \ldots, S_n)$ непустого множества S непустыми несовпадающими подмножествами; вершинами графа $\Omega(F)$ являются подмножества S_i, и две вершины S_i и S_j смежны, если $S_i \cap S_j \neq \varnothing$.

Число скрещиваний – наименьшее число пересечений пар ребер при изображении графа на плоскости; для планарного графа число скрещиваний равно нулю.

3.15. Представление графов

Описание, или *задание, графа* есть способ представления графа в памяти ЭВМ, сохраняющий всю информацию о структуре графа. Выбор конкретного способа представления графа зависит от решаемой задачи. Наиболее универсальными способами описания графов являются использование матриц смежности и матриц инцидентности.

Если G – произвольный граф с n вершинами, то *матрицей смежности* называют квадратную матрицу $R = \left\| r_{ij} \right\|$, каждый элемент которой r_{ij} является целым неотрицательным числом, равным числу ребер, соединяющих вершину i с вершиной j. Очевидно, что матрица R симметрична $(r_{ij} = r_{ji})$, поскольку число ребер, соединяющих вершину i с вершиной j, равно числу ребер, соединяющих j с i. Сумма элементов любой строки или любого столбца матрицы смежности равна степени соответствующей вершины. Все элементы строки и столбца, относящиеся к голой вершине, будут иметь нулевые значения. Для изолированной вершины с петлями ненулевое значение будет иметь только соответствующий элемент главной диагонали.

С помощью матрицы смежности можно описать любой граф. Верно и обратное утверждение: любой матрице смежности можно поставить в соответствие единственный с точностью до изоморфизма граф. Следовательно, представление и изучение графов может быть сведено к представлению и изучению их матриц смежности. Матрицу смежности называют также *матрицей смежности вершин* и *матрицей связности.*

На рис. 3.81 представлена матрицы смежности, описывающая граф, изображенный на рис. 3.80. Чтобы избежать каких-либо недоразумений, на рис. 3.80 вершины графа пронумерованы, а его ребра обозначены буквами латинского алфавита. В графе без петель, как в данном примере, все элементы главной диагонали $r_{ii} = 0$.

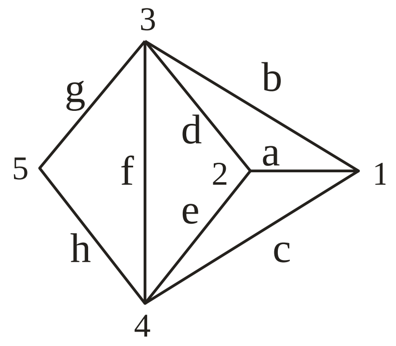


Рис. 3.80. Помеченный граф

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Рис. 3.81. Матрица смежности

Матрица смежности ребер – квадратная матрица S, строки и столбцы которой соответствуют ребрам; элемент матрицы $s_{ij} = 1$, если ребро i смежно с ребром j, и $s_{ij} = 0$ в противном случае. Для графа на рис. 3.80 матрица смежности ребер представлена на рис. 3.82. В отличие от матрицы смежности, элементы главной диагонали матрицы смежности ребер графа без петель всегда равны нулю, так как ребро не может быть смежным с самим собой. Если же некоторые элементы главной диагонали не равны 0, то это является указанием на то, что каждое такое ребро является петлей. Если ребро i смежно с ребром j, то и ребро j смежно с i; поэтому матрица смежности ребер, как и матрица смежности, обладает свойством симметричности.

Матрицей инциденций (рис. 3.83) графа G с n вершинами и m ребрами называют прямоугольную порядка $m \times n$ матрицу $S = \|s_{ij}\|$, каждый элемент s_{ij} которой равен 1, если вершина i инцидентна ребру j, и 0 – в противном случае.

Матрицей инциденций графа G будет и транспонированная матрица $S_{mn} = S_{nm}^T$. Сумма элементов каждой строки матрицы S будет равна степени вершины, а сумма элементов каждого ее столбца будет равна 2.

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	0	1	1	1	1	0	0	0
b	1	0	1	1	0	1	1	0
c	1	1	0	0	1	1	0	1
d	1	1	0	0	1	1	1	0
e	1	0	1	1	0	1	0	1
f	0	1	1	1	1	0	1	1
g	0	1	0	1	0	1	0	1
h	0	0	1	0	1	1	1	0

Рис. 3.82. Матрица смежности ребер

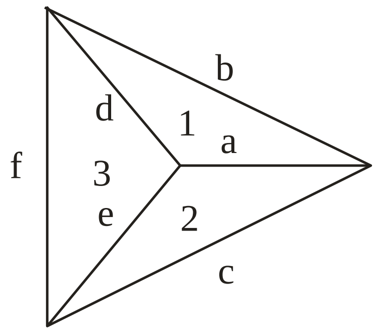
	a	b	c	d	e	f	g	h
1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	1	0	0	0
3	0	1	0	1	0	1	1	0
4	0	0	1	0	1	1	0	1
5	0	0	0	0	0	0	1	1

Рис. 3.83. Матрица инциденций

Матрица смежности и матрица инциденций содержат всю информацию о графе, однако извлечение некоторых отношений, представленных в них в неявном виде, может потребовать существенных затрат машинного времени. Поэтому при решении задач может оказаться эффективным использование матрицы циклов.

Матрицей циклов называется прямоугольная матрица C_{mn}, где m – равно числу простых циклов, а n – числу ребер, в которой элемент $c_{ij} = 1$, если ребро j входит в цикл i, в противном случае – $c_{ij} = 0$. На рис. 3.84 независимые простые циклы графа обозначены цифрами. Остальные циклы в матрице обозначены как суммы независимых циклов. Число ненулевых элементов в i-й строке матрицы циклов равно числу ребер в соответствующем цикле.

В матрице циклов следует обратить внимание на зависимые циклы, обозначенные на рис. 3.84 как сумма независимых циклов. Зависимость циклов означает их избыточность. В данном примере каждый зависимый цикл может быть представлен как результат сложения по модулю 2 двух независимых циклов i и j. В общем случае любой зависимый цикл может быть получен сложением по модулю 2 нескольких независимых циклов.



	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
1	1	1	0	1	0	0
2	1	0	1	0	1	0
3	0	0	0	1	1	1
1 2	0	1	1	1	1	0
1 3	1	1	0	0	1	1
2 3	1	0	1	1	0	1
1 2 3	0	1	1	0	0	1

Рис. 3.84. Граф и матрица циклов

От этого недостатка, присущего матрице циклов, – избыточности – можно избавиться, если использовать матрицу граней. *Матрица граней* представляет собой прямоугольную матрицу A_{mn}, где m равно числу граней, а n – числу ребер, и элемент матрицы a_{ij} = 1, если ребро j является граничным для грани i, в противном случае a_{ij} = 0.

На рис. 3.85 представлена матрица граней, соответствующая графу на рис. 3.84. Множество граней характерно тем, что оно содержит все независимые циклы и длина этих циклов минимальна. Все зависимые циклы могут быть получены как комбинации смежных циклов. Две грани i и j будут смежными, если хотя бы для одного столбца k матрицы граней выполняется условие $a_{ik} = a_{jk} = 1$. Нижняя строка в матрице граней представляет собой внешнюю грань. Она может быть получена сложением всех верхних строк матрицы граней по модулю 2.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
1	1	1	0	1	0	0
2	1	0	1	0	1	0
3	0	0	0	1	1	1
	0	1	1	0	0	1

Рис. 3.85. Матрица граней

В качестве дополнительного способа представления графов может служить *матрица вложенности контуров* – матрица C_{nn} (n – число циклов в графе), элемент которой c_{ij} = 1, если контур c_j вложен в контур c_i, и c_{ij} = 0 в противном случае.

Преимуществом использования матриц для описания графов является возможность быстрого доступа к их любому элементу. Но их применение для представления графов сопровождается неэффективным использованием памяти ЭВМ. При больших размерах матрицы могут быть разреженными или даже сильно разреженными, поскольку большинство их элементов будут нулевыми. По крайней мере, такая ситуация встречается при создании геоинформационных моделей. Число вершин и ребер может составлять десятки и сотни тысяч, но ребра, как правило, соединяют лишь близко расположенные вершины. Поэтому матрицы смежности и матрицы инциденций будут сильно разреженными. В таких случаях используют либо специальную технику работы с разреженными матрицами либо списковые структуры.

С этой целью могут использоваться как *списки ребер* – способ задания графа или гиперграфа перечислением всех его ребер, так и *списки смежности* – списки всех вершин, смежных с заданной вершиной. Граф с n вершинами в целом может быть представлен как n списков смежности.

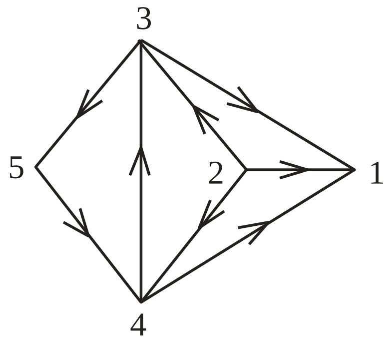
Неэффективность применения матриц смежности и матриц инцидентности проявляется и при представлении особых видов графов, например, деревьев. Очевидно, что матрицы смежности (инцидентности) для деревьев с большим числом вершин также будут разреженными. Поэтому для представления деревьев используются специальные структуры данных, обеспечивающие как компактное представление, так и быстрый доступ к любому элементу дерева.

При моделировании рельефа в геоинформационных системах поверхность часто представляется в виде поверхности многогранника, каждая грань которого – треугольник. Проекция множества треугольников на горизонтальную плоскость или сферу является *плоской триангуляцией*. Множество треугольников при этом представляется в виде некоторой комбинации списков вершин, списков ребер и списков треугольников.

Во взвешенных графах необходимо хранить *матрицу весов* – разновидность матрицы смежности для взвешенного графа с n вершинами, представляющую собой квадратную матрицу S_{mn}, элемент которой S_{ij} равен весу ребра или дуги (v_i, v_j), если такое ребро (дуга) отсутствует, то s_{ij} в зависимости от физического смысла веса полагается равным нулю или бесконечности.

Для представления ориентированных графов может применяться *матрица достижимости*, понимаемая как квадратная матрица R_{nn} ($n = |V|$), элемент которой $r_{ij} = 1$, если вершина v_j достижима из v_i (существует путь из вершины v_i в v_j), в противном случае $r_{ij} = 0$. Пример орграфа и его матрица достижимости приведены на рис. 3.86 и рис. 3.87 соответственно. Одним из вариантов матрицы достижимости служит матрица, в которой элементу r_{ij} присваивается значение длины минимального пути из вершины v_i в вершину v_j.

В данной матрице все элементы главной диагонали равны 1, что следует понимать как достижимость вершины из самой себя. Из данной матрицы следует, что из вершины 1 не достижима никакая другая вершина графа, но сама вершина 1 достижима из любой другой вершины. Вершина 2 не достижима из любой другой вершины, поскольку все элементы второго столбца, за исключением элемента на главной диагонали, равны 0. Из вершины 2 существует путь в любую другую вершину, на что указывают единичные значения всех элементов второй строки.



$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Рис. 3.86. Пример орграфа

Рис. 3.86. Матрица достижимости

Значения элементов r_{ij} могут приниматься равными минимальному пути между вершинами v_i и v_j. Нулевое значение элемента в этом случае будет означать, что вершина v_j не достижима из v_i.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. – М.: Наука, 1974.
2. Берж К. Теория графов и ее применение. – М.: ИЛ, 1962.
3. Евстигнеев В.А., Касьянов В.Н. Толковый словарь по теории графов. – Новосибирск: Наука, 1999.
4. Оре О. Теория графов. – М.: Наука, 1968.
5. Уилсон Р. Введение в теорию графов. – М.: Мир, 1977. – 207 с.
6. Харари Ф. Теория графов. – М.: Мир, 1973.