

§ 28. Теория Гаусса

конформного изображения эллипсоида на шаре.

Применение ее к решению главной геодезической задачи

Проф. Ф. Н. Красовский в своем труде «Руководство по высшей геодезии» говорит: «...теория Гаусса конформного изображения эллипсоида на шаре в свое время составила эпоху в области точных наук». Указывая, что значение этой теории в геодезии в настоящее время в значительной степени утратило свою ценность, далее проф. Ф. Н. Красовский отмечает: «...возможно, что в будущем в геодезии вновь появится новое использование этой гениальной Гауссовой теории». Есть основания считать эту мысль правильной и в настоящее время.

Знакомство с этой теорией, простой и оригинальной по идее, изящной по математическому изложению и выводам в применении к геодезии, весьма полезно для геодезиста; она прекрасно показывает достоинство использования поверхности шара для проектирования на нее поверхности эллипсоида с малым сжатием. Применение этой теории в геодезии наглядно и доходчиво иллюстрирует один из основных методов решения основных задач сфероидической геодезии.

Учитывая общее значение Гауссовой теории, приводим изложение ее основ и предложенное Гауссом применение теории к решению главной геодезической задачи.

Основные формулы конформного изображения эллипсоида на шаре. Конформным называется такое изображение эллипсоида на шаре, при котором бесконечно малый контур на поверхности эллипсоида изображается подобным ему контуром на шаре.

Возьмем на поверхности эллипсоида бесконечно малую фигуру $abcde$ с центром O (рис. 48). При конформном изображении эта фигура изобразится на шаре подобной ей фигурой $a'b'c'd'e'$ с центром O' .

В теории картографических проекций доказывается, что при произвольном законе изображения эллипсоида на шаре всегда существуют два взаимно перпендикулярных направления на эллипсоиде, которые на шаре также остаются взаимно перпендикулярными. Эти два направления называются главными направлениями; масштаб изображения по этим направлениям в общем случае будет иметь максимальное и минимальное значения. При конформном изображении масштабы в каждой точке по обоим главным направлениям должны быть равны. Если обозначить масштаб изображения по меридиану через m , а масштаб изображения по параллели — через n , то условие конформности получится

$$m = n. \tag{28.1}$$

Введем обозначения:

B и L — широта и долгота некоторой точки на поверхности эллипсоида;

U и ω — широта и долгота изображения точки на поверхности шара.

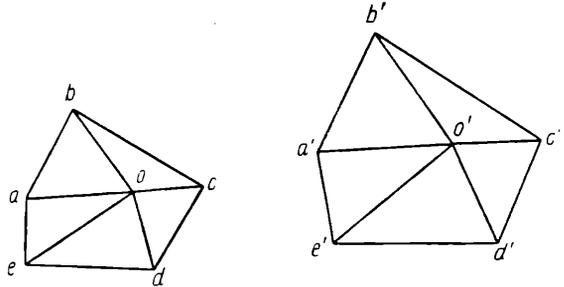


Рис. 48

В общем случае закон изображения эллипсоида на шаре выражается уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} U &= F_1(B, L) \\ \omega &= F_2(B, L) \end{aligned} \right\}, \quad (28.2)$$

для которых имеем только одно условие: в пределах изменения B и L каждым действительным значениям B и L соответствуют действительные значения U и ω .

Поставим далее условие, чтобы меридианы на эллипсоиде изображались меридианами на шаре и параллели на эллипсоиде — параллелями на шаре. В этом случае уравнения (28.2) примут вид:

Эллипсоид

Шар

$$\left. \begin{aligned} U &= f_1(B) \\ \omega &= f_2(L) \end{aligned} \right\}. \quad (28.3)$$

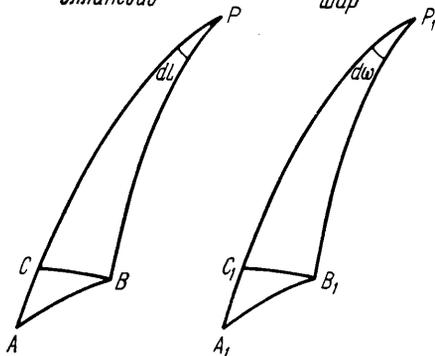


Рис. 49

Вид функций f_1 и f_2 определяется исходя из следующих соображений.

Возьмем на поверхности эллипсоида точку A и бесконечно близкую к ней точку B (рис. 49); пусть изображениями этих точек на поверхности шара будут точки A_1 и B_1 .

Обозначим координаты точки A через B и L , а точки B — через $B + dB$ и $L + dL$; соответственно на шаре имеем координаты U и ω для точки A_1 , $U + dU$ и $\omega + d\omega$ — для точки B_1 .

Дуга BC — элемент параллели точки B ; B_1C_1 — изображение этого элемента на шаре.

Определим масштаб изображения по меридиану и параллели для точки A . Будем иметь:

для масштаба по меридиану

$$m = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{R dU}{M dB};$$

для масштаба по параллели

$$n = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{R \cos U d\omega}{N \cos B dL},$$

R — радиус шара.

Для того, чтобы изображение было конформным, необходимо и достаточно, чтобы $m = n$. Отсюда

$$\frac{R dU}{M dB} = \frac{R \cos U d\omega}{N \cos B dL},$$

откуда

$$\frac{dU}{\cos U} = \frac{M}{N} \frac{dB}{\cos B} \frac{d\omega}{dL}. \quad (28.4)$$

Но, согласно (28.3), сферическая широта U должна зависеть только от B , а долгота ω — только от L ; следовательно, $\frac{d\omega}{dL}$ должна быть постоянной величиной.

Обозначая $\frac{d\omega}{dL} = \alpha$, находим

$$\omega = \alpha L + \beta, \quad (28.5)$$

где β — постоянное интегриации.

Если долготы на эллипсоиде и шаре считать от одного меридиана, то для начального меридиана $\omega = L = 0$, следовательно, и β равно нулю, поэтому уравнение (28.5) примет вид

$$\omega = \alpha L. \quad (28.6)$$

Преобразуем выражение (28.4) для $\frac{dU}{\cos U}$:

$$\frac{dU}{\cos U} = \alpha \frac{M dB}{N \cos B} = \frac{\alpha (1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 B) \cos B} dB = \alpha \frac{1-e^2 \sin^2 B - e^2 \cos^2 B}{(1-e^2 \sin^2 B) \cos B} dB,$$

$$\frac{dU}{\cos U} = \alpha \left\{ \frac{1-e^2 \sin^2 B}{(1-e^2 \sin^2 B) \cos B} dB - \frac{e^2 \cos^2 B}{(1-e^2 \sin^2 B) \cos B} dB \right\},$$

$$\frac{dU}{\cos U} = \alpha \left\{ \frac{dB}{\cos B} - \frac{e^2 \cos B}{1-e^2 \sin^2 B} dB \right\},$$

$$\frac{dU}{\cos U} = \alpha \left\{ \frac{dB}{\cos B} - \frac{e d(e \sin B)}{1-e^2 \sin^2 B} \right\},$$

$$\frac{dU}{\cos U} = \alpha \left\{ \frac{dB}{\cos B} - \frac{e}{2} \frac{d(e \sin B)}{1-e \sin B} - \frac{e}{2} \frac{d(e \sin B)}{1+e \sin B} \right\}.$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем

$$\lg \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{U}{2} \right) = \lg \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) + \lg \left(\frac{1-e \sin B}{1+e \sin B} \right)^{\frac{\alpha e}{2}} - \lg k,$$

где k — постоянное интегриации, или

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{U}{2} \right) = \frac{1}{k} \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \left(\frac{1-e \sin B}{1+e \sin B} \right)^{\frac{\alpha e}{2}}. \quad (28.7)$$

Формулы (28.6) и (28.7) выражают закон конформного изображения эллипсоида на шаре.

Для использования полученных формул необходимо знать значения постоянных α , k и R , входящих в формулы (28.6) и (28.7).

Постоянные можно определить различно. Для использования конформного изображения эллипсоида на шаре с целью решения геодезической задачи постоянные целесообразно определять из условий наибольшей простоты переноса элементов эллипсоида на шар и минимальных искажений в пределах той области, в которой располагаются исходный и определяемый пункты. В связи с этим для определения постоянных поставим условия, чтобы масштаб изображения на некоторой широте B_0 , называемой нормальной широтой, равнялся единице и изменение масштаба при удалении к северу и югу от параллели с нормальной широтой происходило возможно медленнее.

Выполнение этих условий позволит в пределах некоторой области считать масштаб изображения практически постоянным и равным единице. В этом случае, очевидно, будет обеспечена малость поправок за переход с эллипсоида на шар и достигнута простота их вычисления и учета.

Если обозначим через U_0 широту на шаре, соответствующую нормальной широте B_0 на эллипсоиде, то математически условие первое выразится так:

$$n_0 = m_0 = \alpha \frac{R \cos U_0}{N_0 \cos B_0} = 1, \quad (28.8)$$

где n_0 — масштаб изображения на параллели под широтой B_0 .

Для математического выражения второго условия напомним сначала выражение для масштаба в виде

$$m = m_0 + \left(\frac{dm}{dB}\right)_0 (B - B_0) + \left(\frac{d^2m}{dB^2}\right)_0 \frac{(B - B_0)^2}{2} + \left(\frac{d^3m}{dB^3}\right)_0 \frac{(B - B_0)^3}{6} + \dots,$$

где B — широта текущей точки, находящейся на расстоянии $B - B_0$ от нормальной широты.

С учетом (28.8) напомним

$$m = 1 + \left(\frac{dm}{dB}\right)_0 (B - B_0) + \left(\frac{d^2m}{dB^2}\right)_0 \frac{(B - B_0)^2}{2} + \left(\frac{d^3m}{dB^3}\right)_0 \frac{(B - B_0)^3}{6} + \dots$$

Условие медленного изменения масштаба при удалении от параллели с широтой B_0 целесообразно выразить так:

$$\left(\frac{dm}{dB}\right)_0 = 0 \text{ и } \left(\frac{d^2m}{dB^2}\right)_0 = 0. \quad (28.9)$$

Выражения (28.8) и (28.9), дающие три уравнения, позволяют определить три постоянные. Находим производные (28.9), учитывая (28.8), и совместно решаем три полученных уравнения; после соответствующих преобразований получим:

$$\left. \begin{aligned} \sin U_0 &= \frac{\sin B_0}{\alpha} \\ \alpha^2 &= 1 + \frac{e^2 \cos^4 B_0}{1 - e^2} \end{aligned} \right\}. \quad (28.10)$$

$$k = \frac{\operatorname{tg} \alpha \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B_0}{2}\right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{U_0}{2}\right)} \left(\frac{1 - e \sin B_0}{1 + e \sin B_0}\right)^{\frac{\alpha e}{2}}, \quad (28.11)$$

$$R = \sqrt{M_0 N_0}. \quad (28.12)$$

Из (28.12) следует, что радиус шара равен среднему радиусу кривизны эллипсоида в точке с широтой B_0 .

В математической картографии, когда стоит задача изображения всего эллипсоида на шаре, принимают $L = \omega$, т. е. $\alpha = 1$, $k = 1$ (что означает совпадение плоскостей экваторов эллипсоида и шара) и

$$R = a \left(1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 B\right) \text{ или } R = a.$$

При условии (28.9) легко найдем выражение масштаба m

$$m = 1 + \left(\frac{d^3m}{dB^3}\right)_0 \frac{(B - B_0)^3}{6}.$$

Вычисляя $\left(\frac{d^3m}{dB^3}\right)_0$, получаем в логарифмическом виде

$$\lg m = -\frac{2}{3} \mu \frac{e^2 (1 - e^2) \sin B_0 \cos B_0}{(1 - e^2 \sin^2 B_0)^2} (B - B_0)^3. \quad (28.13)$$

$$\text{Для } (B - B_0) = 1 \frac{1^\circ}{4} \text{ и } B_0 = 55^\circ \\ \lg m = 0.000\,000\,01.$$

Отсюда можно сделать весьма важный вывод: в пределах зоны, ограниченной $B_0 - 1 \frac{1^\circ}{4}$ и $B_0 + 1 \frac{1^\circ}{4}$, т. е. в пределах пояса шириной до 250 км, практически масштаб можно считать равным единице при указанном выше условии выбора постоянных.

Этот вывод исчерпывающе показывает выгоду использования поверхности шара для проектирования поверхности эллипсоида и малую величину искажений, обусловленную незначительностью сжатия земного эллипсоида.

Таким образом, если триангуляционная сеть расположена на расстоянии 100—120 км к северу или югу от параллели с нормальной широтой (и, конечно, как угодно далеко по долготе), то можно считать, что элементы триангуляции на эллипсоиде переносятся на шар без искажений: угловые — по конформности проекции, а линейные — по малости искажений. Этим обстоятельством мы воспользуемся при выводе формул для решения геодезической задачи.

Однако в азимуты приходится вводить поправку, хотя проекция и конформна. Дело в том, что геодезическая линия на эллипсоиде изображается на шаре кривой, не совпадающей с дугой большого круга.

Пусть на рис. 50 кривая A_1NB_1 — изображение геодезической линии AB на шаре; эта кривая будет двойкой кривизны. Азимут ее в точке A_1 по конформности изображения в точности равен азимуту $A_{1,2}$ геодезической линии на эллипсоиде. Пусть A_1MB_1 — дуга большого круга, соединяющая точки A_1 и B_1 . Чтобы в дальнейшем иметь возможность пользоваться формулами сферической тригонометрии, необходимо в азимут кривой A_1NB_1 ввести поправку, равную разности азимутов кривой A_1NB_1 и дуги большого круга A_1MB_1 . После этого треугольники на шаре будут иметь стороны, являющиеся дугами больших кругов. Однако вследствие близости земного эллипсоида к шару эта поправка вводится лишь в значения направлений, конечные точки которых расположены на расстоянии более 50—70 км от параллели с нормальной широтой B_0 . При расположении точек на меньших расстояниях этой поправкой можно пренебречь.

Упрощенные выражения для $(A - \beta)$:

$$A_{1,2} - \beta_{1,2} = s \sin A_{1,2} \left(\frac{2k_1 + k_2}{3} \right),$$

$$A_{2,1} - \beta_{2,1} = - \sin A_{1,2} \left(\frac{k_1 + 2k_2}{3} \right),$$

где

$$k_i = \frac{e^2 \sin B_0 \cos B_0 \sqrt{1 - e^2}}{(1 - e^2 \sin^2 B_0)^{3/2}} (B_i - B_0)^2, \\ i = 1, 2.$$

При удалении пунктов триангуляции от параллели с широтой B_0 более чем на 1° (110 км) следует учитывать линейные искажения.

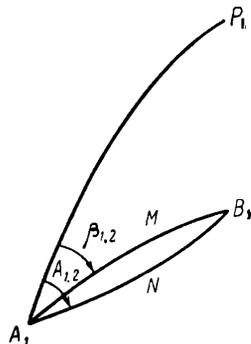


Рис. 50

Если обозначить через ds элемент геодезической линии на эллипсоиде в точке A , а через dS — элемент дуги большого круга на шаре, то

$$m = \frac{dS}{ds},$$

откуда

$$S = \int m ds, \quad (28.14)$$

Подставляем в (28.14) значение m и интегрируем; после преобразований получим

$$S = s \sqrt{m_1 m_2}$$

или

$$\lg S = \lg s + \frac{gm_1 + \lg m_2}{2}, \quad (28.15)$$

где m_1 и m_2 — масштабы изображения в точках A и B .

Решение прямой геодезической задачи с применением Гауссовой теории изображения эллипсоида на шаре. В качестве иллюстрации применения теории Гаусса к задачам высшей геодезии выведем формулы для решения прямой геодезической задачи, которые получены в § 26. Общий ход решения задачи состоит в том, что исходные данные B_1, L_1, A_1, s , отнесенные к поверхности эллипсоида, переносятся на шар по закону конформного изображения эллипсоида на шаре. Задача решается на поверхности шара, в результате чего определяются широта, разность долгот и обратный азимут на шаре. В соответствии с тем же законом изображения осуществляется обратный переход с шара на эллипсоид, в результате которого и определяются искомые величины: широта B_2 , разность долгот l и обратный азимут $A_{2,1}$.

Задачу можно решать двумя способами: 1) путем перехода от числовых значений исходной широты, азимута и длины стороны на эллипсоиде к соответственным числовым значениям этих же величин на шаре, решения сферического треугольника с числовыми данными и обратного перехода с шара на эллипсоид также с числовыми данными; 2) переход с эллипсоида на шар, решение сферического треугольника на шаре и обратный переход с шара на эллипсоид осуществляют в процессе вывода формул в общем виде, а не с числовыми данными задачи. В этом случае шар используется как промежуточная поверхность при выводе формул, выражающих искомые разности широт, долгот и азимутов. Элементы сферического треугольника, которые появляются в процессе вывода формул, исключаются, и окончательные формулы выражают зависимость между данными и искомыми величинами на эллипсоиде.

Первый способ вследствие громоздкости на практике не применяется. Второй способ довольно часто находит применение, поэтому ниже он изложен с необходимой подробностью. При выводе формул будем иметь в виду их применение для вычисления координат по сторонам треугольников триангуляции, т. е. для расстояний, не превышающих 50 км.

Вывод формул для второго способа, данный Гауссом, основан на разложении в ряды искомых величин. Приведем вывод этих формул, предложенный проф. Ф. Н. Красовским. Этот вывод основан на геометрическом подходе; он прост и в то же время отчетливо показывает достоинства использования конформного изображения эллипсоида на шаре для решения геодезической задачи.

При выводе будем следовать указанному выше общему порядку решения задачи.

1. Переход от исходных данных на эллипсоиде к соответствующим им величинам на шаре. Пусть на эллипсоиде (рис. 51):

- B_1 и B_2 — широты точек A и B ;
- $A_{1.2}$ и $A_{2.1}$ — прямой и обратный азимуты геодезической линии AB ;
- l — разность долгот точек A и B ;
- s — расстояние между точками A и B .

Пусть точки A_1 и B_1 — изображения на шаре точек A и B эллипсоида, имеющие широты U_1 и U_2 .

Нормальную широту на шаре примем $U_0 = \frac{U_1 + U_2}{2}$. Проведем параллели B_1D_1 и E_1F_1 через точки B_1 и C_1 на шаре, тогда точки E_1 и F_1 будут точками пересечения последней параллели с меридианами A_1P_1 и B_1P_1 . Пусть точка C на эллипсоиде соответствует точке C_1 на шаре, т. е. точка C_1 — изображение на шаре точки C . Проведем параллель через точку C , и пусть точки E и F — пересечение параллели с меридианами AP и BP . Так как параллели на эллипсоиде изображаются параллелями на шаре, то точки E_1, F_1, D_1 будут изображениями точек E, F, D .

Широта параллели EF — нормальная широта B_0 на эллипсоиде. Так как разности $B_1 - B_0$ и $B_2 - B_0$ для сторон триангуляции не превышают $\frac{1^\circ}{3}$, то, согласно (28.13), масштаб изображения в пределах зоны расположения дуги AB можно считать постоянным и равным единице. Иначе говоря, все линейные элементы в пределах треугольника ABD переносятся на шар практически без искажений, в том числе и длина стороны $AB = S$, являющаяся одной из исходных величин для решения задачи.

Имея это в виду, можно написать

$$A_1E_1 = E_1D_1 = AE = ED.$$

Возьмем на меридиане AP точку H , имеющую широту

$$B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}.$$

Понятно, что точки H и E не совпадут: точка E располагается посередине дуги AD , т. е. на одинаковом линейном расстоянии от точек A и D по дуге меридиана; точка же H располагается так, что разности широт между этой точкой и точками A и D одинаковы. Вследствие разницы в кривизне меридиана точка H будет находиться на разных линейных расстояниях от точек A и D .

Найдем разность широт точек H и E , т. е. $B_m - B_0$.

Напишем

$$B_m = \frac{B_1 + B_2}{2} = B_1 + \frac{b}{2},$$

где

$$b = B_2 - B_1.$$

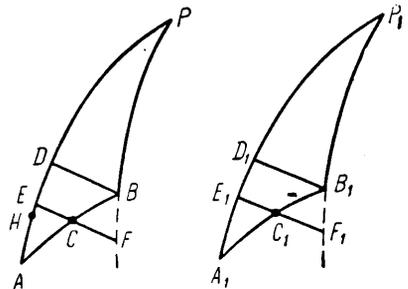


Рис. 51

Применяя формулу (25.11) для b , получаем

$$B_m = B_1 + \frac{u}{2M_1} \rho'' \left(1 - \frac{3}{4} e^2 \sin 2B_1 \frac{b''}{\rho''} \right). \quad (28.16)$$

Для вычисления широты B_0 воспользуемся той же формулой (25.11), так как точка E , имеющая широту B_0 , расположена на расстоянии $\frac{AD}{2}$ от точки A . Заменяя в этой формуле $u = s \cos A_{1.2}$ через $\frac{u}{2}$ и b через $\frac{b}{2}$, получаем

$$B_0 = B_1 + \frac{u}{2M_1} \rho'' \left(1 - \frac{3}{4} e^2 \sin 2B_1 \frac{b''}{\rho''} \right). \quad (28.17)$$

Сравнивая (28.16) с (28.17), находим

$$B_m - B_0 = - \frac{3}{16} e^2 \sin 2B_1 \frac{b''^2}{\rho''}. \quad (28.18)$$

Для $b'' = 1300''$ (что соответствует расстоянию $s = 40$ км) при широте $B = 60^\circ$ получим

$$B_m - B_0 < \frac{1''}{120}.$$

Такое малое расхождение между B_m и B_0 позволит в дальнейшем не отличать радиусов M_0 и N_0 , вычисленных для широты B_0 , от радиусов M_m и N_m , вычисленных для широты B_m .

Поправка в азимут за переход от изображения геодезической линии на шаре к дуге большого круга при настоящем выборе нормальной широты и при $s \leq 60$ км будет пренебрегаемо мала.

Таким образом, при расстоянии s между пунктами A и B , не превышающем 40 км, и указанном выборе нормальной параллели два элемента треугольника

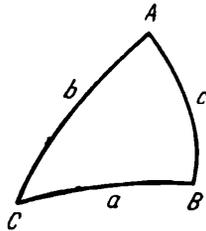


Рис. 52

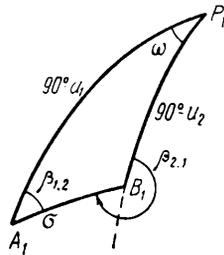


Рис. 53

ABP — сторона $AB = s$, и азимут $A_{1.2}$ — переносятся на шар практически без заметных искажений. При этом за нормальную широту на эллипсоиде для стороны AB следует принять

$$B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}.$$

Сферический треугольник $A_1B_1P_1$ решают по особым формулам, в которых в качестве третьего исходного элемента участвует $U_0 = \frac{U_1 + U_2}{2}$. Зависимость

между U_0 и соответствующей широтой B_0 (или, как показано выше, широтой $B_m = \frac{B_1+B_2}{2}$) определяется на основании (28.10)

$$\sin U_0 = \frac{\sin B_m}{\alpha}. \quad (28.19)$$

Решение сферического треугольника. Для треугольника ABC (рис. 52) имеем формулы Гаусса:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{a}{2} \cos \frac{C-B}{2} &= \sin \frac{c+b}{2} \sin \frac{A}{2} \\ \sin \frac{a}{2} \sin \frac{C-B}{2} &= \sin \frac{c-b}{2} \cos \frac{A}{2} \\ \cos \frac{a}{2} \cos \frac{C+B}{2} &= \cos \frac{c+b}{2} \sin \frac{A}{2} \\ \cos \frac{a}{2} \sin \frac{C+B}{2} &= \cos \frac{c-b}{2} \cos \frac{A}{2} \end{aligned} \right\}. \quad (28.20)$$

Применим эти формулы к решению треугольника $A_1B_1P_1$ (рис. 53). Обозначим:

U_1 и U_2 — широты A_1 и B_1 ;

ω — разность долгот этих точек;

σ — расстояние A_1B_1 по дуге большого круга;

$\beta_{1,2}$ и $\beta_{2,1}$ — прямой и обратный азимуты дуги A_1B_1 .

Тогда

$$a = \sigma; \quad C = \beta_{1,2}; \quad b = 90^\circ - U_1; \quad A = \omega; \quad c = 90^\circ - U_2; \quad B = 360^\circ - \beta_{2,1}.$$

Кроме того, обозначим:

$$\frac{U_1+U_2}{2} = U_0; \quad U_2 - U_1 = q; \quad \beta'_{2,1} = \beta_{2,1} - 180; \quad \frac{\beta'_{2,1} + \beta_{1,2}}{2} = \beta_m;$$

$$\beta'_{2,1} - \beta_{1,2} = t.$$

Формулы (28.20) с принятыми обозначениями примут вид:

$$\sin \frac{\sigma}{2} \sin \beta_m = \sin \frac{\omega}{2} \cos U_0,$$

$$\sin \frac{\sigma}{2} \cos \beta_m = \cos \frac{\omega}{2} \sin \frac{q}{2},$$

$$\cos \frac{\sigma}{2} \sin \frac{t}{2} = \sin \frac{\omega}{2} \sin U_0,$$

$$\cos \frac{\sigma}{2} \cos \frac{t}{2} = \cos \frac{\omega}{2} \cos \frac{q}{2}.$$

Раскладывая синусы и косинусы малых дуг в ряд, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma \left(1 - \frac{\sigma^2}{24}\right) \sin \beta_m &= \omega \left(1 - \frac{\omega^2}{24}\right) \cos U_0 \\ \sigma \left(1 - \frac{\sigma^2}{24}\right) \cos \beta_m &= q \left(1 - \frac{q^2}{24}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{8}\right) \\ t \left(1 - \frac{\sigma^2}{8}\right) \left(1 - \frac{t^2}{24}\right) &= \omega \left(1 - \frac{\omega^2}{24}\right) \sin U_0 \end{aligned} \right\}. \quad (28.21)$$

$$\sigma^2 + t^2 = q^2 + \omega^2$$

Находим из (28.21) выражения для искомых величин q , ω и t :

$$\begin{aligned}\omega &= \sigma \sin \beta_m \sec U_0 \left(1 - \frac{\sigma^2}{24}\right) \left(1 + \frac{\omega^2}{24}\right), \\ q &= \sigma \cos \beta_m \left(1 - \frac{\sigma^2}{24}\right) \left(1 + \frac{q^2}{24}\right) \left(1 + \frac{\omega^2}{8}\right), \\ t &= \omega \sin U_0 \left(1 - \frac{\omega^2}{24}\right) \left(1 + \frac{\sigma^2}{8}\right) \left(1 + \frac{t^2}{24}\right).\end{aligned}$$

Далее, с ошибками на величины пятого порядка малости, получим:

$$\left. \begin{aligned}\omega &= \sigma \sin \beta_m \sec U_0 \left(1 - \frac{\sigma^2}{24} + \frac{\omega^2}{24}\right) \\ q &= \sigma \cos \beta_m \left(1 - \frac{\sigma^2}{24} + \frac{q^2}{24} + \frac{\omega^2}{8}\right) \\ t &= \omega \sin U_0 \left(1 - \frac{\omega^2}{24} + \frac{\sigma^2}{8} + \frac{t^2}{24}\right)\end{aligned} \right\} \quad (28.22)$$

Учитывая последнее равенство в формулах (28.21), получаем

$$\left(1 - \frac{\sigma^2}{24} + \frac{q^2}{24} + \frac{\omega^2}{8}\right) = \left(1 + \frac{t^2}{24} - \frac{\omega^2}{24} + \frac{\omega^2}{8}\right) = \left(1 + \frac{\omega^2}{12} + \frac{t^2}{24}\right).$$

Подставляя в выражение для t значение ω , находим

$$t = \sigma \sin \beta_m \operatorname{tg} U_0 \left(1 + \frac{\omega^2}{24} - \frac{\omega^2}{24} + \frac{\sigma^2}{8} + \frac{t^2}{24} - \frac{\sigma^2}{24}\right) = \sigma \sin \beta_m \operatorname{tg} U_0 \left(1 + \frac{\sigma^2}{12} + \frac{t^2}{24}\right).$$

Таким образом, окончательно получим:

$$q = \sigma \cos \beta_m \left(1 + \frac{\omega^2}{12} + \frac{t^2}{24}\right), \quad (28.23)$$

$$\omega = \sigma \sin \beta_m \sec U_0 \left(1 - \frac{\sigma^2}{24} + \frac{\omega^2}{24}\right), \quad (28.24)$$

$$t = \sigma \sin \beta_m \operatorname{tg} U_0 \left(1 + \frac{\sigma^2}{12} + \frac{t^2}{24}\right). \quad (28.25)$$

2. Переход от разностей координат и азимутов на шаре к соответствующим величинам на эллипсоиде. Воспользуемся зависимостью, существующей между величинами на шаре и эллипсоиде:

1) так как $AD = A_1 D_1$ (рис. 51), то

$$\frac{b'' M_m}{\rho''} = \frac{q'' R}{\rho''},$$

откуда

$$q'' = \frac{b'' M_m}{R}; \quad (28.26)$$

2) на основании (28.6), (28.8) и (28.10) имеем:

$$\omega = \alpha l'', \quad (28.27)$$

$$\alpha \cos U_0 = \frac{N_m}{R} \cos B_m, \quad (28.28)$$

$$\alpha \sin U_0 = \sin B_m. \quad (28.29)$$

В последних двух формулах на основании предыдущего нормальная широта B_0 заменена через B_m .

Подставляем (28.26) в (28.23), принимая во внимание, что

$\sigma'' = \frac{s}{R} \rho''$ и $\beta_m = A_m$, а в поправочном члене ω заменяя на l получаем

$$\frac{b'' M_m}{R} = \frac{s}{R} \rho'' \cos A_m \left(1 + \frac{l^2}{12} + \frac{t^2}{24} \right). \quad (28.30)$$

Отсюда находим

$$b'' = \frac{s}{M_m} \rho'' \cos A_m \left(1 + \frac{l^2}{12} + \frac{t^2}{24} \right), \quad (28.31)$$

или

$$b'' = s \cos A_m (1)_m \left(1 + \frac{l^2}{12} + \frac{t^2}{24} \right), \quad (28.32)$$

так как $t \approx l \sin B$, то получаем

$$b'' = s \cos A_m (1)_m \left(1 + \frac{l^2}{12} + \frac{l^2 \sin^2 B_m}{24} \right). \quad (28.33)$$

Подставляя (28.27) в (28.24), находим

$$\alpha l'' = \frac{s}{R} \rho'' \frac{\sin A_m}{\cos U_0} \left(1 - \frac{\sigma^2}{24} + \frac{l^2}{24} \right).$$

Отсюда, принимая во внимание (28.28), имеем

$$l = \frac{s}{N_m} \rho'' \sin A_m \sec B_m \left(1 - \frac{\sigma^2}{24} + \frac{l^2}{24} \right),$$

но по (28.21) находим

$$l^2 - \sigma^2 = t^2 - b^2 = l^2 \sin^2 B_m - b^2$$

и окончательно получаем

$$l = s \sin A_m (2)_m \sec B_m \left(1 - \frac{b^2}{24} + \frac{l^2 \sin^2 B_m}{24} \right). \quad (28.34)$$

При получении выражения для сближения меридианов заметим, что в рассматриваемом случае

$$t = A_{2,1} - A_{1,2} \pm 180^\circ.$$

Разделив (28.29) на (28.28), получим

$$\operatorname{tg} U_0 = \frac{R}{N_m} \operatorname{tg} B_m. \quad (28.35)$$

Если принять во внимание (28.35), то выражение (28.25) примет вид

$$t'' = \frac{s}{R} \rho'' \sin A_m \frac{R}{N_m} \operatorname{tg} B_m \left(1 + \frac{\sigma^2}{12} + \frac{t^2}{24} \right),$$

или

$$t'' = \frac{s \sin A_m \operatorname{tg} B_m}{N_m} \rho'' \left(1 + \frac{\sigma^2}{12} + \frac{t^2}{24} \right). \quad (28.36)$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{12} + \frac{t^2}{24} &= \frac{\sigma^2 + t^2}{12} - \frac{t^2}{24} = \frac{b^2}{12} + \frac{l^2}{12} - \frac{t^2}{24} = \frac{b^2}{12} + \frac{l^2}{24} + \frac{l^2}{24} - \frac{l^2 \sin^2 B_m}{24} = \\ &= \frac{b^2}{12} + \frac{l^2 \cos^2 B_m}{24} + \frac{l^2 (\sin^2 B_m + \cos^2 B_m)}{24} = \frac{b^2}{12} + \frac{l^2 \sin^2 B_m}{24} + \frac{l^2 \cos^2 B_m}{12}. \end{aligned}$$

поэтому

$$t'' = \frac{s \sin A_m \operatorname{tg} B_m}{N_m} \rho'' \left(1 + \frac{l^2 \sin^2 B_m}{24} + \frac{l^2 \cos^2 B_m}{12} + \frac{b^2}{12} \right). \quad (28.37)$$

Напишем все формулы вместе:

$$\left. \begin{aligned} b'' &= s \cos A_m (1)_m \left(1 + \frac{l^2 \sin^2 B_m}{24} + \frac{l^2}{12} \right) \\ l'' &= s \sin A_m \sec B_m (2)_{m'} \left(1 + \frac{l^2 \sin^2 B_m}{24} - \frac{b^2}{24} \right) \\ t'' &= s \sin A_m \operatorname{tg} B_m (2)_m \left(1 + \frac{l^2 \sin^2 B_m}{24} + \frac{l^2 \cos^2 B_m}{12} + \frac{b^2}{12} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (28.38)$$

Искомые координаты второй точки определяются из формул:

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= B_1 + b \\ L_2 &= L_1 + l \\ A_{2,1} &= A_{1,2} \pm 180^\circ + t \end{aligned} \right\}. \quad (28.39)$$

Итак, мы получили формулы, тождественные с формулами, выведенными в § 26.

Можно указать еще на одно применение изложенной Гауссовой теории в геодезии. При изображении поверхности эллипсоида на плоскости функциональные зависимости, выражающие закон изображения, имеют сложный вид и представляются бесконечными рядами. Эти зависимости при проектировании эллипсоида на плоскость не имеют точной геометрической интерпретации. В то же время при проектировании поверхности шара на плоскость соответствующие аналитические зависимости изображения становятся простыми; они имеют ясное и точное геометрическое толкование и выражаются строгими формулами. Поэтому ряд авторов проекции поверхности эллипсоида на плоскость использовали идею двойного проектирования: сначала поверхность эллипсоида изображается на шаре, затем переносится с шара на плоскость. Эта идея, в частности, была использована Зольднером в теории проекции, носящей его имя; Крюгером — в теории стереографической проекции. В этом случае конформную проекцию Гаусса следует признать одной из наилучших при переходе с эллипсоида на шар.

В настоящее время путь двойного проектирования поверхности эллипсоида на шар используется редко; он имеет историческое значение, в то же время представляет существенный методический интерес.

§ 29. Решение главной геодезической задачи по способу Бесселя

Способ Бесселя применяется при решении геодезической задачи на большие расстояния — от 600—800 км и более. В основе способа лежит прямой путь решения геодезической задачи, в котором непосредственно находятся искомые величины, т. е. широта и долгота второй точки и азимут со второй точки на первую — прямая геодезическая задача; в обратной задаче вычисляются прямой и обратный азимуты и расстояние между заданными пунктами.