

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГЕОДЕЗИИ И КАРТОГРАФИИ  
ПРИ СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР

Т Р У ДЫ  
ЦЕНТРАЛЬНОГО НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО  
ИНСТИТУТА ГЕОДЕЗИИ, АЭРОСЪЕМКИ  
И КАРТОГРАФИИ

Выпуск 188

Теория фигуры Земли и геодезическая гравиметрия

ОНТИ ЦНИИГАИК  
Москва 1971

14898-2

## О ВЛИЯНИИ СЖАТИЯ ЗЕМЛИ НА ЕЕ СТОКСОВЫ ПОСТОЯННЫЕ

При вычислении локальных характеристик гравитационного поля Земли, таких как возмущающий потенциал, уклонение отвеса и др., пренебрежение сжатием отсчетного эллипсоида приводит в определяемых величинах к относительной погрешности порядка сжатия. Но при вычислении стоксовых постоянных, характеризующих Землю в целом, замена отсчетного эллипсоида сферой не всегда возможна, даже если хотим получить эти величины с относительной погрешностью  $\sim \frac{1}{300}$ . Это показано в статье [2], в которой для случая регуляризированной Земли с учетом ее эллиптичности установлена связь между коэффициентами разложения по сферическим функциям плотности простого слоя  $\Phi$ , потенциал которого определяет  $T$ , и стоксовыми постоянными (коэффициентами разложения возмущающего потенциала  $T$  в ряд шаровых функций). Из найденного соотношения видно, что влияние членов, пропорциональных сжатию, возрастает с номером вычисляемой стоксовой постоянной и может быть значительным. Так как точная зависимость между плотностью простого слоя и аномалиями силы тяжести сложна, то в упомянутой статье стоксовые постоянные выражены через аномалии силы тяжести удалось только с относительной ошибкой порядка сжатия.

Основываясь на результатах работы [3], такую зависимость можно получить более прямым путем и с более высокой точностью. Будем рассматривать также только случай регуляризированной Земли. Практическое значение соотношений, получаемых для такого идеализированного случая, состоит в том, что они будут служить нулевым приближением при рассмотрении данного вопроса для реальной Земли.

Итак, в дальнейшем предполагаем, что краевое условие для возмущающего потенциала задано на поверхности отсчетного эллипсоида  $E$ .

В упомянутой работе [3] показано, что стоксова постоянная  $Q_n$  порядка  $n$  может быть выражена непосредственно через ансамбли силы тяжести формулой, которая для рассматриваемого случая записывается так:

$$Q_n = \frac{1}{4\pi} \int_E \Delta g G^q dE . \quad (1)$$

Здесь функция  $G^q$  зависит только от геометрических элементов отсчетного эллипсоида и определяется интегральным уравнением

$$2\pi G^q - \int_E G^q \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{z} + \frac{\beta}{z} \right) dE = 4\pi U_n , \quad (2)$$

где  $z$  – расстояние между точкой, в которой вычисляется значение функции  $G^q$ , и текущей точкой поверхности эллипсоида;  $\beta = -\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \varphi}$ ;

$U_n$  – значение на поверхности эллипсоида гармонической функции, соответствующей определяемой стоксовой постоянной.

Пользуясь выражениями (1) и (2), вычисль величины  $Q_n$  с относительной ошибкой порядка квадрата сжатия отсчетного эллипсоида. Из сравнения полученного результата с результатом сферического решения (соотношением, выражаемым общим членом ряда Стокса) можно сделать выводы о величине сжатия на определяемые стоксовые постоянные.

Функцию  $U_n$  выбираем в виде

$$U_n = 2 \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \frac{g^n}{a^{n+1}} P_n^k (\sin \phi) \cos k L , \quad (3)$$

где  $g$  – радиус-вектор точек поверхности эллипсоида  $E$ ;

$a$  – большая полуось этого эллипсоида;

$P_n^k(\sin \phi)$  – присоединенный полином Лежандра;

$\phi$  – геоцентрическая широта;

$L$  – долгота.

При таком выборе функции  $U_n$  в сферическом случае соответствующие величины  $Q_n$  совпадают с коэффициентами ряда Стокса.

Из решения интегрального уравнения (2) найдем функцию  $G^q$ . При этом ограничимся точностью порядка квадрата сжатия отсчетного эллипсоида. Это значит, что во всех членах, фигурирующих в этом уравнении, можно отбросить величины, порядок которых по сравнению с основными меньше  $10^{-4}$ . Выразим известные функции уравнения (2) через элементы эллипсоида  $a$  и  $e^*$  (второй эксцентриситет).

Уравнение с таким же ядром, как и рассматриваемое, было основным при решении Молодежским задачи Стокса с относительной ошибкой порядка квадрата сжатия [1]. В этой работе оно выражено в функциях указанных элементов. Воспользуемся этими результатами; они приведены ниже:

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{1}{2} \right) = - \frac{1}{2N} ( I + e^2 \lambda^2 ), \quad (4)$$

где  $N$  — радиус кривизны первого вертикала отсчетного эллипсоида в текущей точке;

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{e^2}{a^2} ( N_0 \sin B_0 - N \sin B ). \quad (5)$$

Знаком "о" отмечены величины, относящиеся к фиксированной точке.

$$- \frac{\partial \gamma}{\partial \gamma} = \delta \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right) + 2 \omega^2 \quad (\text{формула Брунса}). \quad (6)$$

С учетом выражений (4), (5) и (6) уравнение (2) приводится к виду

$$2\pi G^q - \int_E^{\infty} \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{2N} + \frac{2\omega^2}{\gamma} - \frac{e^2 \lambda^2}{2N} \right) dE = \\ = 8\pi \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \frac{G^n}{a^{n+1}} P_n^k (\sin \phi) \cos kL. \quad (7)$$

С относительной ошибкой порядка квадрата сжатия имеем:

$$N = a(1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \phi);$$

$$M = a(1 - e^2 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 \phi);$$

$$dE = a^2(1 - e^2 \sin^2 \phi) \cos \phi d\phi dL;$$

$$\sin(B - \phi) = \frac{1}{2} e^2 \sin 2\phi;$$

$$\gamma = 2a \sin \frac{\psi}{2} (1 - \frac{1}{4} e^2 \sin^2 \phi)(1 - \frac{1}{4} e^2 \sin^2 \phi_0),$$

где  $\psi$  — угол между радиусами-векторами фиксированной и текущей точек;

$$\left( \frac{1}{M} + \frac{1}{2N} + \frac{2\omega^2}{\gamma} - \frac{e^2 \lambda^2}{2N} \right) \frac{dE}{2} = (1 + \frac{1}{4} e^2 \sin^2 \phi_0) \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{4}{3} m + e^2 \left( \frac{2}{3} - \frac{23}{12} \sin^2 \phi - \frac{(\sin \phi - \sin \phi_0)^2}{12 \sin^2 \frac{\psi}{2}} \right) \right\} \frac{3d\phi}{4 \sin \frac{\psi}{2}};$$

здесь  $m = \frac{a\omega^2}{\gamma}$ ,  $d\phi = \cos \phi d\phi dL$ .

Принимая во внимание последнее выражение и вводя вместо  $G^q$  функцию  $\bar{G}^q$ , связанную с  $G^q$  соотношением

$$\bar{G}^2 = \left( I - \frac{1}{4} e^2 \sin^2 \phi \right) G^2,$$

запишем уравнение (7) так:

$$2\pi \bar{G}^2 - \int_E \bar{G}^2 \left\{ 1 + e^2 \left[ \frac{2}{3} + \frac{4m}{3e^2} - \frac{5}{3} \sin^2 \phi - \frac{(\sin \phi - \sin \phi_0)^2}{12 \sin^2 \frac{\psi}{2}} \right] \right\} \frac{3d\omega}{4 \sin \frac{\psi}{2}} = \\ = 8\pi \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \frac{\alpha^n}{a^{n+1}} (1 - \frac{1}{4} e^2 \sin^2 \phi_0) P_n^k(\sin \phi) \cos kL. \quad (8)$$

Раскроем правую часть этого уравнения. Для радиуса-вектора точек поверхности эллипсоида имеем следующее точное выражение:

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{1 + e^2 \sin^2 \phi}}. \quad (9)$$

Отсюда

$$\left( \frac{\rho}{a} \right)^n = (1 + e^2 \sin^2 \phi)^{-\frac{n}{2}}.$$

Разложим это выражение в ряд по формуле бинома Ньютона. В полученном ряде нужно удержать такое количество членов, какое позволяет получить его сумму с относительной ошибкой, не превосходящей  $10^{-4}$  (если требуется определить величины  $Q_n$  с относительной ошибкой порядка сжатия, то можно ограничиться точностью  $10^{-8}$ ). Так как порядок  $n$  вычисляемой стоксовой постоянной может быть большим, то потребуется удерживать члены, содержащие множителем  $e^4$  и выше. Произведя разложение, получим

$$\left( \frac{\rho}{a} \right)^n = 1 - n \frac{e^2}{2} \sin^2 \phi + \frac{n(n+2)}{2!} \left( \frac{e^2}{2} \right) \sin^4 \phi - \frac{n(n+2)(n+4)}{3!} \left( \frac{e^2}{2} \right)^3 \sin^6 \phi. \quad (10)$$

Ошибку частичной суммы этого ряда (так как он закочередующийся) оценить просто: она не превосходит по абсолютной величине первого из отброшенных членов. Следовательно, если потребовать, чтобы ошибка величины  $\left( \frac{\rho}{a} \right)^n$  не превышала  $10^{-4}$  и в разложении ограничиться членами, содержащими  $e^4$ , то  $n$  не должно превосходить 24; если же ограничиться точностью  $10^{-2}$  и удерживать то же количество членов, то  $n < 100$ . Ограничимся в разложении (10) членами, содержащими  $e^4$ . Подставляя это выражение в правую часть уравнения (8), после небольших преобразований получим

$$2\pi \bar{G}^2 - \int_E \bar{G}^2 \left\{ 1 + e^2 \left[ \frac{2}{3} + \frac{4m}{3e^2} - \frac{5}{3} \sin^2 \phi - \frac{(\sin \phi - \sin \phi_0)^2}{12 \sin^2 \frac{\psi}{2}} \right] \right\} \frac{3d\omega}{4 \sin \frac{\psi}{2}} = \\ = 8\pi \frac{(n-k)!}{a(n+k)!} \left\{ 1 - \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{e^2}{2} \sin^2 \phi + \frac{n(n+3)}{2} \frac{e^4}{4} \sin^4 \phi \right\} P_n^k(\sin \phi) \cos kL. \quad (II)$$

Интегральное уравнение (II) будем решать методом разложения по степеням малого параметра  $e^{1/2}$  [I]. Искомое решение может быть представлено в виде ряда

$$\tilde{G}^q = \tilde{G}_0 + e^{1/2} \tilde{G}_1^q + e^{1/4} \tilde{G}_2^q + \dots, \quad (I2)$$

где  $\tilde{G}_i^q$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) – неизвестные функции, не зависящие от  $e^{1/2}$ . Подставляя (I2) в уравнение (II) и приравнивая в правой и левой частях члены, содержащие  $e^{1/2}$  в одной и той же степени, получим систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций  $\tilde{G}_i^q$ , которые и могут быть найдены из их решений. Эти уравнения имеют вид:

$$2\pi \tilde{G}_0^q - \int_{\Omega} \tilde{G}_0^q \frac{3d\Omega}{4\sin \frac{\Psi}{2}} = 8\pi \frac{(n-k)!}{a(n+k)!} P_n^k(\sin \phi) \cos kL, \quad (I3)$$

$$2\pi \tilde{G}_1^q - \int_{\Omega} \tilde{G}_1^q \frac{3d\Omega}{4\sin \frac{\Psi}{2}} = -4\pi \frac{(n-k)!}{a(n+k)!} \left( n + \frac{1}{2} \right) \sin^2 \phi P_n^k(\sin \phi) \cos kL + \\ + \int_{\Omega} \tilde{G}_0^q \left[ \frac{2}{3} + \frac{4m}{3e^{1/2}} - \frac{5}{3} \sin^2 \phi - \frac{(\sin \phi - \sin \phi_0)^2}{12 \sin^2 \frac{\Psi}{2}} \right] \frac{3d\Omega}{4\sin \frac{\Psi}{2}}, \quad (I4)$$

$$2\pi \tilde{G}_2^q - \int_{\Omega} \tilde{G}_2^q \frac{3d\Omega}{4\sin \frac{\Psi}{2}} = 8\pi \frac{(n-k)!}{a(n+k)!} \frac{n(n+3)}{8} \sin^4 \phi P_n^k(\sin \phi) \cos kL + \\ + \int_{\Omega} \tilde{G}_1^q \left[ \frac{2}{3} + \frac{4m}{3e^{1/2}} - \frac{5}{3} \sin^2 \phi - \frac{(\sin \phi - \sin \phi_0)^2}{12 \sin^2 \frac{\Psi}{2}} \right] \frac{3d\Omega}{4\sin \frac{\Psi}{2}}. \quad (I5)$$

Полученные интегральные уравнения можно записать короче:

$$2\pi \tilde{G}_i^q - \frac{3}{2} \int_{\Omega} \tilde{G}_i^q \frac{d\Omega}{2\sin \frac{\Psi}{2}} = 4\pi f_i; \quad (i = 0, 1, 2). \quad (I6)$$

Смысл функций  $f_i$  ясен из сравнения соответствующих уравнений. Прежде чем идти дальше, необходимо сделать следующее замечание. Разрешимость интегрального уравнения (2), определяющего функцию  $G^q$ , была доказана в работе [3] только для случая сферической отсчетной поверхности. Поэтому в рассматриваемом здесь случае разрешимость полученного из него уравнения (II) нужно исследовать дополнительно. Так как в последнем уравнении опущены члены, имеющие порядок малости  $e^{1/4}$  и выше по сравнению с основными, то искомое решение должно удовлетворять этому уравнению с точностью до членов такого же порядка.

Интегральное уравнение (II) во всяком случае будет разрешимо, если разрешимо каждое в отдельности полученное из него уравнение (I6), для чего необходимо, чтобы их свободные члены не со-

держали сферической функции первого порядка. Далее из разложения свободных членов по сферическим функциям будет видно, что это условие выполняется, если только  $n \neq 1$ . Однако случай  $n = 3$  по сравнению с другими имеет специфические особенности; чтобы не отвлекаться от основного рассматриваемого здесь вопроса, а именно, зависимости погрешности сферического приближения для стоксовой постоянной от ее порядка  $n$ , рассмотрим вопрос определения стоксовых постоянных третьего порядка с относительной ошибкой порядка квадрата сжатия в конце статьи.

Разлагая правую и левую части уравнения (I6) по сферическим функциям, приходим к следующему соотношению между сферическими функциями порядка  $n$ :

$$\frac{2(n-1)}{2n+1} (\bar{G}_L^q)_n = 2(f_L)_n .$$

Отсюда

$$(\bar{G}_L^q)_n = \frac{2n+1}{n-1} (f_L)_n$$

и

$$\bar{G}_L^q = \sum_{\sigma}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} (f_L)_n . \quad (I7)$$

Таким образом, для определения функций  $\bar{G}_0^q, \bar{G}_1^q, \dots$  нужно правые части уравнений (I3), (I4) и (I5) разложить по сферическим функциям и затем воспользоваться формулой (I7). Из уравнения (I3) для функции  $\bar{G}_0^q$  сразу находим следующее выражение:

$$\bar{G}_0^q = 2 \frac{(n-\kappa)!}{\alpha(n+\kappa)!} \frac{2n+1}{n-1} P_n^K(\sin \phi) \cos \kappa L . \quad (I8)$$

Теперь разложим по сферическим функциям правую часть уравнения (I4), т.е. функцию

$$f_1 = \frac{(n-\kappa)!}{(n+\kappa)!} \frac{1}{\alpha} (n+\frac{1}{2}) x^2 P_n^K(x) \cos \kappa L + \frac{1}{4\pi} \int \bar{G}_0^q \left[ \frac{2}{3} + \frac{4m}{3e^x} - \frac{5}{3} x^2 - \frac{(x-x_0)^2}{12 \sin^2 \frac{\phi}{2}} \right] \frac{3d\phi}{4 \sin \frac{\phi}{2}} . \quad (I9)$$

где  $\sin \phi = x$ .

Для этого воспользуемся известной формулой

$$x^2 P_n^K(x) = \frac{(n-\kappa+1)(n-\kappa+2)}{(2n+1)(2n+3)} P_{n+2}^K(x) + \frac{2n^2-2\kappa^2+2n-1}{(2n+3)(2n-1)} P_n^K(x) + \\ + \frac{(n+\kappa)(n+\kappa-1)}{(2n+1)(2n-1)} P_{n-2}^K(x) . \quad (20)$$

Принимая во внимание выражение (18) для  $\tilde{G}_o^k$ , найдем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{G}_o^k \left( \frac{2}{3} + \frac{4m}{3e^{i\alpha}} \right) \frac{3d\alpha}{4\sin \frac{\alpha}{2}} &= \frac{1}{2\pi} \frac{(n-k)!}{a(n+k)!} \frac{2n+1}{n-1} \left( 1 + \frac{2m}{e^{i\alpha}} \right) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{P_n^k(\alpha) \cos kL}{2\sin \frac{\alpha}{2}} d\alpha = \\ &= 2 \frac{(n-k)!}{a(n+k)!} \left( 1 + \frac{2m}{e^{i\alpha}} \right) \frac{P_n^k(\alpha)}{n-1} \cos kL. \end{aligned} \quad (21)$$

Далее:

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{5}{2} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \tilde{G}_o^k \frac{d\alpha}{2\sin \frac{\alpha}{2}} = -\frac{1}{4\pi a} \frac{5(n-k)!}{(n+k)!} \frac{2n+1}{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 P_n^k(\alpha) \cos kL \frac{1}{2\sin \frac{\alpha}{2}} d\alpha.$$

Раскрывая  $x^2 P_n^k(\alpha)$  по формуле (20) и учитывая опять теорему восстановления сферических функций, после интегрирования получим

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi a} \frac{5(n-k)!}{(n+k)!} \frac{2n+1}{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2 P_n^k(\alpha) \cos kL}{2\sin \frac{\alpha}{2}} d\alpha &= -\frac{5(n-k)!}{a(n+k)!} \frac{2n+1}{n-1} \left\{ \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{(2n+5)(2n+4)(2n+3)} P_{n+2}^k(\alpha) + \right. \\ &+ \frac{2n^2 - 2k^2 + 2n - 1}{(2n+1)(2n+3)(2n+1)} P_n^k(\alpha) + \left. \frac{(n+k)(n+k-1)}{(2n-3)(2n+1)(2n-1)} P_{n-2}^k(\alpha) \right\} \cos kL = -\frac{5(n-k)!}{a(n+k)!} \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{(n-1)(2n+5)(2n+3)} P_{n+2}^k(\alpha) + \\ &+ \frac{2n^2 - 2k^2 + 2n - 1}{(n-1)(2n+3)(2n+1)} P_n^k(\alpha) + \left. \frac{(n+k)(n+k-1)}{(n-1)(2n-3)(2n-1)} P_{n-2}^k(\alpha) \right\} \cos kL. \end{aligned} \quad (22)$$

И, наконец, нужно вычислить интеграл

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{G}_o^k \frac{(x-x_0)}{2\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{3d\alpha}{4\sin \frac{\alpha}{2}} = -\frac{1}{4\pi a} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \frac{2n+1}{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{P_n^k(\alpha) (x-x_0)^2 \cos kL}{8\sin^3 \frac{\alpha}{2}} d\alpha.$$

Этот интеграл найден в работе Б.П.Перцева [4] и мы воспользуемся его результатом. Результат таков:

$$-\frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tilde{G}_o^k (x-x_0)^2}{8\sin^3 \frac{\alpha}{2}} d\alpha = \frac{(n-k)!}{a(n+k)!} \frac{(1-4x^2)}{(n-1)(2n+3)(2n-1)} P_{n+2}^k(\alpha) \cos kL \quad (23)$$

Теперь можно написать следующее разложение для функции  $f_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{a(n+k)!}{2(n-k)!} f_1 &= \left\{ -\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{4(2n+3)} - \frac{5(n-k+1)(n-k+2)}{2(n-1)(2n+5)(2n+3)} \right\} P_{n+2}^k(\alpha) \cos kL + \\ &+ \left\{ -\frac{(2n+1)(2n^2 - 2k^2 + 2n - 1)}{4(2n+3)(2n-1)} - \frac{3(2n^2 - 2k^2 + 2n - 1)}{2(n-1)(2n+3)(2n-1)} + \left( \frac{1}{2} + \frac{2m}{e^{i\alpha}} \right) \frac{1}{n-1} \right\} P_n^k(\alpha) \cos kL + \\ &+ \left\{ -\frac{(n+k)(n+k-1)}{4(2n-1)} - \frac{5(n+k)(n+k-1)}{2(n-1)(2n-3)(2n-1)} \right\} P_{n-2}^k(\alpha) \cos kL. \end{aligned} \quad (24)$$

Отсюда по формуле (17) находим  $\bar{G}_1^q$ :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(n+k)!}{2(n-k)!} \bar{G}_1^q &= \left\{ -\frac{(2n+5)(n-k+1)(n-k+2)}{4(n+1)(2n+3)} + \frac{5(n-k+1)(n-k+2)}{2(n+1)(n-1)(2n+3)} \right\} P_{n+2}^k(x) \cos kL + \\ &- \frac{2n+1}{n-1} \left\{ \frac{(2n+1)(2n^2-2k^2+2n-1)}{4(2n+3)(2n-1)} - \frac{3(2n^2-2k^2+2n-1)}{2(n-1)(2n+3)(2n-1)} + \left(\frac{1}{2} + \frac{2m}{e^x}\right) \frac{1}{n-1} \right\} \times \\ &\times P_n^k(x) \cos kL + \left\{ -\frac{(2n-3)(n+k)(n+k-1)}{4(n-3)(2n-1)} + \frac{5(n+k)(n+k-1)}{2(n-3)(n-1)(2n-1)} \right\} P_{n-2}^k(x) \cos kL. \quad (25) \end{aligned}$$

Чтобы найти  $\bar{G}_2^q$ , нужно разложить по сферическим функциям

$$f_2 = \frac{(n-k)!}{\alpha(n+k)!} \frac{n(n+3)}{4} x^4 P_n^k(x) \cos kL + \frac{1}{4\pi} \int \bar{G}_1^q \left[ \frac{2}{3} + \frac{4m}{3e^x} - \frac{5}{3} x^2 - \frac{(x-x_0)^2}{12 \sin^2 \frac{\psi}{2}} \right] \frac{3d\omega}{4 \sin \frac{\psi}{2}}.$$

Сразу же заметим, что с принятой точностью (порядка квадрата сжатия) интегральный член выражения для  $f_2$  вычислить не нужно, так как его вклад в исходную величину  $\bar{G}_2^q$  имеет порядок принятой точности вычисления. Действительно, функция  $\bar{G}_1^q$ , входящая в этот интегральный член, в общем случае возрастает как  $n$ , однако выражение, полученное после интегрирования, с увеличением  $n$  уже не возрастает (см. вычисление подобного члена в выражении для  $f_1$ ). Но так как в исходную функцию  $\bar{G}_2^q$  оно входит с множителем  $e^x$ , то, следовательно, им можно пренебречь.

Остается найти разложение члена, содержащего произведение  $x^4 P_n^k(x)$ .

Запишем этот член в виде

$$\frac{(n-k)!}{\alpha(n+k)!} \frac{n(n+3)}{4} x^2 (x^2 P_n^k(x)) \cos kL$$

и, применяя дважды выражение (20), окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{(n-k)!}{\alpha(n+k)!} \frac{n(n+3)}{4} x^2 (x^2 P_n^k(x)) \cos kL &= \frac{(n-k)!}{\alpha(n+k)!} \frac{n(n+3)}{4} \left\{ \frac{(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3)(n-k+4)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)} P_{n+4}^k(x) + \right. \\ &+ \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{(2n+1)(2n-1)(2n+3)^2(2n+7)} \left[ 4(n^2-k^2)(2n+3) + 24n^2 + 24n - 18 \right] P_{n+2}^k(x) + \\ &+ \left[ \frac{(n-k+1)(n-k+2)(n+k+2)(n+k+1)}{(2n+1)(2n+3)^2(2n+5)} + \frac{(2n^2-2k^2+2n-1)^2}{(2n+3)(2n-1)} + \frac{(n+k)(n+k-1)(n-k-1)(n-k)}{(2n+1)(2n-1)^2(2n-3)} \right] P_n^k(x) + \\ &+ \frac{(n+k)(n+k-1)}{(2n+1)(2n-1)^2(2n+3)(2n-5)} \left[ 4(n^2-k^2)(2n-1) - 8n^2 - 24n + 14 \right] P_{n-2}^k(x) + \\ &+ \left. \frac{(n+k)(n+k-1)(n+k-2)(n+k-3)}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)(2n-5)} P_{n-4}^k(x) \right\} \cos kL. \quad (26) \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{G}_2^q = & \frac{(n-k)!}{a(n+k)!} \frac{n(n+3)}{4} \left\{ \frac{(2n+9)(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3)(n-k+4)}{(n+3)(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)} P_{n+4}^k(x) + \frac{(2n+5)(n-k+1)(n-k+2)}{(n+1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)^2(2n+7)} \times \right. \\ & \times [4(n^2-k^2)(2n+3) + 24n^2 + 24n - 18] P_{n+2}^k(x) + \left[ \frac{(n-k+1)(n-k+2)(n+k+2)(n+k+1)}{(n-1)(2n+3)^2(2n+5)} + \right. \\ & + \frac{2n+1}{n-1} \left. \frac{(2n^2-2k^2+2n-1)^2}{(2n+3)(2n-1)} \right] P_n^k(x) + \frac{(2n-3)(n+k)(n+k-1)}{(n-3)(2n+1)(2n-1)^2(2n+3)(2n-5)} \times \\ & \times [4(n^2-k^2)(2n-1) - 8n^2 - 24n + 14] P_{n-2}^k(x) + \left. \frac{(2n-7)(n+k)(n+k-1)(n+k-2)(n+k-3)}{(n-5)(2n+1)(2n-1)(2n-3)(2n-5)} P_{n-4}^k(x) \right\} \cos kL \end{aligned}$$

После того как найдены функции  $\bar{G}_l^q$ , можно вычислить и саму стоксову постоянную  $Q_n$ , соответствующую выбранной функции  $U_n$ . Учитывая связь функций  $G^q$  и  $\bar{G}^q$  и выражение элемента поверхности эллипсоида в сферических координатах, формулу (I) можно записать так:

$$Q_n = \frac{a^2}{4\pi} \int \Delta g (1 - \frac{3}{4} e^2 \sin^2 \phi) \bar{G}_n^q d\omega \quad (27)$$

или в виде разложения по степеням  $e^2$ :

$$Q_n = \{Q_n\}_0 + e^{2^2} \{Q_n\}_1 + e^{4^2} \{Q_n\}_2, \quad (28)$$

где

$$\{Q_n\}_0 = \frac{a^2}{4\pi} \int \Delta g \bar{G}_0^q d\omega, \quad (29)$$

$$\{Q_n\}_1 = \frac{a^2}{4\pi} \int \Delta g (\bar{G}_1^q - \frac{3}{4} x^2 \bar{G}_0^q) d\omega, \quad (30)$$

$$\{Q_n\}_2 = \frac{a^2}{4\pi} \int \Delta g (\bar{G}_2^q - \frac{3}{4} x^2 \bar{G}_1^q) d\omega. \quad (31)$$

Так как аномалии силы тяжести заданы, то можно считать известным их разложение в ряд по сферическим функциям, т.е.

$$\Delta g = \sum_0^{\infty} \sum_{k=0}^n (A_n^k \cos kL + B_n^k \sin kL) P_n^k(\sin \phi), \quad (32)$$

при отыскании коэффициентов которого аномалии силы тяжести рассматриваются как функция геоцентрических координат. Используя это разложение, можно выполнить интегрирование в формулах, определяющих последовательные приближения  $\{Q_n\}_0$ ,  $\{Q_n\}_1$ ,  $\{Q_n\}_2$  для стоксовой постоянной. Принимая во внимание выражение (18) для функции  $\bar{G}_0^q$

и разложение (32), с учетом ортогональности сферических функций из формулы (29) найдем

$$\{a_n\}_0 = \alpha \frac{A_n^k}{n-1} . \quad (33)$$

Полученный результат соответствует сферическому решению и представляет собой соотношение, выражаемое общим членом ряда Стокса.

Чтобы выполнить аналогичное интегрирование в формулах (30) и (31), нужно раскрыть входящие в них произведения  $x^k G_0^k$  и  $x^k G_1^k$  с помощью выражения (20). При этом в выражении для функции  $G_1^k$  нужно оставить только члены, которые возрастают с увеличением  $n$  (первые члены в фигурных скобках выражения (25)), так как влияние остальных на величины  $Q_n$  меньше принятой здесь точности их вычисления. Учитывая сказанное, после простых преобразований, связанных с приведением подобных членов, получим

$$\begin{aligned} \{Q_n\}_1 &= -\alpha \frac{A_{n+2}^k}{n+1} \frac{(n+k+1)(n+k+2)}{4(2n+3)} \left\{ 1 + \frac{3n-7}{(n-1)(2n+5)} \right\} - \\ &- \alpha \frac{A_n^k}{n-1} \left\{ \frac{(2n+1)(2n^2-2k^2+2n-1)}{4(2n+3)(2n-1)} - \frac{3(2n^2-2k^2+2n-1)}{4(n-1)(2n+3)(2n-1)} + \left(\frac{1}{2} + \frac{2m}{\theta^2}\right) \frac{1}{n-1} \right\} - \\ &- \alpha \frac{A_{n-2}^k}{n-3} \frac{(n+k+1)(n+k+2)}{4(2n-1)} \left\{ 1 + \frac{3n-19}{(n-1)(2n-3)} \right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

Выражение для  $\{Q_n\}_2$  запишем в виде:

$$\{Q_n\}_2 = \{Q_n\}'_2 + \{Q_n\}''_2 , \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} \{Q_n\}'_2 &= \frac{\alpha^2}{4\pi} \int \Delta g \bar{G}_2^k d\Omega = \frac{n(n+3)}{8} \left\{ \frac{(n+k+1)(n+k+2)(n+k+3)(n+k+4)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)} \cdot \alpha \frac{A_{n+4}^k}{n+3} + \right. \\ &+ \frac{(n+k+1)(n+k+2)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)^2(2n+7)} [4(n^2-k^2)(2n+3) + 24n^2 + 24n - 18] \alpha \frac{A_{n+2}^k}{n+1} + \\ &+ \left[ \frac{(n+k+1)(n+k+2)(n+k+2)(n+k+1)}{(2n+1)^2(2n+3)^2(2n+5)} + \left( \frac{2n^2-2k^2+2n-1}{(2n+3)(2n-1)} \right)^2 + \frac{(n+k)(n+k-1)(n-k-1)(n-k)}{(2n+1)(2n-1)^2(2n-3)} \right] \alpha \frac{A_{n-1}^k}{n-1} + \\ &+ \frac{(n-k-1)(n-k)}{(2n+1)(2n-1)^2(2n+3)(2n+5)} [4(n^2-k^2)(2n-1) - 8n^2 - 24n + 14] \alpha \frac{A_{n-2}^k}{n-3} + \\ &\left. + \frac{(n-k-3)(n-k-2)(n-k-1)(n-k)}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \cdot \alpha \frac{A_{n-4}^k}{n-5} \right\}; \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned}
\{Q_n\}'' = & -\frac{3a^2}{16\pi} \int \Delta g x^2 G_1 d\Omega = \frac{3(n+k+1)(n+k+2)(n+k+3)(n+k+4)(n+5)}{16(2n+3)(2n+7)(2n+9)(n+1)} \cdot a \frac{A_{n+5}^k}{n+3} + \\
& + \frac{3(n+k+1)(n+k+2)(2n^2-2k^2+2n-1)}{16(2n+3)^2(2n+7)} \left[ 1 + \frac{(2n+1)(n+4)(2n+7)}{(2n-1)(n-1)(2n+5)} \right] \cdot a \frac{A_{n+2}^k}{n+1} + \\
& + \frac{3}{16} \left\{ \frac{(n-k+1)(n-k+2)(n+k+2)(n+k+1)(n-1)}{(2n+1)(2n+3)^2(n+1)} + (2n+1) \left( \frac{2n^2-2k^2+2n-1}{(2n+3)(2n-1)} \right)^2 + \right. \\
& \left. + \frac{(n+k)(n+k-1)(n-k-1)(n-k)(n-1)}{(2n+1)(2n-1)^2(n-3)} \right\} \cdot a \frac{A_n^k}{n-1} + \frac{3(n-k-1)(n-k)(2n^2-2k^2+2n-1)}{16(2n-5)(2n-1)^2} \left[ 1 + \frac{(2n+1)(n-3)(2n-5)}{(2n+3)(n-1)(2n-3)} \right] a \frac{A_{n-3}^k}{n-3} + \\
& \left. + \frac{3(n-k-3)(n-k-2)(n-k-1)(n-k)(n-5)}{16(2n-1)(2n-5)(2n-7)(n-3)} a \frac{A_{n-4}^k}{n-5} \right]. \quad (36')
\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения для  $(Q_n)_0$ ,  $(Q_n)_1$ , и  $(Q_n)_2$  в (28), запишем эту формулу в виде:

$$\begin{aligned}
Q_n = & r_n^k - e'^2 \left\{ C_{n+2}^k F_1(n, k) + C_n^k F_2(n, k) + C_{n-2}^k F_3(n, k) \right\} + \\
& + e'^4 \left\{ C_{n+4}^k F_4(n, k) + C_{n+2}^k F_5(n, k) + C_n^k F_6(n, k) + C_{n-2}^k F_7(n, k) + C_{n-4}^k F_8(n, k) \right\} = \\
= & C_n^k - e'^2 \left\{ C_{n+2}^k [F_1(n, k) - e'^2 F_5(n, k)] + C_n^k [F_2(n, k) - e'^2 F_6(n, k)] + \right. \\
& \left. + C_{n-2}^k [F_3(n, k) - e'^2 F_7(n, k)] \right\} + e'^4 \left\{ C_{n+4}^k F_4(n, k) + C_{n-4}^k F_8(n, k) \right\}. \quad (37)
\end{aligned}$$

Здесь для сокращения записи обозначено:

$a \frac{A_n^k}{n-1} = C_n^k$  – сферическое приближение к стоксовой постоянной, получаемое в соответствии с рядом Стокса;

$F_i(n, k)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$  – функции  $n$  и  $k$ , стоящие в выражениях (34) и (36) при коэффициентах  $C_n^k$ , например:

$$F_1(n, k) = \frac{(n+k+1)(n+k+2)}{4(2n+3)} \left\{ 1 + \frac{3n-7}{(n-1)(2n+5)} \right\} \dots \text{ из выражения (34);}$$

$$F_4(n, k) = \frac{n(n+3)(n+k+1)(n+k+2)(n+k+3)(n+k+4)}{8(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)} +$$

$$+ \frac{3(n+k+1)(n+k+2)(n+k+3)(n+k+4)(n+3)}{16(2n+3)(2n+7)(2n+9)(n+1)} \dots \text{ из выражений (36) и (36').}$$

Функции  $F_i(n, k)$  в общем случае возрастают с увеличением  $n$ , поэтому погрешность (относительная) сферического приближения для стоксовой постоянной  $Q_n$  существенно зависит от ее порядка: при малых  $n$  она имеет порядок сжатия, так как  $F_i(n, k)$  близки к 1,

а с возрастанием номера  $n$  величины стоксовой постоянной расчет и может значительно превосходить указанный порядок.

Следующий пример достаточно хорошо иллюстрирует характер погрешности сферического решения.

Допустим, что на поверхности эллипсоида аномалии силы тяжести заданы одной сферической гармоникой порядка  $n$

$$\Delta g = A_n^{\circ} P_n^{\circ} (\sin \phi).$$

Определим с относительной ошибкой порядка скатия стоксову постоянную  $Q_n$ , соответствующую этой аномалии. С помощью формулы (37) получаем:

$$Q_n = C_n^{\circ} - e'^2 C_n^{\circ} [F_2(n, 0) - e'^2 F_6(n, 0)] = C_n^{\circ} \{1 - e'^2 [F_2(n, 0) - e'^2 F_6(n, 0)]\}.$$

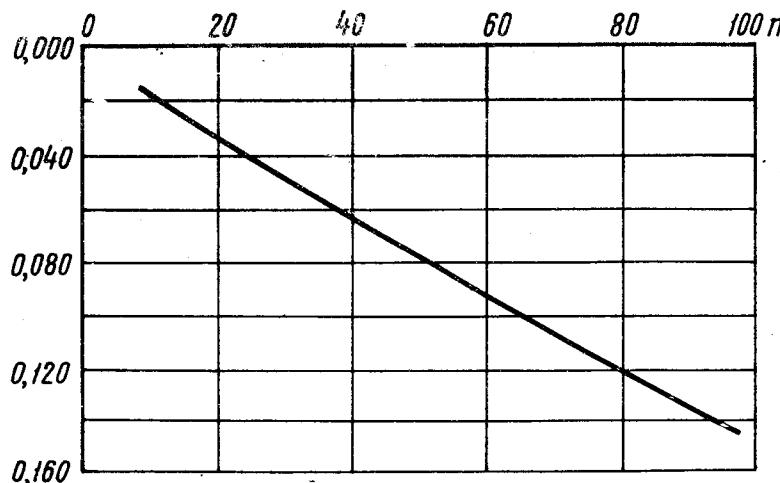
Сферическое решение дает

$$Q_n = C_n^{\circ} = \alpha \frac{A_n^{\circ}}{n-1}$$

Отсюда относительная ошибка стоксовой постоянной, полученной с помощью ряда Стокса (сферическое решение), равна

$$\frac{Q_n - C_n^{\circ}}{Q_n} \approx -e'^2 [F_2(n, 0) - e'^2 F_6(n, 0)].$$

Абсолютная величина этой ошибки и ее изменение в зависимости от  $n$  представлены на графике (см. рисунок), из которого видно, что



она возрастает примерно линейно с увеличением  $n$  и при  $n = 100$  составляет 15% от определяемой стоксовой постоянной.

Таким образом, приходим к выводу, что даже для случая регуляризированной Земли соотношение, выражаемое общим членом ряда Стокса, не определяет стоксова постоянные с относительной ошибкой порядка сжатия. Выражение (37) позволяет в случае регуляризированной Земли исправить результат сферического решения.

В заключение остановимся на определении стоксовых постоянных третьего порядка с относительной ошибкой порядка квадрата сжатия. Этот частный вопрос заслуживает внимания потому, что связанные с ним особенности могут встретиться при решении других задач с относительной ошибкой порядка квадрата сжатия. Такой задачей, например, является определение возмущающего потенциала методом Грина с учетом сжатия отсчетного эллипсоида.

Рассмотрим подробно случай, когда  $n = 3$ ,  $\kappa = 1$ . Тогда, как следует из (3),

$$U_3 = \frac{1}{6} \frac{\Phi^3}{\omega^3} P'_3(\sin \phi) \cos L. \quad (38)$$

Для определения функции  $\bar{G}^3$  имеем, согласно (I3) и (I4), два уравнения:

$$2\pi \bar{G}_0^3 - \frac{3}{2} \int \bar{G}_0^3 \frac{d\alpha}{2 \sin \frac{\psi}{2}} = 4\pi \cdot \frac{1}{6\alpha} P'_3(\infty) \cos L. \quad (39)$$

$$\begin{aligned} 2\pi \bar{G}_1^3 - \frac{3}{2} \int \bar{G}_1^3 \frac{d\alpha}{2 \sin \frac{\psi}{2}} &= -4\pi \frac{7}{24\alpha} \sin^2 \phi P'_3(\infty) \cos L + \\ &+ \int \bar{G}_0^3 \left( \frac{2}{3} + \frac{4m}{3e^2} - \frac{5}{3} \sin^2 \phi - \frac{(\sin \phi - \sin \phi)^2}{12 \sin^2 \frac{\psi}{2}} \right) \frac{3d\alpha}{4 \sin \frac{\psi}{2}}. \end{aligned} \quad (40)$$

Отыскание функции  $\bar{G}_2^3$  здесь излишне, так как в рассматриваемом случае ее вклад в исходную функцию  $\bar{G}^3$  имеет порядок  $e^4$ .

Правая часть уравнения для  $\bar{G}_0^3$  не содержит сферической функции первого порядка и поэтому оно разрешимо. Его частное решение дается формулой (I8) и имеет вид:

$$\bar{G}_0^3 = \frac{7}{12\alpha} P'_3(\infty) \cos L. \quad (41)$$

Для нас существенным в дальнейшем будет то, что этому уравнению удовлетворяет не только функция, определяемая выражением (41), но и функции

$$\frac{7}{12\alpha} P'_3(\infty) \cos L + Y_4, \quad (42)$$

где  $Y_1$  – сферическая функция первого порядка с произвольными коэффициентами.

Рассмотрим свободный член уравнения (40). Его выражение зависит от вида функции  $\bar{G}_0^2$ . Если принять, что эта функция определяется формулой (41), то после разложения свободного члена по сферическим функциям, которое непосредственно следует из выражения (24), получим

$$4\pi \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{8}{99} P_5'(\infty) + \left[ \frac{17}{72} - \frac{1}{2}(1 + \frac{2m}{e'^2}) \right] P_3'(\infty) + \frac{4}{15} P_1'(\infty) \right\} \cos L .$$

Отсюда видно, что свободный член уравнения для  $\bar{G}_0^2$  содержит сферическую функцию первого порядка. Поэтому нельзя найти такую функцию, которая обращала бы это уравнение в тождество. Однако если в качестве нулевого приближения к решению  $\bar{G}_0^2$  мы возьмем общее решение уравнения (39), определяемое выражением (42), то оказывается, что, пользуясь произвольностью коэффициентов в  $Y_1$ , можно подобрать такие их значения, что в свободном члене рассматриваемого уравнения сферическая функция первого порядка будет отсутствовать. В данном случае в качестве нулевого приближения достаточно принять функцию

$$\bar{G}_0^2 = \frac{7}{12a_3} P_3'(\infty) \cos L + \frac{1}{\alpha} C'_1 P_1'(\infty) \cos L , \quad (43)$$

где коэффициент  $C'_1$  пока произволен. Тогда свободный член будет иметь вид :

$$- 4\pi \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{8}{99} P_5'(\infty) + \left[ \frac{17}{72} - \frac{1}{2}(1 + \frac{2m}{e'^2}) \right] P_3'(\infty) + \frac{4}{15} P_1'(\infty) \right\} \cos L + \\ + 4\pi \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{1}{3}(1 + \frac{2m}{e'^2}) P_1'(\infty) - \frac{4}{15} P_1'(\infty) - \frac{1}{21} P_3'(\infty) \right\} C'_1 \cos L .$$

Отсюда следует, что если

$$C'_1 = \frac{4}{(1 + \frac{10m}{e'^2})} \approx \frac{2}{3} , \quad (m = \frac{I}{288} , \quad e'^2 = \frac{I}{150}) ,$$

то в написанном выше выражении сферическая функция первого порядка пропадает и решение уравнения для  $\bar{G}_0^2$  может быть найдено обычным способом. Таким образом, окончательно получаем

$$\bar{G}_0^2 = \frac{7}{12a_3} P_3'(\infty) \cos L + \frac{4}{\alpha(1 + \frac{10m}{e'^2})} P_1'(\infty) \cos L = \frac{7}{12a_3} P_3'(\infty) \cos L + \frac{2}{3\alpha} P_1'(\infty) \cos L ; \quad (44)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{G}_1^2 &= -\frac{7}{2\alpha} \left\{ \frac{8}{99} P_5'(\infty) + \left[ \frac{17}{72} - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2m}{e^{1/2}} \right) \right] P_3'(\infty) + \frac{1}{21} C_1' P_3'(\infty) \right\} \cos L = \\ &= -\frac{28}{99\alpha} P_5'(\infty) \cos L + \frac{41}{16\alpha} P_3'(\infty) \cos L . \end{aligned} \right\} (44)$$

В последних выражениях мы принимали  $\frac{m}{e^{1/2}} = \frac{1}{2}$ .

Искомая функция  $\bar{G}^2$ , являющаяся решением уравнения (II), для рассматриваемого частного случая определяется так:

$$\bar{G}^2 = \bar{G}_0^2 + e'^2 \bar{G}_1^2 .$$

Соответствующие приближения для стоксовой постоянной могут быть получены по формулам (29) и (30). Учитывая выражения (44), с помощью этих формул получаем

$$\left. \begin{aligned} \{Q_3\}_0 &= \alpha \left( \frac{1}{2} A_3' + \frac{2}{9} A_1' \right) ; \\ \{Q_3\}_1 &= \alpha \left( -\frac{725}{1452} A_5' + \frac{55}{28} A_3' - \frac{1}{12} A_1' \right) , \end{aligned} \right\} (45)$$

где  $A_n'$  — коэффициенты разложения по сферическим функциям аномалий силы тяжести, заданных в геоцентрических координатах.

Стоксова постоянная  $Q_3$  с точностью до членов порядка  $e^4$  равна

$$Q_3 = \{Q_3\}_0 + e'^2 \{Q_3\}_1 .$$

Из приведенных выражений видно, что при вычислении стоксовых постоянных третьего порядка с относительной ошибкой порядка квадрата сжатия нужно принимать во внимание сферическую функцию первого порядка в разложении аномалий силы тяжести. Эта функция является величиной порядка сжатия по сравнению с остальными, поэтому член с  $A_1'$ , входящий во второе из выражений (45), может быть отброшен, так как с принятой точностью он не отражается на определяемой стоксовой постоянной.

Аналогичным образом могут быть получены формулы для вычисления стоксовой постоянной, соответствующей функции  $\bar{U}_3 = \frac{g^3}{\alpha^6} P_3(\infty)$ . В этом случае функции  $\bar{G}_0^2$  и  $\bar{G}_1^2$  имеют вид:

$$\bar{G}_0^2 = \left[ \frac{7}{2} P_3(\infty) + C_1 P_1(\infty) \right] \cdot \frac{1}{\alpha} ,$$

где

$$C_1 = \frac{6}{\left( -\frac{1}{2} + \frac{2m}{e^{1/2}} \right)} \approx 4 ;$$

$$\bar{G}_1^2 = -\frac{7}{2a} \left\{ \frac{80}{99} P_5(\infty) + \left[ \frac{55}{36} - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2m}{e^2} \right) \right] P_3(\infty) + \frac{1}{7} C_1 P_3(\infty) \right\}.$$

Для функций  $U_n$ , соде~~жащих~~ящих  $P_3^2(\infty)$  и  $P_3^3(\infty)$ , подобных особенностей при решении уравнений для  $\bar{G}_0^2$  и  $\bar{G}_1^2$  не возникает и поэтому полностью применимы формулы (18) и (25).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Молоденский М.С. Решение задачи Стокса с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия Земли. — Тр. ЦНИИГАИК, вып. II2, 1956.
2. Остач О.М., Пеллинен Л.П. Влияние эллиптичности Земли на ее стоксовые постоянные. — Тр. ЦНИИГАИК, вып. I71, 1966.
3. Остач О.М. Определение возмущающего потенциала и стоксовых постоянных Земли методом функций Грина. — Тр. ЦНИИГАИК, вып. I76, 1969.
4. Перецов Б.П. О решении задачи Стокса с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия Земли. — Тр. ЦНИИГАИК, вып. II2, 1956.

O.M. Ostach

### ON THE EFFECT OF THE EARTH'S ELLIPTICITY ON ITS STOKES' CONSTANTS

#### Summary

The effect of the Earth's ellipticity is studied in determining the Stokes' constants by the gravimetric method using the formula for the Stokes' constants derived by the author in the paper [3]. Relationship between the Stokes' constants  $Q_n$  and the coefficients of expansion into the spherical functions of the

gravity anomalies was established for regularized Earth taking into account its ellipticity. The expressions obtained make it possible to conclude that a neglect of ellipticity of the reference-ellipsoid in computing the Stokes' constants causes the error increasing approximately linearly with increase of the "n" number, if  $n < 100$  at least. At  $n = 100$  the error might reach 15%. Thus, even in the case of regularized Earth the relation expressed through the common term in Stokes' series does not determine the Stokes' constants with relative error of ellipticity order.

УДК 528.22:531.26

В.В.Бровар, О.М.Остач,  
Л.П.Пеллинен, А.И.Шабанова

ИСПЫТАНИЕ НА МОДЕЛИ ЗЕМЛИ  
ФОРМУЛ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ СТОКСОВЫХ ПОСТОЯННЫХ  
ПО ГРАВИМЕТРИЧЕСКИМ ДАННЫМ

I. Введение

После появления работы М.С.Молоденского, В.Ф.Еремеева и М.И.Юркиной [7] стало ясно, что применение теории Стокса к определению стоксовых постоянных Земли по измерениям силы тяжести на ее поверхности приводит к неожиданно большим погрешностям в определяемых величинах.

К настоящему времени предложен ряд формул для вычисления стоксовых постоянных, при выводе которых учитывалась действительная форма физической поверхности Земли. В работе [7] было показано, что стоксово приближение может быть последовательно уточнено, если к аномалиям силы тяжести будут добавлены поправки  $G_1$  и  $G_2$  Молоденского, причем существенное уточнение получается уже с учетом поправок  $G_1$ .

Л.П.Пеллинен [9,10] предложил при использовании формул первого приближения применять вместо  $G_1$  более стабильные поправки  $G'$ , которые можно рассматривать как систематическую часть поправок Молоденского.

Формулы Бровара получены на основе его решения [1,2] краевой задачи Молоденского. Фигурирующие в этих формулах поправки  $\delta g_1, \delta g_2, \dots$  аналогичные поправкам  $G_1, G_2, \dots$ , выражаются абсолютно сходящимися интегралами, что приводит к их меньшей зависимости от малых изменений формы краевой поверхности и делает более

устойчивыми по величине. Формулы для стоксовых постоянных, полученные в работе О.М.Остача [8], позволяют вычислять их непосредственно по аномалиям силы тяжести, не участвующим на предварительных стадиях вычислений. При применении этих формул основные вычисления связаны с определением некоторой функции (функции Грина), которая не зависит от аномалий силы тяжести и определяется только формой поверхности, на которой последние заданы.

Для того чтобы иметь сравнительную характеристику упомянутых выше формул, а также составить представление о виде фигурирующих в них функций, было проведено их испытание на одной и той же модели Земли. Результаты этого испытания описаны ниже. Все вычисления были проведены в отделе геодезических вычислений ЦНИИГАИК на ЭВМ "Урал-1" и "Урал-3" под руководством А.И.Шабановой. В ходе этой работы были составлены стандартные программы, в частности для вычисления несобственных интегралов, которые представляют интерес для решения других задач и поэтому также описаны в статье.

## 2. Модель физической поверхности и гравитационного поля Земли

Испытания формул были проведены на модели, предложенной В.Ф.Еремеевым. Модель подобна использованной в [8] и представляет собой сферу, опоясанную по экватору хребтом, высоты которого вычисляются по формуле

$$H = H_0 \left(1 - \frac{B^2}{B_c^2}\right)^2 \quad \text{при } B < B_c; \quad H = 0 \quad \text{при } B > B_c, \quad (I)$$

где  $H_0 = \frac{1}{1000} R$ ;

$R$  – радиус сферы;

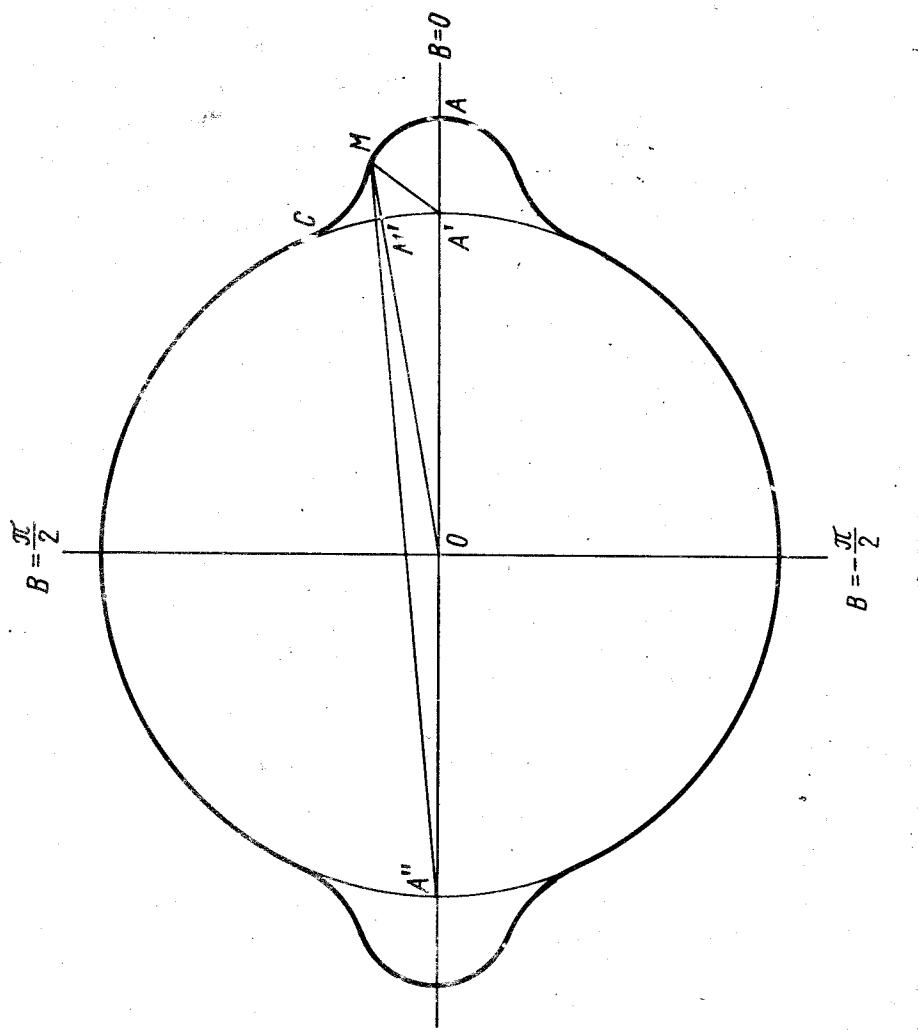
$B$  – широта текущей точки;

$B_c = 12'$  – широта подошвы хребта; сечение модели плоскостью меридiana показано на рис. I (на чертеже  $H = MM'$ );

$R = OM'$ .

В дальнейших расчетах удобно использовать величины  $Z_n = A'M$  и  $Z_m = A''M$ , где  $A'$  и  $A''$  – концы диаметра сферы, проходящего через гребень хребта. Легко получить:

$$\begin{aligned} Z_n^2 &= H^2 + 4(R+H)R \sin^2 \frac{B}{2}, \\ Z_m^2 &= H^2 + 4(R+H)R \cos^2 \frac{B}{2} \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (2)$$



Puc. 1

Новая модель выгодно отличается от использованной в [7] тем, что, во-первых, в ней увеличен максимальный угол наклона физической поверхности от  $10^{\circ}$  до  $24^{\circ}$  к, во-вторых, полностью сохранена непрерывность не только функции  $H$ , как и прежде, но и ее производной по широте, а вторая производная имеет разрыв лишь в одной точке ( $B = B_c$ ) вместо двух, причем значения этой производной конечны в точке разрыва.

Распределение аномальных масс в модели принято такое же, как и в модели № 2, описанной В.Ф. Еремеевым [6]. Именно, причиной аномалий силы тяжести является материальная окружность, совпадающая с экватором Земли, с постоянной положительной линейной плотностью  $\mu$ . Кроме того, для исключения нулевой гармоники с центром Земли совмещена точечная отрицательная аномальная масса  $m$ , равная по абсолютной величине массе материальной окружности.

При указанных выше условиях аномалии силы тяжести  $g - g'$ , аномалии высот  $\zeta$  и меридиональные уклоны отвеса  $\xi''$  на физической поверхности могут быть вычислены по формулам /см. [4], [6]/:

a) при  $B \leq B_c$ :

$$g - g' = -\frac{\partial T}{\partial g} - \frac{2T}{g} = \frac{2f\mu R(g^2 - R^2)E}{g^2 m^2 \zeta_m^2} - \frac{6f\mu R}{g \zeta_m} K + \frac{fm}{g^2}; \quad (3)$$

$$\zeta = \frac{T}{g'} = \frac{2f\mu}{g'} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{H}{R}\right) K - \frac{fm}{R g'} \left(1 + \frac{H}{R}\right); \quad (4)$$

$$\xi'' = \frac{\partial^2}{\partial g^2} \frac{\partial T}{\partial g} = \frac{2\zeta''}{R g'} f\mu \left(1 + \frac{1}{2} \frac{H}{R}\right) \sec^2 \frac{B}{2} \left[ \frac{2(K-E)}{k^2} - \frac{E}{k^2} \right] \sin \frac{B}{2}; \quad (5)$$

b) при  $B \geq B_c$ :

$$g - g' = -\frac{3f\mu}{R} \sec \frac{B}{2} K + \frac{fm}{R^2}; \quad (6)$$

$$\zeta = \frac{2f\mu}{g'} \sec \frac{B}{2} K - \frac{fm}{R g'}; \quad (7)$$

$$\xi'' = \frac{2\zeta'' f\mu}{R g'} \sec^2 \frac{B}{2} \sin \frac{B}{2} \left[ \frac{2(K-E)}{k^2} - \frac{E}{k^2} \right]. \quad (8)$$

Здесь введены обозначения:

$K$  и  $E$  — первые эллиптические интегралы первого и второго рода, аргументом для вычисления которых является величина

$$k_i^2 = 1 - k^2 = \frac{\zeta_m^2}{\zeta^2};$$

$$g = R + H ;$$

$f$  - постоянная тяготения;

$$\frac{ae'}{R} = \frac{1}{\sin i} .$$

(Обозначения  $\tau_m$  и  $\tau_n$  были пояснены ранее).

Принятой модели соответствуют следующие коэффициенты разложения возмущающего потенциала по сферическим функциям:

$$T = \gamma R \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (C_{nk} \cos kL + S_{nk} \sin kL) P_{nk} (\sin B) \left(\frac{R}{\varphi}\right)^{n+1} \quad (9)$$

$$C_{nk}, S_{nk} = 0 \quad \text{при} \begin{cases} k \neq 0; \\ k = 0 \text{ и } n - \text{нечетное} \\ k = 0 \text{ и } n = 0 \end{cases}$$

$$C_{n0} = \frac{2\pi f \mu}{R \gamma} P_n \left(\cos \frac{x}{2}\right) \quad (10)$$

при  $k = 0$ ,  $n$  - четном, большем нуля.

Соответствующие коэффициенты разложения аномалий высот равны

$$\zeta_n = RC_{n0} = \frac{2\pi f \mu}{\gamma} P_n \left(\cos \frac{x}{2}\right). \quad (II)$$

Для удобства сравнения с прежними вычислениями приняты почти те же основные параметры нормальной Земли, что и в [7]:

$$R = 6000 \text{ км};$$

$$\frac{2f \mu}{\gamma} = 4,5 \text{ м};$$

$$f \mu = 7,2 \pi \text{ м}^2 \cdot \text{сек}^{-2} = 2259685 \text{ мгал} \cdot \text{м.}$$

Этим величинам соответствуют:

$$\gamma' = 1004,306 \text{ мгал}; \quad \frac{fm}{R^2} = \frac{2\pi f \mu}{R} = 2,3663 \text{ мгал};$$

$$\frac{ae'}{R \gamma} f \mu = 0,07734932; \quad \frac{2x f \mu}{R \gamma} = 2,3561945 \cdot 10^{-6}.$$

Результаты вычислений по формулам (3), (4), (5), (6), (7) и (8) приведены в прилож. I.

### 3. Вычисление по формуле Стокса

Теория Стокса приводит к следующему хорошо известному соотношению между стоксовыми постоянными и аномалиями силы тяжести

$$C_{no} = \frac{g_n}{R} = \frac{\Delta g_n}{\pi(n-1)}, \quad (I2)$$

где  $\Delta g_n$  - коэффициент разложения аномалий силы тяжести, заданных на физической поверхности Земли, по сферическим функциям, равный для зональной гармоники  $n$ -го порядка

$$\Delta g_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{2\pi} \Delta g P_n(\sin B) \cos B dB dL. \quad (I3)$$

В случае нашей модели

$$\Delta g_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Delta g P_n(\sin B) \cos B dB, \quad (I4)$$

чemu соответствует

$$C_{no} = C_n^o = \frac{\Delta g_n}{\pi(n-1)} = \frac{2n+1}{2\pi(n-1)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Delta g P_n(\sin B) \cos B dB. \quad (I5)$$

Вычисленные по формуле (I5) величины приведены в табл. I. Сравнение  $C_n^o$  с точными значениями  $C_{no}$  подтверждает выводы [7] о принципиальных ошибках ряда Стокса при вычислении с его помощью стоксовых постоянных по измеренным силам тяжести на физической поверхности Земли. Однако использование модели с большими углами наклона, чем в [7], привело к более значительному, чем ранее, отклонению величин, найденных по формуле (I5), от точных их значений.

### 4. Вычисление по формулам М.С.Молоденского

Если подобрать на поверхности Земли первого приближения простой слой плотности  $\varphi$ , создающий то же внешнее гравитационное поле, что и действительные аномальные массы, то зональный коэффициент  $C_{no}$  будет равен:

$$C_{no} = \frac{2x}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\varphi}{R}\right)^n P_{no}(\sin B) \cos B dB. \quad (I6)$$

Через  $X$  обозначена вспомогательная функция, введенная М.С.Молоденским и связанная с плотностью  $\varphi$  соотношением

$$X = \frac{g^2}{R^2} \varphi \sec \alpha, \quad (I7)$$

где  $\alpha$  - угол наклона поверхности Земли первого приближения. Если применить разложение по степеням параметра  $n$ , как это сделано в работе [6], то в нулевом приближении получим

$$C_{n0} = C_{n0}^0 = \frac{2\pi}{\delta} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} X_0 P_{n0}(\sin B) \cos B dB, \quad (I8)$$

где

$$X_0 = \frac{\Delta g}{2x} + \frac{3}{16x^2} \int_{\omega} \Delta g [S(\cos \psi) - 1] d\omega. \quad (I9)$$

Вычисление по формулам (I8) и (I9) даст результат тождественный с получаемым по формуле (I5).

Поправка первого приближения равна

$$C'_{n0} = \frac{2\pi}{\delta} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (X_1 + n \frac{H}{R} X_0) P_{n0}(\sin B) \cos B dB. \quad (20)$$

Поправка второго приближения равна

$$C''_{n0} = \frac{2\pi}{\delta} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (X_2 + n \frac{H}{R} X_1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{H^2}{R^2} X_0) P_{n0}(\sin B) \cos B dB. \quad (21)$$

Величины  $X_1$  и  $X_2$  находят по формуле [6]:

$$X_1 = \frac{G_n}{2x} + \frac{3}{16x^2} \int_{\omega} G_n [S(\cos \psi) - 1] d\omega; \quad (22)$$

$$G_1 = R^2 \int_{\omega} \frac{H-H}{z_o^3} X_0 d\omega; \quad (23)$$

$$G_2 = R^2 \int_{\omega} \frac{H-H}{z_o^3} X_1 d\omega - \frac{R}{4} \int_{\omega} \frac{(H-H)^2}{z_o^3} X_0 d\omega + 2x X_0 \tan^2 \alpha. \quad (24)*$$

Вычисления по формулам Молоденского следующих приближений не проводились. В формулах (22) - (24) через  $d\omega$  обозначен элемент телесного угла,  $z_o = 2R \sin \frac{\psi}{2}$ ,  $H$  - нормальная высота в точке, для которой ищут  $G_1$  и  $G_2$ .

Как видно, в уравнения (23) и (24) входит типовой интеграл

$$J_F = \frac{R^2}{2x} \int_{\omega} \frac{H-H}{z_o^3} F d\omega. \quad (25)$$

\* С учетом замечания В.В.Бровара [3].

Этот интеграл для используемой модели имеет вид:

$$J_f = \frac{1}{4\pi R} \int_{-\frac{\tilde{B}}{2}}^{+\frac{\tilde{B}}{2}} \frac{F(B)(H-H)E \cos B dB}{\cos \frac{B+B}{2} \sin^2 \frac{B-B}{2}} . \quad (26)$$

При вычислении  $G_1$  имеем

$$F(B) = 2\pi X_0 = \Delta g + \frac{3}{2} \frac{B' G_0}{R} , \quad (27)$$

где  $G_0$  - высота квазигеоида, вычисленная для точек модели в нулевом (стоксовом) приближении. Практически с очень высокой точностью оказалось возможным заменить  $G_0$  точным значением  $G$ , полученным по формулам (4) и (7). При вычислении  $G_2$  в первом из интегралов формулы (24) принимали  $F(B) \approx G_1$ . Пренебрегаемый член давал погрешность порядка десятой доли процента.

Как уже указывалось В.Ф.Бремеевым [5], всегда можно пренебречь вторым членом в формуле (24). Для лучшего соответствия с первым членом в третьем члене принимали  $2\pi X_0 \approx \Delta g$ .

Функция  $F(B)$  задавалась либо аналитически (при нахождении  $G_1$ ), либо таблично (при нахождении  $G_2$ ). Интеграл  $J_f$  является при  $B \neq B_c$  несобственным. В этом случае для его вычисления применялась следующая методика. Интервал интегрирования в (26) разбивался на три части, выделив область  $(\bar{B} - \delta B, \bar{B} + \delta B)$  в непосредственной окрестности исследуемой точки, в которой подынтегральная функция терпит разрыв, и две внешние области. В пределах внешних областей интегрирование выполняли обычным путем по формуле Симпсона. В пределах центральной области интегрирования разбивали снова на три части:

$$(\bar{B} - \delta B, \bar{B} - \frac{\delta B}{2}), \quad (\bar{B} - \frac{\delta B}{2}, \bar{B} + \frac{\delta B}{2}) \quad \text{и} \quad (\bar{B} + \frac{\delta B}{2}, \bar{B} + \delta B)$$

и вычисляли сумму интегралов  $\Sigma_1$  по крайним участкам. В дальнейшем ту же процедуру повторяли с интервалом  $(\bar{B} - \frac{\delta B}{2}, \bar{B} + \frac{\delta B}{2})$ , вычислив сумму интегралов  $\Sigma_2$  по участкам

$$(\bar{B} - \frac{\delta B}{2}, \bar{B} - \frac{\delta B}{4}) \quad \text{и} \quad (\bar{B} + \frac{\delta B}{4}, \bar{B} + \frac{\delta B}{2}),$$

затем с интервалом  $(\bar{B} - \frac{\delta B}{4}, \bar{B} + \frac{\delta B}{4})$ , вычислав сумму интегралов  $\Sigma_3$  по участкам  $(\bar{B} - \frac{\delta B}{4}, \bar{B} - \frac{\delta B}{8})$  и  $(\bar{B} + \frac{\delta B}{4}, \bar{B} + \frac{\delta B}{8})$  и т.д.

Вычисление заканчивали на интервале  $(\bar{B} - \frac{\delta B}{2^n}, \bar{B} + \frac{\delta B}{2^n})$ , для

которого с заданной точностью соблюдалось равенство

$$\sum_n = \frac{1}{2} \sum_{n-1}. \quad (28)$$

При выполнении этого условия полагали, что интеграл по интервалу  $(\bar{B} - \frac{\delta B}{2^n}, \bar{B} + \frac{\delta B}{2^n})$  равен  $\sum_n$ .

Чтобы доказать справедливость этого приема вычислений, разложим подынтегральную функцию  $\Phi(B)$  в окрестностях точки с широтой  $\bar{B}$  в ряд Лорана

$$\Phi(B) = \frac{a_0}{(B-\bar{B})} + a_1 + a_2(B-\bar{B}) + a_3(B-\bar{B})^2 + \dots \quad (29)$$

Имеем

$$\sum_{n-1} = \int_{\bar{B}-\frac{\delta B}{2^{n-1}}}^{\bar{B}+\frac{\delta B}{2^{n-1}}} \Phi(B) dB + \int_{\bar{B}+\frac{\delta B}{2^{n-1}}}^{\bar{B}+\frac{\delta B}{2^n}} \Phi(B) dB = a_0 \frac{\delta B}{2^{n-1}} + a_2 \frac{7(\delta B)^3}{32^{3n-7}} + \dots; \quad (30)$$

$$\sum_n = \int_{\bar{B}-\frac{\delta B}{2^n}}^{\bar{B}+\frac{\delta B}{2^n}} \Phi(B) dB + \int_{\bar{B}+\frac{\delta B}{2^n}}^{\bar{B}+\frac{\delta B}{2^{n+1}}} \Phi(B) dB = a_0 \frac{\delta B}{2^n} + a_2 \frac{7(\delta B)^3}{32^{3n-4}} + \dots; \quad (31)$$

$$\int_{\bar{B}-\frac{\delta B}{2^n}}^{\bar{B}+\frac{\delta B}{2^n}} \Phi(B) dB = a_0 \frac{\delta B}{2^n} + a_2 \frac{(\delta B)^3}{3 \cdot 2^{3n-1}} + \dots. \quad (32)$$

С увеличением  $n$  вторые и последующие члены рядов (30), (31) и (32) быстро убывают, так что при некотором  $n$  их сумма окажется меньше заданной величины  $\varepsilon$ . Тогда

$$\frac{\sum_n}{\sum_{n-1}} = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \int_{\bar{B}-\frac{\delta B}{2^n}}^{\bar{B}+\frac{\delta B}{2^n}} \Phi(B) dB = \sum_n$$

и в результате

$$\int_{\bar{B}-\delta B}^{\bar{B}+\delta B} \Phi(B) dB = \sum_0 + \sum_1 + \dots + \sum_{n-1} + 2\sum_n. \quad (33)$$

После получения  $X_0$ ,  $X_1$  и  $X_2$  вычислялись поправки  $C'_n$  и  $C''_n$  к ранее полученному (раздел 3) стоксовому приближению. Влияние членов, в которые не входит отношение  $\frac{h}{R}$ , находили путем численного интегрирования с использованием значений  $X_1$  и  $X_2$ , заданных таблично с различным шагом в зависимости от удаления от оси хребта.

При нахождении влияния членов, включающих множитель  $\pi \frac{h}{R}$ , воспользовались тем, что интегрирование распространяется лишь на

интервал  $(-B_c, +B_c)$ , в пределах которого произведение  $P_{n_0}(\sin B)\cos B$  можно при  $n < 32$  положить постоянным и равным  $P_{n_0}(0)$ .

Таким образом

$$\frac{2\pi}{\gamma} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} n \frac{H}{R} X_0 P_{n_0}(\sin B) \cos B dB \approx \frac{2n}{\delta R} P_{n_0}(0) \int_0^{B_c} \Delta g H dB;$$

членом, содержащим  $\frac{H^2}{R^2} n(n-1)$ , пренебрегли.

Результаты вычислений  $G_1$  и  $G_2$  даны в прилож. 2. Отдельно дан член  $\delta G = \frac{3}{4\pi} R \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(H-H)}{\omega^3} d\omega$ , отражающий влияние второго члена в (27). Исключая  $\delta G$ , получаем поправку, аналогичную  $G_1$ , фигурирующую в решении В.В.Бровара [2]. Поправка  $G_2$  полностью соответствует поправке по указанному методу Бровара. Ее отличие от точного значения  $G_2$  по Молоденскому совершенно пренебрежаемо.

Суммы  $C_{n_0}^0 + C_{n_0}'$ ,  $C_{n_0}^0 + C_{n_0}' + C_{n_0}''$ , а также точные значения  $C_{n_0}$  даны в табл. I. Как видно уже поправка первого приближения уменьшает погрешность вычисления  $C_{n_0}$  до 2,5 - 7%, а поправка второго приближения - до 0,5 - 1%, т.е. до пренебрегаемой величины. Отдельно было подсчитано влияние члена  $\delta G$ ; оно оказалось пренебрежимым. Влияние  $\delta G$  на  $C_{20}$  составило  $0,002 \cdot 10^{-6}$ , а на все остальные коэффициенты  $0,001 \cdot 10^{-6}$  и меньше.

## 5. Вычисление по формулам Л.П.Пеллинена

Л.П.Пеллинен [10] предложил для вычисления поправки первого приближения к стоксовым постоянным использовать вместо поправок  $G$  Молоденского систематическую часть этих величин  $G'$ , которая равна

$$G' = \frac{R^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(H-H)(\Delta g - \bar{\Delta g})}{\omega^3} d\omega. \quad (34)$$

Таким образом,  $G'$  может быть вычислена для модели по типовой формуле (25), если в ней принять

$$F(B) = \frac{\Delta g - \bar{\Delta g}}{2}$$

Таблица значений  $G'$  была получена методом, изложенным в разделе 4, и приведена в прилож. 2. По сравнению с  $G$ , поправка  $G'$  всюду положительна и меняется более плавно. Значения  $C_{n_0}'$  и  $C_{n_0} + C_{n_0}'$ , рассчитанные с использованием поправок  $G'$ , приведены в табл. I.

Как видно, результаты вычислений с использованием поправок  $G$ , и  $G'$  совпали с точностью до  $0,001 \cdot 10^{-6}$  при получении  $C_{no}$ , хотя теоретически они должны быть тождественны. Указанное расхождение объективно характеризует погрешность выполненных расчетов. С увеличением номера  $n$  расхождение двух вариантов вычислений возрастает. Отношение этого расхождения к  $C_{no}$  почти пропорционально  $n$  и примерно равно  $\frac{n}{3000}$ . Это в два раза больше предельной оценки указанного отношения, приведенной в [10] и равной  $\frac{n\alpha}{20}$ , где  $\alpha = \frac{1}{300}$  — сжатие Земли, что объясняется тем, что предельные уклонения отвеса на модели также больше, чем принятые в [10]. Неожиданным оказалось то, что результаты вычислений с использованием поправок  $G'$  ближе к теоретическим, чем с использованием поправок  $G$ . Возможно, что это особенность использованной модели. Однако несомненно, что при получении гармонических коэффициентов  $C_{no}$  в довольно больших пределах  $n$  возможно использовать вместо поправок  $G$ , более стабильные поправки  $G'$ .

## 6. Вычисление по формулам В.В.Бровара

При вычислениях по формулам В.В.Бровара зональный коэффициент  $C_{no}$  равен

$$C_{no} = \frac{2n+1}{4\pi g(n-1)} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{g}{R} \right)^n \delta g \left[ P_{no}(\sin B) + \frac{2}{2n+1} \frac{\partial H}{\partial B} P_{n1}(\sin B) \right] \cos B dB dL, \quad (35)$$

где  $\delta g$  — вспомогательная поверхностная функция, определяемая из интегрального уравнения

$$\Delta g = \delta g + \frac{R^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\delta g}{2} \left[ H - H + \frac{3z^2}{2R^2 \partial B} \frac{\partial H}{\partial B} + \frac{\sec^2 B}{2R^2} \frac{\partial z^2}{\partial L} \frac{\partial H}{\partial L} \right] \cos B dB dL. \quad (36)$$

Применяя к (35) и (36) разложения по степеням параметра  $\kappa$ , получаем приближения для  $C_{no}$  и  $\delta g$  в виде:

$$C_{no}^0 = \frac{2n+1}{4\pi g(n-1)} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \delta g_0 P_{no}(\sin B) \cos B dB dL; \quad (37)$$

$$C_{no}^1 = \frac{2n+1}{4\pi g(n-1)} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ (\delta g_1 + n \frac{H}{R} \delta g_0) P_{no}(\sin B) + \frac{2\delta g_0}{2n+1} \frac{\partial H}{\partial B} P_{n1}(\sin B) \right] \cos B dB dL; \quad (38)$$

$$C_{no}^2 = \frac{2n+1}{4\pi g(n-1)} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ (\delta g_2 + n \frac{H}{R} \delta g_1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{H^2}{R^2} \delta g_0) P_{no}(\sin B) + \right. \\ \left. + \frac{2}{2n+1} \frac{\partial H}{\partial B} (\delta g_1 + n \frac{H}{R} \delta g_0) P_{n1}(\sin B) \right] \cos B dB dL, \quad (39)$$

где  $\delta g_0 = \Delta g$ ;

$$\begin{aligned} \delta g_1 &= \frac{R^2}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{2\pi}{2}} \delta g_0 \frac{H-H}{z_0^3} \cos B dB dL - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{2\pi}{2}} \frac{\delta g_0}{2z_0^3} \left( \frac{\partial z_0^2}{\partial B} \frac{\partial H}{\partial B} + \frac{\partial z_0^2}{\partial L} \frac{\partial H}{\partial L} \sec^2 B \right) \cos B dB dL . \end{aligned} \quad (40)$$

Поправка  $\delta g_1$  второго приближения вычисляется по формуле (40) после замены в ней  $\delta g_0$  на  $\Delta g$ . Первый интеграл в правой части формулы (40) есть типовой интеграл (26) при  $F(B) = \Delta g$ . В соответствии с (26) он обозначен  $J_{\Delta g}$ . Разность  $\delta g_1 - J_{\Delta g}$  преобразуем с учетом особенностей модели и выполняя интегрирования по долготе. Имеем:

$$\frac{\partial H}{\partial L} = 0 ; \quad \frac{\partial \delta g}{\partial L} = 0 ;$$

$$z^2 = (H-H)^2 + z_0^2 = 2R^2(1 - \sin B \sin B_0 - \cos B \cos B_0 \cos L) + (H-H_0)^2 ;$$

$$\frac{\partial z^2}{\partial B} = -2R^2(\cos B \sin B_0 + \sin B \cos B_0 - 2 \sin B \cos B_0 \cos^2 \frac{L}{2}) .$$

Учитывая эти равенства, получим

$$\begin{aligned} \delta g_1 - J_{\Delta g} &= \frac{R^2}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \delta g_0 \frac{\partial H}{\partial B} (\cos B \sin B_0 + \sin B \cos B_0 - \\ &- 2 \sin B \cos B_0 \cos^2 \frac{L}{2}) \cos B dB dL . \end{aligned}$$

Произведя некоторые преобразования, получим

$$\begin{aligned} \delta g_1 - J_{\Delta g} &= \frac{R^2}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \delta g_0 \frac{dH}{dB} \sin(B+B_0) \cos B dB \int_0^{2\pi} \frac{dL}{z_0^3} - \\ &- \frac{R^2}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \delta g_0 \frac{dH}{dB} \sin 2B \cos B_0 dB \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \frac{L}{2} dL}{z_0^3} . \end{aligned} \quad (41)$$

Можно показать, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{dL}{z_0^3} = \frac{E}{2R^3 \cos \frac{B+B_0}{2} \cdot \sin^2 \frac{B-B_0}{2}}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \frac{L}{2} dL}{z_0^3} = \frac{\cos \frac{B+B_0}{2} E}{2R^3 \cos B \cos B_0 \sin^2 \frac{B-B_0}{2}} - \frac{K}{2R^3 \cos B \cos B_0 \cos \frac{B+B_0}{2}} .$$

Подставляя эти равенства в выражение (41), получим окончательную формулу

$$\delta g_1 = \int_{\Delta g} - \frac{1}{4\pi R} \int_{-B_c}^{+B_c} \frac{dH \cdot \sin B - \sin B_0}{\cos^2 \frac{\pi H}{2} \sin^2 \frac{B-B_0}{2}} \cdot E dB + \\ + \frac{1}{2\pi R} \int_{-B_c}^{+B_c} \Delta g \frac{\partial H}{\partial B} \cdot \frac{\sin B}{\cos^2 \frac{B+B_0}{2}} \cdot K dB . \quad (42)$$

Интегрирование по широте в последних двух членах ограничено экваториальной областью  $(-B_c, +B_c)$  потому, что вне этой области на модели высоты  $H = 0$ . Вычисления по формуле (42) показали, что последний член в (42) пренебрегаем. Кроме того, оказалось возможным в (39) пренебречь членами с множителями

$$\frac{n(n-1)}{2} \frac{H^2}{R^2} \delta g_0 P_{n0}(\sin B) \quad \text{и} \quad n \frac{H}{R} \delta g_1 P_{n1}(\sin B).$$

Малость указанных членов также связана с особенностью выбранной модели.

Результаты вычислений  $\delta g_1$  и  $\delta g_2$  даны в прилож. 2. Как видно, эти поправки более стабильны, чем  $G_1$  и  $G_2$ . Характер изменения поправок  $\delta g$  и  $G'$  один и тот же, хотя и при таком сравнении величины  $\delta g$ , оказываются более стабильными. Результаты вычисления стоксовых постоянных даны в табл. I. Оказалось, что в первом приближении их величины близки к найденным по формулам Молоденского и Пеллинена. Таким образом, приближения, соответствующие разным формулам, дают одинаковую точность.

Преимущество способа Бровара в большей стабильности поправок в аномалии силы тяжести, что дает практический эффект, так как позволяет вычислять поправки с большей точностью и в меньшем числе точек, чем при использовании других методов. Некоторым минусом является двучленность используемых формул для стоксовых постоянных.

Во втором приближении формулы Бровара, так же как и формулы Молоденского, уточняют результат, однако несколько меньше, чем формулы Молоденского.

### 7. Вычисление по формулам О.М.Остача

В работе [8] получена формула для определения стоксовых постоянных, частным видом которых являются рассматриваемые здесь коэффициенты  $C_{nk}$  и  $S_{nk}$ . Она позволяет вычислять их непосредственно по аномалиям силы тяжести.

Применительно к вычислению коэффициентов  $C_{no}$  эта формула может быть записана так

$$C_{no} = \frac{R^2}{4\pi G} \int_{\omega} \Delta g (\tilde{G}_0^2 + \tilde{G}_1^2 + \tilde{G}_2^2 + \dots) d\omega . \quad (43)$$

Здесь функции  $\tilde{G}_l^q$  ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ) определяются только геометрическими элементами граничной поверхности и не зависят от гравитационных данных. Они представляются следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} G_0^q &= \frac{2n+1}{n-l} \cdot \frac{1}{R^l} P_{no} (\sin \psi) ; \\ G_l^q &= P_l + \frac{3}{8\pi} \int_{\omega} P_l \{ S(\cos \psi) - 1 \} d\omega \quad (l = 1, 2), \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

где

$$P_1 = - \frac{R^2}{2\pi} \int_{\omega} \tilde{G}_0^q \frac{H-H}{z_0^3} d\omega ;$$

$$P_2 = - \frac{R^2}{2\pi} \int_{\omega} \tilde{G}_0^q \frac{H-H}{z_0^3} d\omega - \frac{R}{8\pi} \int_{\omega} \tilde{G}_0^q \frac{(H-H)^2}{z_0^3} d\omega + \tilde{G}_0^q \operatorname{tg}^2 \alpha .$$

Таким образом, кулевое приближение для вычисляемых коэффициентов  $C_{no}$  будет иметь вид, совпадающий с (15)

$$C_{no}^0 = \frac{1}{4\pi R} \frac{2n+1}{n-l} \int_{\omega} \Delta g P_n (\sin \psi) d\omega = \frac{\Delta g_n}{l(l+n)} , \quad (45)$$

т.е. определяется в соответствии с рядом Стокса.

Поправки первого и второго приближений вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} C_{no}' &= \frac{R^2}{4\pi R} \int_{\omega} \Delta g \tilde{G}_1^q d\omega ; \\ C_{no}'' &= \frac{R^2}{4\pi R} \int_{\omega} \Delta g \tilde{G}_2^q d\omega . \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

При вычислении функций  $\tilde{G}_1^q$  и  $\tilde{G}_2^q$  для рассматриваемой модели оказалось возможным с достаточной точностью положить

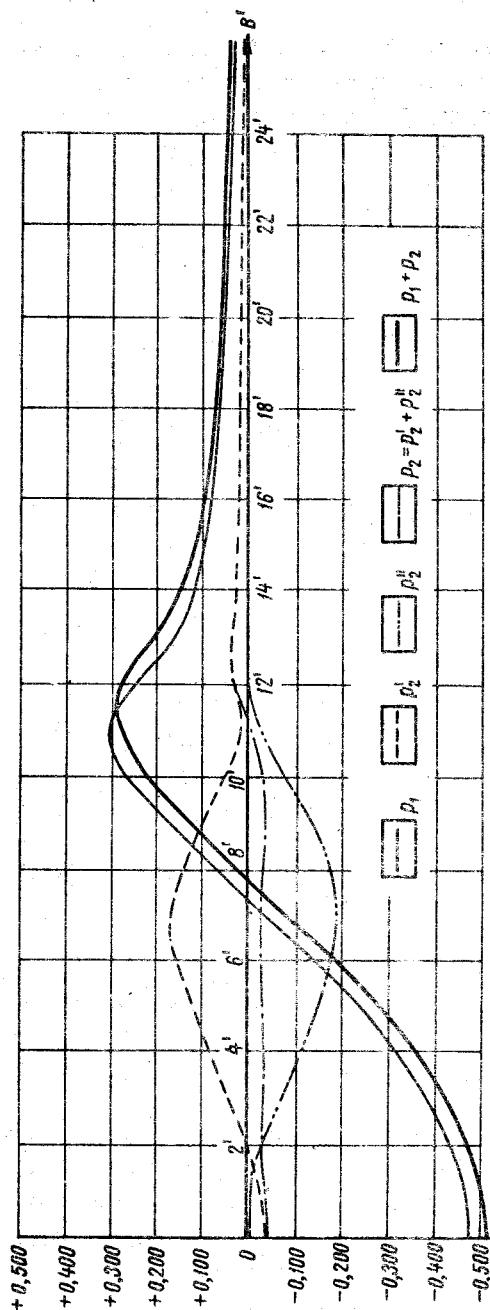
$$\tilde{G}_1^q = P_1 ; \quad \tilde{G}_2^q = P_2 ,$$

так как отбрасываемые в формулах (44) интегральные члены имеют в данном случае порядок  $\frac{1}{n}$  по сравнению с  $\tilde{G}_0^q$  и, следовательно, вносимый ими вклад в вычисляемую стоксову постоянную имеет такой же порядок по сравнению с ее полной величиной.

К погрешности такого же порядка приводит и пренебрежение вторым членом правой части формулы для  $P_2$ .

Значения функций  $P_1$  и  $P_2$  для каждого  $n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, 16$ ) были вычислены на ЭВМ "Урал-3". Здесь также была использована программа для вычислений типового интеграла (26), в котором следует только принять  $F = \tilde{G}_0^q$  при вычислении  $P_1$  и  $F = \tilde{G}_1^q$  при вычислении  $P_2$ .

Рис.2



В пределах хра эта функция  $P_1$  вычислялась через каждые  $20''$ , а функция  $P_2$  — через  $30''$ . Далее этот интервал постепенно увеличивался до  $10^{\circ}$ . Для широт  $B > 10^{\circ}$  эти функции не вычислялись, так как имели там ненулевую величину.

Вид функций  $P_1$  и  $P_2$  для  $n = 0$  показан на рис. 2. На нем показаны также отдельные слагаемые функции  $P_1$ , которые обозначены через  $P_1'$  (интегральный член) и  $P_1''$  (член с  $\frac{1}{\sin^2 \alpha}$ ). Жирной кривой показана сумма  $(P_1 + P_2)$ .

Графики для других значений  $n$ , ввиду малой протяженности по широте горного хребта по виду вполне аналогичны приведенному.

Далее, с использованием вычисленных значений функций  $P_1$  и  $P_2$  по формулам (46) были получены поправки  $C_{no}'$  и  $C_{no}''$ . Заметим, что формулы (43) и (44) не учитывают члена, пропорционального  $\frac{n}{R}$ . Эта малая поправка, имеющая вид

$$\Delta C = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{2n+1}{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta g \cdot n \frac{H}{R} P_n(\sin \vartheta) d\omega, \quad \text{учтена дополнительно. Окончательные результаты вычислений приведены в табл. 2.}$$

Полученные поправки к стоксовым постоянным совпадают отдельно как для первого, так и для второго приближения с соответствующими поправками, полученными другими методами.

### 8. Заключение

Проведенное исследование подтвердило правильность различных формул, предложенных для вычисления стоксовых постоянных. Все эти формулы в каждом приближении дают практически одноточные результаты в смысле быстроты сходимости приближений. Это обусловлено выбором одного и того же метода разложения решения по степеням малого параметра. Поэтому выбор метода вычислений может определяться только наличием того или иного исходного материала и соображениями удобства вычислений.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Бровар В.В. Решение некоторых внешних краевых задач для земной поверхности.—Изв. вузов, "Геодезия и аэрофотосъемка", вып.1, 1963.
2. Бровар В.В. О решениях краевой задачи Молоденского.—Изв. вузов, "Геодезия и аэрофотосъемка", вып.4, 1963.
3. Бровар В.В. О формулах для вычисления возмущающего потенциала и составляющих уклонений отвеса на земной поверхности.—Изв. вузов, "Геодезия и аэрофотосъемка", вып.2, 1965.

4. Еремеев В.Ф. Применение способа моделей к исследованию формул, определяющих фигуру Земли.— Тр. ЦНИИГАИК, вып. 75, 1950.
5. Еремеев В.Ф. К вопросу о численном решении интегрального уравнения Молоденского для плотности слоя.— Тр. ЦНИИГАИК, вып. 176, 1969.
6. Молоденский М.С., Еремеев В.Ф., Юркина М.И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли.— Тр. ЦНИИГАИК, вып. 131, 1960.
7. Молоденский М.С., Еремеев В.Ф., Юркина М.И. Оценка точности ряда Стокса и некоторые попытки уточнения его теории.— Тр. ЦНИИГАИК, вып. 145, 1962.
8. Остач О.М. Определение возмущающего потенциала и стоксовых постоянных Земли методом функций Грина.— Тр. ЦНИИГАИК, вып. 176, 1969.
9. Пеллинеен Л.П. Применение формул первого приближения для вычисления характеристик гравитационного поля Земли.— Тр. ЦНИИГАИК, вып. 157, 1965.
10. Pellinen L.P. Expedient formulae for computation of Earth's gravitational anomalies.— "Bull. géod.", N 74, 1964.

V.V. Brevar, O.M. Ostach, L.P. Pellinen, A.I. Shabanova

INVESTIGATION OF THE FORMULAE FOR COMPUTING  
THE STOKES' CONSTANTS FROM THE GRAVITY DATA  
USING THE EARTH'S MODEL

S u m m a r y

Comparison of the formulae for the Stokes' constants which have been published in the papers [7], [8], [9], [10], as well as derived by V.V. Brevar based on solution of the Molodensky's problem was performed by means of computations for the same Earth's model. Such computations enable one to have the idea of the form of functions containing in these formulas and to judge the rapidity of convergence in successive approximations.

The computation suggested that all the investigated formulas in each approximation provide practically the same results. Thus, the choice of a method for the computations may be governed only by the presence of a particular source material as well as by the considerations of a convenience in computations.

Таблица I

n	$C_{no}$	$C_{no}^o$	По Кюлленскому			По Шеллингову			По Бесседу		
			$C_{no}^o + C_{no}'$	$C_{no}^o + C_{no}' + C_{no}''$	$C_{no}^o + C_{no}' + C_{no}'' + C_{no}'''$	$C_{no} + C_{no}'$	$C_{no}^o + C_{no}'$	$C_{no}^o + C_{no}' + C_{no}''$	$C_{no}^o + C_{no}' + C_{no}'' + C_{no}'''$		
0	0	0	10 <sup>-6</sup>	10 <sup>-6</sup>	10 <sup>-6</sup>	10 <sup>-6</sup>	10 <sup>-6</sup>	10 <sup>-6</sup>	10 <sup>-6</sup>	10 <sup>-6</sup>	10 <sup>-6</sup>
2	- 0,178	+ 0,348	+ 0,028	- 0,005	+ 0,025	- 1,190	- 1,110	- 1,104	- 0,002	- 1,186	- 1,186
4	+ 0,884	- 0,307	- 1,109	- 1,190	- 1,190	+ 0,852	+ 0,889	+ 0,851	+ 0,889	+ 0,851	+ 0,889
6	- 0,736	+ 0,492	+ 0,852	+ 0,853	+ 0,853	- 0,453	- 0,714	- 0,715	- 0,714	- 0,741	- 0,741
8	+ 0,644	- 0,453	- 0,453	- 0,714	- 0,714	+ 0,413	+ 0,626	+ 0,627	+ 0,626	+ 0,649	+ 0,649
10	- 0,580	+ 0,413	+ 0,626	+ 0,626	+ 0,626	- 0,380	- 0,564	- 0,583	- 0,566	- 0,565	- 0,564
12	+ 0,531	- 0,364	- 0,364	- 0,564	- 0,564	+ 0,353	+ 0,518	+ 0,534	+ 0,519	+ 0,518	+ 0,526
14	- 0,494	+ 0,331	+ 0,331	- 0,481	- 0,481	- 0,331	- 0,481	- 0,496	- 0,483	- 0,482	- 0,493
16	+ 0,463	- 0,312	- 0,312	+ 0,451	+ 0,451	+ 0,463	+ 0,465	+ 0,453	+ 0,452	+ 0,467	+ 0,467
18	- 0,437	+ 0,296	+ 0,296	- 0,426	- 0,426	- 0,296	- 0,426	- 0,439	- 0,428	- 0,428	- 0,442
20	+ 0,415	- 0,283	- 0,283	+ 0,405	+ 0,405	+ 0,283	+ 0,405	+ 0,417	+ 0,407	+ 0,407	+ 0,420
22	- 0,396	+ 0,271	+ 0,271	- 0,386	- 0,386	- 0,396	- 0,386	- 0,398	- 0,389	- 0,388	- 0,401
24	+ 0,380	- 0,260	- 0,260	+ 0,370	+ 0,370	+ 0,380	+ 0,370	+ 0,382	+ 0,373	+ 0,372	+ 0,385
26	- 0,365	+ 0,251	+ 0,251	- 0,356	- 0,356	- 0,365	- 0,356	- 0,367	- 0,359	- 0,358	- 0,370
28	+ 0,352	- 0,242	- 0,242	+ 0,343	+ 0,343	+ 0,352	+ 0,343	+ 0,354	+ 0,346	+ 0,346	+ 0,357
30	- 0,340	+ 0,234	+ 0,234	- 0,332	- 0,332	- 0,340	- 0,332	- 0,342	- 0,335	- 0,335	- 0,346
32	+ 0,330	- 0,228	- 0,228	+ 0,322	+ 0,322	+ 0,330	+ 0,322	+ 0,331	+ 0,325	+ 0,324	+ 0,335

Таблица 2

n	Теорети-ческое значение $C_{no} \cdot 10^6$	Нулевое приближе-ние $C_{no} \cdot 10^6$	Подправки первого приближения $C_{no} \cdot 10^6$	Первое приближение $(3+4) + AC$	(5-2)	Подправка второго приближения $C_{no} \cdot 10^6$	Второе приближение (5+7)	(8-2)	
								1	2
0	0	+0,348	-0,320	+0,028	+0,028	-0,033	-0,005	-0,005	-0,005
2	-1,178	-0,307	-0,796	-1,105	+0,073	-0,083	-1,188	-0,010	-0,010
4	+0,884	+0,492	+0,356	+0,850	-0,034	+0,037	+0,867	+0,003	+0,003
6	-0,736	-0,453	-0,256	-0,711	+0,025	-0,027	-0,738	-0,002	-0,002
8	+0,644	+0,413	+0,209	+0,625	-0,019	+0,022	+0,647	+0,003	+0,003
10	-0,580	-0,380	-0,179	-0,562	+0,018	-0,019	-0,581	-0,001	-0,001
12	+0,531	+0,353	+0,159	+0,515	-0,016	+0,017	+0,532	+0,001	+0,001
14	-0,494	-0,331	-0,145	-0,479	+0,015	-0,015	-0,494	0,000	0,000
16	+0,463	+0,312	+0,132	+0,447	-0,016	+0,014	+0,461	-0,002	-0,002

## Приложение I

B I	$(g - r)$ , мгал	$\zeta$ ,	$\xi''$ ,
		и	сек
	2	3	4
0°00' 00"	744,699	26,354	0,000
0 00 10	743,222	26,351	- 7,500
0 00 20	738,818	26,340	- 14,929
0 00 30	731,564	26,322	- 22,218
0 00 40	721,586	26,297	- 29,302
0 00 50	709,053	26,266	- 36,118
0 01 00	694,169	26,228	- 42,634
0 01 10	677,168	26,184	- 48,772
0 01 20	658,305	26,134	- 54,514
0 01 30	637,846	26,078	- 59,835
0 01 40	616,062	26,017	- 64,727
0 01 50	593,222	25,951	- 69,172
0 02 00	569,585	25,881	- 73,147
0 02 10	545,397	25,806	- 76,662
0 02 20	520,887	25,728	- 79,756
0 02 30	496,263	25,646	- 82,429
0 02 40	471,710	25,561	- 84,688
0 02 50	447,393	25,474	- 86,569
0 03 00	423,453	25,383	- 88,076
0 03 10	400,009	25,291	- 89,256
0 03 20	377,161	25,197	- 90,142
0 03 30	354,987	25,101	- 90,716
0 03 40	333,551	25,004	- 91,062
0 03 50	312,899	24,905	- 91,149
0 04 00	293,064	24,806	- 91,058
0 04 10	274,068	24,706	- 90,753
0 04 20	255,920	24,606	- 90,293
0 04 30	238,622	24,505	- 89,686
0 04 40	222,170	24,404	- 88,958
0 04 50	206,550	24,302	- 88,121
0 05 00	191,748	24,201	- 87,196
0 05 10	177,742	24,100	- 86,168
0 05 20	164,509	23,999	- 85,090
0 05 30	152,023	23,899	- 83,964
0 05 40	140,256	23,799	- 82,782
0 05 50	129,182	23,700	- 81,568
0 06 00	118,770	23,601	- 80,318

## Продолж. прил. I

I	2	3	4
0°06' 10"	108,991	23,503	-79,056
0°06' 20	99,816	23,405	-77,788
0°06' 30	91,217	23,308	-76,509
0°06' 40	83,166	23,212	-75,218
0°06' 50	75,633	23,117	-73,939
0°07' 00	68,594	23,023	-72,666
0°07' 10	62,022	22,930	-71,405
0°07' 20	55,893	22,837	-70,158
0°07' 30	50,182	22,746	-68,926
0°07' 40	44,868	22,656	-67,707
0°07' 50	39,927	22,566	-66,510
0°08' 00	35,340	22,478	-65,336
0°08' 10	31,088	22,391	-64,184
0°08' 20	27,150	22,304	-63,052
0°08' 30	25,295	22,262	-62,498
0°08' 40	20,153	22,135	-60,869
0°08' 50	17,061	22,052	-59,812
0°09' 00	14,220	21,970	-58,781
0°09' 10	11,616	21,889	-57,776
0°09' 20	9,235	21,810	-56,796
0°09' 30	7,067	21,731	-55,843
0°09' 40	5,099	21,654	-54,910
0°09' 50	3,320	21,577	-54,008
0°10' 00	1,721	21,502	-53,127
0°10' 20	- 0,977	21,354	-51,440
0°10' 40	- 3,063	21,211	-49,846
0°11' 00	- 4,597	21,072	-48,343
0°11' 30	- 5,975	20,872	-46,242
0°12' 00	- 6,375	20,680	-44,317
0°13' 00	- 6,285	20,320	-40,908
0°14' 00	- 6,201	19,986	-37,986
0°15' 00	- 6,123	19,676	-35,452
0°16' 00	- 6,050	19,386	-33,237
0°17' 00	- 5,982	19,113	-31,282
0°18' 00	- 5,917	18,856	-29,543
0°19' 00	- 5,856	18,612	-27,988
0°20' 00	- 5,798	18,382	-26,589
0°21' 00	- 5,743	18,162	-25,322
0°22' 00	- 5,691	17,953	-24,171

## Продолж. прилож. I

I	2	3	4
0°23' 00"	-5,640	I7,753	-23,I20
0 24 00	-5,592	I7,56I	-22,I56
0 25 00	-5,546	I7,377	-21,270
0 26 00	-5,502	I7,20I	-20,452
0 27 00	-5,459	I7,03I	-19,694
0 28 00	-5,418	I6,868	-18,990
0 29 00	-5,379	I6,710	-18,336
0 30 00	-5,340	I6,557	-17,724
0 31 00	-5,303	I6,410	-17,I52
0 32 00	-5,267	I6,267	-16,616
0 33 00	-5,233	I6,128	-16,II2
0 34 00	-5,199	I5,994	-15,638
0 35 00	-5,166	I5,864	-15,I92
0 36 00	-5,134	I5,737	-14,770
0 37 00	-5,103	I5,614	-14,370
0 38 00	-5,073	I5,494	-13,992
0 39 00	-5,044	I5,377	-13,633
0 40 00	-5,015	I5,263	-13,292
0 41 00	-4,987	I5,152	-12,968
0 42 00	-4,960	I5,043	-12,658
0 43 00	-4,934	I4,937	-12,364
0 44 00	-4,908	I4,834	-12,083
0 45 00	-4,882	I4,733	-II,8I4
0 46 00	-4,857	I4,634	-II,557
0 47 00	-4,833	I4,537	-II,3II
0 48 00	-4,809	I4,443	-II,076
0 49 00	-4,786	I4,350	-IO,849
0 50 00	-4,763	I4,259	-IO,632
0 51 00	-4,74I	I4,I70	-IO,424
0 52 00	-4,719	I4,083	-IO,223
0 53 00	-4,697	I3,997	-IO,030
0 54 00	-4,676	I3,9I3	- 9,844
0 55 00	-4,656	I3,830	- 9,664
0 56 00	-4,635	I3,749	- 9,492
0 57 00	-4,615	I3,670	- 9,326
0 58 00	-4,596	I3,59I	- 9,I64
0 59 00	-4,576	I3,5I5	- 9,009
I°00' 00"	-4,557	I3,439	- 8,858
I 10 00	-4,383	I2,746	- 7,592

## Продолж. прилож. I

I	2	3	4
I°20' 00"	-4,233	12,145	-6,642
I 30 00	-4,100	11,616	-5,902
I 40 00	-3,981	11,142	-5,311
I 50 00	-3,873	10,714	-4,827
2 00 00	-3,775	10,323	-4,424
2 10 00	-3,685	9,964	-4,082
2 20 00	-3,601	9,631	-3,789
2 30 00	-3,524	9,321	-3,536
2 40 00	-3,451	9,032	-3,314
2 50 00	-3,383	8,760	-3,118
3 00 00	-3,318	8,504	-2,943
3 15 00	-3,228	8,145	-2,715
3 30 00	-3,145	7,813	-2,520
3 45 00	-3,067	7,504	-2,350
4 00 00	-2,995	7,216	-2,202
4 15 00	-2,927	6,945	-2,071
4 30 00	-2,863	6,689	-1,954
4 45 00	-2,802	6,448	-1,850
5 00 00	-2,745	6,219	-1,756
5 30 00	-2,638	5,795	-1,594
6 00 00	-2,541	5,408	-1,458
6 30 00	-2,452	5,052	-1,344
7 00 00	-2,369	4,724	-1,246
7 30 00	-2,293	4,419	-1,160
8 00 00	-2,221	4,134	-1,086
8 30 00	-2,154	3,867	-1,019
9 00 00	-2,091	3,616	-0,960
9 30 00	-2,032	3,379	-0,908
I0 00 00	-I,975	3,155	-0,860
II 00 00	-I,871	2,739	-0,778
I2 00 00	-I,776	2,362	-0,710
I3 00 00	-I,690	2,017	-0,651
I4 00 00	-I,610	1,700	-0,601
I5 00 00	-I,536	1,406	-0,558
I6 00 00	-I,468	1,133	-0,520
I7 00 00	-I,404	0,878	-0,486
I8 00 00	-I,344	0,639	-0,456
I9 00 00	-I,287	0,415	-0,428
20 00 00	-I,234	0,204	-0,404

## Продолж. прилож. I

I	2	3	4
25°00'00"	-1,009	-0,694	-0,310
30 00 00	-0,833	-1,395	-0,246
35 00 00	-0,691	-1,959	-0,200
40 00 00	-0,575	-2,421	-0,164
45 00 00	-0,480	-2,802	-0,136
50 00 00	-0,400	-3,118	-0,113
55 00 00	-0,335	-3,379	-0,094
60 00 00	-0,281	-3,594	-0,076
65 00 00	-0,237	-3,768	-0,061
70 00 00	-0,202	-3,906	-0,048
75 00 00	-0,176	-4,010	-0,035
80 00 00	-0,158	-4,083	-0,023
85 00 00	-0,147	-4,126	-0,012
90 00 00	-0,144	-4,140	-0,000

## Приложение 2

в мГал.

B \ G	G <sub>1</sub>	δG <sub>1</sub>	G <sub>2</sub>	G <sub>3</sub>	δg <sub>1</sub>	δg <sub>2</sub>
I	2	3	4	5	6	7
0°00' 00"	-83,171	-2,571	-I7,302	I40,606	76,932	II,626
0 00 05	-83,025	-2,570	-I7,296	I40,559	76,927	II,622
0 00 10	-82,581	-2,569	-I7,279	I40,434	76,920	II,622
0 00 15	-81,841	-2,566	-I7,250	I40,225	76,910	
0 00 20	-80,812	-2,563	-I7,210	I39,937	76,895	II,623
0 00 25	-79,497	-2,558	-I7,158	I39,562	76,876	
0 00 30	-77,902	-2,552	-I7,095	I39,110	76,855	II,608
0 00 35	-76,040	-2,546	-I7,020		76,827	
0 00 40	-73,915	-2,538	-I6,934	I37,978	76,796	II,532
0 00 45	-71,541	-2,529	-I6,837		76,759	
0 00 50	-68,925	-2,519	-I6,729	I36,554	76,721	II,568
0 00 55	-66,084	-2,508	-I6,608		76,677	
0 01 00	-63,032	-2,497	-I6,479	I34,856	76,627	II,550
0 01 10	-56,336	-2,470	-I6,184	I32,914	76,521	II,522
0 01 20	-48,961	-2,440	-I5,845	I30,756	76,398	II,492
0 01 30	-41,031	-2,406	-I5,461	I28,406	76,257	II,458
0 01 40	-32,670	-2,368	-I5,037	I25,898	76,098	II,416
0 01 50	-23,539	-2,326	-I4,571	I23,256	75,923	II,370
0 02 00	-15,137	-2,281	-I4,064	I20,509	75,732	II,319
0 02 10	- 6,195	-2,233	-I3,518	I17,688	75,526	II,263
0 02 20	2,724	-2,181	-I2,933	I14,814	75,301	II,205
0 02 30	II,530	-2,126	-I2,311	III,908	75,061	II,145
0 02 40	20,I38	-2,069	-II,652	I08,995	74,804	II,078
0 02 50	28,482	-2,008	-I0,900	I06,086	74,531	II,006
0 03 00	36,501	-I,944	-I0,231	I03,202	74,240	IO,933
0 03 10	44,145	-I,878	- 9,474	I00,355	73,931	IO,859
0 03 20	51,381	-I,809	- 8,685	97,554	73,610	IO,771
0 03 30	58,I74	-I,738	- 7,867	94,810	73,269	IO,685
0 03 40	64,506	-I,665	- 7,023	92,131	72,912	IO,599
0 03 50	70,364	-I,589	- 6,154	89,517	72,538	IO,504
0 04 00	75,743	-I,511	- 5,261	86,985	72,149	IO,400
0 04 10	80,639	-I,431	- 4,348		71,742	IO,300
0 04 20	85,058	-I,349	- 3,414	82,I30	71,319	IO,193
0 04 30	89,007	-I,266	- 2,463		70,879	IO,080
0 04 40	92,463	-I,181	- I,494	77,591	70,422	9,982
0 04 50	95,546	-I,095	- 0,520		69,950	9,840
0 05 00	98,I66	-I,007	0,470	73,358	69,459	9,733

Продолж. прил.к. 2

I	2	3	4	5	6	7
0°05' 10"	100,378	-0,918	1,467		68,953	9,613
0 05 20	102,197	-0,827	2,471	69,414	68,427	9,478
0 05 30	103,648	-0,736	3,474		67,886	9,331
0 05 40	104,755	-0,644	4,481	65,749	67,335	9,191
0 05 50	105,531	-0,551	5,488		66,764	9,051
0 06 00	105,995	-0,458	6,491	62,334	66,172	8,904
0 06 10	106,171	-0,364	7,485		65,563	8,578
0 06 20	106,085	-0,269	8,469	59,157	64,942	8,603
0 06 30	105,751	-0,175	9,442		64,304	8,521
0 06 40	105,192	-0,080	10,400	56,187	63,651	8,285
0 06 50	104,418	-0,014	11,342		62,977	8,123
0 07 00	103,452	0,108	12,263	53,407	62,285	7,957
0 07 10	102,314	0,202	13,157		61,578	
0 07 20	101,021	0,296	14,027	50,787	60,856	
0 07 30	99,584	0,388	14,867		60,II6	7,526
0 07 40	98,021	0,480	15,676	48,317	59,360	
0 07 50	96,345	0,571	16,451		58,585	
0 08 00	94,572	0,661	17,186	45,976	57,796	6,891
0 08 10	92,712	0,749	17,881		56,989	
0 08 20	90,778	0,835	18,532	43,746	56,166	
0 08 30	88,782	0,920	19,136		55,325	6,319
0 08 40	86,735	1,003	19,690	41,615	54,468	
0 08 50	84,635	1,083	20,191		53,593	
0 09 00	82,526	1,161	20,636	39,566	52,703	5,716
0 09 20	78,225	1,307	21,350	37,590	50,873	
0 09 40	73,896	1,440	21,804	35,675	48,974	
0 10 00	69,593	1,555	21,967	33,809	47,008	4,479
0 10 20	65,365	1,649	21,824	31,988	44,974	
0 10 40	61,250	1,717	21,337	30,199	42,874	
0 11 00	57,279	1,752	20,466	28,440	40,706	3,220
0 11 20	53,473	1,741	19,150	26,701	38,472	
0 11 30	51,633	1,712	18,289	25,837	37,328	2,610
0 11 40	49,840	1,662	17,256	24,976	36,168	
0 11 50	48,089	1,580	15,976	24,II8	34,988	
0 12 00	46,389	1,415	14,056	23,268	33,800	2,II0
0 12 20	43,243	1,147		21,663	31,531	
0 12 30	41,802	1,067		20,937	30,498	
0 13 00	37,941	0,893	8,II7	18,993	27,727	
0 13 30	34,643	0,772		17,336	I,539	

## Продолж. прилож. 2

I	2	3	4	5	6	7
0°I4' 00"	31,793	0,681	5,744	I5,905	23,291	I,221
0 I4 30	29,305	0,608		I4,657		
0 I5 00	27,I24	0,548	4,357	I3,559	I9,909	I,005
0 I6 00	23,444	0,455	3,448	II,720	I7,229	0,847
0 I7 00	20,500	0,387	2,8II	I0,245	I5,081	0,727
0 I8 00	I8,094	0,334	2,344	9,04I	I3,322	0,632
0 I9 00	I6,I00	0,292	I,990	8,043	II,862	0,556
0 20 00	I4,426	0,258	I,7I4	7,205	I0,634	0,493
0 2I 00	I3,005	0,230	I,495	6,494	9,59I	0,44I
0 22 00	II,787	0,206	I,3I6	5,885	8,696	0,397
0 23 00	I0,736	0,186	I,169	5,360	7,924	0,360
0 24 00	9,822	0,169	I,047	4,902	7,25I	0,328
0 25 00	9,022	0,155	0,943	4,502	6,662	0,300
0 30 00	6,I90	0,104	0,604	3,088	4,575	0,202
0 32 00	5,424	0,09I	0,520	2,705	4,009	0,I77
0 34 00	4,792	0,080	0,452	2,389	3,543	0,I56
0 36 00	4,265	0,07I	0,397	2,I26	3,I54	0,I38
0 38 00	3,820	0,063	0,352	I,904	2,825	0,I24
0 40 00	3,443	0,057	0,3I4	I,7I6	2,547	0,III
0 45 00	2,7II	0,044	0,243		2,006	0,087
0 50 00	2,I92	0,036	0,194	I,092	I,622	0,07I
0 55 00	I,808	0,029	0,158		I,338	0,058
I 00 00	I,5I8	0,025	0,132	0,756	I,I23	0,049
I 10 00	I,II3	0,0I8		0,554		
I 20 00	0,85I	0,0I4		0,423		
I 30 00	0,672	0,0II		0,334		
I 40 00	0,545	0,009		0,27I		
I 50 00	0,449	0,007		0,223		
2 00 00	0,378	0,006	0,032	0,I88	0,280	0,0I2
2 20 00	0,277	0,004		0,I38		
2 40 00	0,2I2	0,003		0,I05		
3 00 00	0,I68	0,003		0,083	0,I24	0,006
3 20 00	0,I36	0,002		0,067		
3 40 00	0,III3	0,002		0,056		
4 00 00	0,095	0,002	0,008	0,047	0,07I	0,003
5 00 00	0,06I	0,00I			0,046	0,002
6 00 00	0,043	0,00I	0,004		0,032	0,002
7 00 00	0,030	0,000		0,0I5	0,023	0,00I
8 00 00	0,023	0,000	0,002	0,0I2	0,0I7	0,000

Продолж. прилож.2

УДК 528.22:531.26

В.Ф. Еремеев

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ГРАВИТАЦИОННОЕ  
ПОЛЕ И ФИГУРУ ЗЕМЛИ

Решение интегральных уравнений Молоденского для возмущающегося потенциала и плотности простого слоя осложнено их сингулярностью. Вывод прямых значений производных от возмущающего потенциала на земной поверхности также осложнен сингулярностью соответствующих интегралов. Эти трудности и трудности, связанные с установлением зависимости между прямыми и предельными значениями, возрастают с ростом порядка производной. Стремление получать внешние предельные значения через прямые связано с большей простотой вывода прямых значений при ручном счете. Например, вычисление по формуле Бенинг-Мейнеса для уклонения отвеса несравненно проще вычисления стоксова приближения к уклонению отвеса во внешней точке. В последнем случае приходится вводить поправку в коэффициент влияния каждого отделения палетки за высоту фиксированной точки.

Использование электронных вычислительных машин устраниет преимущества выводов прямых значений и одновременно позволяет избавиться от сингулярных интегралов. При этом фиксированная точка должна находиться на некоторой определенной высоте над земной поверхностью. Соответственно астрономические инструменты никогда не стоят непосредственно на земной поверхности, а находятся при наблюдениях над ней хотя бы на высоте платформы.

Такой подход к вычислению уклонения отвеса возможно осуществить на основе решений упомянутых уравнений Молоденского.

Под руководством А.И. Шабановой разработаны программы для вычислений на модели Земли компонентов уклонения отвеса с помощью электронной вычислительной машины в случае решения уравнения для

плотности. При этом была предусмотрена возможность положения исследуемой точки вне поверхности (на высоте 1 м) и во внешнем предельном положении на этой поверхности (в последнем случае интеграл становится сингулярным). Результаты вычислений, выполненных под руководством Шабановой, совпали в пределах точности вычислений 0,01.

При решении уравнения Молоденского для плотности слоя сингулярных интегралов избежать нельзя, так как это уравнение (типа Фредгольма второго рода) получено из зависимости между прямым и внешним предельным значением косой производной (значения  $G$ , или другие поправки в аномалии силы тяжести следует вычислять для точки поверхности).

Наоборот, при решении уравнения для возмущающего потенциала последовательными приближениями можно использовать для вычисления очередного приближения не это уравнение, а преобразованную Молоденским формулу Грина, определяющую возмущающий потенциал во внешней точке. Высота квазигеоида при этом изменится на  $\frac{1}{g} \Delta g h$  ( $h$  - отсчитанная по радиусу-вектору высота фиксированной точки над земной поверхностью), т.е. редко больше, чем на 0,3 мм, если  $h = 1$  м. Поскольку интегралы в формуле Грина несингулярные, земную поверхность можно представить гранями и ребрами [4]. Ребро или пересечение ребер - острье поверхности, аппроксимирующей земную, может находиться непосредственно под фиксированной точкой.

Вычислив значения интегралов правой части, можно результат отнести к точке поверхности. Это возможно вследствие указанной близости значений возмущающего потенциала в точке земной поверхности и в фиксированной точке над ней при малом  $h$ .

Для объяснения аномального гравитационного поля простым слоем, распределенным с плотностью  $\varphi$  на земной поверхности  $S$ , примем, что измерения силы тяжести выполнены не на  $S$ , а на высоте  $h$  над этой поверхностью (см. рис.). В идеальном случае, для которого развита теория Молоденского, можно рассматривать геометрическое место точек, отстоящих от  $S$  на  $h$ , как некоторую поверхность  $\bar{S}$  наблюдения силы тяжести. Значения  $h$  могут изменяться, но всегда  $h \neq 0$ . Между  $S$  и  $\bar{S}$  притягивающих масс нет. Обозначим радиус-вектор точки земной поверхности через  $\rho$ , соответствующей точки поверхности  $\bar{S}$  - через  $\bar{\rho}$ , так что

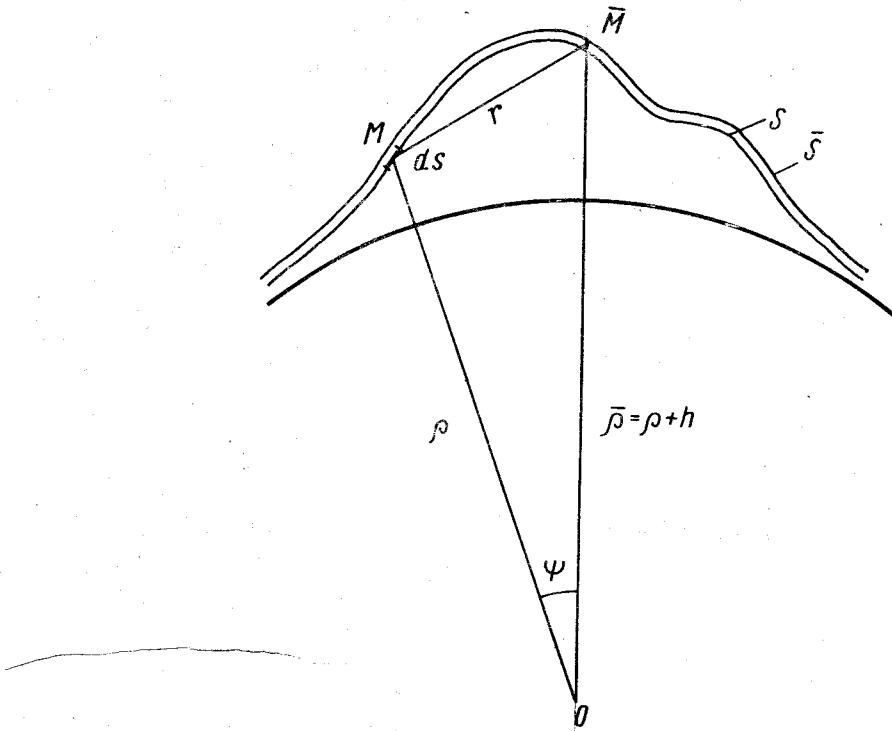
$$\rho + h = \bar{\rho}. \quad (1)$$

Возмущающий потенциал  $T$  согласно предложению Молоденского [2] представим так:

$$T = \int \frac{\varphi}{\rho} dS. \quad (2)$$

Легко выразить производную от  $T$  по касательной  $\tau$  к координатной линии, соответствующей счету высот [I]

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{d}{d\tau} \int \frac{\varphi}{\tau} dS \quad (3)$$



Для сферической отсчетной поверхности, как известно,

$$\frac{\partial \frac{T}{\tau}}{\partial \tau} = \frac{\varphi^2 - \bar{\varphi}^2}{2\bar{\rho}\tau^3} - \frac{1}{2\bar{\rho}\tau} \quad (4)$$

Используя зависимость между аномалией силы тяжести и производной  $\frac{\partial T}{\partial \tau}$  [I]

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = -\Delta g + \frac{T}{\tau} \frac{\partial \delta}{\partial \tau},$$

можно получить интегральное уравнение Фредгольма первого рода относительно неизвестной функции  $\varphi$

$$\Delta g = \frac{1}{\delta} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \int \frac{\varphi}{\zeta} dS - \frac{1}{\delta} \int \frac{\varphi}{\zeta} dS \quad (5)$$

или для сферической отсчетной поверхности

$$\Delta g = - \frac{3}{2\bar{\rho}} \int \frac{\varphi}{\zeta} dS - \frac{1}{2\bar{\rho}} \int \frac{\varphi^2 - \bar{\rho}^2}{\zeta^2} \varphi dS. \quad (6)$$

Через  $\zeta$  мы обозначали расстояние между фиксированной точкой на  $\bar{S}$  и текущим элементом  $dS$ , т.е. всегда  $\zeta \neq 0$ . При вычислении аномалии  $\Delta g$  силы тяжести следует использовать высоту точки поверхности  $\bar{S}$ . Нетрудно видеть, что возможная разность в значениях  $\Delta g$  на  $S$  и  $\bar{S}$  пренебрегаема мала с точки зрения современной точности; при аномалии вертикального градиента даже в 0,1 мгл на 1 м при  $h=1$  м эта разность равна 0,1 мгл.

Как известно, на уравнение (5) или (6) можно распространить результаты М.С. Молоденского [2] исследования его уравнения для  $\varphi$ .

Численный метод решения [3] применим к уравнению (6). В первом приближении плотность слоя примем равной

$$\varphi_1 = \frac{\Delta g \cos \alpha}{2\pi}, \quad (7)$$

где  $\alpha$  — угол наклона элемента  $dS$ . Подставив выражение (7) в уравнение (6), вместо  $\Delta g$  найдем

$$\Delta g_1 = - \frac{3}{2\bar{\rho}} \int \frac{\varphi_1}{\zeta} dS - \frac{1}{2\bar{\rho}} \int \varphi_1 \frac{\varphi^2 - \bar{\rho}^2}{\zeta^3} dS \quad (8)$$

или

$$\Delta g_1 = - \frac{3}{4\pi\bar{\rho}} \int \frac{\Delta g}{\zeta} d\sigma - \frac{1}{4\pi\bar{\rho}} \int \Delta g \frac{\varphi^2 - \bar{\rho}^2}{\zeta^3} d\sigma, \quad (9)$$

где

$$d\sigma = \cos \alpha dS.$$

Вычитая уравнение (8) из (6), получим

$$\delta g_1 = \Delta g - \Delta g_1 = - \frac{3}{2\bar{\rho}} \int \frac{\delta \varphi_1}{\zeta} dS - \frac{1}{2\bar{\rho}} \int \delta \varphi_1 \frac{\varphi^2 - \bar{\rho}^2}{\zeta^3} dS, \quad (10)$$

или

$$\delta g_1 = \Delta g + \frac{3}{4\pi\delta} \int \frac{\Delta g}{z} dz + \frac{1}{4\pi\delta} \int \Delta g \frac{\delta^2 - z^2}{z^3} dz,$$

где

$$\delta\varphi_1 = \varphi - \varphi_1.$$

В левой части уравнения (10) значение  $\delta g_1$ , известно, под знаками интегралов правой части стоит неизвестная величина  $\delta\varphi_1$ . Таким образом, мы получили интегральное уравнение, аналогичное исходному (6). Это уравнение снова решаем приближенно, полагая

$$\delta\varphi_1 = \frac{\delta g_1 \cos \alpha}{2\pi}. \quad (II)$$

Последующие вычисления должны соответствовать описанным.  
В результате получим:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = \varphi_1 + \delta\varphi_1 + \delta\varphi_{\bar{1}} + \dots; \\ \Delta g = \Delta g_1 + \delta g_1 + \delta g_{\bar{1}} + \dots; \\ \delta g_1 = \delta g_{\bar{1}} + \delta g_{\bar{\bar{1}}} + \dots; \\ \delta g_{\bar{1}} = \delta g_{\bar{\bar{1}}} + \delta g_{\bar{\bar{\bar{1}}}} + \dots; \\ \varphi = (\Delta g + \delta g_1 + \delta g_{\bar{1}} + \dots) \frac{\cos \alpha}{2\pi}. \end{array} \right\} \quad (I2)$$

В отличие от решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода здесь все интегралы будут обыкновенными. Поэтому земную поверхность удобно аппроксимировать гранями и их пересечениями-ребрами.

Такая аппроксимация допускает использование электронных вычислительных машин и позволяет сохранить одну и ту же поверхность на всех этапах вычисления. При этом не требуется, чтобы высота имела вторую непрерывную производную по плановым координатам.

Последовательные приближения к плотности  $\varphi$  позволяют вычислить соответственные приближения к высотам квазигеоида и уклонениям отвеса на  $\bar{z}$ .

В первом приближении:

$$\zeta_1 = \frac{1}{2\pi\delta} \int \frac{\Delta g}{z} dz; \quad \xi_1 = \frac{1}{2\pi\delta} \int \frac{\Delta g}{z^2} \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} dz.$$

Первые поправки к первому приближению

$$\delta \zeta_1 = \frac{1}{2\pi\gamma} \int \frac{\delta g_1}{\tau} d\sigma ;$$

$$\delta \xi_1 = \frac{1}{2\pi\gamma^2} \int \frac{\delta g_1}{\tau^2} \frac{\partial \tau}{\partial \theta} d\sigma$$

и т.д. И окончательно

$$\zeta = \zeta_1 + \delta \zeta_1 + \delta \zeta_2 + \dots ;$$

$$\xi = \xi_1 + \delta \xi_1 + \delta \xi_2 + \dots$$

Сходимость этого процесса последовательных приближений исследовать проще, имея в виду решение уравнения Молоденского для плотности  $\varphi$ , т.е. интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода. Это уравнение

$$2\pi\varphi \cos \alpha = \Delta g + \int \varphi \frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{\partial \gamma} dS - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \int \frac{\varphi}{\tau} dS$$

более компактно можно записать так:

$$\alpha \varphi \cos \alpha = \Delta g + \int \varphi K dS ,$$

где

$$\alpha = 2\pi , \quad K = \frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{\partial \gamma} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \frac{1}{\tau} .$$

Вычисляя последовательные приближения аналогично изложенному по методу, описанному в Трудах ЦНИИГАИК, вып. I76, и образуя сумму первого приближения и его последовательных поправок, нетрудно установить закон вывода формулы для  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\cos \alpha}{\alpha} \Delta g \sum_{m=0}^{\infty} \sin^{2m} \alpha + \frac{\cos \alpha}{\alpha^2} \left( \sum_{m=0}^{\infty} \sin^{2m} \alpha \right) \int_S \Delta g K \cos \alpha \left( \sum_{m=0}^{\infty} \sin^{2m} \alpha \right) dS + \\ &+ \frac{\cos \alpha}{\alpha^3} \left( \sum_{m=0}^{\infty} \sin^{2m} \alpha \right) \int_S K \cos \alpha \left( \sum_{m=0}^{\infty} \sin^{2m} \alpha \right) dS \int_S \Delta g K \cos \alpha \left( \sum_{m=0}^{\infty} \sin^{2m} \alpha \right) dS + \\ &+ \frac{\cos \alpha}{\alpha^4} \left( \sum_{m=0}^{\infty} \sin^{2m} \alpha \right) \int_S K \cos \alpha \left( \sum_{m=0}^{\infty} \sin^{2m} \alpha \right) dS \int_S K \cos \alpha \left( \sum_{m=0}^{\infty} \sin^{2m} \alpha \right) dS \int_S \Delta g K \cos \alpha \times \\ &\quad \times \left( \sum_{m=0}^{\infty} \sin^{2m} \alpha \right) dS + \dots + \\ &+ \frac{\cos \alpha}{\alpha^{n+1}} \left( \sum_{m=0}^{\infty} \sin^{2m} \alpha \right) \underbrace{\int_S K \cos \alpha \left( \sum_{m=0}^{\infty} \sin^{2m} \alpha \right) dS \dots \int_S K \cos \alpha \left( \sum_{m=0}^{\infty} \sin^{2m} \alpha \right) dS}_{n-1 \text{ раз}} \int_S \Delta g \times \\ &\quad \times K \cos \alpha \left( \sum_{m=0}^{\infty} \sin^{2m} \alpha \right) dS + \dots \end{aligned}$$

Если уравнение Молоденского решать обычным способом последовательных приближений (способ Неймана [5]) и за первое приближение принять

$$\varphi_1 = \frac{\Delta g}{\alpha \cos \alpha},$$

можно получить

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{\Delta g}{\alpha \cos \alpha} + \frac{1}{\alpha^2 \cos^2 \alpha} \int_s \frac{\Delta g k ds}{\cos \alpha} + \frac{1}{\alpha^3 \cos^3 \alpha} \int_s \frac{k ds}{\cos \alpha} \int_s \frac{\Delta g k ds}{\cos \alpha} + \\ & + \frac{1}{\alpha^4 \cos^4 \alpha} \int_s \frac{k ds}{\cos \alpha} \int_s \frac{k ds}{\cos \alpha} \int_s \frac{\Delta g k ds}{\cos \alpha} + \dots \\ & + \frac{1}{\alpha^{n+1} \cos^{n+1} \alpha} \int_s \frac{k ds}{\cos \alpha} \dots \int_s \frac{k ds}{\cos \alpha} \int_s \frac{\Delta g k ds}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

— n - I раз —

Как известно, это выражение для плотности  $\varphi$  является решением уравнения Молоденского.

В пределе при  $m \rightarrow \infty$ , поскольку

$$\sum_0^{\infty} \sin^{2m} \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

формулы для  $\varphi$  совпадают.

Вычисление по формуле (12) приведет к тождественным результатам. В этом случае под знаками интегралов каждого приближения стоят остаточные аномалии силы тяжести и не нужно вычислять наклоны элементарных участков.

На модели Земли (см. статью А.И. Шабановой и автора) изложенный способ решения уравнения для  $\varphi$  оказался более медленно сходящимся, чем способ Молоденского. Преимущества изложенного способа состоят в его сходимости при  $\alpha < 90^\circ$  (при  $\alpha > 45^\circ$  решение Молоденского выражено расходящимися рядами) и единобразии формул всех приближений (применение второго приближения Молоденского в реальных условиях весьма затруднительно; кроме того, на модели малая поправка этого приближения определена как разность двух величин порядка  $3''$ ).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Молоденский М.С. Основные вопросы геодезической гравиметрии. - Тр. ЦНИИГАИК, вып. 42, 1945.
2. Молоденский М.С. Внешнее гравитационное поле и фигура физической поверхности Земли. - Изв. АН СССР, серия географ. и геофиз. 12, № 3, 1948.
3. Еремеев В.Ф. К вопросу о численном решении интегрального уравнения Молоденского для плотности слоя. - Труды ЦНИИГАИК, вып. 176, 1969.
4. Еремеев В.Ф. и Юркина М.И. Методы вычислений на основе интегрального уравнения Молоденского для возмущающего потенциала. - Тр. ЦНИИГАИК, вып. 157, 1965.
5. Нейманн С. Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential. Leipzig, Druck und Verlag von B.G. Teubner, 1877.

V.F.Yeremeev

ABOUT SOLUTION OF EQUATIONS THAT DETERMINE GRAVITATIONAL FIELD AND FIGURE OF THE EARTH

## SUMMARY

For the case when calculation of plumb-line deflections is done on the base of Molodensky's integral equations for layer density and the disturbing potential, it is recommended to locate the point under investigation at a certain small elevation over the Earth's surface. If Molodensky's equation for the disturbing potential is solved by successive approximations, then the calculation of a next approximation could be done with the help of Green's formula, as modified by Molodensky, for determining the disturbing potential at an outer point. When an integral equation for auxiliar density of a single layer is being established, it is recommended to make distinction between the single layer surface and that of gravity measurements (there must be a certain small distance between these surfaces). Then it will be possible to obtain for density an integral equation of Fredholm's type of the first kind. A method for solution of this equation by successive approximations is described.

УДК 528.22:531.26

В.Ф. Еремеев, М.И. Юркина

ВЫВОД ПОПРАВКИ В АНОМАЛИЮ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ И ФОРМУЛ  
ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЫСОТ КВАЗИГЕОИДА И УКЛОНЕНИЙ ОТВЕСА  
ПРИ АППРОКСИМАЦИИ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКИМИ ГРАНЯМИ

§1. Вывод поправки в аномалию силы тяжести

Поправку первого приближения в аномалию силы тяжести при решении интегрального уравнения Молоденского (1948) согласно модификации способа Неймана (1877) можно представить так<sup>\*</sup>:

$$\delta g_1 = \Delta g - \Delta g_1 = \Delta g + \frac{1}{2\pi} \int_S \Delta g \frac{H-H_0}{r^3} d\sigma + \frac{3}{4\pi R} \int_S \frac{\Delta g}{r} d\sigma, \quad (I)$$

где  $\Delta g$  – смешанная аномалия силы тяжести,  $\Delta g_1$  – смешанная аномалия силы тяжести, соответствующая первому приближению к плотности простого слоя,  $r$  – расстояние между некоторой фиксированной точкой, в которой нужно вывести величину  $\delta g$ , и элементом  $d\sigma$  отсчетной сферы с радиусом  $R$ ;  $H_0$  – высота фиксированной точки над отсчетной сферой,  $H$  – высота текущей точки земной поверхности над этой сферой или поверхности, аппроксимирующей земную.

Высота  $H_0$  фиксированной точки должна быть всегда больше высоты точки  $(x_0, y_0)$  поверхности интегрирования, аппроксимирующей земную, на отрезок  $h$ , по крайней мере в несколько метров.

Если земная поверхность аппроксимирована гранями с треугольными основаниями, например  $m, n; m+1, n; m, n+1$  и  $m$ ,

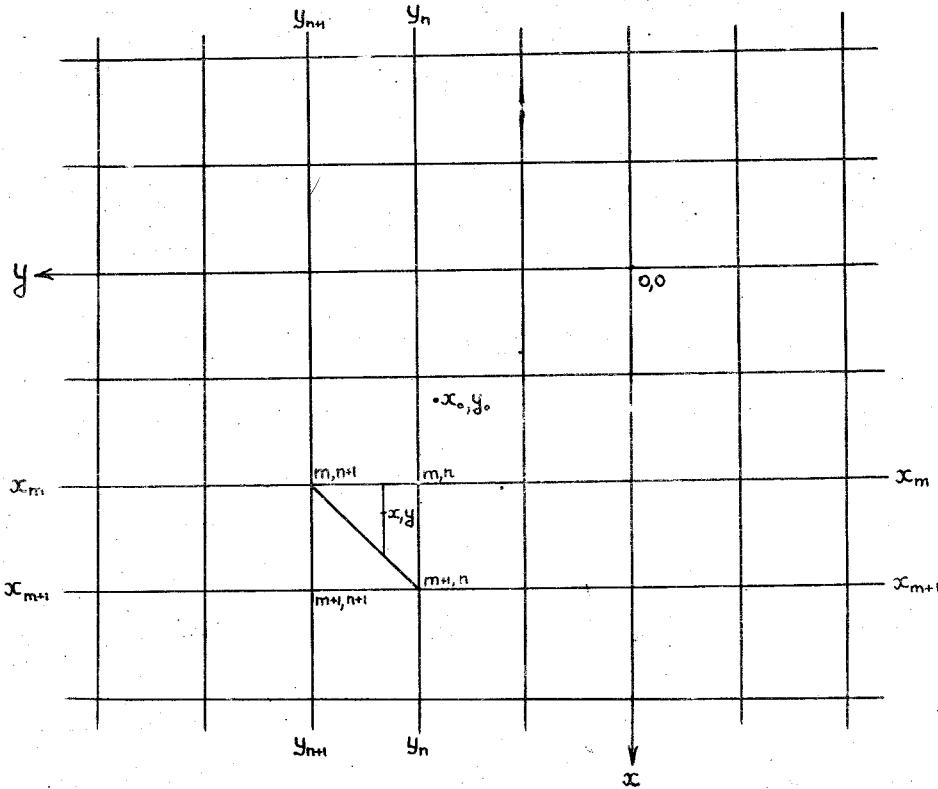
<sup>\*</sup> См. стр. 49–56. В.Ф. Еремеев. О решении уравнений, определяющих гравитационное поле и фигуру Земли.

$n+I; m+I, n; m+I, n+I$  (см. рисунок), поправку можно приближенно представить в виде суммы по квадратам

$$\begin{aligned} \delta g_I &\approx \Delta g + \frac{1}{2\pi} \sum \int_{y_n}^{y_{n+1}} dy \int_{x_m}^{x_{m+1}} \frac{1}{2} (ax + by - c)(a_1 x + b_1 y + c_1) dx + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum \int_{y_n}^{y_{n+1}} dy \int_{x_m}^{x_{m+1}} \frac{1}{2} (ax + by + c)(a_1 x + b_1 y + c_1) dx + \\ &+ \frac{3}{4\pi R} \sum \int_{y_n}^{y_{n+1}} dy \int_{x_m}^{x_{m+1}} \frac{1}{2} (a_1 x + b_1 y + c_1) dx + \\ &+ \frac{3}{4\pi R} \sum \int_{y_n}^{y_{n+1}} dy \int_{x_m}^{x_{m+1}} \frac{1}{2} (a_1 x + b_1 y + c_1) dx + \delta', \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\delta' = \frac{1}{2\pi} \sum \Delta g_{ep.} \frac{H_{ep.} - H_0}{Z_{ep.}} \Delta \sigma + \frac{3}{4\pi R} \sum \Delta g_{ep.} \frac{\Delta \sigma}{Z_{ep.}} . \quad (3)$$



Интегральные члены поправки  $\delta g$ , в формуле (2) учитывают влияние ближайших окрестностей фиксированной точки. Члены  $\delta$  представляют влияние области, удаленной от фиксированной точки. Влияние ближайших окрестностей можно вычислить, пренебрегая кривизной земной сферы и пользуясь системой декартовых координат  $x, y$  (см. рисунок),  $x_0, y_0$  обозначают плановые координаты фиксированной точки.

В формуле (2) принято

$$H - H_0 = \alpha x + \beta y - c; \quad (4)$$

$$\Delta g = \alpha_1 x + \beta_1 y + c_1. \quad (5)$$

Таким образом, если значения высот  $H$  и аномалий  $\Delta g$  заданы в пересечениях сетки квадратов, то на треугольнике  $m, n+1; m, n; m+1, n$

$$a = \frac{H_{m+1, n} - H_{m, n}}{x_{m+1} - x_m}, \quad b = \frac{H_{m, n+1} - H_{m, n}}{y_{n+1} - y_n}; \quad (6)$$

$$c = \alpha x_m + \beta y_n - (H_{m, n} - H_0); \quad (7)$$

$$a_1 = \frac{\Delta g_{(m+1, n)} - \Delta g_{(m, n)}}{x_{m+1} - x_m}, \quad b_1 = \frac{\Delta g_{(m, n+1)} - \Delta g_{(m, n)}}{y_{n+1} - y_n}; \quad (8)$$

$$c_1 = \Delta g_{(m, n)} - a_1 x_m - b_1 y_n \quad (9)$$

и на треугольнике  $m+1, n; m+1, n+1; m, n+1$

$$a = \frac{H_{(m+1, n+1)} - H_{(m, n+1)}}{x_{m+1} - x_m}, \quad b = \frac{H_{(m+1, n+1)} - H_{(m+1, n)}}{y_{n+1} - y_n}; \quad (10)$$

$$c = \alpha x_{m+1} + \beta y_{n+1} - (H_{m+1, n+1} - H_0); \quad (11)$$

$$a_1 = \frac{\Delta g_{(m+1, n+1)} - \Delta g_{(m, n+1)}}{x_{m+1} - x_m}, \quad b_1 = \frac{\Delta g_{(m+1, n+1)} - \Delta g_{(m+1, n)}}{y_{n+1} - y_n}; \quad (12)$$

$$c_1 = \Delta g_{(m+1, n+1)} - a_1 x_{m+1} - b_1 y_{n+1} \quad (13)$$

При выводе влияния ближайших окрестностей фиксированной точки на поправку  $\delta g$  можно принять

$$x = -R[B - B(o)];$$

$$y = -R \cos B_{cp} [L - L(o)], \quad (14)$$

где  $B$  – геодезическая широта,  $L$  – геодезическая долгота,  $B(o)$ ,  $L(o)$  – соответственные значения в начале декартовых координат,  $B_{ср.}$  – средняя широта исследуемой территории.

Формулы поправки  $\delta g$  раскрыты при условии

$$B_{m+1} - B_m = \cos B_{ср.} (L_{n+1} - L_n).$$

В формуле (3) для влияния удаленной области обозначено:  $Z_{ср.}$  – расстояние некоторой средней точки земной поверхности на трапеции, ограниченной меридианами и параллелями, от фиксированной точки,  $H_{ср.}$  – высота этой средней точки над отсчетной поверхностью,  $\Delta g_{ср.}$  – среднее из аномалий  $\Delta g$  на трапеции,  $\Delta b$  – площадь этой трапеции.

В интегральных членах формулы (2) нужно принять

$$\begin{aligned} z^2 &= (\alpha - \alpha_0)^2 + (y - y_0)^2 + (h - h_0)^2 = \\ &= (1 + a^2)x^2 + (-2\alpha_0 - 2ac + 2ab)y + (x_0^2 + y_0^2 - 2yy_0 + y_0^2 + b^2y^2 + c^2 - 2bcy) = \\ &= C_1 x^2 - B_1 x + A_1. \end{aligned} \quad (I5)$$

Тогда интегрирование по  $x$  можно свести к квадратурам с помощью табличных интегралов

$$\int \frac{x^2 dx}{(C_1 x^2 + B_1 x + A_1)^{3/2}}, \quad \int \frac{x dx}{(C_1 x^2 + B_1 x + A_1)^{3/2}}, \quad \int \frac{dx}{(C_1 x^2 + B_1 x + A_1)^{3/2}}; \quad (I6)$$

$$\int \frac{x dx}{(C_1 x^2 + B_1 x + A_1)^{1/2}}, \quad \int \frac{dx}{(C_1 x^2 + B_1 x + A_1)^{1/2}}. \quad (I7)$$

Обозначив

$$C_m + y_{n+1} = K$$

и выполнив преобразования, найдем

$$\int_{x_m}^{K-y} \frac{x^2 dx}{(C_1 x^2 + B_1 x + A_1)^{3/2}} = \frac{R_3}{R_1} - \frac{R'_3}{R'_1} + R_2; \quad (I8)$$

$$\int_{K-y}^{x_{m+1}} \frac{x^2 dx}{(C_1 x^2 + B_1 x + A_1)^{3/2}} = \frac{R''_3}{R'_1} - \frac{R_3}{R_1} + R'_2, \quad (I9)$$

где

$$R_1 = (I + a^2) [y^2(1 + a^2 + b^2) + 2y(-y_o - bc - a^2y_o + abx_o) + \\ + (y_o^2 + c^2 + a^2x_o^2 + a^2y_o^2 - 2acx_o)] \times \\ \times [y^2(2 + a^2 + b^2 - 2ab) + 2y(-\kappa - a^2\kappa + ab\kappa + x_o + ac - y_o - bc) + \\ + (\kappa^2 + a^2\kappa^2 - 2\kappa x_o - 2ac\kappa + x_o^2 + y_o^2 + c^2)]^{1/2};$$

$$R'_1 = (I + a^2) [y^2(1 + a^2 + b^2) + 2y(-y_o - bc - a^2y_o + abx_o) + \\ + (y_o^2 + c^2 + a^2x_o^2 + a^2y_o^2 - 2acx_o)] \times \\ \times [y^2(1 + b^2) + 2y(abx_m - y_o - bc) + (x_m^2 + a^2x_m^2 - 2x_o x_m - 2acx_m + x_o^2 + y_o^2 + c^2)]^{1/2};$$

$$R''_1 = (I + a^2) [y^2(1 + a^2 + b^2) + 2y(-y_o - bc - a^2y_o + abx_o) + \\ + (y_o^2 + c^2 + a^2x_o^2 + a^2y_o^2 - 2acx_o)] \times \\ \times [y^2(1 + b^2) + 2y(abx_{m+1} - y_o - bc) + (x_{m+1}^2 + a^2x_{m+1}^2 - 2x_o x_{m+1} - \\ - 2acx_{m+1} + x_o^2 + y_o^2 + c^2)]^{1/2},$$

таким образом  $R''_1$  отличается от  $R'_1$ , заменой величины  $x_m$  на величину  $x_{m+1}$ . И далее

$$R_2 = \frac{1}{(1+a)^{3/2}} \ln \frac{f}{f'},$$

где

$$f = \sqrt{1 + a^2} [y^2(2 + a^2 + b^2 - 2ab) + 2y(-\kappa - a^2\kappa + ab\kappa + x_o + ac - y_o - bc) + \\ + (\kappa^2 + a^2\kappa^2 - 2\kappa x_o - 2ac\kappa + x_o^2 + y_o^2 + c^2)]^{1/2} + y(ab - 1 - a^2) + \\ + (\kappa + a^2\kappa - x_o - ac);$$

$$f' = \sqrt{1 + a^2} [y^2(1 + b^2) + 2y(abx_m - y_o - bc) + \\ + (x_m^2 + a^2x_m^2 - 2x_o x_m - 2acx_m + x_o^2 + y_o^2 + c^2)]^{1/2} + aby + \\ + (x_m + a^2x_m - x_o - ac);$$

$$R_2' = \frac{1}{(1+\alpha^2)^{3/2}} \ln \frac{f''}{f} ;$$

$$\begin{aligned} f'' = & \sqrt{1+\alpha^2} [y^2(1+b^2) + 2y(abx_{m+1} - y_0 - bc) + \\ & + (x_{m+1}^2 + a^2x_{m+1}^2 - 2x_0x_{m+1} - 2acx_{m+1} + x_0^2 + y_0^2 + c^2)]^{1/2} + aby + \\ & + (x_{m+1} + a^2x_{m+1} - x_0 - ac). \end{aligned}$$

$f''$  отличается от  $f'$  только заменой величины  $x_m$  на величину  $x_{m+1}$ .  
Далее найдено

$$\begin{aligned} R_3 = & y^3(1+a^2+b^2+ab-a^2b^2+ab^3) + y^2(-\kappa-a^2\kappa-b^2\kappa+a^2b^2\kappa-2y_0-2bc- \\ & -2a^2y_0+4abx_0+2a^2bc-x_0-b^2x_0-ac-3ab^2c-2aby_0)+ \\ & + y(2\kappa y_0+2bc\kappa+2a^2\kappa y_0-4ab\kappa x_0-2a^2bc\kappa+y_0^2+c^2+a^2x_0^2+a^2y_0^2- \\ & -4acx_0-x_0^2-a^2c^2+2x_0y_0+2bcx_0+2acy_0+3abc^2+abx_0^2+aby_0^2)+ \\ & + (-\kappa y_0^2-\kappa^2\kappa-a^2\kappa x_0^2-\kappa^2\kappa y_0^2+4acx_0x_0+\kappa x_0^2+a^2c^2\kappa-x_0^3-x_0y_0^2- \\ & -c^2x_0-acx_0^2-acy_0^2-ac^3); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_3' = & y^3(ab+ab^3) + y^2(-x_0-b^2x_0-ac-3ab^2c-2aby_0-x_m-a^2x_m- \\ & -b^2x_m+a^2b^2x_m) + y(2x_0y_0+2bcx_0+2acy_0+3abc^2+abx_0^2+ \\ & +aby_0^2+2x_my_0+2bcx_m+2a^2x_my_0-4abx_0x_m-2a^2bcx_m)+ \\ & + (-x_0^3-x_0y_0^2-c^2x_0-acx_0^2-acy_0^2-ac^3-x_my_0^2-c^2x_m-a^2x_0^2x_m- \\ & -a^2x_my_0^2+4acx_0x_m+ac^2x_m+a^2c^2x_m); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_3'' = & y^3(ab+ab^3) + y^2(-x_{m+1}-a^2x_{m+1}-b^2x_{m+1}+a^2b^2x_{m+1}-x_0-b^2x_0- \\ & -2aby_0-3ab^2c-ac)+ \\ & + y(2x_{m+1}y_0+2bcx_{m+1}+2a^2x_{m+1}y_0-4abx_0x_{m+1}-2a^2bcx_{m+1}+ \\ & +2x_0y_0+2bcx_0+abx_0^2+aby_0^2+3abc^2+2acy_0)+ \\ & + (-x_{m+1}y_0^2-c^2x_{m+1}-a^2x_0^2x_{m+1}-a^2x_{m+1}y_0^2+4acx_0x_{m+1}+ \\ & +x_0^2x_{m+1}+a^2c^2x_{m+1}-x_0^3-x_0y_0^2-c^2x_0-acx_0^2-acy_0^2-ac^3), \end{aligned}$$

что отличается от  $R_3'$  только заменой величины  $x_m$  на  $x_{m+1}$ .

Раскроем второй из интегралов (I6)

$$\int_{x_m}^{K-y} \frac{\alpha dx}{(C_1 x^2 + B_1 x + A_1)^{3/2}} = \frac{R_4}{R_1} - \frac{R'_4}{R_1}; \quad (20)$$

$$\int_{K-y}^{x_{m+1}} \frac{\alpha dx}{(C_1 x^2 + B_1 x + A_1)^{3/2}} = \frac{R''_4}{R'_1} - \frac{R_4}{R_1}, \quad (21)$$

где

$$R_4 = (I + \alpha^2) [y^2(-1 - b^2 + ab) + y(2y_o + 2bc - ab\kappa - x_o - ac) + (-x_o^2 - y_o^2 - c^2 + \kappa x_o + ac\kappa)];$$

$$R'_4 = (I + \alpha^2) [y^2(-1 - b^2) + y(2y_o + 2bc - abx_m) + (-x_o^2 - y_o^2 - c^2 + x_o x_m + acx_m)];$$

$$R''_4 = (I + \alpha^2) [y^2(-1 - b^2) + y(2y_o + 2bc - abx_{m+1}) + (-x_o^2 - y_o^2 - c^2 + x_o x_{m+1} + acx_{m+1})],$$

что снова отличается от  $R'_4$  только заменой величины  $x_m$  на величину  $x_{m+1}$ . Все величины, в обозначениях которых использованы два штриха, в дальнейшем изложении будут отличаться от величин, отмеченных одним штрихом, только заменой координаты  $x_m$  на координату  $x_{m+1}$ .

Последний из интегралов (I6) раскрыт так:

$$\int_{x_m}^{K-y} \frac{dx}{(C_1 x^2 + B_1 x + A_1)^{3/2}} = \frac{R_s}{R_1} - \frac{R'_s}{R_1}; \quad (22)$$

$$\int_{K-y}^{x_{m+1}} \frac{dx}{(C_1 x^2 + B_1 x + A_1)^{3/2}} = \frac{R''_s}{R'_1} - \frac{R_s}{R_1}, \quad (23)$$

где

$$R_s = (I + \alpha^2) [y(-1 - \alpha^2 + ab) + (\kappa + \alpha^2 \kappa - ac - x_o)];$$

$$R'_s = (I + \alpha^2) [\alpha by + (x_m + \alpha^2 x_m - x_o - ac)];$$

$$R''_s = (I + \alpha^2) [\alpha by + (x_{m+1} + \alpha^2 x_{m+1} - x_o - ac)].$$

Подставив формулы (18), (20) и (22) в первый из интегралов (2), можно найти

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{x_m}^{x_0} \frac{1}{2} (\alpha x + b y - c)(\alpha_1 x + b_1 y + c_1) dx = \\ &= D_1 + \frac{1}{R_1} (P_1 y^3 + Q_1 y^2 + S_1 y + T_1) - \frac{1}{R'_1} (P'_1 y^3 + Q'_1 y^2 + S'_1 y + T'_1), \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$D_1 = \frac{\alpha a_1}{(1+\alpha^2)^{3/2}} \ln \frac{f}{f_1};$$

$$P_1 = \alpha a_1 + \alpha^3 a_1 + 2\alpha a_1 b^2 - ab_1 - a_1 b - a_1 b^3 - \alpha^3 b_1 - bb_1 - \alpha^2 bb_1;$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\alpha a_1 k - \alpha^3 a_1 k - 2\alpha a_1 b^2 k - 2\alpha a_1 y_0 - 2\alpha^3 a_1 y_0 + 3\alpha^2 a_1 b x_0 - \alpha a_1 x_0 - \\ &- \alpha a_1 b^2 x_0 + 2ab_1 y_0 - ab_1 x_0 + 2a^3 b_1 y_0 - \alpha^3 b_1 x_0 + 2a_1 b y_0 + 3a_1 b^2 c - \\ &- a_1 b x_0 - ac_1 + a_1 c - 4\alpha a_1 b c - \alpha^3 c_1 + bb_1 k - bb_1 x_0 - bc_1 + b_1 c + \\ &+ \alpha^2 bb_1 k - \alpha^2 bb_1 x_0 - \alpha^2 b c_1 + \alpha^2 b_1 c; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= 2\alpha a_1 k y_0 + 4\alpha a_1 b c k + 2\alpha^3 a_1 k y_0 - 3\alpha^2 a_1 b k x_0 + \alpha a_1 y_0^2 + 2\alpha a_1 c^2 + \alpha^3 a_1 x_0^2 + \\ &+ \alpha^3 a_1 y_0^2 - 3\alpha^2 a_1 c x_0 - \alpha a_1 x_0^2 + 2\alpha a_1 x_0 y_0 + 2\alpha a_1 b c x_0 - ab_1 x_0^2 - ab_1 y_0^2 + \\ &+ ab_1 k x_0 - a_1 b x_0^2 - a_1 b y_0^2 - 3\alpha_1 b c^2 + a_1 b k x_0 - \alpha^3 b_1 x_0^2 - \alpha^3 b_1 y_0^2 + \alpha^3 b_1 k x_0 + \\ &+ 2ac_1 y_0 - ac_1 x_0 - 2a_1 c y_0 + a_1 c x_0 + 2\alpha^3 c_1 y_0 - \alpha^3 c_1 x_0 + bc_1 k - bc_1 x_0 - \\ &- b_1 c k + b_1 c x_0 + cc_1 + \alpha^2 b c_1 k - \alpha^2 b c_1 x_0 - \alpha^2 b_1 c k + \alpha^2 b_1 c x_0 + \alpha^2 c c_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1 &= -\alpha a_1 k y_0^2 - 2\alpha a_1 c^2 k - \alpha^3 a_1 k x_0^2 - \alpha^3 a_1 k y_0^2 + 3\alpha^2 a_1 c k x_0 + \alpha a_1 k x_0^2 - \\ &- \alpha a_1 x_0^3 - \alpha a_1 x_0 y_0^2 - \alpha a_1 c^2 x_0 - \alpha c_1 x_0^2 - \alpha c_1 y_0^2 + ac_1 k x_0 + a_1 c x_0^2 + a_1 c y_0^2 + a_1 c^3 - \\ &- a_1 c k x_0 - cc_1 k + cc_1 x_0 - \alpha^3 c_1 x_0^2 - \alpha^3 c_1 y_0^2 + \alpha^3 c_1 k x_0 - \alpha^2 c c_1 k + \alpha^2 c c_1 x_0; \end{aligned}$$

$$P'_1 = -ab_1 - a_1 b - a_1 b^3 - \alpha^3 b_1;$$

$$\begin{aligned} Q'_1 &= -\alpha a_1 x_0 - \alpha a_1 b^2 x_0 + 2ab_1 y_0 + 2a_1 b y_0 + 3a_1 b^2 c - 2\alpha a_1 b^2 x_m + \\ &+ 2\alpha^3 b_1 y_0 - ac_1 + a_1 c + bb_1 x_m - \alpha^3 c_1 + \alpha^2 bb_1 x_m - \alpha^2 bb_1 x_0 - \alpha a_1 x_m - \\ &- \alpha^2 a_1 x_m - bb_1 x_0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S'_1 = & 2aa, x_0 y_0 + 2aa, b c x_0 + a^2 a, b c x_0^2 + 2aa, x_m y_0 + 4aa, b c x_m + \\
& + 2a^3 a, x_m y_0 - 3a^2 a, b c x_m - ab, x_0^2 - ab, y_0^2 + ab, x_0 x_m - a, b c x_0^2 - \\
& - a, b y_0^2 - 3a, b c^2 + a, b c x_m - a^3 b, x_0^2 - a^3 b, y_0^2 + a^3 b, x_0 x_m - \\
& - a^3 a, b x_0^2 + 2ac, y_0 - 2a, c y_0 + 2a^3 c, y_0 + b c, x_m - b c, x_0 - b, c x_m - \\
& - a^2 b, c x_m + b, c x_0 + a^2 b c, x_m - a^2 b c, x_0 + a^2 b, c x_0 ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T'_1 = & -aa, x_0^3 - aa, x_0 y_0^2 - aa, c^2 x_0 - aa, x_m y_0^2 - 2aa, c^2 x_m - a^3 a, x_0^2 x_m - \\
& - a^3 a, x_m y_0^2 + 3a^2 a, c x_0 x_m + aa, x_0^2 x_m - ac, x_0^2 - ac, y_0^2 + ac, x_0 x_m + \\
& + a, c x_0^2 + a, c y_0^2 + a, c^3 - a, c x_0 x_m - a^3 c, x_0^2 - a^3 c, y_0^2 + a^3 c, x_0 x_m - \\
& - cc, x_m - a^2 c c, x_m + cc, x_0 + a^2 c c, x_0 .
\end{aligned}$$

Подставив формулы (19), (21), (23) во второй из интегралов, можно найти

$$\begin{aligned}
J_2 = & \int_{k-y}^{x_{m+1}} \frac{1}{f^3} (ax + by - c)(a_1 x + b_1 y + c_1) dx = \\
& = \mathcal{D}_1 + \frac{1}{R_1} (P_1'' y^3 + Q_1'' y^2 + S_1'' y + T_1'') - \frac{1}{R_1} (P_1 y^3 + Q_1 y^2 + S_1 y + T_1), \quad (25)
\end{aligned}$$

где

$$\mathcal{D}_1 = \frac{aa_1}{(1+a^2)^{3/2}} \ln \frac{f''}{f};$$

$$P_1'' = P_1';$$

$$\begin{aligned}
Q_1'' = & -aa, x_{m+1} - a^3 a, x_{m+1} - 2aa, b^2 x_{m+1} - aa, x_0 - aa, b^2 x_0 + 2ab, y_0 + \\
& + 2a, b y_0 + 3a, b^2 c - ac, + a, c + bb, x_{m+1} - bb, x_0 + 2a^3 b, y_0 - a^3 c, + \\
& + a^2 bb, x_{m+1} - a^2 bb, x_0 ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_1'' = & 2aa, x_{m+1} y_0 + 4aa, b c x_{m+1} + 2a^3 a, x_{m+1} y_0 - 3a^2 a, b c x_{m+1} + 2aa, x_0 y_0 + \\
& + 2aa, b c x_0 + a^2 a, b c x_0^2 - ab, x_0^2 - ab, y_0^2 + ab, x_0 x_{m+1} - a, b c x_0^2 - \\
& - a, b y_0^2 - 3a, b c^2 + a, b c x_{m+1} - a^3 b, x_0^2 - a^3 b, y_0^2 + a^3 b, x_0 x_{m+1} - \\
& - a^3 a, b x_0^2 + 2ac, y_0 - 2a, c y_0 + b c, x_{m+1} + a^2 b c, x_{m+1} - b c, x_0 + \\
& + 2a^3 c, y_0 - a^2 b c, x_0 - b, c x_{m+1} + b, c x_0 - a^2 b, c x_{m+1} + a^2 b, c x_0 ;
\end{aligned}$$

$$T_1'' = -aa_1x_{m+1}y_o^2 - 2aa_1c^2x_{m+1} - a^3a_1x_o^2x_{m+1} - a^3a_1x_{m+1}y_o^2 + 3a^3a_1cx_ox_{m+1} + \\ + aa_1x_o^2x_{m+1} - aa_1x_o^3 - aa_1x_o^2y_o^2 - aa_1c^2x_o - ac_1x_o^2 - ac_1y_o^2 + ac_1x_ox_{m+1} + \\ + a_1c^2x_o^2 + a_1cy_o^2 + a_1c^3 - a_1cx_ox_{m+1} - a^3c_1x_o^2 - a^3c_1y_o^2 + a^3c_1x_ox_{m+1} - \\ - cc_1x_{m+1} + cc_1x_o - a^2cc_1x_{m+1} + a^2cc_1x_o.$$

Если аномалию силы тяжести можно считать на элементарном участке постоянной, т.е.  $a_1 = b_1 = 0$ ,  $\Delta g = c_1$ , формулы для  $J_1$  и  $J_2$  будут много проще. В этом случае

$$J_1(a_1 = b_1 = 0) = \frac{1}{R_1}(q_1y^2 + s_1y + t_1) - \frac{1}{R_1'}(q_1'y^2 + s_1'y + t_1'), \quad (26)$$

где

$$q_1 = +\Delta g(-a - a^3 - b - a^2b);$$

$$s_1 = +\Delta g(2ay_o - ax_o + 2a^3y_o - a^3x_o + bx_o - bx_o + c + a^2bx - a^2bx_o + a^3c);$$

$$t_1 = +\Delta g(-ax_o^2 - ay_o^2 + ax_ox_o - cx_o + cx_o - a^3x_o^2 - a^3y_o^2 + a^3cx_o - a^2cx_o + a^2cx_o);$$

$$q_1' = +\Delta g(-a - a^3);$$

$$s_1' = +\Delta g(2ay_o + 2a^3y_o + bx_m - bx_o + a^2bx_m - a^2bx_o);$$

$$t_1' = +\Delta g(-ax_o^2 - ay_o^2 + ax_ox_m - a^3x_o^2 - a^3y_o^2 + a^3cx_ox_m - cx_m - \\ - a^2cx_m + cx_o + a^2cx_o)$$

и

$$J_2(a_1 = b_1 = 0) = \frac{1}{R_1''}(q_1''y^2 + s_1''y + t_1'') - \frac{1}{R_1}(q_1y^2 + s_1y + t_1), \quad (27)$$

где

$$q_1'' = \Delta g(-a - a^3) = q_1';$$

$$s_1'' = \Delta g(2ay_o + bx_{m+1} + a^2bx_{m+1} - bx_o + 2a^3y_o - a^2bx_o);$$

$$t_1'' = \Delta g(-ax_o^2 - ay_o^2 + ax_ox_{m+1} - a^3x_o^2 - a^3y_o^2 + a^3cx_{m+1} - cx_{m+1} + \\ + cx_o - a^2cx_{m+1} + a^2cx_o).$$

При численном выводе поправки  $\delta_9$  должны быть заданы высоты поверхности, аппроксимирующей земную, на пересечениях сетки квадратов. Если фиксированная точка лежит над таким пересечением, нужно принять

$$H_o = H(m, n) + h. \quad (28)$$

Если фиксированная точка лежит не над пересечением сетки квадратов, ее высоту можно установить так: определить коэффициенты  $a$ ,  $b$  по формулам (6) или (10) для треугольника, над которым лежит фиксированная точка, вычислить высоту  $H(x_o, y_o)$  точки поверхности интегрирования по плановым координатам  $x_o, y_o$  фиксированной точки

$$H(x_o, y_o) = a(x_o - x_n) + b(y_o - y_{n+1}) + H(m, n) \quad (29)$$

или

$$H(x_o, y_o) = a(x_o - x_{n+1}) + b(y_o - y_{n+1}) + H(m+1, n+1) \quad (30)$$

и принять

$$H_o = H(x_o, y_o) + h. \quad (31)$$

Затем для каждого элементарного участка (треугольника) нужно выводить значения с по формулам (7) и (II).

Если фиксированная точка лежит над треугольником  $m, n+1; m, n; m+1, n$ , то

$$x_o + y_o < x_m + y_{n+1}, \quad (32)$$

если фиксированная точка лежит над треугольником  $m, n+1; m+1, n+1; m+1, n$ , то

$$x_o + y_o > x_m + y_{n+1}. \quad (33)$$

При

$$x_o + y_o = x_m + y_{n+1} \quad (34)$$

фиксированная точка лежит над гранью  $m, n+1; m+1, n$  поверхности интегрирования. При выводе высоты фиксированной точки тогда можно воспользоваться как формулой (29), так и формулой (30).

Поскольку

$$\int_{x_m}^{x-y} \frac{dx}{(C_1 x^2 + B_1 x + A_1)^{3/2}} = \left\{ \frac{1}{C_1} (C_1 x^2 + B_1 x + A_1)^{1/2} - \right. \\ \left. - \frac{B_1}{2C_1^{3/2}} \ln [2\sqrt{C_1} \sqrt{C_1 x^2 + B_1 x + A_1} + 2C_1 x + B_1] \right\} \Big|_{x_m}^{x-y}; \quad (35)$$

$$\int_{x_m}^{x-y} \frac{dx}{(C_1 x^2 + B_1 x + A_1)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{C_1}} \ln [2\sqrt{C_1} \sqrt{C_1 x^2 + B_1 x + A_1} + 2C_1 x + B_1] \Big|_{x_m}^{x-y} \quad (36)$$

и аналогично для пределов  $x-y$  и  $x_{m+1}$ , находим для третьего и четвертого интегралов формулы (2) в случае

$$\Delta g = a_1 x + b_1 y + c_1; \quad ;$$

$$J_3 = \int_{x_m}^{x-y} \frac{1}{2} (a_1 x + b_1 y + c_1) dx = \frac{a_1}{1+a_1^2} (f_1 - f_1') + \\ + (1+a_1^2)^{-3/2} [y(b_1 + a^2 b_1 - a a_1 b) + (c_1 + a^2 c_1 + a_1 x_0 + a a_1 c)] \ln \frac{f}{f'}, \quad (37)$$

где

$$f_1 = \{y^2(2+a^2+b^2-2ab) + 2y(-k-a^2k+a_b k+x_0+ac-y_0-bc) + \\ + (k^2+a^2k^2-2kx_0-2ack+x_0^2+y_0^2+c^2)\}^{1/2},$$

$$f_1' = \{y^2(1+b^2) + 2y(abx_m-y_0-bc) + (x_m^2+a^2x_m^2-2x_0x_m-2acx_m+x_0^2+y_0^2+c^2)\}^{1/2},$$

$$J_4 = \int_{x-y}^{x_{m+1}} \frac{1}{2} (a_1 x + b_1 y + c_1) dx = \frac{a_1}{1+a_1^2} (f_1'' - f_1) + \\ + (1+a_1^2)^{-3/2} [y(b_1 + a^2 b_1 - a a_1 b) + (c_1 + a^2 c_1 + a_1 x_{m+1} + a a_1 c)] \ln \frac{f''}{f}, \quad (38)$$

где

$$f_1'' = \{y^2(1+b^2) + 2y(abx_{m+1}-y_0-bc) + (x_{m+1}^2+a^2x_{m+1}^2-2x_0x_{m+1}-2acx_{m+1}+ \\ + x_0^2+y_0^2+c^2)\}^{1/2}.$$

Если можно принять  $\Delta g = c_1$ , то

$$J_3(a_1 = b_1 = 0) = \frac{\Delta g}{\sqrt{1+a^2}} \ln \frac{f}{f'}; \quad (39)$$

$$J_4(a_1 = b_1 = 0) = \frac{\Delta g}{\sqrt{1+a^2}} \ln \frac{f''}{f}. \quad (40)$$

Поскольку фиксированную точку можно помещать не только над пересечением сетки квадратов, но в любом месте над поверхностью, аппроксимирующей земную, возможно получить сколь угодно плотную систему поправок в аномалии силы тяжести.

Вывод поправок в аномалию силы тяжести, соответствующих следующим приближениям, аналогичен описанному.

## §2. Вывод формул для вычисления высот квазигеоида и уклонений отвеса

Первое приближение к уклонению отвеса определено формулами

$$\xi = \frac{1}{2\pi f} \int \frac{\Delta g}{z^3} (x - x_0) d\sigma; \quad (41)$$

$$\eta = \frac{1}{2\pi f} \int \frac{\Delta g}{z^3} (y - y_0) d\sigma. \quad (42)$$

Первое приближение к высоте квазигеоида можно вычислить с помощью интеграла

$$\zeta = \frac{1}{2\pi f} \int \frac{\Delta g}{z} d\sigma. \quad (43)$$

Если земная поверхность представлена теми же граями, как при выводе поправок в аномалии силы тяжести, и аномалию силы тяжести по-прежнему определяет соотношение (5), интегрирование по  $\infty$  в (41)-(43) можно свести к квадратуре с помощью табличных интегралов (16) и (17).

Этот принцип вычислений можно применить, сохранив поверхность, аппроксимирующую земную, и уменьшив элементарные участки вблизи фиксированной точки. Такое уменьшение может быть полезным при сложном поле поправок в аномалии силы тяжести.

Первое приближение к составляющим уклонения отвеса приближенно представим в виде суммы по квадратам

$$\xi \approx \frac{1}{2\pi\delta} \sum \int_{y_n}^{y_{n+1}} dy \int_{x_m}^{x_m+y_{n+1}-y} \frac{1}{\gamma^3} (x-x_0)(a_1x+b_1y+c_1) dx + \\ + \frac{1}{2\pi\delta} \sum \int_{y_n}^{y_{n+1}} dy \int_{x_m+y_{n+1}-y}^{x_{m+1}} \frac{1}{\gamma^3} (x-x_0)(a_1x+b_1y+c_1) dx + \delta_{\xi}, \quad (44)$$

где

$$\delta_{\xi} = \frac{1}{2\pi\delta} \sum \Delta g_{cp} \frac{x_{cp}-x_0}{\gamma_{cp}^3} \Delta \sigma \quad (45)$$

представляет влияние области, удаленной от фиксированной точки, и в виде суммы

$$\eta \approx \frac{1}{2\pi\delta} \int_{y_n}^{y_{n+1}} dy \int_{x_m}^{x_m+y_{n+1}-y} \frac{1}{\gamma^3} (y-y_0)(a_1x+b_1y+c_1) dx + \\ + \frac{1}{2\pi\delta} \sum \int_{y_n}^{y_{n+1}} dy \int_{x_m+y_{n+1}-y}^{x_{m+1}} \frac{1}{\gamma^3} (y-y_0)(a_1x+b_1y+c_1) dx + \delta_{\eta}, \quad (46)$$

где влияние удаленной области определено как

$$\delta_{\eta} = \frac{1}{2\pi\delta} \sum \Delta g_{cp} \frac{y_{cp}-y_0}{\gamma_{cp}^3} \Delta \sigma. \quad (47)$$

Подставив формулы (18), (20) и (22) в первый из интегралов (44), найдем

$$J_s = \int_{x_m}^{k-y} \frac{1}{\gamma^3} (x-x_0)(a_1x+b_1y+c_1) dx = \\ = D_2 + \frac{1}{R_1} (P_2 y^3 + Q_2 y^2 + S_2 y + T_2) - \frac{1}{R'_1} (P'_2 y^3 + Q'_2 y^2 + S'_2 y + T'_2), \quad (48)$$

где

$$D_2 = \frac{a_1}{(1+a^2)^{3/2}} \ln \frac{f}{f'},$$

$$P_2 = a_1 + a^2 a_1 + a_1 b^2 + a a_1 b - a^2 a_1 b^2 + a a_1 b^3 - b_1 - b^2 b_1 + a b b_1 - a^2 b_1 - a^2 b^2 b_1 + a^3 b b_1;$$

$$Q_2 = -a, k - a^2 a, k - a, b^2 k + a^2 a, b^2 k - 2a, y_o - 2a, b c - 2a^2 a, y_o + 3a a, b x_o + \\ + 2a^2 a, b c - a a, c - 3a a, b^2 c - 2a a, b y_o + a^2 a, x_o + a^2 a, b^2 x_o - a^3 a, b x_o - c, - b^2 c, + a b c, - a^2 c, - a^2 b^2 c, + a^3 b c, + 2b, y_o + 2b b, c - a b b, k - a b, c + \\ + 2a^2 b, y_o + 2a^2 b b, c - a^3 b b, k + a^2 b, x_o - a^3 b, c - a b b, x_o + a^4 b, x_o - a^3 b b, x_o ;$$

$$S_2 = 2a, k y_o + 2a, b c k + 2a^2 a, k y_o - 3a a, b k x_o - 2a^2 a, b c k + a, y_o^2 + a, c^2 + \\ + 2a^2 a, x_o^2 + a^2 a, y_o^2 - 3a a, c x_o - a^3 a, c^2 + 2a a, c y_o + 3a a, b c^2 + a a, b x_o^2 + \\ + a a, b y_o^2 - 2a^2 a, x_o y_o - 2a^2 a, b c x_o + a^3 a, b k x_o + a^3 a, c x_o + 2c, y_o + 2b c c, - \\ - a b c, k - a c c, + 2a^2 c, y_o + 2a^2 b c c, - a^3 b c k - a^3 c c, - b, y_o^2 - b, c^2 + a b, c k - \\ - a^2 b, y_o^2 - a^2 b, c^2 + a^3 b, c k + a^2 c, x_o - a b c, x_o + a^4 c, x_o - a^3 b c, x_o - \\ - a^2 b, k x_o + a b, c x_o - a^4 b, k x_o + a^3 b, c x_o ;$$

$$T_2 = -a, k y_o^2 - a, c^2 k - 2a^2 a, k x_o^2 - a^2 a, k y_o^2 + 3a a, c k x_o + a^3 a, c^2 k - a a, c x_o^2 - \\ - a a, c y_o^2 - a a, c^3 + a^2 a, x_o^3 + a^2 a, x_o y_o^2 + a^2 a, c^2 x_o - a^3 a, c k x_o - c, y_o^2 - c^2 c, + \\ + a c c, k - a^2 c, y_o^2 - a^2 c^2 c, - a^2 c, k x_o + a^3 c c, k + a c c, x_o - a^4 c, k x_o + \\ + a^3 c c, x_o ;$$

$$P'_2 = a a, b + a a, b^3 - b, - b^2 b, - a^2 b, - a^4 b^2 b, ;$$

$$Q'_2 = -a a, c - 3a a, b \bar{c} - 2a a, b y_o - a, x_m - a^2 a, x_m - a, b^2 x_m + a^2 a, b^2 x_m + a^2 a, x_o + \\ + a^2 a, b^2 x_o - c, - b^2 c, - a^2 c, - a^2 b^2 c, + 2b, y_o + 2b b, c - a b b, x_m + 2a^2 b, y_o + 2a^2 b b, c - \\ - a^3 b b, x_m - a b b, x_o - a^3 b b, x_o ;$$

$$S'_2 = 2a a, c y_o + 3a a, b c^2 + a a, b x_o^2 + a a, b y_o^2 + 2a, x_m y_o + 2a, b c x_m + 2a^2 a, x_m y_o - \\ - 3a a, b x_o x_m - 2a^2 a, b c x_m - 2a^2 a, x_o y_o - 2a^2 a, b c x_o + a^3 a, b x_o x_m + 2c, y_o + 2b c c, - \\ - a b c, x_m + 2a^2 c, y_o + 2a^2 b c c, - a^3 b c, x_m - b, y_o^2 - b, c^2 + a b, c x_m - a^2 b, y_o^2 - \\ - a^2 b, c^2 + a^3 b, c x_m + a b, c x_o - a^2 b, x_o x_m - a^4 b, x_o x_m + a^3 b, c x_o - \\ - a b c, x_o - a^3 b, c, x_o ;$$

$$\begin{aligned}
T_2' = & -aa_1cx_0^2 - aa_1cy_0^2 - aa_1c^3 - a_1x_{m+1}y_0^2 - a_1c^2x_m - 2a_1^2a_1x_0^2x_m - aa_1x_my_0^2 + \\
& + 3aa_1cx_0x_m + a^2a_1c^2x_m + a^2a_1x_0^3 + a^2a_1x_0y_0^2 - a^2a_1c^2x_0 - a^2a_1cx_0x_m - \\
& - c_1y_0^2 - c^2c_1 + acc_1x_m - a^2c_1y_0^2 - a^2c_1^2 + a^3cc_1x_m + acc_1x_0 - a^2c_1x_0x_m - \\
& - a^4c_1x_0x_m + a^3cc_1x_0
\end{aligned}$$

Подставив формулы (19), (21) и (23) во второй из интегралов формулы (44), найдем

$$\begin{aligned}
\int_0^{x_{m+1}} & \int \frac{1}{x-y} (a_1x + b_1y + c_1) dx = \\
& = Q_2' + \frac{1}{R_1} (P_2''y^3 + Q_2''y^2 + S_2''y + T_2'') - \frac{1}{R_1} (P_2y^3 + Q_2y^2 + S_2y + T_2), \quad (49)
\end{aligned}$$

ПДЗ

$$Q_2' = \frac{a_1}{(1+a^2)^{\frac{3}{2}}} \ln \frac{f''}{f};$$

$$P_2'' = P_2';$$

$$\begin{aligned}
Q_2'' = & -aa_1c - 3aa_1b^2c - 2aa_1by_0 - a_1x_{m+1} - a^2a_1x_{m+1} - a_1b^2x_{m+1} + a^2a_1b^2x_{m+1} + a^2a_1x_0 + \\
& + a^2a_1b^2x_0 - c_1 - b^2c_1 - a^2c_1 - a^2b^2c_1 + 2b_1y_0 + 2bb_1c - ab_1b_1x_{m+1} + 2a^2b_1y_0 + 2a^2bb_1c - \\
& - a^3bb_1x_{m+1} - ab_1b_1x_0 - a^3bb_1x_0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2'' = & 2aa_1cy_0 + 3aa_1bc^2 + aa_1bx_0^2 + aa_1by_0^2 + 2a_1x_{m+1}y_0 + 2a_1bx_0x_{m+1} + 2a^2a_1x_{m+1}y_0 - \\
& - 3aa_1bx_0x_{m+1} - 2a^2a_1bcx_{m+1} - 2a^2a_1x_0y_0 - 2a^2a_1bx_0x_0 + a^2a_1bx_0x_{m+1} + 2c_1y_0 + 2bcc_1 - \\
& - abc_1x_{m+1} + 2a^2c_1y_0 + 2a^2bcc_1 - a^3bc_1x_{m+1} - b_1y_0^2 - b_1c^2 + ab_1cx_{m+1} - a^2b_1y_0^2 - a^2b_1c^2 + \\
& + a^3b_1cx_{m+1} + ab_1cx_0 - a^2b_1^2cx_{m+1} - a^4b_1x_0x_{m+1} + a^3b_1cx_0 - abc_1x_0 - a^2bc_1x_0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_2'' = & -aa_1cx_0^2 - aa_1cy_0^2 - aa_1c^3 - a_1x_{m+1}y_0^2 - a_1c^2x_{m+1} - 2a_1^2a_1x_0^2x_{m+1} - \\
& - a_1^2a_1x_{m+1}y_0^2 + 3aa_1cx_0x_{m+1} + a^2a_1c^2x_{m+1} + a^2a_1x_0^3 + a^2a_1x_0y_0^2 + a^2a_1c^2x_0 - \\
& - a^2a_1cx_0x_{m+1} - c_1y_0^2 - c^2c_1 + acc_1x_{m+1} - a^2c_1y_0^2 - a^2c_1^2 + a^3cc_1x_{m+1} + \\
& + acc_1x_0 - a^2c_1x_0x_{m+1} - a^4c_1x_0x_{m+1} + a^3cc_1x_0.
\end{aligned}$$

Выражения величин  $Q_2'', S_2'', T_2''$  можно получить из формул для  $Q_2', S_2', T_2'$  соответственно заменив  $x_m$  на  $x_{m+1}$ .

Подставив формулы (20) и (22) в первый из интегралов (46), найдем

$$J_7 = \int_{x_m}^{k-y} \frac{1}{y^3} (y - y_0)(ax + by + c) dx = \frac{1}{R_1} (P_3 y^3 + Q_3 y^2 + S_3 y + T_3) - \\ - \frac{1}{R'_1} (P'_3 y^3 + Q'_3 y^2 + S'_3 y + T'_3), \quad (50)$$

где

$$P_3 = -a, -a, b^2 + aa, b - a^2 a, -a^2 a, b^2 + a^3 a, b - b, -2a^2 b, +abb, -a^4 b, +a^3 b b, ;$$

$$Q_3 = 3a, y_0 + 2a, bc - aa, bk - a, x_0 - aa, c + 3a^2 a, y_0 + 2a^2 a, bc - a^2 a, bk - a^2 a, x_0 - \\ - a^3 a, c + a, b^2 y_0 - aa, b y_0 + a^2 a, b^2 y_0 - a^3 a, b y_0 + b, k + 2a^2 b, k - ab, c - b, x_0 + \\ + a^4 b, k - a^3 b, c - a^2 b, x_0 - c, -2a^2 c, +abc, -a^4 c, +a^3 bc, +b, y_0 + 2a^2 b, y_0 - \\ - abb, y_0 + a^4 b, y_0 - a^3 bb, y_0 ;$$

$$S_3 = -a, x_0^2 - 3a, y_0^2 - a, c^2 + a, kx_0 + aa, ck - a^2 a, x_0^2 - 3a^2 a, y_0^2 - a^2 a, c^2 + a^2 a, kx_0 + \\ + a^3 a, ck - 2a, bc y_0 + aa, bky_0 + a, x_0 y_0 + aa, cy_0 - 2a^2 b, bcy_0 + a^3 a, bky_0 + \\ + a^2 a, x_0 y_0 + a^3 a, cy_0 + c, k + 2a^2 c, k - acc, -c, x_0 + a^4 c, k - a^3 cc, -a^2 c, x_0 - \\ - b, ky_0 - 2a^2 b, ky_0 + ab, cy_0 + b, x_0 y_0 - a^4 b, ky_0 + a^3 b, cy_0 + a^2 b, x_0 y_0 + c, y_0 + \\ + 2a^2 c, y_0 - abc, y_0 + a^4 c, y_0 - a^3 bc, y_0 ;$$

$$T_3 = a, x_0^2 y_0 + a, y_0^3 + a, c^2 y_0 - a, kx_0 y_0 - aa, cky_0 + a^2 a, x_0^2 y_0 + a^2 a, y_0^3 + a^2 a, c^2 y_0 - \\ - a^2 a, kx_0 y_0 - a^3 a, cky_0 - c, ky_0 - 2a^2 c, ky_0 + acc, y_0 + c, x_0 y_0 - a^4 c, ky_0 + \\ + a^3 cc, y_0 + a^2 c, x_0 y_0 ;$$

$$P'_3 = -a, -a, b^2 - a^2 a, -a^2 a, b^2 + abb, +a^3 bb, ;$$

$$Q'_3 = 3a, y_0 + 2a, bc - aa, bx_m + 3a^2 a, y_0 + 2a^2 a, bc - a^2 a, bx_m + a, b^2 y_0 + \\ + a^2 a, b^2 y_0 + b, x_m + 2a^2 b, x_m - b, x_0 - ab, c + a^4 b, x_m - a^2 b, x_0 - a^3 b, c + abc, + \\ + a^3 bc, -abb, y_0 - a^3 bb, y_0 ;$$

$$S'_3 = -a_1 x_0^2 - 3a_1 y_0^2 - a_1 c^2 + a_1 x_0 x_{m+1} + a_1 c x_{m+1} - a^2 a_1 x_0^2 - 3a^2 a_1 y_0^2 - a^2 a_1 c^2 + \\ + a^2 a_1 x_0 x_{m+1} + a^3 a_1 c x_{m+1} - 2a_1 b c y_0 + a_1 b x_{m+1} y_0 - 2a^2 a_1 b c y_0 + a^3 a_1 b x_{m+1} y_0 + c_1 x_{m+1} + \\ + 2a^2 c_1 x_{m+1} - c_1 x_0 - a c c_1 + a^4 c_1 x_{m+1} - a^2 c_1 x_0 - a^3 c c_1 - b_1 x_{m+1} y_0 - 2a^2 b_1 x_{m+1} y_0 + b_1 x_{m+1} y_0 + \\ + a b_1 c y_0 - a^4 b_1 x_{m+1} y_0 + a^2 b_1 x_0 y_0 + a^3 b_1 c y_0 - a b c_1 y_0 - a^3 b c_1 y_0 ;$$

$$T'_3 = a_1 x_0^2 y_0 + a_1 y_0^3 + a_1 c^2 y_0 - a_1 x_0 x_{m+1} y_0 - a_1 c x_{m+1} y_0 + a^2 a_1 x_0^2 y_0 + a^2 a_1 y_0^3 + \\ + a^2 a_1 c^2 y_0 - a^2 a_1 x_0 x_{m+1} y_0 - a^3 a_1 c x_{m+1} y_0 - c_1 x_{m+1} y_0 - 2a^2 c_1 x_{m+1} y_0 + c_1 x_0 y_0 + \\ + a c c_1 y_0 - a^4 c_1 x_{m+1} y_0 + a^2 c_1 x_0 y_0 + a^3 c c_1 y_0 .$$

Подставив формулы (21) и (23) во второй из интегралов формулы (46), найдем

$$\int_{\frac{x_0}{x-y}}^{x_{m+1}} \frac{1}{x-y} (y - y_0)(a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1) dx = \\ = \frac{1}{R''_3} (P''_3 y^3 + Q''_3 y^2 + S''_3 y + T''_3) - \frac{1}{R_1} (P_3 y^3 + Q_3 y^2 + S_3 y + T_3), \quad (51)$$

где

$$P''_3 = P'_3 ;$$

$$Q''_3 = 3a_1 y_0 + 2a_1 b c - a_1 b x_{m+1} + 3a^2 a_1 y_0 + 2a^2 a_1 b c - a^3 a_1 b x_{m+1} + a_1 b^2 y_0 + \\ + a^2 a_1 b^2 y_0 + b_1 x_{m+1} + 2a^2 b_1 x_{m+1} - b_1 x_0 - a b_1 c + a^4 b_1 x_{m+1} - a^2 b_1 x_0 - a^3 b_1 c + a b c_1 + \\ + a^3 b c_1 - a b b_1 y_0 - a^3 b b_1 y_0 ;$$

$$S''_3 = -a_1 x_0^2 - 3a_1 y_0^2 - a_1 c^2 + a_1 x_0 x_{m+1} + a_1 c x_{m+1} - a^2 a_1 x_0^2 - 3a^2 a_1 y_0^2 - a^2 a_1 c^2 + \\ + a^2 a_1 x_0 x_{m+1} + a^3 a_1 c x_{m+1} - 2a_1 b c y_0 + a_1 b x_{m+1} y_0 - 2a^2 a_1 b c y_0 + a^3 a_1 b x_{m+1} y_0 + \\ + 2a^2 c_1 x_{m+1} + c_1 x_{m+1} - c_1 x_0 - a c c_1 + a^4 c_1 x_{m+1} - a^2 c_1 x_0 - a^3 c c_1 - b_1 x_{m+1} y_0 - 2a^2 b_1 x_{m+1} y_0 + \\ + b_1 x_0 y_0 + a b_1 c y_0 - a^4 b_1 x_{m+1} y_0 + a^2 b_1 x_0 y_0 + a^3 b_1 c y_0 - a b c_1 y_0 - a^3 b c_1 y_0 ;$$

$$T''_3 = a_1 x_0^2 y_0 + a_1 y_0^3 + a_1 c^2 y_0 - a_1 x_0 x_{m+1} y_0 - a_1 c x_{m+1} y_0 + a^2 a_1 x_0^2 y_0 + a^2 a_1 y_0^3 + \\ + a^2 a_1 c^2 y_0 - a^2 a_1 x_0 x_{m+1} y_0 - a^3 a_1 c x_{m+1} y_0 - c_1 x_{m+1} y_0 - 2a^2 c_1 x_{m+1} y_0 + c_1 x_0 y_0 + \\ + a c c_1 y_0 - a^4 c_1 x_{m+1} y_0 + a^2 c_1 x_0 y_0 + a^3 c c_1 y_0 .$$

Выражения величин  $Q_3^{\prime\prime}$ ,  $S_3^{\prime\prime}$ ,  $T_3^{\prime\prime}$  можно получить из формул для  $Q'_3$ ,  $S'_3$ ,  $T'_3$  соответственно, заменив  $x_m$  на  $x_{m+1}$ .

Для вывода первого приближения к высоте квазигеоида нужно вычислить

$$\begin{aligned} \zeta &\approx \frac{1}{2\pi g} \sum \int_{y_n}^{y_{n+1}} dy \int_{x_m}^{x_{m+1}} \frac{1}{2} (a_1 x + b_1 y + c_1) dx + \\ &+ \frac{1}{2\pi g} \sum \int_{y_n}^{y_{n+1}} dy \int_{x_m}^{x_{m+1}} \frac{1}{2} (a_1 x + b_1 y + c_1) dx + \frac{1}{2\pi g} \sum \Delta g_{cp} \frac{\Delta \delta}{\gamma_{sp}}, \quad (52) \end{aligned}$$

воспользовавшись формулами (37) и (38).

Вывод поправок следующих приближений к уклонениям отвеса и высотам квазигеоида аналогичен.

Пробные вычисления на модели Земли подтвердили практическую пригодность описанных формул.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

М о л о д е н с к и й М.С. Внешнее гравитационное поле и фигура физической поверхности Земли. — Известия АН СССР, серия географ. и геофизич., 1948, I2, № 3.

Neumann C. Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential. Leipzig, Druck und Verlag von B.G. Teubner, XYI+368S, 1877.

V.F.Yeremeev, M.I.Yurkina

DERIVATION OF A CORRECTION TO GRAVITY ANOMALY AND OF FORMULAS FOR COMPUTING QUASIGEOID HEIGHTS AND PLUMB-LINE DEFLECTIONS WHEN APPROXIMATING THE EARTH'S SURFACE BY PLANE SIDES

#### S U M M A R Y

When solving the integral Molodensky's equation for single-layer density according to a modification of the Neumann's method, the first integral term of the correction  $\delta g_{11}$  (formula (1)) to the gravity anomaly can be represented by (24) and (25). The former

gives the influence of the plane sides of the Earth surface based on triangles  $m, n+1; m, n+m+1, n$ , the latter - the influence of sides based on triangles  $m, n+1; m+1, n; m+1, n+1$ . (See figure). The elevation of the Earth surface above the surface of reference is represented by (4); the gravity anomaly on this surface - by (5);

$H_0$  is the elevation of the fixed point above reference surface. This elevation must always be at least several metres higher than that of the point  $(x_0, y_0)$  on the integration surface approximating the Earth. Similar formulas were obtained for determining the corresponding corrections to plumb-line deflections and quasigeoid heights.

УДК 528.22:531.26

В.Ф. Еремеев, А.И. Шабанова

## ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ УКЛОНЕНИЯ ОТВЕСА НА МОДЕЛИ ЗЕМЛИ

Методы вычисления гравиметрических уклонений отвеса, предложенные Молоденским (1960), Арзольдом (1965), Еремеевым (1969) и вытекающий из способа Неймана (1877) решения интегрального уравнения Молоденского исследованы на модели Земли с плоской отсчетной поверхностью. Формулы Венинг-Мейнса и Молоденского ранее исследованы на схожей модели (Еремеев, 1950, Молоденский и др., 1960).

Физическая поверхность модели представляет собой одиночную гору - поверхность вращения, расположенную на отсчетной плоскости. Сечение поверхности модели через ее ось симметрии является биквадратной параболой:

$$H = \alpha_1 l^4 + \alpha_2 l^2 + H_0, \quad (1)$$

где  $H_0$  - высота вершины модели над отсчетной плоскостью;

$H$  - высота точки на поверхности модели;

$l$  - расстояние этой точки от оси симметрии;

$\alpha_1$  и  $\alpha_2$  - некоторые постоянные коэффициенты (рис. I).

В точке С кривая (I) будет касаться отсчетной плоскости, если

$$\alpha_1 l_c^4 + \alpha_2 l_c^2 + H_0 = 0; \quad (2)$$

$$\left( \frac{dH}{dl} \right)_c = 4\alpha_1 l_c^3 + 2\alpha_2 l_c = 0. \quad (3)$$

\*См.стр.49-56. В.Ф.Еремеев. О решении уравнений, определяющих гравитационное поле и фигуру Земли.

Поэтому

$$l_c = \sqrt{-\frac{\alpha_2}{2\alpha_1}} ; \quad (4)$$

$$H_0 = \frac{\alpha_2^2}{4\alpha_1} \quad (5)$$

Параметрами кривой сечения модели удобно выбрать  $H_0$  и  $l_c$ . Коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  с помощью формул (4) и (5) легко вы-

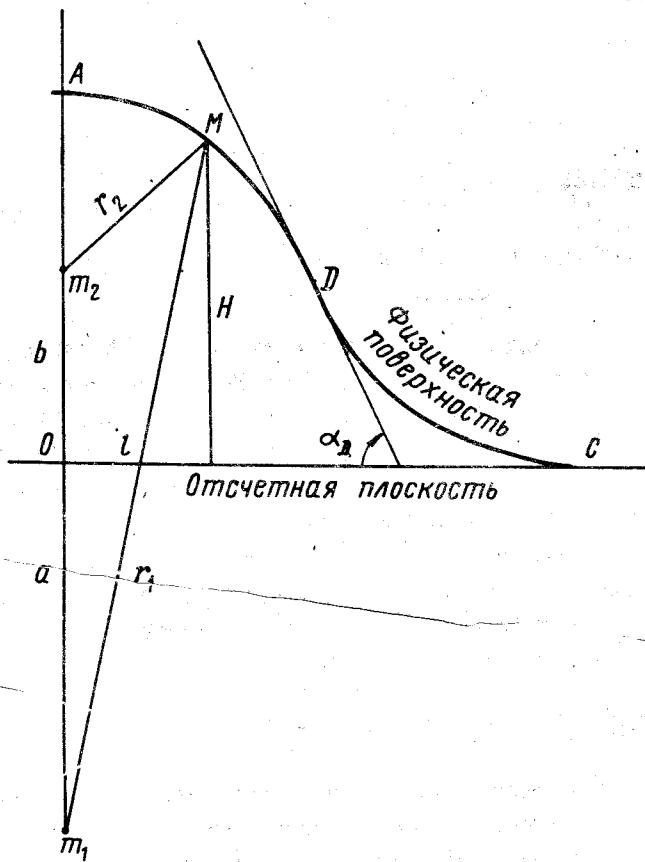


Рис. I

разить через эти параметры

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{H_0}{l_c^2} ; \\ \alpha_2 &= -\frac{2H_0}{l_c^2} . \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Тогда уравнение (1) можно будет представить так:

$$H = H_0 \left(1 - \frac{\ell^2}{\ell_c^2}\right)^2; \quad (7)$$

при  $\ell > \ell_c$  имеем  $H = 0$ . В вершине и при  $\ell \gg \ell_c$  наклоны поверхности модели будут, очевидно, равны нулю.

В произвольной точке наклон поверхности модели определен формулой

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{dH}{d\ell} = + \frac{4H_0 \ell}{\ell_c^2} \left(1 - \frac{\ell^2}{\ell_c^2}\right). \quad (8)$$

Максимальный наклон будет в точке перегиба кривой сечения. Положение этой точки можно определить из условия

$$\frac{d^2 H}{d\ell^2} = 12 \alpha_1 \ell_b^2 + 2 \alpha_2 = 0.$$

Отсюда

$$\ell_b^2 = - \frac{\alpha_2}{6 \alpha_1} = + \frac{1}{3} \ell_c^2.$$

Таким образом, максимальный наклон равен

$$\operatorname{tg} \alpha_m = - \left( \frac{dH}{d\ell} \right)_m = \frac{8\sqrt{3}}{9} \frac{H_0}{\ell_c}. \quad (9)$$

Формула (9) позволяет легко установить на модели наиболее подходящие наклоны. При этом мы сохранили постоянным параметр  $H_0$  и изменяли параметр  $\ell_c$ .

В качестве аномальных масс взяты две точечные массы  $m_1$  и  $m_2$  на оси ОА симметрии модели. Масса  $m_2$  находится над отсчетной плоскостью на высоте  $b$ , масса  $m_1$  — под отсчетной плоскостью на расстоянии  $a$  от нее (см. рис. I).

Нетрудно выразить аномалию  $g - g'$  силы тяжести, обусловленную аномальными массами

$$g - g' = \frac{f m_1 (H + a)}{\gamma_1^3} + \frac{f m_2 (H - b)}{\gamma_2^3}, \quad (10)$$

и точное уклонение отвесной линии на поверхности модели

$$\xi = \frac{f \ell}{g'} \left( \frac{m_1}{\gamma_1^3} + \frac{m_2}{\gamma_2^3} \right). \quad (II)$$

В уравнениях (10) и (II)  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  обозначают расстояния аномальных масс от точки, в которой нужно определить  $g - \gamma$  или  $\xi$ .

$$\zeta_1^2 = [(H + a)^2 + l^2];$$

$$\zeta_2^2 = [(H - b)^2 + l^2].$$

Полагая

$$\frac{fm_1}{(H_0 + a)^2} = \Delta g_1^\circ, \quad \frac{fm_2}{(H_0 - b)^2} = \Delta g_2^\circ,$$

получим для вычисления аномалии силы тяжести

$$g - \gamma = \Delta g_1^\circ (H_0 + a)^2 \frac{H + a}{[(H + a)^2 + l^2]^{\frac{3}{2}}} + \\ + \Delta g_2^\circ (H_0 - b)^2 \frac{H - b}{[(H - b)^2 + l^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (I2)$$

и для вычисления точного значения уклона отвеса

$$\xi = \frac{\bar{l}}{\gamma} \left\{ \frac{\Delta g_1^\circ}{H_0 + a} \left[ \left( \frac{H + a}{H_0 + a} \right)^2 + \frac{\bar{l}^2}{(H_0 + a)^2} \right]^{-\frac{3}{2}} + \frac{\Delta g_2^\circ}{H_0 - b} \left[ \left( \frac{H - b}{H_0 - b} \right)^2 + \frac{\bar{l}^2}{(H_0 - b)^2} \right]^{-\frac{3}{2}} \right\} \quad (I3)$$

В формуле (I3) через  $\bar{H}$  и  $\bar{l}$  обозначены высота и расстояние от оси ОА модели той точки, для которой должно быть вычислено уклонение отвеса.

Стоксово приближение к уклонению отвеса определено для модели формулой

$$\xi_g = \frac{1}{\pi g \bar{l}} \lim_{\varepsilon_0 \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{\bar{l}-\varepsilon_0} (g - \gamma) \left[ \frac{K}{\bar{l}+l} + \frac{E}{\bar{l}-l} \right] l dl + \right. \\ \left. + \int_{\bar{l}+\varepsilon_0}^{\infty} (g - \gamma) \left[ \frac{K}{\bar{l}+l} + \frac{E}{\bar{l}-l} \right] l dl \right\}, \quad (I4)$$

параметр эллиптических интегралов определен выражением

$$\kappa^2 = \frac{4\bar{l}\bar{l}}{(\bar{l}+l)^2}, \quad (I5)$$

$2\varepsilon_0$  — ширина некоторой центральной зоны. Переход от формулы Венинг-Мейнса в обычной записи к виду (I4) пояснен Еремеевым (1950), этот переход иллюстрирует рис.2. На рис.3 показан принцип выделения центральной зоны.

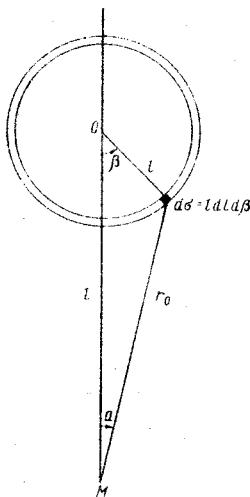


Рис.2

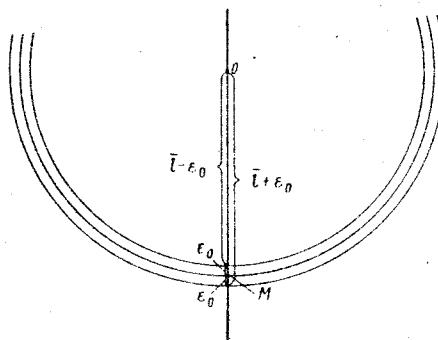


Рис.3

Поправка первого приближения к значению  $\xi_s$  по Молоденскому в нашем случае равна

$$\delta_1 \xi = \frac{1}{\pi \delta l} \lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{\bar{l}-\epsilon_0} \delta_l g \left[ \frac{K}{\bar{l}+l} + \frac{E}{\bar{l}-l} \right] l dl + \right. \\ \left. + \int_{\bar{l}+\epsilon_0}^{\infty} \delta_l g \left[ \frac{K}{\bar{l}+l} + \frac{E}{\bar{l}-l} \right] l dl \right\} + \frac{\bar{g} - g}{r} \operatorname{tg} \bar{\alpha}. \quad (I6)$$

Здесь  $\bar{g} - g$  и  $\bar{\alpha}$  - аномалия силы тяжести и угол наклона поверхности модели в исследуемой точке, поправка  $\delta_l g$  первого приближения в аномалию силы тяжести равна

$$\delta_l g = \frac{2}{\pi} \lim_{\epsilon'_0 \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{\bar{l}-\epsilon'_0} (g - \bar{g}) \frac{(H - \bar{H}) l E}{(\bar{l}+l)(\bar{l}-l)^2} dl + \right. \\ \left. + \int_{\bar{l}+\epsilon'_0}^{\infty} (g - \bar{g}) \frac{(H - \bar{H}) l E}{(\bar{l}+l)(\bar{l}-l)^2} dl \right\}, \quad (I7)$$

через  $\bar{l}$  и  $\bar{H}$  обозначены расстояние от оси ОА и высота точки, в которой нужно вычислить  $\delta_l g$ , параметр эллиптических интегралов по-прежнему определен формулой (15).

Поправка второго приближения к значению  $\xi_2 + \delta_2 \xi$  по Молоденскому, равна

$$\delta_2 \xi = \nabla_1 \xi + \nabla_2 \xi + \frac{\delta_{12}}{r^2} \operatorname{tg} \alpha, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla_1 \xi &= \frac{1}{2\pi r^2} \lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{\bar{e}-\epsilon_0} \delta_2 g \left[ \frac{K}{\bar{e}+e} + \frac{E}{\bar{e}-e} \right] e de + \int_{\bar{e}+\epsilon_0}^{\infty} \delta_2 g \left[ \frac{K}{\bar{e}+e} + \frac{E}{\bar{e}-e} \right] e de \right\}; \\ \nabla_2 \xi &= \frac{3}{2\pi r} \lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{\bar{e}-\epsilon_0} (g-\gamma) \frac{e}{\bar{e}} \cdot \frac{(H-H)^2 E}{(e-\bar{e})^2 (\bar{e}+e)} de + \int_{\bar{e}+\epsilon_0}^{\infty} (g-\gamma) \frac{e}{\bar{e}} \cdot \frac{(H-H)^2 E}{(e-\bar{e})^2 (\bar{e}+e)} de \right\} + \\ &+ \frac{1}{2\pi r} \lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{\bar{e}-\epsilon_0} (g-\gamma') \frac{e}{\bar{e}} \cdot \frac{(H-H)^2}{(e-\bar{e})(\bar{e}+e)^2} \left[ 4 \frac{\bar{e}^2 + e^2}{(\bar{e}-e)^2} E - K \right] de + \right. \\ &\left. + \int_{\bar{e}+\epsilon_0}^{\infty} (g-\gamma) \frac{e}{\bar{e}} \cdot \frac{(H-H)^2}{(\bar{e}-e)(\bar{e}+e)^2} \left[ 4 \frac{\bar{e}^2 + e^2}{(\bar{e}-e)^2} E - K \right] de \right\}; \\ \delta_2 g &= \frac{2}{\pi} \lim_{\epsilon'_0 \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{\bar{e}-\epsilon'_0} \delta_1 g \frac{(H-H)e}{(\bar{e}+e)(e-\bar{e})^2} Ed e + \right. \\ &\left. + \int_{\bar{e}+\epsilon'_0}^{\infty} \delta_1 g \frac{(H-H)eE}{(\bar{e}+e)(e-\bar{e})^2} de \right\} + (\bar{g}-\gamma) \operatorname{tg}^2 \alpha. \end{aligned} \quad (19)$$

Интегральное уравнение Молоденского для плотности  $\varphi$  простого слоя, заменяющего притяжение аномальных масс внутри Земли

$$2\pi \varphi \cos \alpha = g - \gamma + \frac{3}{2\pi r} \int_S \frac{\varphi}{r} dS + \int_S \frac{H-H}{r^2} \varphi dS,$$

где  $r_0$  – радиус-вектор фиксированной точки,

$r$  – расстояние между фиксированной и текущей точками,

$S$  – земная поверхность,

может быть решено способом последовательных приближений, обычно применяемым при решении интегральных уравнений. А именно, в первом приближении можно принять

$$\varphi_0 = \frac{g - \gamma}{2\pi \cos \alpha},$$

во втором приближении тогда будет

$$\varphi_1 = \frac{\Delta g_1}{2\pi \cos \alpha},$$

где

$$\Delta g_1 = g - \gamma + \frac{3}{4\pi r_0} \int_S \frac{\Delta g}{\cos \alpha} \frac{ds}{r} + \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\Delta g}{\cos \alpha} \frac{H-H}{r^2} ds$$

и т.д. Как известно, этот процесс последовательных приближений, иногда называемый способом Неймана, является сходящимся. Для составляющих уклонения отвеса следовательно получаем

$$\begin{aligned}
 + \xi_0 &= -\frac{1}{Rg} \frac{\partial T}{\partial B} = + \frac{i}{2\pi g R} \int_s^{\bar{s}} \frac{g-\delta}{r^2 \cos \alpha} \frac{\partial r}{\partial B} dS \cdot \frac{g-\delta}{r} \operatorname{tg} \alpha \cos A; \\
 + \eta_0 &= -\frac{1}{Rg} \frac{\partial T}{\partial \cos B \partial L} = + \frac{1}{2\pi g R \cos B} \int_s^{\bar{s}} \frac{g-\delta}{r^2 \cos \alpha} \frac{\partial r}{\partial L} dS - \frac{g-\delta}{r} \operatorname{tg} \alpha \sin A; \\
 + \xi_1 &= + \frac{1}{2\pi g R} \int_s^{\bar{s}} \frac{g-\delta+\Delta g}{r^2 \cos \alpha} \frac{\partial r}{\partial B} dS - \frac{g-\delta+\Delta g}{r} \operatorname{tg} \alpha \cos A; \\
 + \eta_1 &= \frac{1}{2\pi g R \cos B} \int_s^{\bar{s}} \frac{g-\delta+\Delta g}{r^2 \cos \alpha} \frac{\partial r}{\partial L} dS - \frac{g-\delta+\Delta g}{r} \operatorname{tg} \alpha \sin A,
 \end{aligned}$$

где  $R$  – радиус Земли,

$B, L$  – геодезическая широта и долгота фиксированной точки;

$\delta$  – возмущающий потенциал;

$A$  – азимут направления, в котором градиент высоты наибольший.

Угол  $\alpha$  всегда положителен. Таким образом, для вывода гравиметрических уклонений отвеса нужно вычислить поправки аномалий силы тяжести.

$$\Delta g = \frac{3}{4\pi g_0} \int_s^{\bar{s}} \frac{g-\delta}{\cos \alpha} \frac{dS}{r} + \frac{i}{2\pi} \int_s^{\bar{s}} \frac{g-\delta}{\cos \alpha} \frac{H-\bar{H}}{r^3} dS$$

Для модели в нулевом приближении находим

$$\begin{aligned}
 \xi_0 &= \frac{2}{\pi g} \lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{\bar{\ell}-\epsilon_0} \frac{g-\delta}{\cos^2 \alpha} \left[ \frac{K-E}{2\bar{\ell}} + \frac{E}{(\bar{\ell}-\ell)[1 + \frac{(\bar{H}-H)^2}{(\bar{\ell}-\ell)^2}]} \right] \frac{\ell}{Q} d\ell + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\bar{\ell}+\epsilon_0}^{\infty} \frac{g-\delta}{\cos^2 \alpha} \left[ \frac{K-E}{2\bar{\ell}} + \frac{E}{(\bar{\ell}-\ell)[1 + \frac{(\bar{H}-H)^2}{(\bar{\ell}-\ell)^2}]} \right] \frac{\ell}{Q} d\ell + \frac{g-\delta}{r} \operatorname{tg} \alpha \right\}, \quad (20)
 \end{aligned}$$

где

$$Q = \sqrt{(\bar{\ell}+\ell)^2 + (H-\bar{H})^2};$$

$$K^2 = \frac{4\bar{\ell}\ell}{(\bar{\ell}+\ell)^2 + (H-\bar{H})^2}$$

Поправку первого приближения к значению  $\xi_0$  определяет формула

$$\Delta_1 \xi = \frac{2}{\pi g} \lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{\bar{\ell} - \epsilon_0} \frac{\Delta_1 g}{\cos^2 \alpha} \frac{\ell}{Q} \left[ \frac{1}{2\bar{\ell}} (K-E) + \frac{E}{(\bar{\ell}-\ell)(1+(\frac{H-H}{\bar{\ell}-\ell})^2)} \right] d\ell + \right. \\ \left. + \int_{\bar{\ell} + \epsilon_0}^{\infty} \frac{\Delta_1 g}{\cos^2 \alpha} \frac{\ell}{Q} \left[ \frac{1}{2\bar{\ell}} (K-E) + \frac{E}{(\bar{\ell}-\ell)(1+(\frac{H-H}{\bar{\ell}-\ell})^2)} \right] d\ell \right\} + \frac{\Delta_1 g}{g} \tan \bar{\alpha},$$

где

$$\Delta_1 g = \frac{2}{\pi} \lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{\bar{\ell} - \epsilon_0} \frac{g - \gamma}{\cos^2 \alpha} \frac{(\bar{H}-H)\ell E d\ell}{[(\bar{\ell}-\ell)^2 + (\bar{H}-H)^2] Q} + \right. \\ \left. + \int_{\bar{\ell} + \epsilon_0}^{\infty} \frac{g - \gamma}{\cos^2 \alpha} \frac{(\bar{H}-H)\ell E d\ell}{[(\bar{\ell}-\ell)^2 + (\bar{H}-H)^2] Q} \right\}.$$

Нулевое приближение к уклонению отвеса для модели согласно выводу Еремеева (1969) равно

$$\xi'_0 = \frac{2}{\pi g} \lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{\bar{\ell} - \epsilon_0} (g - \gamma) \left[ \frac{K-E}{2\bar{\ell}} + \frac{E}{(\bar{\ell}-\ell)(1+(\frac{H-H}{\bar{\ell}-\ell})^2)} \right] \frac{\ell}{Q} d\ell + \right. \\ \left. + \int_{\bar{\ell} + \epsilon_0}^{\infty} (g - \gamma) \left[ \frac{K-E}{2\bar{\ell}} + \frac{E}{(\bar{\ell}-\ell)(1+(\frac{H-H}{\bar{\ell}-\ell})^2)} \right] \frac{\ell}{Q} d\ell \right\} + \frac{g - \gamma}{g} \cos \bar{\alpha} \sin \bar{\alpha}, \quad (21)$$

где параметр  $\kappa$  определен как в формуле (20).

Поправку первого приближения к значению  $\xi'_0$  определяет формула

$$\Delta'_1 \xi = \frac{2}{\pi g} \lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{\bar{\ell} - \epsilon_0} \Delta'_1 g \frac{\ell}{Q} \left[ \frac{1}{2\bar{\ell}} (K-E) + \frac{E}{(\bar{\ell}-\ell)(1+(\frac{H-H}{\bar{\ell}-\ell})^2)} \right] d\ell + \right. \\ \left. + \int_{\bar{\ell} + \epsilon_0}^{\infty} \Delta'_1 g \frac{\ell}{Q} \left[ \frac{1}{2\bar{\ell}} (K-E) + \frac{E}{(\bar{\ell}-\ell)(1+(\frac{H-H}{\bar{\ell}-\ell})^2)} \right] d\ell \right\} + \frac{\Delta'_1 g}{g} \cos \bar{\alpha} \sin \bar{\alpha}, \quad (22)$$

где

$$\Delta'_1 g = \frac{2}{\pi} \lim_{\epsilon'_0 \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{\bar{\ell} - \epsilon'_0} \frac{(g - \gamma' \times H - \bar{H}) \ell E}{Q [(\bar{\ell} - \ell)^2 + (H - \bar{H})^2]} d\ell + \right. \\ \left. + \int_{\bar{\ell} + \epsilon'_0}^{\infty} \frac{(g - \gamma') (H - \bar{H}) \ell E}{Q [(\bar{\ell} - \ell)^2 + (H - \bar{H})^2]} d\ell + (g - \gamma') \sin^2 \bar{\alpha} \right\}. \quad (23)$$

Следующие поправки к  $\xi'_0$  можно получить по формулам (22) и (23), заменив в формуле (22)  $\Delta'_1 g$  на  $\Delta'_2 g$ ,  $\Delta'_3 g$  и т.д. и в формуле (23) - значения  $(g - \gamma')$  на  $\Delta'_1 g$  и затем на  $\Delta'_2 g$ , ...; соответственно значения  $\Delta'_1 g$  нужно заменить на  $\Delta'_2 g$ ,  $\Delta'_3 g$ , ...

Нулевое приближение к уклонению отвеса согласно способу, описанному на стр. 49-56 этого сборника, для модели можно выразить так

$$\xi''_0 = \frac{2}{\pi \gamma'} \int_0^{\infty} (g - \gamma) \frac{\ell}{Q'} \left[ \frac{K - E}{2\bar{\ell}} + \frac{(\bar{\ell} - \ell)E}{(\bar{\ell} - \ell)^2 + (\bar{H} + h - H)^2} \right] d\ell. \quad (24)$$

Здесь

$$Q' = \sqrt{(\bar{\ell} - \ell)^2 + (\bar{H} + h - H)^2},$$

$$K^2 = \frac{4\bar{\ell}\bar{\ell}}{(\bar{\ell} + \ell)^2 + (\bar{H} + h - H)^2}.$$

Поправку первого приближения к значению  $\xi''_0$  определяет формула

$$\Delta''_1 \xi = \frac{2}{\pi \gamma'} \int_0^{\infty} \Delta''_1 g \frac{\ell}{Q'} \left[ \frac{K - E}{2\bar{\ell}} + \frac{(\bar{\ell} - \ell)E}{(\bar{\ell} - \ell)^2 + (\bar{H} + h - H)^2} \right] d\ell, \quad (25)$$

где

$$\Delta''_1 g = g - \gamma - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (g - \gamma) \frac{(\bar{H} + h - H)\ell E d\ell}{[(\bar{\ell} - \ell)^2 + (\bar{H} + h - H)^2] \sqrt{(\bar{\ell} + \ell)^2 + (\bar{H} + h - H)^2}}, \quad (26)$$

$$K^2 = \frac{4\bar{\ell}\bar{\ell}}{(\bar{\ell} + \ell)^2 + (\bar{H} + h - H)^2}.$$

Следующие поправки к  $\xi''_0$  можно получить по формулам (25) и (26), заменив в (25)  $\Delta''_1 g$  на  $\Delta''_2 g$ ,  $\Delta''_3 g$ , и т.д. и в (26) – значения  $(g - \gamma)$  на  $\Delta''_2 g$  и затем  $\Delta''_3 g \dots$ , соответственно значения  $\Delta''_1 g$  на  $\Delta''_2 g$  и  $\Delta''_3 g \dots$

Поправка к значению  $\xi_s$ , по Арнольду, в случае нашей модели равна

$$\delta \xi = \frac{1}{\pi \gamma' \bar{\ell}} \lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{\bar{\ell} - \epsilon_0} \delta g \left[ \frac{K}{\bar{\ell} + \ell} + \frac{E}{\bar{\ell} - \ell} \right] \ell d\ell + \right. \\ \left. + \int_{\bar{\ell} + \epsilon_0}^{\infty} \delta g \left[ \frac{K}{\bar{\ell} + \ell} + \frac{E}{\bar{\ell} - \ell} \right] \ell d\ell \right\}, \quad (27)$$

где

$$\delta g = -\frac{2}{\pi} (H_s - H_\xi) \lim_{\epsilon'_0 \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{\bar{\ell} - \epsilon'_0} [(g - \gamma) - (g - \gamma)_s] \frac{\ell E}{(\ell + \bar{\ell})(\ell - \bar{\ell})^2} d\ell + \right. \\ \left. + \int_{\bar{\ell} + \epsilon'_0}^{\infty} [(g - \gamma) - (g - \gamma)_s] \frac{\ell E}{(\ell + \bar{\ell})(\ell - \bar{\ell})^2} d\ell \right\}. \quad (28)$$

Здесь  $H_s$ ,  $H_\xi$  – высоты в точках, где нужно вычислить поправку  $\delta g$  и уклонение отвеса,  $(g - \gamma)_s$  – аномалия силы тяжести в точке, для которой нужно вычислить поправку  $\delta g$ ,  $(g - \gamma)$  – аномалия силы тяжести в точке на расстоянии  $\ell$  от оси ОА. Параметр

математического языка в Втором ряде здесь снова определяется выражением (15)

Выражения всех поправок в амплитудах силы тяжести в вершине можно значительно упростить. В этом случае  $\bar{\ell} = 0$ ,  $\kappa = 0$  и  $B = \frac{1}{2}$ ,  $H = H_0$ .

Тогда для  $\delta_1 g$  получаем

$$\delta_1 g = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{l_c} (g - \gamma) \frac{B - \kappa}{\ell^2} d\ell - H_0 \int_{l_c}^{\infty} (g - \gamma) \frac{d\ell}{\ell^2}. \quad (29)$$

Продолжим

$$H - H_0 = -H_0 \frac{\ell^2}{\ell_c^2} \left(2 - \frac{\ell^2}{\ell_c^2}\right),$$

полагая  $\frac{\ell}{\ell_c} = \infty$ , находим

$$\delta_1 g = -\frac{H_0}{\ell_c} \int_0^1 (g - \gamma)(2 - x^2) dx - \frac{H_0}{\ell_c} \int_1^{\infty} (g - \gamma) \frac{dx}{x^2}. \quad (30)$$

В этом же случае для  $\Delta'_1 g$  находим, имея в виду также  $\bar{\alpha} = 0$ ,

$$\begin{aligned} \Delta'_1 g &= -\frac{H_0}{\ell_c^2} \int_0^{l_c} (g - \gamma)(2 - \frac{\ell^2}{\ell_c^2}) \left[1 + \frac{H_0}{\ell_c^2} \frac{\ell^2}{\ell_c^2} \left(2 - \frac{\ell^2}{\ell_c^2}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}} - \\ &- H_0 \int_{l_c}^{\infty} (g - \gamma) \frac{d\ell}{(\ell^2 + \ell_c^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (31)$$

Приняв  $\frac{\ell}{\ell_c} = \infty$ , получаем

$$\begin{aligned} \Delta'_1 g &= -\frac{H_0}{\ell_c} \int_0^1 (g - \gamma)(2 - x^2) \left[1 + \frac{H_0}{\ell_c^2} x^2 (2 - x^2)^2\right]^{-\frac{3}{2}} - \\ &- \frac{H_0}{\ell_c} \int_1^{\infty} (g - \gamma) [x^2 + (\frac{H_0}{\ell_c})^2]^{-\frac{3}{2}} x dx. \end{aligned} \quad (32)$$

В методе Арнольда при  $\bar{\ell} = 0$  имеем

$$\begin{aligned} \delta g &= -(H_0 - H_{\bar{\ell}}) \lim_{\varepsilon_0 \rightarrow 0} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} [(g - \gamma) - \Delta g_1^{\circ} - \Delta g_2^{\circ}] \frac{d\ell}{\ell^2} - \\ &- (H_0 - H_{\bar{\ell}}) \int_{\varepsilon}^{\infty} [(g - \gamma) - \Delta g_1^{\circ} - \Delta g_2^{\circ}] \frac{d\ell}{\ell^2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Воспользовавшись тождеством

$$\Delta g^{\circ} = \Delta g_1^{\circ} + \Delta g_2^{\circ} = \Delta g_1^{\circ} \frac{(H_0 + \alpha)^3}{(H_0 + \alpha)^3} + \Delta g_2^{\circ} \frac{(H_0 - B)^3}{(H_0 - B)^3}$$

и формулой (12), представим разность аномалий силы тяжести под знаком интеграла в уравнении (33) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & -[(g-\gamma) - \Delta g^o] = \Delta g^o_{\delta_1} (H_o + a)^2 \left[ \frac{H_o + a}{(H_o + a)^3} - \frac{H + a}{[(H + a)^2 + \ell^2]^{3/2}} \right] + \\
 & + \Delta g^o_{\delta_2} (H_o - b)^2 \left[ \frac{H_o - b}{(H_o - b)^3} - \frac{H - b}{[(H - b)^2 + \ell^2]^{3/2}} \right] = \\
 & = \Delta g^o_{\delta_1} \left[ 1 - \frac{\frac{H + a}{H_o + a}}{\left[ \frac{(H + a)^2}{(H_o + a)^2} + \frac{\ell^2}{(H_o + a)^2} \right]^{3/2}} \right] + \Delta g^o_{\delta_2} \left[ 1 - \frac{\frac{H - b}{H_o - b}}{\left[ \frac{(H - b)^2}{(H_o - b)^2} + \frac{\ell^2}{(H_o - b)^2} \right]^{3/2}} \right] = \\
 & = \Delta g^o_{\delta_1} \left[ 1 - \frac{1 - \frac{H_o - H}{H_o + a}}{\left[ 1 - \frac{2(H_o - H)}{H_o + a} + \left( \frac{H_o - H}{H_o + a} \right)^2 + \frac{\ell^2}{(H_o + a)^2} \right]^{3/2}} \right] + \Delta g^o_{\delta_2} \left[ 1 - \frac{1 - \frac{H_o - H}{H_o - b}}{\left[ 1 - \frac{2(H_o - H)}{H_o - b} + \left( \frac{H_o - H}{H_o - b} \right)^2 + \frac{\ell^2}{(H_o - b)^2} \right]^{3/2}} \right].
 \end{aligned}$$

Поскольку  $\ell$  и  $H_o - H$  малы в сравнении с  $H_o + a$  и  $H_o - b$ , определяя  $H_o - H$  по (7) и раскладывая в ряды, можно ограничиться следующими членами:

$$\begin{aligned}
 & -[(g-\gamma) - \Delta g^o] = \\
 & = \Delta g^o_{\delta_1} \left\{ -\frac{4H_o}{H_o + a} \frac{\ell^2}{\ell_c^2} + \frac{2H_o}{H_o + a} \frac{\ell^4}{\ell_c^4} + \frac{3}{2} \frac{\ell^2}{(H_o + a)^2} - \frac{12H_o^2}{(H_o + a)^2} \frac{\ell^4}{\ell_c^2} - \frac{15}{8} \frac{\ell^4}{(H_o + a)^4} + \frac{124}{(H_o + a)^3} \frac{\ell^4}{\ell_c^2} \right\} + \\
 & + \Delta g^o_{\delta_2} \left\{ -\frac{4H_o}{H_o - b} \frac{\ell^2}{\ell_c^2} + \frac{2H_o}{H_o - b} \frac{\ell^4}{\ell_c^4} + \frac{3}{2} \frac{\ell^2}{(H_o - b)^2} - \frac{12H_o^2}{(H_o - b)^2} \frac{\ell^4}{\ell_c^2} - \frac{15}{8} \frac{\ell^4}{(H_o - b)^4} + \frac{12H_o}{(H_o - b)^3} \frac{\ell^4}{\ell_c^2} \right\}. \quad (34)
 \end{aligned}$$

Подставив выражение (34) в (33) и выполнив интегрирование, получим

$$\begin{aligned}
 \delta g = & (H_o - H_\xi) \left\{ \frac{\Delta g^o_{\delta_1} \varepsilon}{\ell_c^2} \left( -\frac{4H_o}{H_o + a} + \frac{3}{2} \frac{\ell_c^2}{(H_o + a)^2} \right) + \right. \\
 & + \frac{\Delta g^o_{\delta_1} \varepsilon^3}{\ell_c^4} \left( \frac{2}{3} \frac{H_o}{H_o + a} - \frac{4H_o^2}{(H_o + a)^2} - \frac{5}{8} \frac{\ell_c^4}{(H_o + a)^4} + \frac{4H_o \ell_c^2}{(H_o + a)^3} + \right. \\
 & \left. + \frac{\Delta g^o_{\delta_2} \varepsilon}{\ell_c^2} \left( -\frac{4H_o}{H_o - b} + \frac{3}{2} \frac{\ell_c^2}{(H_o - b)^2} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{\Delta g^o_{\delta_2} \varepsilon^3}{\ell_c^4} \left( \frac{2}{3} \frac{H_o}{H_o - b} - \frac{4H_o^2}{(H_o - b)^2} - \frac{5}{8} \frac{\ell_c^4}{(H_o - b)^4} + \frac{4H_o \ell_c^2}{(H_o - b)^3} \right) \right\} - \\
 & - (H_o - H_\xi) \int_e^\infty [(g - \gamma) - \Delta g^o] \frac{d\ell}{\ell^2}. \quad (35)
 \end{aligned}$$

Влияние дальних зон при вычислении поправок в аномалии силы тяжести и уклонений отвеса удобно определить путем разложения подинтегральной функции этих выражений в ряды по степеням  $\xi = l : \ell$ , имея в виду, что

$$K = \frac{\xi}{2} \left( 1 + \frac{1}{4} \kappa^2 + \frac{9}{64} \kappa^4 + \frac{25}{256} \kappa^6 + \frac{1225}{16384} \kappa^8 + \dots \right);$$

$$E = \frac{\xi}{2} \left( 1 - \frac{1}{4} \kappa^2 - \frac{3}{64} \kappa^4 - \frac{5}{256} \kappa^6 - \frac{175}{16384} \kappa^8 - \dots \right).$$

Поскольку в дальних зонах  $H = 0$ , из уравнения (I2) находим

$$g - g' \approx \Delta g_1^o (H_o + \alpha)^2 \alpha z^3 \left( 1 - \frac{3}{2} \alpha^2 z^2 \right) - \Delta g_2^o (H_o - \beta)^2 \beta z^3 \left( 1 - \frac{3}{2} \beta^2 z^2 \right),$$

при вычислении по формулам Еремеева (1969)

$$\kappa^2 \approx 4\bar{\ell}\xi (1 - 2z\bar{\ell} + 3z^2\bar{\ell}^2 - z^3\bar{H}^2 - 4\bar{\ell}^3z^3 + 4\bar{H}^2\bar{\ell}z^3),$$

при вычислении по формулам Молоденского и Арнольда

$$\kappa^2 \approx 4\bar{\ell}\xi (1 - 2z\bar{\ell} + 3z^2\bar{\ell}^2 - 4\bar{\ell}^3z^3).$$

Для эллиптических интегралов в первом случае получаем:

$$K \approx \frac{\xi}{2} \left( 1 + \bar{\ell}z + \frac{1}{4} \bar{\ell}^2 z^2 + \frac{1}{4} \bar{\ell}^3 z^3 - \bar{H}^2 \bar{\ell} z^3 + \frac{9}{64} \bar{\ell}^4 z^4 - \frac{1}{2} \bar{H}^2 \bar{\ell}^2 z^4 \right);$$

$$E \approx \frac{\xi}{2} \left( 1 - \bar{\ell}z + \frac{5}{4} \bar{\ell}^2 z^2 - \frac{5}{4} \bar{\ell}^3 z^3 + \bar{H}^2 \bar{\ell} z^3 + \frac{81}{64} \bar{\ell}^4 z^4 - \frac{5}{2} \bar{H}^2 \bar{\ell}^2 z^4 \right). \quad (36)$$

Во втором из этих случаев нужно принять  $\bar{H} = 0$ . Представив

$$\frac{1}{Q} \approx z \left( 1 - \bar{\ell}z + \bar{\ell}^2 z^2 - \frac{1}{2} \bar{H}^2 z^2 - \bar{\ell}^3 z^3 + \frac{3}{2} \bar{\ell} \bar{H}^2 z^3 \right);$$

$$\frac{\bar{\ell} - \ell}{(\bar{\ell} - \ell)^2 + \bar{H}^2} = \sim - z \left( 1 + \bar{\ell}z + \bar{\ell}^2 z^2 - \bar{H}^2 z^2 + \bar{\ell}^3 z^3 - 3\bar{H}^2 \bar{\ell} z^3 \right),$$

для влияния области  $L_1 \leq \ell \leq \infty$  на  $\xi_o$ , найдем

$$\xi_o (L_1 \leq \ell \leq \infty) \approx - \frac{\bar{\ell}}{8\gamma L_1^2} \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{\bar{\ell}^2}{L_1^2} - 3 \frac{\bar{H}^2}{L_1^2} \right) (\Delta g_1^o (H_o + \alpha)^2 \alpha -$$

$$- \Delta g_2^o (H_o - \beta)^2 \beta) + \frac{\bar{\ell}}{8\gamma L_1^2} (\Delta g_1^o (H_o + \alpha)^2 \alpha^3 - \Delta g_2^o (H_o - \beta)^2 \beta^3). \quad (37)$$

Влияние этой же области на  $\xi$  найдем, положив в выражении (37)  $\bar{H} = 0$ .

Представив теперь

$$\frac{1}{(\ell - \bar{\ell})^2 + \bar{H}^2} \approx z^2 (1 + 2\bar{\ell}z + 3\bar{\ell}^2 z^2 - \bar{H}^2 z^2),$$

для влияния области  $L_2 \leq \ell \leq \infty$  при  $L_2 > L_1$  на  $\Delta g$  найдем

$$\begin{aligned} \Delta g(L_2 \leq \ell \leq \infty) \approx & - \Delta g_1^0 (H_0 + \alpha)^2 \alpha \bar{H} \left( \frac{1}{4L_2^4} + \frac{3\bar{\ell}^2}{8L_2^6} - \frac{\bar{H}^2}{4L_2^6} - \frac{\alpha^2}{4L_2^6} \right) + \\ & + \Delta g_2^0 (H_0 - \beta)^2 \beta \bar{H} \left( \frac{1}{4L_2^4} + \frac{3\bar{\ell}^2}{8L_2^6} - \frac{\bar{H}^2}{4L_2^6} - \frac{\beta^2}{4L_2^6} \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Поскольку

$$\frac{1}{(\ell + \bar{\ell})(\ell - \bar{\ell})^2} \approx z^3 (1 + \bar{\ell}z + 2\bar{\ell}^2 z^2 + 2\bar{\ell}^3 z^3 + 3\bar{\ell}^4 z^4),$$

для влияния области  $L_2 \leq \ell \leq \infty$  на  $\delta_1 g$  найдем

$$\begin{aligned} \delta_1 g(L_2 \leq \ell \leq \infty) \approx & - \Delta g_1^0 (H_0 + \alpha)^2 \alpha \bar{H} \left( \frac{1}{4L_2^4} + \frac{3\bar{\ell}^2}{8L_2^6} - \frac{\alpha^2}{4L_2^6} \right) + \\ & + \Delta g_2^0 (H_0 - \beta)^2 \beta \bar{H} \left( \frac{1}{4L_2^4} + \frac{3\bar{\ell}^2}{8L_2^6} - \frac{\beta^2}{4L_2^6} \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Влияние дальних зон на  $\delta_1 \xi$ ,  $\delta_2 \xi$ ,  $\Delta \xi$ ,  $\Delta' \xi$ ,  $\delta_2 g$ ,  $\Delta_2 g$  и следующие поправки в аномалии силы тяжести и уклонения отвеса можно вычислить с помощью формулы численного интегрирования Гаусса, определив предварительно необходимые величины при значениях  $\ell$ , определяемых числом ординат.

Влияние области  $L_2 \leq \ell \leq \infty$  на поправку  $\delta g$  Арнольда составит

$$\begin{aligned} \delta g(L_2 \leq \ell \leq \infty) = & -(H_\delta - H_\xi) \Delta g_1^0 (H_0 + \alpha)^2 \alpha \left( \frac{1}{4L_2^4} - \frac{\alpha^2}{4L_2^6} + \frac{3\bar{\ell}^2}{8L_2^6} \right) + \\ & + (H_\delta - H_\xi) \Delta g_2^0 (H_0 - \beta)^2 \beta \left( \frac{1}{4L_2^4} - \frac{\beta^2}{4L_2^6} + \frac{3\bar{\ell}^2}{8L_2^6} \right) + \\ & + (H_\delta - H_\xi) (g - \gamma) \left( \frac{1}{L_2} + \frac{3}{4} \frac{\bar{\ell}^2}{L_2^3} + \frac{45}{64} \frac{\bar{\ell}^4}{L_2^5} \right). \end{aligned} \quad (40)$$

На описанной модели Земли вычислены уклонения отвеса по указанным методам при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned} H_0 &= 4 \text{ км}, \quad \ell_c = 12 \text{ км}, \quad \alpha = 4 \text{ км}, \quad \beta = 2 \text{ км}, \\ \Delta g_1^0 &= 150 \text{ мгл}, \quad \Delta g_2^0 = 100 \text{ мгл}, \quad \gamma = 980,2 \text{ гал}, \\ L_1 &= 100 \text{ км}, \quad L_2 = 150 \text{ км}, \quad h = 1 \text{ м}. \end{aligned}$$

При этих параметрах было удобно вычислять так:

$$\sin^2 \alpha = \frac{H^2}{S^2} \left( 4 + \frac{H^2}{S^2} \right)^{-1},$$

если  $\ell$  выражено в километрах.

Программирование и счет на ЭВМ "Урал-3" выполнены в отделе геодезических вычислений ЦНИИГАиК. Получение и синтетических значений уклонения отвеса и аномалии силы тяжести на модели особого труда не представляет. Наиболее сложным и трудоемким является вычисление несобственных значений уклонений отвеса и поправок в аномалии силы тяжести.

Как видно из приведенных выше формул, эти величины можно представить в виде несобственных условно сходящихся интегралов

$$J(\ell, \bar{\ell}) = \int_{\alpha}^{\ell} F_1(l) F_2(l, \bar{\ell}) dl. \quad (4I)$$

Здесь  $F_1(\ell)$  есть аномалия силы тяжести или поправка к этой аномалии. Функция  $F_2(\ell)$  зависит лишь от координаты  $\ell$  текущей точки, но в свою очередь при вычислении  $\delta, \xi, \nabla, \xi, \delta \xi$  и поправок второго приближения в аномалии силы тяжести будет представлена интегралом типа (4I).

$F_2(\ell, \bar{\ell})$  - ядро интеграла, зависящее как от значения координаты  $\ell$  текущей точки, так и от координаты  $\bar{\ell}$  исследуемой точки.

Такой вид формулы дает возможность составить для каждого метода лишь по две программы - одну для счета уклонений отвеса и поправок к ним, другую для счета поправок в аномалию силы тяжести.

В этом случае, полагая  $F_1(\ell) = (g - \gamma)$ , получим, например,  $\delta, \xi$  и  $\nabla, \xi$  и  $\delta \xi$  на  $\delta, g$  получим соответственно  $\delta, \xi$  и  $\delta \xi$  и т.д.

Непосредственного вычисления несобственных интегралов под знаком несобственного интеграла мы избежали, создавая довольно густую таблицу поправок в аномалии силы тяжести, по которой затем, при последующем интегрировании, поправка на текущее значение  $\ell$  вычислялась с помощью линейной интерполяции. Шаг таблицы принят разным: 50 м на вершине и подножии хребта, 100 м на его склоне; далее при удалении от хребта шаг увеличен до нескольких километров. Опыт показал, что действительно при  $\ell > 100$  км все поправки в аномалии практически равны нулю. Точность вычисления поправок 0,001 мгл. Поправка по разностям показывала возможность линейной интерполяции с точностью не ниже 0,01 мгл.

Полные эллиптические интегралы  $E$  и  $K$ , входящие в  $F_2(\ell, \bar{\ell})$ , вычислены по стандартным программам 462 003 и 462 004, составленным в лаборатории математических методов и программирования. В них эллиптические интегралы представлены полиномами четвертой степени относительно величины  $\eta = 1 - \kappa^2$ , что дает погрешность результата  $\leq 1,5 \cdot 10^{-8}$ . Коэффициенты полинома взяты из книги Хастингса (1955).

Для вычисления несобственных интегралов использована стандартная программа 462-047, составленная в той же лаборатории.

Метод вычисления, реализованный в ней, подробно описан на стр.27-29. Профиль модели представлен на рис.4.

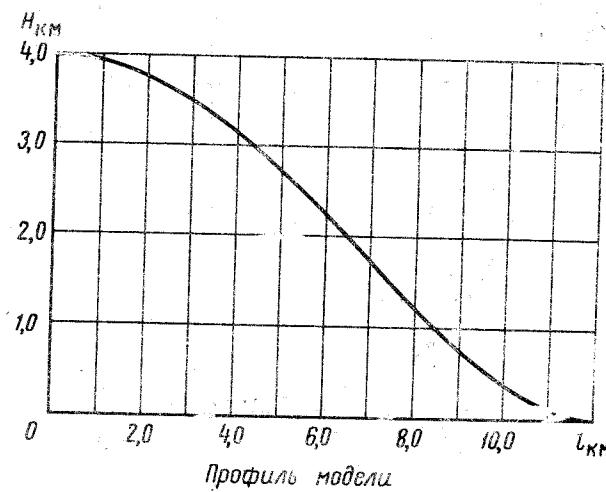


Рис.4

Результаты вычислений представлены на графиках (рис. 5-9) и в таблицах поправок в аномалии силы тяжести и уклонений отвеса (табл. I-5). Табл. I приведена для иллюстрации. Поправки за влияние дальних зон оказались пренебрежимо малы: влияние на  $\xi$  не больше 0,00012. Влияние на  $\Delta_g$  и  $\delta_g$  не больше 0,00008 мгл.

Влияние последнего члена формулы (40) на значение  $\delta_g$  весьма значительно (достигает нескольких миллигаллов) и учтено по приведенной формуле. Влияние остальных членов этой формулы также пренебрежимо мало: около 0,00006 мгл.

Как следует из табл.I, поправки  $\Delta_g$  и  $\Delta'_g$  имеют тот же порядок величины, что и поправки  $\delta_g$  Молоденского. Поправки  $\Delta''_g$  и  $\Delta'_g$  имеют тот же порядок величины, что и поправки  $\delta_g$  в способе Молоденского. Как и следовало ожидать, поправки  $\Delta'_g$  и  $\Delta''_g$  близки одна к другой. Систематические расхождения около 0,1 мгл

заметны только вблизи вершины модели, где большие аномалии вертикального градиента силы тяжести. Эти расхождения быстро убывают до нуля. Ввиду близости поправок  $\Delta_1^g$  и  $\Delta_2^g$  значения поправок  $\Delta_2^g$  мы не вычисляли, эти поправки приняты равными  $\Delta_1^g$ .

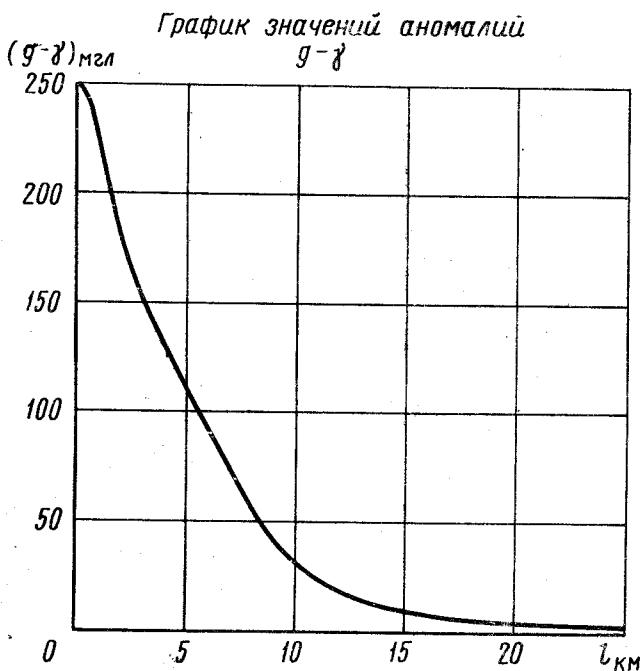


Рис.5

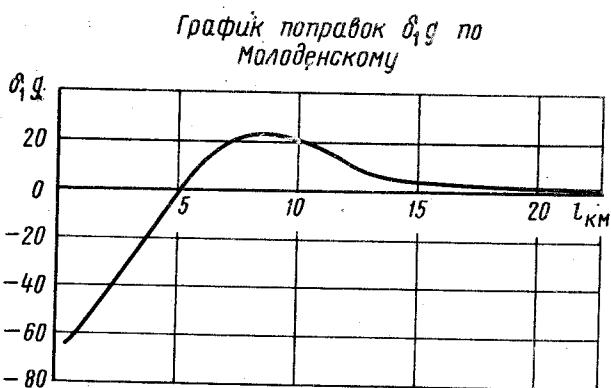


Рис.6

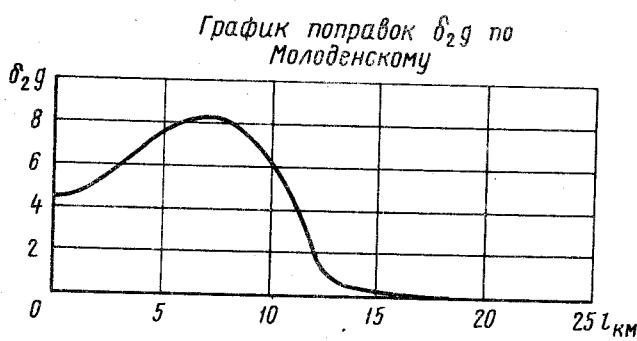


Рис.7

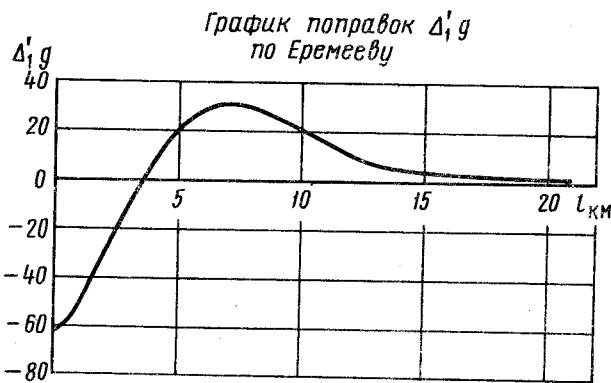


Рис.8

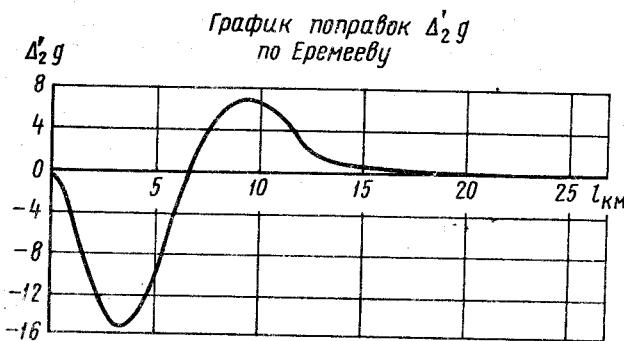


Рис.9

Наши вычисления иллюстрируют высокую точность и быструю сходимость способа Молоденского решения его уравнения. Однако большие поправки за наклон и большие поправки  $\Delta_2 \xi$  осложняют вычисления. Весьма малая поправка второго приближения определена как разность больших величин (до 3").

Сходимость способов, основанного на способе Нёймана и описанных Еремеевым, оказалась гораздо более медленной; все же максимальные расхождения убывают от приближения к приближению более чем в 2 раза. Наша модель иллюстрирует случай, когда влияние топографических масс не выделено из аномалий силы тяжести. При выделении влияния некоторого топографического массива из земного гравитационного поля с последующим восстановлением влияния этого же массива непосредственно в определяемом элементе поля сходимость этих способов будет, вероятно, более быстрой. Преимущество этих способов - в единобразии формул всех приближений и в упрощениях требований к условиям задания земной поверхности. Описанные\* преобразования, можно применить к методам вычислений, основанных на способе Нёймана.

Способ Арнольда связан с перераспределением влияния близких и дальних зон при гравиметрических выводах. Поскольку поправки, вытекающие из теории Молоденского, в высоты квазигеоида и уклонение отвеса при сложной физической поверхности значительны, а поправки  $\delta g$  в аномалии силы тяжести в ближайших окрестностях исследуемой точки в способе Арнольда стремятся к нулю вместе с расстоянием до этой точки, значения  $\delta g$  могут быть значительными в дальних зонах. В нашем случае (расстояние фиксированной точки от вершины модели равно 9 км) поправка  $\delta g$  в вершине модели достигла +399,9 мгл, т.е. превзошла аномалию силы тяжести более чем в 1,5 раза.

Л.П.Неллинен (1969) сделал вывод, что  $\delta \xi = \delta_1 \xi$ .

Обоснование этого вывода связано с композицией сингулярных интегралов и использованием свойств искусственно введенной функции, поэтому нам казалось полезным испытание этого вывода на модели. При  $\bar{r} = 9$  км действительно  $\delta \xi = \delta_1 \xi = +4,03$ . Поскольку в способе Арнольда возрастают требования к точности учета дальних зон, этот способ едва ли пригоден для практических приложений.

\* См. стр. 49-56. В.Ф. Е р е м е е в. О решении уравнений, определяющих гравитационное поле и фигуру Земли.

Таблица I. Аномалии силы тяжести и поправки к ним

$\bar{U}$ , км	$g - g'$ , мил	Поправки в аномалии силы тяжести, мил								Арнольда $\delta g$
		Молоденского		Неймана		Еремеева				
		$\delta_1 g$	$\delta_2 g$	$\Delta_1 g$	$\Delta_2 g$	$\Delta'_1 g$	$\Delta'_2 g$	$\Delta''_1 g$	$\Delta''_2 g$	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	10
0,0	+250,00	-65,89	+4,51	-68,34	-62,18	-0,53	-62,04	-0,53	+399,9	
0,5	+242,11	-63,66	+4,56	-66,14	-59,08	-1,59	-58,91	-1,59	+356,4	
1,0	+222,95	-58,16	+4,72	-60,61	-51,20	-4,27	-51,07	-4,27	+262,7	
1,5	+200,86	-51,28	+4,96	-53,67	-41,19	-7,56	-41,10	-7,56	+176,8	
2,0	+181,15	-44,21	+5,27	-46,51	-30,81	-10,69	-30,76	-10,69	+120,9	
2,5	+165,12	-37,23	+5,63	-39,43	-20,72	-13,17	-20,68	-13,17	+89,8	
3,0	+152,12	-30,26	+6,02	-32,33	-11,08	-14,68	-11,06	-14,68	+72,5	
3,5	+141,05	-23,19	+6,42	-25,13	-2,04	-15,09	-2,02	-15,09	+61,5	
4,0	+131,01	-16,02	+6,83	-17,81	+6,23	-14,37	+6,24	-14,37	+52,6	
4,5	+121,39	-8,89	+7,21	-10,52	+13,50	-12,64	+13,51	-12,64	+44,2	
5,0	+111,87	-1,99	+7,56	-3,45	+19,58	-10,15	+19,58	-10,15	+35,8	
5,5	+102,31	+4,44	+7,85	+3,14	+24,32	-7,19	+24,32	-7,19	+27,5	
6,0	+92,72	+10,15	+8,08	+9,04	+27,68	-4,07	+27,70	-4,07	+19,9	
6,5	+83,22	+14,97	+8,22	+14,03	+29,70	-1,09	+29,71	-1,09	+13,3	
7,0	+73,98	+18,75	+8,27	+17,99	+30,50	+1,55	+30,50	+1,55	+7,9	
7,5	+65,15	+21,44	+8,22	+20,86	+30,26	+3,69	+30,26	+3,69	+4,1	
8,0	+56,92	+23,07	+8,05	+22,66	+29,19	+5,29	+29,19	+5,29	+1,6	
8,5	+49,39	+23,73	+7,76	+27,51	+6,34	+27,51	+6,34	+6,34	+0,3	

П р о д о л ж е н и е т а с л . 1

I	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9,0	+ 42,66	+ 23,54	+7,35	+23,45	+25,42	+ 6,88	+25,42	+ 6,88	0,0
9,5	+ 36,75	+ 22,67	+6,82	+22,72	+23,II	+ 6,99	+23,II	+ 6,99	+ 0,2
10,0	+ 31,67	+ 21,27	+6,17	+21,46	+20,69	+ 6,75	+20,69	+ 6,75	+ 0,8
10,5	+ 27,37	+ 19,48	+5,41	+19,78	+18,27	+ 6,23	+18,27	+ 6,23	+ 1,4
II,0	+ 23,79	+ 17,39	+4,53	+17,78	+15,89	+ 5,48	+15,89	+ 5,48	+ 1,9
II,5	+ 20,87	+ 15,00	+3,51	+15,46	+13,51	+ 4,53	+13,51	+ 4,53	+ 2,1
12,0	+ 18,53	+ 11,89	+2,15	+12,39	+10,68	+ 3,18	+10,68	+ 3,18	+ 2,0
15,0	+ 10,03	+ 4,16	+0,20	+ 4,54	+ 3,89	+ 0,72	+ 3,89	+ 0,72	+ 1,2
20,0	+ 4,43	+ 1,50	+0,011	+ 1,68	+ 1,45	+ 0,21	+ 1,45	+ 0,21	+ 0,6
40,0	+ 0,58	+ 0,17	-0,003	+ 0,19	+ 0,16	+ 0,019	+ 0,16	+ 0,019	+ 0,09
60,0	+ 0,17	+ 0,05	-0,001	+ 0,06	+ 0,048	+ 0,005	+ 0,048	+ 0,005	+ 0,03
80,0	+ 0,073	+ 0,020	0	+ 0,02	+ 0,020	+ 0,002	+ 0,020	+ 0,002	+ 0,01
100,0	+ 0,038	+ 0,010	0	+ 0,01	+ 0,010	+ 0,001	+ 0,010	+ 0,001	+ 0,006

Таблица 2. Уклонения отвеса по формулам Молоденского

$\bar{\ell}$ , км	$\bar{\alpha}$	$\xi$	В нулевом приближении				В первом приближении				Во втором приближении			
			$\xi_s$	Раз- ность (4)-(3)	Интег- ральн. $\delta_1 \xi$	Поправ- ка за наклон $\delta_1 \xi$	$\xi_s - \xi + \delta_1 \xi$	Раз- ность (8)-(3)	$\nabla_1 \xi$	Поправ- ка за наклон $\delta_2 \xi$	$\xi_2 = \xi_s +$ $+\delta_1 \xi + \delta_2 \xi$	(13)-(3)	$\xi_2 - \xi$	Раз- ность (13)-(3)
I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	I3	I4	
0,5	3'10'	6'87	6''14	-0''73	-2''08	2''82	6''88	+0''01	-0''06	-0''74	+0''77	+6''85	-0''02	
1,0	6 18	II,98	10,61	-1,37	-3,75	5,18	12,04	0,06	-0,08	-1,35	+1,40	+12,01	+0,03	
1,5	9 19	14,99	13,05	-1,94	-4,92	6,93	15,06	0,07	-0,11	-1,77	+1,83	+15,01	+0,02	
2,0	12 11	16,56	14,15	-2,41	-5,73	8,24	16,66	0,10	-0,13	-2,01	+2,08	+16,60	+0,04	
2,5	14 53	17,44	14,62	-2,82	-6,31	9,23	17,54	0,10	-0,13	-2,08	+2,15	+17,48	+0,04	
3,0	17 21	18,09	14,92	-3,17	-6,72	10,00	18,20	0,11	-0,11	-1,99	+2,04	+18,14	+0,05	
3,5	19 35	18,70	15,23	-3,47	-6,97	10,56	18,82	0,12	-0,08	-1,74	+1,77	+18,77	+0,07	
4,0	21 33	19,30	15,58	-3,72	-7,05	10,89	19,42	0,12	-0,03	-1,33	+1,33	+19,39	+0,09	
4,5	23 15	19,89	15,94	-3,95	-6,92	10,98	20,00	0,11	+0,03	-0,80	+0,76	+19,99	+0,10	
5,0	24 40	20,39	16,26	-4,13	-6,59	10,81	20,48	0,09	+0,11	-0,19	+0,10	+20,50	+0,11	
5,5	25 46	20,77	16,50	-4,27	-6,05	10,39	20,84	0,07	+0,21	+0,45	-0,60	+20,90	+0,13	
6,0	26 34	20,97	16,60	-4,37	-5,34	9,76	21,02	0,05	+0,31	+1,07	-1,29	+21,11	+0,14	
6,5	27 02	20,38	16,54	-4,44	-4,49	8,94	20,99	0,01	+0,43	+1,61	-1,90	+21,13	+0,15	
7,0	27 10	20,77	16,32	-4,45	-3,56	7,99	20,75	-0,02	+0,56	+2,03	-2,40	+20,94	+0,17	
7,5	26 55	20,37	15,93	-4,44	-2,59	6,36	20,30	-0,07	+0,69	+2,29	-2,75	+20,53	+0,16	

П р о д о л ж е н и е т а б л . 2

I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	II	-2	13	14
8,0	26°17'	15,79	15,39	-4,40	-1,62	5,92	19,69	-0,10	+0,82	+2,40	-2,94	+19,97	+0,18
8,5	25 12	19,06	14,74	-4,32	-0,72	4,80	18,91	-0,15	+0,95	+2,35	-2,98	+19,23	+0,17
9,0	23 38	18,22	13,99	-4,23	+0,10	3,93	18,02	-0,20	+1,07	+2,16	-2,87	+18,33	+0,16
9,5	21 30	17,31	13,19	-4,12	+0,82	3,05	17,C6	-0,25	+1,18	+1,88	-2,65	+17,47	+0,16
10,0	18 45	16,35	12,36	-3,99	+1,43	2,26	16,05	-0,37	+1,28	+1,52	-2,35	+16,50	+0,15
10,5	15 18	15,37	11,53	-3,84	+1,92	1,58	15,03	-0,34	+1,36	+1,12	-2,00	+15,51	+0,14
II,0	II 03	14,40	10,73	-3,67	+2,32	0,98	14,03	-0,37	+1,42	+0,72	-1,62	+14,55	+0,15
II,5	5 57	13,45	9,97	-3,48	+2,32	0,46	13,35	-0,40	+1,44	+0,33	-1,25	+13,57	+0,12
12,0	0 00	12,54	9,27	-3,27	+2,82	0,00	12,03	-0,45	+1,44	0,00	-0,93	+12,60	+0,06

Таблица 3. Угловый откес, соответствующие способу Неймана

$\bar{L}$ , км	$\alpha$	$\xi$	В угловом проблеме II				Равновесия приращения			
			Интег- ральный член	Прира- зка за наклон	$\xi_0$ (4) + (5)	Рас- стояние кости (6) - (3)	Интег- ральный член	Потра- тка за наклон	$\xi_0$ (6) + (8) + (9)	Рав- нение (10) + (3)
I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	II
0,5	3°10'	6,87	6,"34	5,"83	3,"17	-2,"30	-2,"00	-0,"77	+ 6,"40	-0,"47
1,0	6 18	II, 98	10,98	5,17	16,15	+4,17	-3,79	-1,41	-10,95	-1,03
1,5	9 19	14,99	13,57	6,33	20,50	+5,51	-4,98	-1,85	+13,67	-1,32
2,0	12 II	16,56	14,80	8,24	23,04	+6,48	-5,79	-2,11	+15,14	-1,42
2,5	14 53	17,44	15,37	9,23	24,60	+7,16	-6,36	-2,20	+16,04	-1,40
3,0	17 21	18,09	15,75	10,09	25,75	+7,65	-6,75	-2,12	+16,87	-1,22
3,5	19 35	18,70	16,10	10,56	26,66	+7,96	-6,97	-1,88	+17,81	-0,89
4,0	21 33	19,30	16,48	10,89	27,37	+8,07	-7,01	-1,48	+18,88	-0,42
4,5	23 15	19,89	16,84	10,98	27,82	+7,93	-6,84	-0,95	+20,03	+0,14
5,0	24 40	20,39	17,15	10,81	27,96	+7,57	-6,46	-0,33	+21,17	+0,78
5,5	25 46	20,77	17,35	10,39	27,74	+6,97	-5,91	+6,32	+22,16	+1,39
6,0	26 14	20,97	17,41	9,75	27,16	+6,19	-5,14	+0,95	+22,97	+2,00
6,5	27 12	20,98	17,30	8,94	26,24	+5,26	-4,27	+7,51	+23,48	+2,50
7,0	27 IC	20,77	17,02	7,98	25,00	+4,23	-3,32	+1,94	+23,62	+2,95
7,5	26 35	20,37	16,58	6,97	23,55	+3,18	-2,33	+2,23	-23,45	+3,03
8,0	26 17	19,79	16,00	5,92	21,92	+2,13	-1,37	+2,35	-22,90	-3,11
8,5	25 12	19,06	15,31	4,89	20,20	+1,14	-0,46	+2,33	-22,07	+3,01

П р о д о л ж е н и е т а б л . 3

	I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	II
9,0	23°38'	18°22	14°54	3°93	18°47	+0°25	+0°35	+2°16	+20°98	+2°76	
9,5	21 30	17,31	13,73	3,05	16,78	-0,53	+1,06	+1,88	+19,72	+2,41	
10,0	18 45	16,35	12,91	2,26	15,17	-1,18	+1,66	+1,53	+18,36	+2,01	
10,5	15 18	15,37	12,10	1,57	13,67	-1,70	+2,15	+1,14	+16,96	+1,59	
11,0	II 03	14,40	11,32	0,98	12,30	-2,10	+2,54	+0,73	+15,57	+1,17	
11,5	5 57	13,45	10,59	0,45	11,04	-2,41	+2,84	+0,34	+14,22	+0,77	
12,0	0 00	12,54	9,94	0,00	9,94	-2,60	+3,06	0,00	+13,00	+0,46	

Таблица 4. Уклонения отвеса по формулам Еремеева (1969)

$\bar{L}$ , км	$\bar{x}$	$\xi$	В нулевом приближении				В первом приближении				Во втором приближении			
			Интеграль-ный член в $\xi_0'$	Пол-рав-ка за-нак-лон в $\xi_0'$	(6)-(5)	(10)-(3)	Интег-раль-ный член в $\Delta'_1 \xi$	(6)+(9)+ $\xi'_1$	(10)-(3)	Интег-раль-ный член в $\Delta'_2 \xi$	(10)+(12)+ $\xi'_1$	(10)-(3)	Интег-раль-ный член в $\Delta'_2 \xi$	(10)+(12)+ $\xi'_2$
I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	II	I2	I3	I4	I5
0,5	3010'	6,87	6,"86	2,"82	9,"68	+2,"81	-2,"65	-0,"69	+ 6,"34	-0,"53	+0,"51	-0,"02	6,"83	-0,"04
1,0	6 18	II, 98	5, II	16, 99	+5, 01	-4, 67	-1, 18	+II, I4	-0, 84	+0, 86	-0, 10	II, 90	-0, 08	
1,5	9 19	14, 99	14, 68	6, 75	21, 43	+6, 44	-5, 89	-1, 38	+I4, I6	-0, 83	+0, 75	-0, 25	I4, 66	-0, 33
2,0	12 11	16, 56	15, 94	7, 87	23, 81	+7, 25	-6, 45	-1, 34	+I6, 02	-0, 54	+0, 47	-0, 46	I6, 03	-0, 53
2,5	14 53	17, 44	16, 41	8, 62	25, 03	+7, 59	-6, 48	-1, 08	+I7, 47	+0, 03	+0, 01	-0, 69	16, 79	-0, 65
3,0	17 21	18, 09	16, 54	9, 11	25, 65	+7, 56	-6, 32	-0, 66	+I8, 67	+0, 58	-0, 54	-0, 88	I7, 25	-0, 84
3,5	19 35	18, 70	16, 53	9, 37	25, 90	+7, 20	-5, 84	-0, 14	+I9, 92	+I, 22	-I, 10	-I, 00	I7, 82	-0, 88
4,0	21 33	19, 30	16, 48	9, 42	25, 90	+6, 60	-5, 12	+0, 45	+21, 23	+I, 93	-I, 59	-I, 03	18, 61	-0, 69
4,5	23 15	19, 89	16, 33	9, 27	25, 60	+5, 71	-4, 28	+I, 03	+22, 35	+2, 46	-I, 98	-0, 96	I9, 41	-0, 48
5,0	24 40	20, 39	16, 12	8, 93	25, 05	+4, 66	-3, 37	+I, 56	+23, 24	+2, 85	-2, 22	-0, 81	20, 21	-0, 18
5,5	25 46	20, 77	15, 81	8, 43	24, 24	+3, 47	-2, 42	+2, 00	+23, 82	+3, 05	-2, 32	-0, 59	20, 91	+0, 14
6,0	26 34	20, 97	15, 40	7, 80	23, 20	+2, 23	-I, 49	+2, 33	+24, 04	+3, 07	-2, 28	-0, 34	21, 42	+0, 45
6,5	27 02	20, 98	14, 90	7, 09	21, 99	+I, 01	-0, 63	+2, 53	+23, 89	+2, 91	-2, 12	-0, 09	21, 68	+0, 70
7,0	27 10	20, 77	14, 33	6, 32	20, 65	-0, 12	+0, 14	+2, 61	+23, 40	+2, 63	-I, 90	+0, 13	21, 63	+0, F
7,5	26 55	20, 37	13, 70	5, 54	19, 24	-I, 13	+0, 82	+2, 57	+22, 63	+2, 26	-I, 60	+0, 31	21, 34	+0

П р о к о п и ч е с к и е т а б л . 4

I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
8,0	26°17'	19°79	13°02	4°76	17°72	-2°01	+1°39	+2°46	+21°61	+1°82	-1°28	+1°44	20°77	+0°93
8,5	25°12	19,06	12,34	4,00	16,34	-2,72	+1,86	+2,23	+20,43	+1,37	-0,96	+0,51	12,38	+0,92
9,0	23 38	18,22	11,66	3,30	14,96	-3,25	+2,25	+1,56	+19,17	+0,25	-0,64	+0,53	19,06	+0,34
9,5	21 30	17,31	11,00	2,64	15,62	-3,67	+2,56	+1,66	+17,66	+0,55	-0,35	+0,50	18,01	+0,70
10,0	18 45	16,35	10,38	2,03	12,41	-3,94	+2,32	+1,33	+16,53	+0,21	-0,06	-0,43	16,92	+0,78
10,5	15 13	15,37	9,82	1,46	11,28	-4,09	+3,01	+0,98	+15,30	-0,07	+0,19	+0,23	15,86	+0,45
II,0	II 03	II,40	9,31	0,94	10,25	-4,15	+3,22	+0,63	+14,10	-0,33	+0,41	+0,22	14,73	+0,33
II,5	5 37	13,45	8,86	0,45	9,31	-1,14	-3,38	-0,29	+12,98	-0,47	+0,60	+0,10	13,68	+0,22
12,0	0 00	12,54	8,45	0,00	8,45	-4,05	+2,51	-0,20	+11,95	-0,58	+0,74	0,00	12,70	+0,16

Таблица 5. Уклоненая отвеса по формулам Еремеева (24) и (25)

ξ	Δ	ξ	В нулевом приближении			В первом приближении			Во втором приближении		
			ξ''	Разность (4)-(3)	Δ <sub>1</sub> ξ	ξ''	(4)+(6)	Δ <sub>2</sub> ξ	Разность (7)-(3)	Δ <sub>2</sub> ξ	ξ''
I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	II	
0,5	3010'	6,87	9,67	+2,80	-3,36	+ 6,31	-0,56	+0,49	+ 6,80	-0,07	
1,0	6 18	11,98	16,99	+5,01	-5,84	+II,15	-0,83	+0,76	+II,91	-0,07	
1,5	9 19	14,99	21,43	+6,44	-7,25	+14,18	-0,81	+0,50	+14,68	-0,31	
2,0	12 II	16,56	23,80	+7,24	-7,75	+16,05	-0,51	+0,01	+16,06	-0,50	
2,5	14 53	17,44	25,03	+7,59	-7,63	+17,40	-0,04	-0,68	+16,72	-0,72	
3,0	17 21	18,09	25,65	+7,56	-6,98	+16,67	+0,58	-1,42	+17,25	-0,84	
3,5	19 35	18,70	25,91	+7,21	-5,96	+19,95	+1,25	-2,10	+17,85	-3,95	
4,0	21 33	19,30	25,90	+6,60	-4,67	+21,23	+1,93	-2,62	+16,61	-0,69	
4,5	23 15	19,89	25,60	+5,71	-3,25	+22,35	+2,46	-2,94	+19,41	-0,38	
5,0	24 40	20,39	25,04	+4,35	-1,81	+23,23	+2,84	-3,03	+20,20	-0,19	
5,5	25 46	20,77	24,24	+3,47	-0,42	+25,82	+3,05	-2,91	+20,81	+0,14	
6,0	26 34	20,97	23,20	+2,23	+0,84	+24,04	+3,37	-2,62	+21,42	+0,45	
6,5	27 02	20,98	21,99	+1,01	+1,90	+23,89	+2,91	-2,21	+21,63	+0,70	
7,0	27 10	20,77	20,65	-0,12	+2,75	+23,40	+2,63	-1,77	+21,63	+0,86	
7,5	26 55	20,37	19,23	-1,14	+3,39	+22,62	+2,25	-1,29	+21,33	+0,96	
8,0	26 17	19,79	17,73	-2,01	+3,82	+21,60	+1,81	-0,84	+20,76	+0,97	

П р о д о л ж е н и е т а б л . 5

I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	II
8,5	25°12'	19°06'	16°35	-2°71	+4°10	+20°45	+1°39	-0°45	+20°00	+0°94
9,0	23 38	18,22	14,96	-3,26	+4,21	+19,17	+0,95	-0,11	+19,06	+0,84
9,5	21 30	17,31	13,64	-3,67	+4,22	+17,86	+0,55	+0,15	+18,01	+0,70
10,0	18 45	16,35	12,42	-3,93	+4,15	+16,57	+0,22	+0,37	+16,94	+0,59
10,5	15 18	15,37	11,29	-4,08	+4,02	+15,31	-0,06	+0,52	+15,83	+0,46
11,0	11 03	14,40	10,26	-4,14	+3,82	+14,08	-0,32	+0,63	+14,71	+0,31
11,5	5 57	13,45	9,32	-4,13	+3,67	+12,99	-0,46	+0,70	+13,69	+0,24
12,0	0 00	12,54	8,45	-4,09	+3,51	+11,96	-0,58	+0,74	+12,70	+0,16

Л И Т Е Р А Т У Р А

Молоденский М.С., Еремеев В.Ф., Юркина М.И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. - Тр. ЦНИИГАИК, вып. I3I, 1960.

Еремеев В.Ф. Применение способа моделей к исследованию формул, определяющих фигуру Земли. - Тр. ЦНИИГАИК, вып. 75, 1950.

Еремеев В.Ф. О точности формул Стокса и Молоденского. ЦНИИГАИК. - Сборник рефератов, № 18, 1960.

Еремеев В.Ф. К вопросу о численном решении интегрального уравнения Молоденского для плотности слоя. - Тр. ЦНИИГАИК, вып. I76, 1969.

Пеллинен Л.П. О вычислении уклонений отвеса и высот квазигеоида в горах. - Тр. ЦНИИГАИК, вып. I76, 1969.

Arnold K. The boundary-value problem of physical geodesy and its solution. - "Studia geophysica et geodetica".

1965, 9, No.2.

Arnold K., Stange L. Numerische Untersuchungen zum gravimetrischen Zusatzglied. Gerlands Beiträge zur Geophysik. 1965, 74, No.5.

Hastings C. Approximations for digital computers. Assisted by Jeanne T. Hayward, Iams P. Wong. Princeton, univ. press, 1955.

11. Neumann C. Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential. Leipzig, Druck und Verlag von B.G. Teubner, 1877.

V.F.Yeremeev, A.I.Shabanova

INVESTIGATION OF METHODS PROPOSED FOR COMPUTATION  
OF PLUMB-LINE DEFLECTIONS ON A MODEL OF THE EARTH

S U M M A R Y

The methods proposed by Molodensky, Arnold and Yeremeev for computation of plumb-line deflections and the method following from Neumann's solution of the integral equation were investigated on an Earth model, represented by a surface of revolution with a generatrix

$$H = H_0 \left[ 1 - \left( \frac{l}{l_c} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}},$$

where  $H$  - elevations over the plane of reference,  $H_0$  - maximum height of the model,  $\ell$  - distance from the axis of revolution, at  $\ell > \ell_c$  is taken  $H = 0$ . It is also assumed that  $H_0 = 4$  km,  $\ell_c = 12$  km. The gravitational field is being generated by two material points located at a depth of 4 km under the plane of reference and 2 km over the said plane. At the vertex of the model, the gravity anomalies caused by these points are 150 and 100 mgal, correspondingly. Calculations were executed with an electronic computer. The results of calculations made according to Molodensky's formulas are represented in table 2, according to Neumann's method - in table 3, those of Yermeev - in tables 4 and 5. Arnold's formula was used in determination of the plumb-line deflection at a point  $\ell = 9$  km. The result coincides with that obtained with the help of Molodensky's first-approximation formula. The necessary corrections to gravity anomalies in the case of calculations following Arnold's method reached rather considerable magnitudes (for instance, at the vertex of the model this correction was about 400 mgal) (see Table 1).

УДК 528.22:531.26

В.Ф. Еремеев, М.И. Юркина

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОПРАВОК  $G_1$  МОЛОДЕНСКОГО И СООТВЕТСТВЕННЫХ  
ПОПРАВОК В УКЛОНЕНИЯ ОТВЕСА, ЕСЛИ ВЫСОТЫ ЗАДАНЫ  
ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМ ПОЛИНОМОМ

Поправку в аномалию силы тяжести при решении интегрального уравнения Молоденского (1948, 1960) его способом можно представить в первом приближении так:

$$G_1 = \int \frac{H - H_0}{z_o^3} \chi d\sigma ; \quad (1)$$

где

$$\chi = \frac{\Delta \vartheta}{2\pi} + \frac{3T_0}{4\pi R}, \quad T_0 = \frac{1}{4\pi R} \int \Delta g [S(\psi) - 1] d\sigma, \quad (2)$$

$S(\psi)$  – функция Стокса,  $z_o$  – расстояние между проекцией  $(x_o, y_o)$  фиксированной точки, в которой нужно вывести величину  $G_1$ , на отсчетную сферу и элементом  $d\sigma$  отсчетной сферы.

Прием, что высоты  $H$  земной поверхности представлены некоторой аналитической интерполяционной формулой, выводимой, например, по высотам, заданным в углах сетки квадратов. На поправку  $G_1$  особенно сильно влияет близкая окрестность фиксированной точки. В этой окрестности отсчетную поверхность можно считать плоской. Тогда

$$z_o^2 = (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2. \quad (3)$$

Вблизи фиксированной точки положим

$$H = H_0 + \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_0(x - x_0) + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_0(y - y_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)_0(x - x_0)^2 + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)_0(y - y_0)^2 + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}\right)_0(x - x_0)(y - y_0) + \dots ; \quad (4)$$

$$\chi = \chi(0) + \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)_0(x - x_0) + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)_0(y - y_0) + \dots , \quad (5)$$

нулем отмечены значения в фиксированной точке.

Пусть точка  $x_0, y_0$  может лежать только в центре каждого из квадратов со стороной  $2L$ , по которым должно быть выполнено численное интегрирование. Эта сетка квадратов в общем случае может не совпадать с сеткой, задающей систему высот. Если – в условиях рисунка – численное интегрирование должно быть выполнено по пунктирным квадратам, то фиксированная точка может лежать только на пересечениях сплошных прямых.

Перейдем к новым переменным

$$u = x - x_0 ,$$

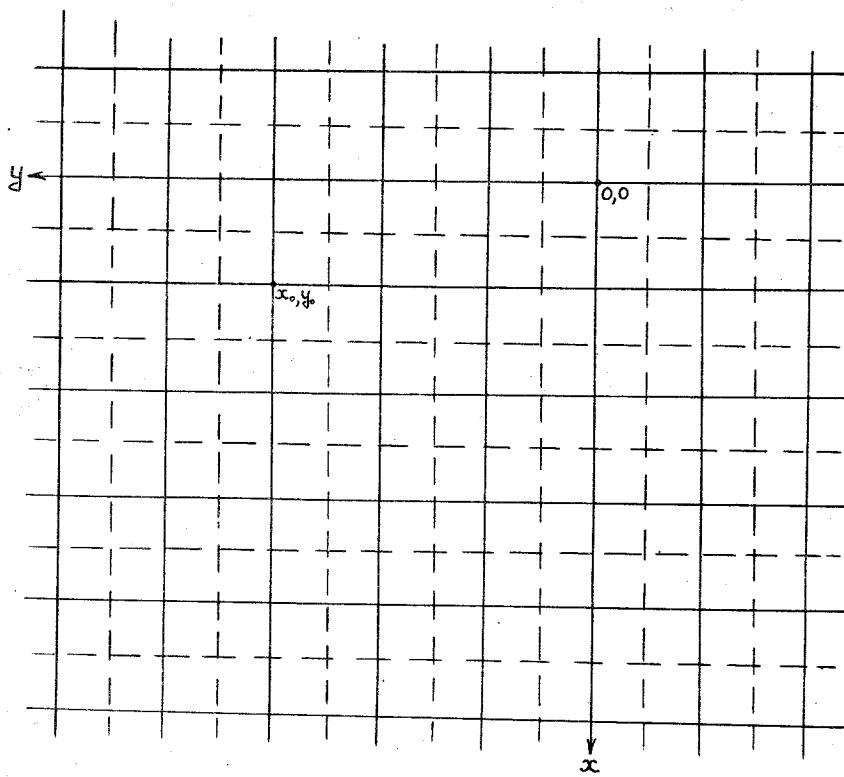
$$v = y - y_0$$

и вычислим влияние квадрата, содержащего фиксированную точку

$$\Delta_0 G_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-L-\varepsilon}^{-\varepsilon+L} \int_{-L}^{L} \left[ \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_0 u + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_0 v + \frac{u^2}{2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)_0 + \frac{v^2}{2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)_0 + uv \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}\right)_0 \right] \times \right. \\ \times \left[ \chi(0) + \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)_0 u + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)_0 v \right] \frac{du dv}{(u^2 + v^2)^{3/2}} + \\ + \int_{-L}^{L} \int_{-\varepsilon+L}^{\varepsilon+L} \left[ \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_0 u + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_0 v + \frac{u^2}{2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)_0 + \frac{v^2}{2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)_0 + uv \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}\right)_0 \right] \times \\ \times \left[ \chi(0) + \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)_0 u + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)_0 v \right] \frac{du dv}{(u^2 + v^2)^{3/2}} \right\}. \quad (6)$$

При интегрировании по переменной величине  $u$  мы должны вычислить интегралы

$$\int_{-L}^{+L} \frac{du}{(u^2 + v^2)^{3/2}} = \frac{1}{v^2} \left. \frac{u}{(u^2 + v^2)^{1/2}} \right|_{-L}^{+L} = \frac{2L}{v^2 (L^2 + v^2)^{1/2}} ; \quad (7)$$



$$\int_{-L}^{+L} \frac{u du}{(u^2+v^2)^{3/2}} = -\left. \frac{1}{(u^2+v^2)^{1/2}} \right|_{-L}^{+L} = 0; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{+L} \frac{u^2 du}{(u^2+v^2)^{3/2}} &= \left[ -\frac{u}{(u^2+v^2)^{1/2}} + \ln(u+(u^2+v^2)^{1/2}) \right] \Big|_{-L}^{+L} \\ &= -\frac{2L}{(L^2+v^2)^{1/2}} + \ln\left(\frac{(L^2+v^2)^{1/2}+L}{(L^2+v^2)^{1/2}-L}\right); \end{aligned} \quad (9)$$

$$\int_{-L}^{+L} \frac{u^3 du}{(u^2+v^2)^{3/2}} = \left[ (u^2+v^2)^{1/2} + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^{1/2}} \right] \Big|_{-L}^{+L} = 0 \quad (10)$$

и, пользуясь этими результатами, после интегрирования по переменной величине  $v$  вывести пределы:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\epsilon}^{-L} \int_{-L}^{+L} \frac{v du dv}{(u^2+v^2)^{3/2}} + \int_{\epsilon}^{L} \int_{-L}^{+L} \frac{v du dv}{(u^2+v^2)^{3/2}} \right\} = 0; \quad (II)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\epsilon}^{-L} \int_{-L}^{+L} \frac{v^2 du dv}{(u^2+v^2)^{3/2}} + \int_{\epsilon}^{L} \int_{-L}^{+L} \frac{v^2 du dv}{(u^2+v^2)^{3/2}} \right\} = 2L \ln(3+2\sqrt{2}); \quad (I2)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\epsilon}^{-L} \int_{-L}^{+L} \frac{v^3 du dv}{(u^2+v^2)^{3/2}} + \int_{\epsilon}^{L} \int_{-L}^{+L} \frac{v^3 du dv}{(u^2+v^2)^{3/2}} \right\} = 0 \quad (I3)$$

и, поскольку

$$\int v \ln(L+\sqrt{v^2+L^2}) dv = v \ln(L+\sqrt{v^2+L^2}) + L \ln(v+\sqrt{v^2+L^2}) - v; \quad (I4)$$

$$\int v \ln(L+\sqrt{v^2+L^2}) dv = \frac{1}{2} v^2 \ln(L+\sqrt{v^2+L^2}) - \frac{1}{4} v^2 + \frac{1}{2} L \sqrt{v^2+L^2}, \quad (I5)$$

пределы

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\epsilon}^{-L} \int_{-L}^{+L} \frac{u^2 du dv}{(u^2+v^2)^{3/2}} + \int_{\epsilon}^{L} \int_{-L}^{+L} \frac{u^2 du dv}{(u^2+v^2)^{3/2}} \right\} = 2L \ln(3+2\sqrt{2}); \quad (I6)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\epsilon}^{-L} \int_{-L}^{+L} \frac{u^2 v du dv}{(u^2+v^2)^{3/2}} + \int_{\epsilon}^{L} \int_{-L}^{+L} \frac{u^2 v du dv}{(u^2+v^2)^{3/2}} \right\} = 0. \quad (I7)$$

Для влияния центрального квадрата получаем

$$\Delta_0 G_1 = \chi(0) L \ln(3+2\sqrt{2}) \left[ \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)_0 + \left( \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right)_0 \right] + \\ + 2L \ln(3+2\sqrt{2}) \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_0 \left( \frac{\partial x}{\partial x} \right)_0 + \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)_0 \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_0 \right]. \quad (18)$$

На всех остальных квадратах будем считать значения высот и функции  $\chi$  постоянными и равными значениям в центральных точках. Тогда

$$G_1 = \Delta_0 G_1 + 4 \sum \frac{H_4 - H_0}{z_0^3} \chi_4 L^2, \quad (19)$$

где суммирование должно быть распространено на всю учитываемую область, кроме квадрата, содержащего фиксированную точку.

Поправку второго приближения в аномалию силы тяжести можно вычислить по этой же формуле, заменив  $\chi$  на

$$\chi_1 = \frac{G_1}{2\pi} + \frac{3T_1}{4\pi R}$$

### Производные

$$- \left( \frac{\partial T}{\partial \delta B} \right)_1 = \frac{1}{4\pi R^2} \int G_1 \frac{\partial S}{\partial \psi} \cos A d\sigma - (\Delta g + \frac{3T_0}{2R}) \frac{\partial H}{\partial \delta B}; \quad (20)$$

$$- \left( \frac{\partial T}{\partial \delta L} \right)_1 \sec B = \frac{1}{4\pi R^2} \int G_1 \frac{\partial S}{\partial \psi} \sin A d\sigma - (\Delta g + \frac{3T_0}{2R}) \frac{\partial H}{\partial \delta L} \sec B, \quad (21)$$

необходимые для вывода первых поправок Молоденского в составляющие уклона отвеса, вычисленные по формулам Венинг-Мейнеса, нужно вычислить по системе высот, использованных при выводе поправок  $G_1$ .

В записи (2), (20) и (21) формул Молоденского внесены исправления, вытекающие из замечаний Марича (1964) и Брова-ра (1965).

Вблизи исследуемой точки по-прежнему считаем отсчетную поверхность плоской. Тогда

$$\Delta_1 \left( \frac{\partial T}{\partial B} \right) = \frac{1}{2\pi} \int G_1 \frac{1}{z_o^2} \cos A d\sigma + (\Delta g + \frac{3T_o}{2R}) \frac{\partial H}{\partial B};$$

( 22 )

$$\sec B \cdot \Delta_1 \left( \frac{\partial T}{\partial L} \right) = \frac{1}{2\pi} \int G_1 \frac{1}{z_o^2} \sin A d\sigma + (\Delta g + \frac{3T_o}{R}) \frac{\partial H}{\partial L} \sec B,$$

или

$$\Delta_1 \left( \frac{\partial T}{\partial B} \right) = \frac{1}{2\pi} \iint G_1 \frac{(x-x_o) dx dy}{[(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2]^{3/2}} + (\Delta g + \frac{3T_o}{2R}) \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_o;$$

( 23 )

$$\Delta_1 \left( \frac{\partial T}{\partial L} \right) \sec B = \frac{1}{2\pi} \iint G_1 \frac{(y-y_o) dx dy}{[(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2]^{3/2}} + (\Delta g + \frac{3T_o}{2R}) \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)_o.$$

Пусть фиксированная точка  $x_o, y_o$  может лежать снова только в центре одного из квадратов со стороной  $2L$ , по которым должно быть выполнено численное интегрирование. Переайдем к переменным  $u, v$  и вычислим влияние квадрата, содержащего фиксированную точку

$$\begin{aligned} \Delta_1(o) \left( \frac{\partial T}{\partial B} \right) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \iint_{-L-L}^{-\epsilon+\epsilon+L} [G_1(o) + (\frac{\partial G}{\partial x})_o u + (\frac{\partial G}{\partial y})_o v] \frac{ududv}{(u^2+v^2)^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. + \iint_{\epsilon-L}^{L+\epsilon} [G_1(o) + (\frac{\partial G}{\partial x})_o u + (\frac{\partial G}{\partial y})_o v] \frac{ududv}{(u^2+v^2)^{3/2}} \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_1(o) \left( \frac{\partial T}{\partial L} \right) \sec B &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \iint_{-L-L}^{-\epsilon+\epsilon+L} [G_1(o) + (\frac{\partial G}{\partial x})_o u + (\frac{\partial G}{\partial y})_o v] \frac{vdudv}{(u^2+v^2)^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. + \iint_{\epsilon-L}^{L+\epsilon} [G_1(o) + (\frac{\partial G}{\partial x})_o u + (\frac{\partial G}{\partial y})_o v] \frac{vdudv}{(u^2+v^2)^{3/2}} \right\}. \end{aligned}$$

Интегрирование по переменной величине  $u$  приводит к интегралам (7), (8), (9). Воспользовавшись вычисленным пределом (I6), выводим

$$\Delta_1(o) \left( \frac{\partial T}{\partial B} \right) = \frac{L}{\pi} \left( \frac{\partial G}{\partial x} \right)_o \ln(3+2\sqrt{2}).$$

Имея в виду пределы (II), (I2), выводим

$$\Delta_1(o) \left( \frac{\partial T}{\partial L} \right) \sec B = \frac{L}{\pi} \left( \frac{\partial G}{\partial y} \right)_o \ln(3+2\sqrt{2}).$$

Таким образом,

$$\Delta_1 \left( \frac{\partial T}{\partial B} \right) = \frac{L}{\pi} \left( \frac{\partial G_1}{\partial x} \right) \ln(3+2\sqrt{2}) + (\Delta g + \frac{3T}{2R}) \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_o + \frac{1}{2\pi} \sum G_i(u) \frac{(x_i - x_o)L^2}{z_o^3} ;$$

(27)

$$\Delta_1 \left( \frac{\partial T}{\partial L} \right) \sec B = \frac{L}{\pi} \left( \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) \ln(3+2\sqrt{2}) + (\Delta g + \frac{3T}{2R}) \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)_o + \frac{1}{2\pi} \sum G_i(u) \frac{(y_i - y_o)L^2}{z_o^3} ,$$

где суммирование должно быть распространено на всю учитываемую область, кроме квадрата, содержащего фиксированную точку.

Одна из поправок уклона отвеса второго приближения может быть вычислена по формулам (27) после замены величины  $G_1$  на  $G_2$ . Рассмотрим вычисление второй поправки второго приближения к уклонению отвеса. Полагая отсчетную поверхность плоской, находим для меридиональной составляющей

$$\begin{aligned} -\Delta'_2 \left( \frac{\partial T}{\partial B} \right) &= \frac{3}{2} \iint X \frac{(H-H_o)^2}{z_o^5} (x-x_o) dx dy \approx \\ &\approx \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \iint_{-L-\varepsilon}^{+L} \left[ X(o) + \left( \frac{\partial X}{\partial x} \right)_o u + \left( \frac{\partial X}{\partial y} \right)_o v \right] \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_o u^2 + \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)_o v^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_o \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)_o uv \right] \frac{ududv}{(u^2+v^2)^{5/2}} + \iint_{\varepsilon-L}^{L+\varepsilon} \left[ X(o) + \left( \frac{\partial X}{\partial x} \right)_o u + \left( \frac{\partial X}{\partial y} \right)_o v \right] \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_o u^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)_o v^2 + 2 \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_o \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)_o uv \right] \frac{ududv}{(u^2+v^2)^{5/2}} + 6 \sum X_{ij} \frac{(H_{ij}-H_o)^2}{z_o^5} (x_{ij}-x_o)L^2 \right\} . \end{aligned}$$

Аналогичную поправку к составляющей в плоскости первого вертикала найдем, заменив  $u$  на  $v$  и  $x$  на  $y$ .

Интегрирование по переменной  $u$  дает

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{+L} \frac{du}{(u^2+v^2)^{5/2}} &= \frac{1}{\sqrt{v^2}} \left[ \frac{u}{(u^2+v^2)^{1/2}} - \frac{1}{3} \frac{u^3}{(u^2+v^2)^{3/2}} \right]_{-L}^{+L} = \frac{2L}{\sqrt{v^2}(L^2+v^2)^{1/2}} - \frac{2L^3}{3\sqrt{v^2}(L^2+v^2)^{3/2}} ; \\ \int_{-L}^{+L} \frac{u du}{(u^2+v^2)^{5/2}} &= \left[ -\frac{1}{3} \frac{1}{(u^2+v^2)^{3/2}} \right]_{-L}^{+L} = 0 ; \\ \int_{-L}^{+L} \frac{u^2 du}{(u^2+v^2)^{5/2}} &= \left[ \frac{1}{3v^2} \frac{u^3}{(u^2+v^2)^{3/2}} \right]_{-L}^{+L} = \frac{2}{3v^2} \frac{L^3}{(L^2+v^2)^{3/2}} ; \end{aligned}$$

$$\int_{-L}^{+L} \frac{u^3 du}{(u^2 + v^2)^{5/2}} = \left[ -\frac{1}{(u^2 + v^2)^{3/2}} + \frac{v^2}{3(u^2 + v^2)^{5/2}} \right] \Big|_{-L}^{+L} = 0;$$

$$\int_{-L}^{+L} \frac{u^6 du}{(u^2 + v^2)^{5/2}} = -\frac{2L}{(L^2 + v^2)^{5/2}} - \frac{2}{3} \frac{L^3}{(L^2 + v^2)^{5/2}} + \ln[L + (L^2 + v^2)^{1/2}] - \ln[-L + (L^2 + v^2)^{1/2}].$$

Пользуясь этими результатами, после интегрирования по переменной величине  $v$  выводим пределы

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-L}^{-\epsilon} \int_{-L}^{+L} \frac{u^2 v du dv}{(u^2 + v^2)^{5/2}} + \int_{\epsilon}^{L} \int_{-L}^{+L} \frac{u^2 v du dv}{(u^2 + v^2)^{5/2}} \right\} = \\ &= \frac{2}{3} L^3 \left\{ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-L}^{-\epsilon} \frac{dv}{v(L^2 + v^2)^{5/2}} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{L} \frac{dv}{v(L^2 + v^2)^{5/2}} \right\} = \\ &= \frac{2}{3} L^3 \left\{ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{L^2(L^2 + v^2)^{1/2}} - \frac{1}{L^3} \ln \left| \frac{L + (L^2 + v^2)^{1/2}}{v} \right| \right] \Big|_{-L}^{-\epsilon} + \right. \\ &\quad \left. + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{L^2(L^2 + v^2)^{1/2}} - \frac{1}{L^3} \ln \left| \frac{L + (L^2 + v^2)^{1/2}}{v} \right| \right] \Big|_{\epsilon}^{L} \right\} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-L}^{-\epsilon} \int_{-L}^{+L} \frac{u^2 v^2 du dv}{(u^2 + v^2)^{5/2}} + \int_{\epsilon}^{L} \int_{-L}^{+L} \frac{u^2 v^2 du dv}{(u^2 + v^2)^{5/2}} \right\} = \\ &= \frac{2}{3} L^3 \left\{ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{L^2} \frac{v}{(L^2 + v^2)^{1/2}} \Big|_{-L}^{-\epsilon} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{L^2} \frac{v}{(L^2 + v^2)^{1/2}} \Big|_{\epsilon}^{L} \right\} = \frac{2L\sqrt{2}}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-L}^{-\epsilon} \int_{-L}^{+L} \frac{u^4 du dv}{(u^2 + v^2)^{5/2}} + \int_{\epsilon}^{L} \int_{-L}^{+L} \frac{u^4 du dv}{(u^2 + v^2)^{5/2}} \right\} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ [-2L \ln[v + (L^2 + v^2)^{1/2}] - \frac{2}{3} \frac{L v}{(L^2 + v^2)^{1/2}} + v \ln[L + (L^2 + v^2)^{1/2}] + \right. \\ &\quad \left. + 2L \ln[v + (L^2 + v^2)^{1/2}] - v \ln[-L + (L^2 + v^2)^{1/2}] \right] \Big|_{-L}^{-\epsilon} + \\ &\quad + \left. [-2L \ln[v + (L^2 + v^2)^{1/2}] - \frac{2}{3} \frac{L v}{(L^2 + v^2)^{1/2}} + v \ln[L + (L^2 + v^2)^{1/2}] + \right. \\ &\quad \left. + 2L \ln[v + (L^2 + v^2)^{1/2}] - v \ln[-L + (L^2 + v^2)^{1/2}] \right] \Big|_{\epsilon}^{L} \right\} = \\ &= -\frac{2L\sqrt{2}}{3} + 2L \ln(3 + 2\sqrt{2}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-L-\epsilon}^{-\epsilon} \int_{-L}^L \frac{v^3 du dv}{(u^2+v^2)^{3/2}} + \int_{\epsilon}^{L+\epsilon} \int_{-L}^L \frac{v^3 du dv}{(u^2+v^2)^{3/2}} \right\} = \\
& = 2L \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{L} \ln \left| \frac{L+(L^2+v^2)^{1/2}}{v} \right| \Big|_{-L}^{-\epsilon} - \frac{1}{L} \ln \left| \frac{L+(L^2+v^2)^{1/2}}{v} \right| \Big|_{\epsilon}^L \right\} - \\
& - \frac{2L^3}{3} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{L^2(L^2+v^2)^{3/2}} \left[ -\frac{1}{L^3} \ln \left| \frac{L+(L^2+v^2)^{1/2}}{v} \right| \Big|_{-L}^{-\epsilon} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{L^2(L^2+v^2)^{3/2}} \left[ -\frac{1}{L^3} \ln \left| \frac{L+(L^2+v^2)^{1/2}}{v} \right| \Big|_{\epsilon}^L \right] \right] = 0 ; \right. \\
& \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-L-\epsilon}^{-\epsilon} \int_{-L}^L \frac{v^4 du dv}{(u^2+v^2)^{3/2}} + \int_{\epsilon}^{L+\epsilon} \int_{-L}^L \frac{v^4 du dv}{(u^2+v^2)^{3/2}} \right\} = \\
& = 2L \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln [v+(L^2+v^2)^{1/2}] \Big|_{-L}^{-\epsilon} + \ln [v+(L^2+v^2)^{1/2}] \Big|_{\epsilon}^L \right\} - \\
& - \frac{2L^3}{3} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{L^2} \frac{v}{(L^2+v^2)^{1/2}} \Big|_{-L}^{-\epsilon} + \frac{1}{L^2} \frac{v}{(L^2+v^2)^{1/2}} \Big|_{\epsilon}^L \right\} = 2L \ln(3+2\sqrt{2}) - \frac{2\sqrt{2}L}{3}.
\end{aligned}$$

Теперь для рассматриваемой поправки второго приближения к меридиональной составляющей уклонения отвеса можно найти

$$\begin{aligned}
& -\Delta_2 \left( \frac{\partial T}{\partial y_B} \right) = \left( \frac{\partial X}{\partial x} \right)_o \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_o [3L \ln(3+2\sqrt{2}) - L\sqrt{2}] + \\
& + \sqrt{2}L \left( \frac{\partial X}{\partial x} \right)_o \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)_o + 2\sqrt{2}L \left( \frac{\partial X}{\partial y} \right)_o \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_o + \\
& + 6 \sum x_u \frac{(H_u - H_o)^2}{L^2} (x_u - x_o) L^2. \tag{28}
\end{aligned}$$

Аналогичную поправку составляющей уклонения отвеса в первом вертикале можно найти, заменив справа  $x$  на  $y$ . Суммирование в (28) следует распространить на всю учитываемую область, кроме квадрата, содержащего исследуемую точку. Поправка первого приближения к возмущающему потенциалу равна

$$\Delta T = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{G_i d\alpha dy}{[(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2]^{1/2}}$$

$$\Delta_0 T = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-L}^{-\varepsilon} \int_{-L}^{+L} [G_1(0) + (\frac{\partial G_1}{\partial x})_0 u + (\frac{\partial G_1}{\partial y})_0 v] \frac{du dv}{(u^2+v^2)^{1/2}} + \right.$$

$$\left. + \int_{\varepsilon}^{+L} \int_{-L}^{+L} [G_1(0) + (\frac{\partial G_1}{\partial x})_0 u + (\frac{\partial G_1}{\partial y})_0 v] \frac{du dv}{(u^2+v^2)^{1/2}} \right\}.$$

При интегрировании по переменной  $u$  потребуются интегралы

$$\int_{-L}^{+L} \frac{du}{(u^2+v^2)^{1/2}} = \ln [(L^2+v^2)^{1/2} + L] - \ln [(L^2+v^2)^{1/2} - L];$$

$$\int_{-L}^{+L} \frac{u du}{(u^2+v^2)^{1/2}} = (u^2+v^2)^{1/2} \Big|_{-L}^{+L} = 0.$$

Проинтегрировав по переменной  $v$ , выводим из этих формул пределы

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-L}^{-\varepsilon} \int_{-L}^{+L} \frac{du dv}{(u^2+v^2)^{1/2}} + \int_{\varepsilon}^{+L} \int_{-L}^{+L} \frac{du dv}{(u^2+v^2)^{1/2}} \right\} = 4L \ln (3 + 2\sqrt{2}),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-L}^{-\varepsilon} \int_{-L}^{+L} \frac{v du dv}{(u^2+v^2)^{1/2}} + \int_{\varepsilon}^{+L} \int_{-L}^{+L} \frac{v du dv}{(u^2+v^2)^{1/2}} \right\} = 0.$$

Для влияния центрального квадрата на высоту квазигеоида получаем

$$\Delta_0 T = \frac{2L}{\pi} \ln (3 + 2\sqrt{2}) G_1(0).$$

Выполненный под руководством А.И. Шабановой счет на модели Земли, описанной в статье ее и Еремеева в этом же сборнике, при стороне квадратов в 1 км привел к поправкам  $G_1$ , практически совпадшим с выведенными через эллиптические интегралы.

#### ЛИТЕРАТУРА

Молоденский М.С. Внешнее гравитационное поле и фигура физической поверхности Земли.—Известия АН СССР, серия географ. и геофиз., 1948, 12, № 3.

М о л о д е н с к и й М.С., Е р е м е е в В.Ф., Ю р к и н а  
М.И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли.—Тр. ЦНИГАиК, вып.131, 1960.

М а р и ч М.И. По поводу вычислений отклонений отвеса.—  
Республиканский межведомственный научно-технический сборник.  
Геодезия, картография и аэрофотосъемка, вып. I, Львов, 1964.

Б р о в а р В.В. О формулах для вычисления возмущающего  
потенциала и составляющих отклонения отвеса на земной поверхности.—  
Изв. ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъемка, вып. 2, 1965.

V.F.Yeremeev, M.I.Yurkina

COMPUTING MOLODENSKY'S G-CORRECTIONS AND HIS CORRECTIONS  
TO PLUMB-LINE DEFLECTIONS FOR A CASE THE HEIGHTS ARE GIVEN  
BY AN INTERPOLATION POLYNOM

#### S U M M A R Y

When Molodensky's equation for single-layer density is being solved according to the method proposed by himself, and the elevations of the Earth's surface are given by an analytical interpolation formula, then the first-approximation correction  $G$  to the gravity anomaly can be expressed by (18) and (19). Formula (18) determines the influence of a square of a side  $2L$ , at the center of which the fixed point is located. The corresponding corrections to plumb-line deflection components are determined from (27) in the first, and from (28) in the second approximation, correspondingly.

УДК 528.22:531.26

В.Ф. Еремеев, М.И. Дрекина

УТОЧНЕННЫЙ ВЫВОД КОЭФФИЦИЕНТОВ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ  
ДЛЯ СОВМЕСТНОГО УРАВНИВАНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ШИРОТ,  
ДОЛГОТ И ВЫСОТ КВАЗИГЕОИДА

В работе [3] выведен уравнения для совместного уравнивания геодезических широт, долгот и высот квазигеоида. Коэффициенты этих уравнений выражены с помощью формул сферической тригонометрии через предварительные значения геодезических широт, долгот, длин дуг, заменяющих звенья астрономо-геодезической сети, и азимутов таких дуг. Относительная погрешность коэффициентов имеет порядок земного сжатия.

Уточним теперь эти коэффициенты, учитывая сжатие Земли. Формулы Молоденского (53), (54) в [1] и (I.5.8), (I.5.9) во [2] при этом использовать затруднительно, так как долготу одной из каждой пары точек Молоденский считал равной нулю, имея в виду только вывод поправок в результаты решения прямой и обратной задач.

Приняв в исходной точке I некоторые значения геодезических широты  $B_1$ , долготы  $L_1$  и высоты  $\zeta_1$  квазигеоида, можно спроектировать базис, прилегающий к точке I, вычислить по уравнению Лапласа исходный геодезический азимут и передавать геодезические координаты по первому звену астрономо-геодезической сети. Получив геодезические координаты  $B_2, L_2$  астрономического пункта 2, можно вывести длину  $z_{1-2}$  хорды отсчетного геодезического эллипсоида. Эта хорда заменит звено I-2 в уравнительных вычислениях. По координатам  $B_1, L_1, B_2, L_2$  можно также вывести азимуты  $A_{1-2}$  и  $A_{2-1}$  хорд I-2, зенитные расстояния  $z_{1-2}$  и  $z_{2-1}$ .

Из-за продольного сдвига на звене I-2 хорда  $s_{1-2}$  содержит ошибку  $\Delta s_{1-2}$ , которой соответствуют смещения  $\Delta_1 B_2$  и  $\Delta_1 L_2$  точки 2. Поперечный сдвиг звена I-2 вызовет ошибку  $\Delta A_{1-2}$  азимута  $A_{1-2}$ . Сдвиги  $\Delta A_{1-2}$  соответствуют смещениям  $\Delta_2 B_2$  и  $\Delta_2 L_2$ .

Выразим  $\Delta B_2 = \Delta_1 B_2 + \Delta_2 B_2$  и  $\Delta L_2 = \Delta_1 L_2 + \Delta_2 L_2$  через  $\Delta s_{1-2}$  и  $\Delta A_{1-2}$ . Будем исходить из дифференциальных формул Молоденского [1] для расстояния и полученной в (4) для геодезического азимута:

$$- d s_{1-2} = N_1 \cos A_{1-2} \sin z_{1-2} dB_1 + M_2 \cos A_{2-1} \sin z_{2-1} d B_2 + N_1 \cos B_1 \sin A_{1-2} \sin z_{1-2} d L_1 + \\ + N_2 \cos B_2 \sin A_{2-1} \sin z_{2-1} d L_2 ; \quad (1)$$

$$d A_{1-2} = \frac{N_2 \cos B_2 \sin(L_2 - L_1)}{S_{1-2} \sin^2 z_{1-2}} (\cos z_{1-2} + \frac{M_1}{S_{1-2}}) dB_1 - \frac{M_2 \cos B_1 \sin(L_2 - L_1)}{S_{1-2} \sin^2 z_{1-2}} (N_2 - \varepsilon \sin B_2) dB_2 + \\ + \frac{N_2 \cos B_2}{S_{1-2} \sin^2 z_{1-2}} [N_2 \cos B_1 \sin B_1 - N_2 \sin B_2 \cos B_1 \cos(L_2 - L_1) + \varepsilon \cos B_1 \cos(L_2 - L_1)] (d L_1 - d L_2). \quad (2)$$

Формула (2) записана для частного случая  $N_1 = N_2 = 0$ .

Здесь обозначают:  $M$  – радиус кривизны меридионального сечения эллипсоида,  $N$  – радиус кривизны сечения эллипсоида плоскостью первого вертикала,

$$\varepsilon = \frac{a^2 - b^2}{a^2} (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1), \quad (3)$$

$a$ ,  $b$  – большая и малая полуоси эллипсоида. Индексы указывают, к какой точке или какому направлению должна быть отнесена соответствующая величина.

Преобразуем формулу (2), использовав два вида формул для направляющих косинусов  $l_{1-2}, m_{1-2}, n_{1-2}$  отрезка  $s_{1-2}$ .

Поскольку дифференциал  $d A_{1-2}$  азимута зависит от разности долгот точек I и 2 и не зависит от долготы точки I, воспользуемся формулами Молоденского

$$s_{1-2} l_{1-2} = s_{1-2} (\cos B_1 \cos z_{1-2} - \sin B_1 \sin z_{1-2} \cos A_{1-2}); \\ s_{1-2} m_{1-2} = s_{1-2} \sin z_{1-2} \sin A_{1-2}; \quad (4) \\ s_{1-2} n_{1-2} = s_{1-2} (\sin B_1 \cos z_{1-2} + \cos B_1 \sin z_{1-2} \cos A_{1-2}),$$

и

$$\begin{aligned} s_{1-2} l_{1-2} &= N_2 \cos B_2 \cos(L_2 - L_1) - N_1 \cos B_1; \\ s_{1-2} m_{1-2} &= N_2 \cos B_2 \sin(L_2 - L_1); \\ s_{1-2} n_{1-2} &= N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1 - \epsilon. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует

$$\begin{aligned} N_2 \sin B_1 \cos B_2 - N_2 \cos B_1 \sin B_2 \cos(L_2 - L_1) + \epsilon \cos B_1 \cos(L_2 - L_1) = \\ = s_{1-2} [\sin B_1 \sin(L_2 - L_1) \sin A_{1-2} \sin z_{1-2} - \cos(L_2 - L_1) \cos A_{1-2} \sin z_{1-2}]; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} N_2 \cos B_1 \sin(L_2 - L_1) - \epsilon \cos B_1 \sin B_2 \sin(L_2 - L_1) = \\ = s_{1-2} [\sin B_2 \sin(L_2 - L_1) \cos A_{1-2} \sin z_{1-2} + \sin B_1 \sin B_2 \cos(L_2 - L_1) \times \\ \times \sin A_{1-2} \sin z_{1-2} + \cos B_1 \cos B_2 \sin A_{1-2} \sin z_{1-2}]. \end{aligned} \quad (7)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} s_{1-2} \sin z_{1-2} dA_{1-2} &= \sin A_{1-2} (s_{1-2} \cos z_{1-2} + M_1) dB_1 - \\ &- M_2 [\sin B_2 \sin(L_2 - L_1) \cos A_{1-2} + \sin B_1 \sin B_2 \cos(L_2 - L_1) \sin A_{1-2} + \\ &+ \cos B_1 \cos B_2 \sin A_{1-2}] dB_2 + N_2 \cos B_2 [\sin B_1 \sin(L_2 - L_1) \sin A_{1-2} - \\ &- \cos(L_2 - L_1) \cos A_{1-2}] (dL_1 - dL_2). \end{aligned} \quad (8)$$

В точке I принято  $dB_1 = dL_1 = 0$ . Умножив формулу (8) на

$$\sin A_{2-1} \sin z_{2-1},$$

формулу (I) на

$$\sin B_1 \sin(L_2 - L_1) \sin A_{1-2} - \cos(L_2 - L_1) \cos A_{1-2} \quad (9)$$

и сложив произведения, найдем

$$\begin{aligned} \Delta B_2 = \frac{1}{M_2 P_{1-2} \sin z_{2-1}} \left\{ \Delta s_{1-2} [\sin B_1 \sin(L_2 - L_1) \sin A_{1-2} - \cos(L_2 - L_1) \cos A_{1-2}] - \right. \\ \left. - \Delta A_{1-2} s_{1-2} \sin A_{2-1} \sin z_{1-2} \sin z_{2-1} \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned}
 P_{1-2} = & -\sin B_1 \sin(L_2 - L_1) \sin A_{1-2} \cos A_{2-1} + \cos(L_2 - L_1) \cos A_{1-2} \cos A_{2-1} + \\
 & + \sin B_2 \sin(L_2 - L_1) \cos A_{1-2} \sin A_{2-1} + \sin B_1 \sin B_2 \cos(L_2 - L_1) \sin A_{1-2} \sin A_{2-1} + \\
 & + \cos B_1 \cos B_2 \sin A_{1-2} \sin A_{2-1}.
 \end{aligned} \quad (II)$$

Умножив теперь формулу (8) на

$$\cos A_{2-1} \sin z_{2-1}$$

и формулу (I) на

$$\sin B_2 \sin(L_2 - L_1) \cos A_{1-2} + \sin B_1 \sin B_2 \cos(L_2 - L_1) \sin A_{1-2} + \cos B_1 \cos B_2 \sin A_{1-2}$$

и сложив произведения, получим

$$\begin{aligned}
 \Delta L_2 = & \frac{1}{N_2 P_{1-2} \cos B_2 \sin z_{2-1}} \left\{ -\Delta S_{1-2} [\sin B_2 \sin(L_2 - L_1) \cos A_{1-2} + \right. \\
 & + \sin B_1 \sin B_2 \cos(L_2 - L_1) \sin A_{1-2} + \cos B_1 \cos B_2 \sin A_{1-2}] + \\
 & \left. + \Delta A_{1-2} S_{1-2} \cos A_{2-1} \sin z_{1-2} \sin z_{2-1} \right\}. \quad (I2)
 \end{aligned}$$

Высоту  $\zeta_2$  квазигеоида в точке 2 определяет формула

$$\zeta_2 = \zeta_1 - \frac{1}{2} \sigma_{1-2} (\vartheta_1 - \vartheta_2) + \delta_{1-2}, \quad (I3)$$

где  $\sigma_{1-2}$  — длина дуги, заменяющей первое звено астрономо-геодезической сети (со сжатием Земли при вычислении  $\sigma_{1-2}$  здесь можно не считаться),

$$\vartheta = \xi \cos A + \delta \sin A = (\varphi - B) \cos A + (\lambda - L) \cos B \sin A, \quad (I4)$$

$\varphi, \lambda$  — астрономические широта и долгота конечных точек звена,  
 $\delta$  — гравиметрическая поправка за нелинейность изменения укло-  
нения отвеса между конечными точками звена.

Из-за ошибок  $\Delta B_2$ ,  $\Delta L_2$  и погрешности  $\Delta \delta_{1-2}$  гравиметри-  
ческой поправки, высота  $\zeta_2$  будет искажена на величину

$$\Delta \zeta_2 = -\frac{1}{2} \Delta \sigma_{1-2} (\vartheta_1 - \vartheta_2) - \frac{1}{2} \sigma_{1-2} (\Delta B_2 \cos A_{2-1} + \Delta L_2 \cos B_2 \sin A_{2-1}) + \Delta \delta_{1-2}. \quad (I5)$$

При  $\Delta B_{2-2} = 3$  м. первый член спрэса не превосходит 1 м даже, если  $\vartheta_1 = -\vartheta_2 = 1'$  (точность определения разности углов квазигеоида  $\vartheta$  в конечных точках звеньев астрономо-геодезической сети при сограниченной точности вывода  $\vartheta$ , близкой к  $0,5'$ , имеет порядок  $0,5$  м). Этот член можно не учитывать.

Длина  $s$  дуги связана с соответствующей ей хордой формулой

$$\frac{s}{2R} = \sin \frac{\xi}{2R}, \quad (16)$$

где  $R$  — средний радиус кривизны поверхности отсчетного эллипсоида в районе звена.

Положение следующей точки 3 (в конце звена между точками 2 и 3) будет искажено вследствие смещений  $\Delta B_2$  и  $\Delta L_2$  точки 2, продольного и поперечного сдвигов звена 2-3 и ошибки  $\Delta \zeta_2$  высоты квазигеоида в точке 2. Ошибка  $\Delta \zeta_2$  вызывает дополнительный сдвиг звена 2-3. Полный продольный сдвиг этого звена будет равен

$$\Delta s_{2-3} = \Delta s_{2-3} - \frac{\Delta \zeta_2}{R_{2-3}} s_{2-3}. \quad (17)$$

Из формул (1) и (8) теперь получаем, заменив предварительно в этих формулах индекс I на 2 и 2 на 3:

$$\begin{aligned} \Delta B_3 &= \frac{1}{M_3 P_{2-3} \sin Z_{2-2}} \left\{ \left( \Delta s_{2-3} - \frac{\Delta \zeta_2}{R_{2-3}} s_{2-3} \right) [\sin B_2 \sin(L_3 - L_2) \sin A_{2-3} - \cos(L_3 - L_2) \cos A_{2-3}] - \right. \\ &- \Delta A_{2-3} s_{2-3} \sin A_{3-2} \sin Z_{2-2} \sin Z_{3-2} + \Delta B_2 [(s_{2-3} \cos Z_{2-3} + M_2) \sin A_{2-3} \sin A_{3-2} \sin Z_{2-2} + \\ &\left. + M_2 \cos A_{2-3} \sin Z_{2-3} [\sin B_2 \sin(L_3 - L_2) \sin A_{2-3} - \cos(L_3 - L_2) \cos A_{2-3}]] \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Член с  $\Delta L_2$  в  $\Delta B_3$  исключается, так как согласно соотношению, установленному Могоденским (1854)

$$N_2 \cos B_2 \sin A_{2-3} \sin Z_{2-3} = -N_3 \cos B_3 \sin A_{3-2} \sin Z_{3-2}. \quad (19)$$

Для вывода  $\Delta L_3$  умножим формулу (8) на  $\cos A_{2-3} \sin Z_{2-2}$ , скоп. (I) на

$$s_2 B_2 \sin(L_3 - L_2) \cos A_{2-3} + \sin B_2 \sin B_3 \cos(L_3 - L_2) \sin A_{2-3} + \cos B_2 \cos B_3 \sin A_{2-3}$$

## и сложим трехзвенность

$$\begin{aligned} \Delta L_3 = & \frac{1}{N_3 P_{3-4} \cos B_3 \sin Z_{3-2}} \left\{ -(\Delta S_{2-3} - \frac{\Delta \zeta_2}{R_{2-3}} S_{2-3}) [\sin B_3 \sin(L_3 - L_2) \cos A_{2-3} + \right. \right. \\ & + \sin B_2 \sin Z_2 \cos(L_3 - L_2) \sin A_{2-3} + \cos B_2 \cos B_3 \sin A_{2-3}] + \\ & + \Delta A_{2-3} S_{2-3} \cos A_{2-3} \sin Z_{2-3} \sin Z_{3-2} - \Delta B_2 [(S_{2-3} \cos Z_{2-3} + M_3) \times \\ & \times \sin A_{2-3} \cos A_{2-3} \sin Z_{3-2} + M_2 \cos A_{2-3} \sin Z_{2-3}] [\sin B_3 \sin(L_3 - L_2) \cos A_{2-3} + \\ & \left. + \sin B_2 \sin B_3 \cos(L_3 - L_2) \sin A_{2-3} + \cos B_2 \cos B_3 \sin A_{2-3}] \right\} + \Delta L_2. \quad (20) \end{aligned}$$

Согласно (13) имеем

$$\begin{aligned} \Delta \zeta_3 = & \Delta \zeta_2 + \frac{1}{2} \delta_{2-3} (\Delta B_2 \cos A_{2-3} + \Delta L_2 \cos B_2 \sin A_{2-3} - \\ & - \Delta B_3 \cos A_{3-2} - \Delta L_3 \cos B_3 \sin A_{3-2}) + \Delta \delta_{2-3}. \quad (21) \end{aligned}$$

Формулы (18), (20), (21) применимы ко всем последующим точкам астрономо-геодезической сети с соответствующей заменой индексов.

Приведенный ввод этих формул соответствует определению длины дуг, их азимутов и гравиметрических поправок из непосредственных измерений. Перечисленные величины должны точно соответствовать предварительным значениям геодезических широт, долгот и высот квазиеюида.

Если  $\Delta s_{(n-1)-n}$ ,  $\Delta A_{(n-1)-n}$ ,  $\Delta \delta_{(n-1)-n}$  рассматривать как поправки, которые нужно найти из уравнения, то все приведенные формулы сохраняют свой вид. Тогда  $\Delta B_n$ ,  $\Delta L_n$ ,  $\Delta \zeta_n$  являются поправками соответствующих величин.

Условные уравнения можно составить, приравнивая значения  $B'_n + \Delta B_n$ ,  $L'_n + \Delta L_n$ ,  $\zeta'_n + \Delta \zeta_n$ , полученные по всем возможным независимым путям от точки, принятой за исходную.

Здесь  $B'_n$ ,  $L'_n$ ,  $\zeta'_n$  — предварительные значения в  $n$ -ой точке.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Молоденский М.С. Новый метод решения геодезических задач. — Тр. ЦНИИГАИК, вып. 103, 1954.

2. Молоденский М.С., Еремеев В.Ф., Уркина М.И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. — Тр. ЦНИИГАИК, вып. 131, 1960.

3. Е р е м е е в В.Ф., Ю р к и н а М.И. О принципе совместного уравнивания геодезических широт, долгот и высот квазигеоида.— Тр. ЦНИИГАИК, вып. I76, 1969.

4. Е р е м е е в В.Ф., Ю р к и н а М.И. Некоторые вопросы обработки пространственных сетей.— Тр. ЦНИИГАИК, вып. I71, 1966.

V.F.Yeremeev, M.I.Yurkina

A MORE ACCURATE DEFINITION OF COEFFICIENTS OF CONDITIONAL EQUATIONS FOR SIMULTANEOUS ADJUSTMENT OF GEODETIC LATITUDES, LONGITUDES, AND QUASIGEOID HEIGHTS

S U M M A R Y

Recurrent formulas have been obtained which permit to determine the corrections  $\Delta\beta$ ,  $\Delta L$  to plane coordinates of a point in an astronomic-geodetical net and the correction  $\Delta\zeta$  to the quasigeoid height at this point in dependence on corresponding values at preceding points, the correction  $\Delta S$  to the length of the last arc, the correction  $\Delta A$  to the azimuth of this arc, and the correction  $\Delta\delta$  to the gravimetric correction of an astronomic-gravimetric leveling along this arc. On closing polygons, all these formulas change into corresponding conditional equations which must be satisfied in the process of compensating computations.

ВЫВОД ТОПОГРАФИЧЕСКИХ ВЛИЯНИЙ НА ПОТЕНЦИАЛ, СИЛУ  
ТЯЖЕСТИ И УКЛОНЕНИЕ ОТВЕСА С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛЫ  
ГАУССА

Влияние топографических масс постоянной плотности  $\mathfrak{D}$  на возмущающий потенциал можно определить с помощью формулы Гаусса

$$\hat{t} = \frac{1}{2} \mathfrak{D} \int_S \cos(\gamma, n) dS,$$

где  $\cos(\gamma, n) = \frac{\partial \gamma}{\partial n}$ , —  $n$  — внешняя нормаль к поверхности  $S$ , ограничивающей топографические массы ( $S$  совпадает с физической поверхностью Земли, или с отсчетной, или с любой границей выделенной топографической массы),  $\gamma$  — расстояние между исследуемой точкой  $P$  и элементом  $dS$  (текущей точкой  $M$ ),  $\mathfrak{D}$  — гравитационная постоянная,  $\mathfrak{D}$  — плотность топографической массы (таб. I).  
По Молоденскому [I]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial n} dS &= \left[ \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \mathfrak{D}(\gamma, n) \right] h_1 h_2 dq_1 dq_2 = \\ &= \left[ \frac{\partial \gamma}{h_0 \partial q_1} - \frac{h_0}{h_1^2} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial q_1} \frac{\partial H}{\partial q_1} - \frac{h_0}{h_2^2} \frac{\partial \gamma}{\partial q_2} \frac{\partial H}{\partial q_2} \right] h_1 h_2 dq_1 dq_2, \quad (I) \end{aligned}$$

где  $H$  — высота физической поверхности над отсчетной;  
 $q_1, q_2$  — произвольные ортогональные криволинейные координаты;  
 $h_0, h_1, h_2$  — коэффициенты Ламе.

При точном учете влияния дальних зон можно пользоваться геодезической системой координат  $B, L, H$  при  $h_0 = I$ ,

$$h_1 = (M + H), \quad h_2 = (N + H) \cos B.$$

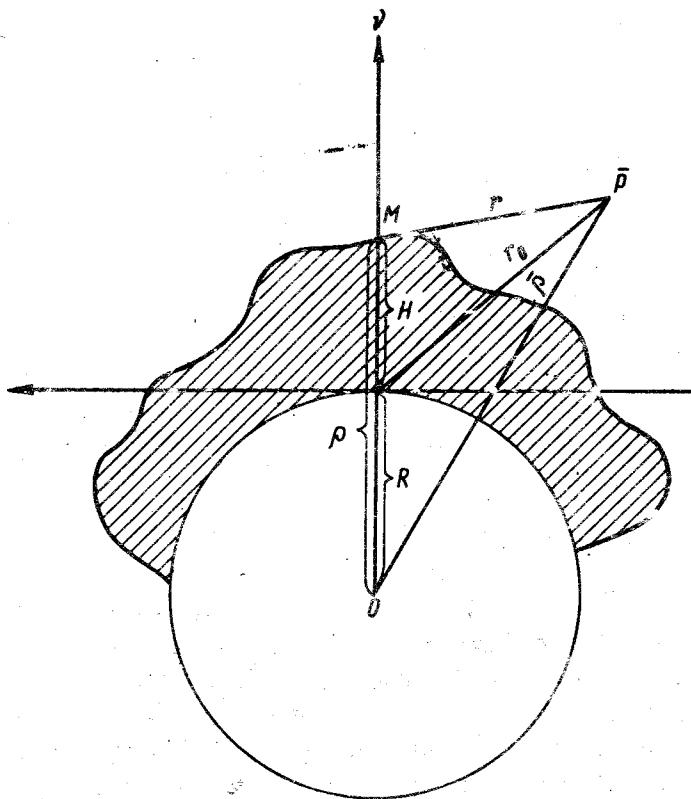


Рис. I

Тогда

$$\begin{aligned} t = \frac{1}{2} \alpha \int \int \left[ \frac{\partial r}{\partial H} - \frac{1}{(M+H)^2} \frac{\partial r}{\partial B} \frac{\partial H}{\partial B} - \frac{1}{(M+H)^2 \cos^2 B} \frac{\partial r}{\partial L} \frac{\partial H}{\partial L} \right] (M+H)(N+H) \cos B dL dB - \\ - \frac{1}{2} \alpha \int \int \left( \frac{\partial r}{\partial H} \right)_{H=0} M N \cos B dL dB \quad (2) \end{aligned}$$

состоит в влиянию топографической массы между физической поверхностью Земли и отсчетным геодезическим эллипсоидом.

Согласно Молодену, формула [2]

$$\begin{aligned} \zeta_{12}^2 = & (N_1 + H_2)^2 + (N_1 + H_2)^2 - 2(N_1 + H_2)(N_2 + H_1) \cos \psi - \mu (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1)^2 - \\ & - 2e^2 (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1)(N_2 \sin B_2 - H_1 \sin B_1). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь индекс 1 обозначает исследуемую точку, индекс 2 текущую.

$$\cos \psi = \sin B_1 \sin B_2 + \cos B_1 \cos B_2 \cos(L_2 - L_1),$$

$$\mu = \frac{\alpha^4 - \beta^4}{\alpha^4}, \quad e^2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}, \quad (4)$$

а  $\alpha$  и  $\beta$  – большая и малая полуоси геодезического эллипсоида.

Хотин [3, 6] написал

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial H} = & -\cos z_{21}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} = -(M_2 + H_2) \sin z_{21} \cos A_{21}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial L} = & -(N_2 + H_2) \cos B_2 \sin z_{21} \sin A_{21}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $z$  – зенитное расстояние,  $A$  – азимут. Для этих величин известна формула Молоденского [2]

$$\operatorname{ctg} A_{12} = \frac{\sin(B_2 - B_1)}{\cos B_2 \sin(L_2 - L_1)} + \sin B_1 \operatorname{tg} \frac{L_2 - L_1}{2} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{Q^2} \frac{(N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1) \cos B_2}{(N_2 + H_2) \cos B_2 \sin(L_2 - L_1)} \quad (6)$$

и формула [4, стр. 18]

$$z_{12} \cos z_{12} = (N_2 + H_2) \cos \psi - (N_1 + H_2) - e^2 (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1) \sin B_1. \quad (7)$$

По формулам (3), (6) и (7) можно вычислять и при  $H_2 = 0$ .

Допускаем относительную ошибку порядка земного сжатия, в сферической системе координат  $\varphi, \delta, \lambda$ , при  $h_0 = I$ ,  $h_1 = \varphi$ ,

$h_2 = \varphi \sin \delta$ ,  $\gamma^2 = \varphi^2 + \delta^2 - 2\varphi \delta \cos \psi$ , где  $\cos \psi = \cos \varphi \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta \cos(\lambda - \lambda_0)$ , индекс "0" обозначает исследуемую точку, и имеем

$$\begin{aligned} \pm = & \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \lambda \int \int \left[ \left( \frac{\varphi - \varphi_0 \cos \psi}{2} - \frac{\varphi_0 [\sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos(\lambda - \lambda_0)]}{\varphi^2} \right) \frac{\partial H}{\partial \delta} - \right. \\ & \left. - \frac{\varphi_0 \sin \delta \sin(\lambda - \lambda_0)}{\varphi \sin \nu \cdot \varphi} \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right] \delta^2 - \frac{R - \varphi_0 \cos \psi}{(R^2 + \varphi_0^2 - 2\varphi_0 R \cos \psi)^{1/2}} R^2 \sin \delta d\delta d\lambda. \end{aligned} \quad (8)$$

При вычислении в полярной системе координат  $H, \alpha, \gamma$  при  $h_0 = h_1 = h_2 = I$ ,

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (H - H_0)^2.$$

Исходя из уравнения (I), имеем:

$$t = \frac{1}{2} \alpha \int \int \left[ \frac{H-H_0}{z} - \frac{(x-x_0) \frac{\partial H}{\partial x}}{z} - \frac{(y-y_0) \frac{\partial H}{\partial y}}{z} + \frac{H_0}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H_0^2]^{1/2}} \right] dx dy . \quad (9)$$

При ручном счете (по палеткам типа палетки Хейфорда) для вычисления взаимного влияния ближайших зон употребляются цилиндрические координаты  $H, l, \alpha$  при  $h_0 = h_1 = I, h_2 = l$ ,

$$z^2 = l_0^2 + l^2 - 2l_0 l \cos(\alpha - \alpha_0) + (H - H_0)^2,$$

при  $H = 0$  имеем:

$$z^2 = l_0^2 + l^2 - 2l_0 l \cos(\alpha - \alpha_0) + H_0^2.$$

Исходя из уравнения (I) получаем:

$$t = \frac{1}{2} \alpha \int \int \left[ \frac{H-H_0}{z} - \frac{l - l_0 \cos(\alpha - \alpha_0)}{z} \frac{\partial H}{\partial l} - \frac{l_0 \sin(\alpha - \alpha_0)}{z l} \frac{\partial H}{\partial \alpha} + \frac{H_0}{z} \right] l dl d\alpha , \quad (10)$$

при  $l_0 = 0$  имеем:

$$t = \frac{1}{2} \alpha \int \int \left[ \frac{H-H_0}{z} - \frac{\varrho}{z} \frac{\partial H}{\partial \alpha} + \frac{H_0}{z} \right] l dl d\alpha .$$

Пользуясь цилиндрической системой координат, вычислим потенциал притяжения кругового цилиндра высотой  $H$  на центр его верхнего основания и убедимся, что формула Гаусса приводит к тому же результату, что и обычный прием вычисления путем интегрирования по трем координатам. Такими координатами в данном случае будут расстояние  $H$  от верхнего основания цилиндра, расстояние  $z_0$  от его оси симметрии и угол  $\alpha$  некоторой плоскости, содержащей ось симметрии с другой такой же плоскостью, принятой за начальную при отсчете. Вычислив по формуле Гаусса, замечаем, что на верхнем основании

$$\cos(z, n) = 0 ,$$

на боковой поверхности цилиндра

$$\cos(z, n) = \frac{R}{z} ,$$

где  $R$  - радиус основания цилиндра, и на нижнем основании

$$\cos(z, n) = \frac{H}{z} .$$

Таким образом, формула Гаусса дает

$$\begin{aligned}
 t_3 &= \frac{1}{2} \mathcal{K} \partial \left( \int_0^{2\pi} \int_0^H \frac{R}{2} d\alpha dH + \int_0^{2\pi} \int_0^H \frac{z_o}{2} dz_o d\alpha \right) = \\
 &= \pi \mathcal{K} \partial \left( R^2 \int_0^H \frac{dH}{\sqrt{H^2 + R^2}} + H \int_0^H \frac{z_o dz_o}{\sqrt{H^2 + z_o^2}} \right) = \\
 &= \pi \mathcal{K} \partial \left( R^2 \ln \frac{H + \sqrt{H^2 + R^2}}{R} + H \sqrt{H^2 + R^2} - H^2 \right).
 \end{aligned}$$

Обычным приемом получаем

$$\begin{aligned}
 t &= \mathcal{K} \partial \int_0^{2\pi} \int_0^H \frac{z_o dH dz_o d\alpha}{\sqrt{H^2 + z_o^2}} = 2\pi \mathcal{K} \partial \int_0^H (\sqrt{H^2 + R^2} - H) dH = \\
 &= \pi \mathcal{K} \partial \left( R^2 \ln \frac{H + \sqrt{H^2 + R^2}}{R} + H \sqrt{H^2 + R^2} - H^2 \right),
 \end{aligned}$$

т.е. то же самое, что и выше.

Преимущество формулы Гаусса заключается в том, что ее применение избавляет от необходимости интегрирования по высоте, что в сферических и геодезических координатах представляет трудность.

Влияние топографической массы на составляющую уклона отвеса в плоскости меридиана получим, продифференцировав уравнение (2) по широте  $B_0$  исследуемой точки:

$$\begin{aligned}
 -\xi_t &= \frac{\partial t}{(M_0 + H_0) \partial B_0} = \frac{1}{2} \mathcal{K} \partial \iint_S \left[ \frac{\partial}{(M_0 + H_0) \partial B_0} \left( \frac{\partial z}{\partial H} \right) - \frac{1}{(M+H)^2} \frac{\partial H}{\partial B} \frac{\partial}{(M_0 + H_0) \partial B_0} \left( \frac{\partial z}{\partial B} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{(N+H)^2 \cos^2 B} \frac{\partial}{\partial L} \left( \frac{\partial z}{\partial B} \right) (M+H)(N+H) \cos B dB dL - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \mathcal{K} \partial \iint_S \left( \frac{\partial}{(M_0 + H_0) \partial B_0} \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial H} \right)_{H=0} \right] M N \cos B dB dL \right). \quad (II) \right]
 \end{aligned}$$

Производные от  $\frac{\partial z}{\partial H}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial B}$  и  $\frac{\partial z}{\partial L}$  по  $B_0$  раскрыты в статье [7]. Для влияния топографической массы на составляющую уклона отвеса в плоскости первого вертикала найдем аналогично

$$\begin{aligned}
 -\eta_t &= \frac{\partial t}{(N_0 + H_0) \cos B_0 \partial L_0} = \frac{1}{2} \mathcal{K} \partial \iint_S \left[ \left( \frac{\partial}{(N_0 + H_0) \cos B_0 \partial L_0} \frac{\partial z}{\partial H} - \frac{1}{(M+H)^2} \frac{\partial H}{\partial B} \frac{\partial}{(N_0 + H_0) \cos B_0 \partial L_0} \frac{\partial z}{\partial B} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{(N+H)^2 \cos^2 B} \frac{\partial}{\partial L} \left( \frac{\partial z}{\partial B} \right) (N+H)(N+H) \cos B dB dL - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \mathcal{K} \partial \iint_S \left( \frac{\partial}{(N_0 + H_0) \cos B_0 \partial L_0} \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial H} \right)_{H=0} \right] M N \cos B dB dL \right). \quad (I2) \right]
 \end{aligned}$$

Производные от  $\frac{\partial z}{\partial H}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial \delta}$  и  $\frac{\partial z}{\partial L}$  по  $L_0$  раскрыты в указанной статье.

В сферической системе координат для  $-\xi_t$  и  $-\eta_t$  имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_0} \frac{\partial t}{\partial \theta_0} &= \frac{1}{2} \alpha \delta \iint_S \left\{ \left[ \cos \vartheta \sin \varphi_0 - \sin \vartheta \cos \varphi_0 \right] \cos(\lambda - \lambda_0) (g_0 - g \cos \psi) g_0 + \right. \\ &+ \left. \frac{z^2 [\sin \vartheta \sin \varphi_0 + \cos \vartheta \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)] + g_0 [\sin \vartheta \cos \varphi_0 - \cos \vartheta \sin \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)] [\cos \vartheta \sin \varphi_0 - \sin \vartheta \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)]}{g_0 z^3} \frac{\partial H}{\partial \delta} - \right. \\ &- \left. \frac{z^2 \cos \vartheta_0 \sin(\lambda - \lambda_0) - g_0 \sin \vartheta_0 \sin(\lambda - \lambda_0) [\cos \vartheta \sin \varphi_0 - \sin \vartheta \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)]}{g_0 z^2 \sin \vartheta} \right) g^2 - \\ &- \left. \left[ \cos \vartheta \sin \varphi_0 - \sin \vartheta \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0) \right] (g_0 - R \cos \psi) g_0 R^2 \right\} \sin \vartheta d\vartheta d\lambda; \end{aligned} \quad (I3)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_0 \sin \vartheta_0} \frac{\partial t}{\partial \lambda_0} &= \frac{1}{2} \alpha \delta \iint_S \left\{ \left( \frac{\sin \vartheta \sin(\lambda - \lambda_0) (g \cos \psi - g_0) g_0}{z^3} - \right. \right. \\ &- \left. \left. \frac{g_0 \sin \vartheta \sin(\lambda - \lambda_0) [\sin \vartheta \cos \varphi_0 - \cos \vartheta \sin \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)] - z^2 \cos \vartheta \sin(\lambda - \lambda_0)}{g_0 z^3} \frac{\partial H}{\partial \delta} - \right. \right. \\ &- \left. \left. \frac{g_0 \sin \vartheta \sin \varphi_0 \sin^2(\lambda - \lambda_0) - z^2 \cos(\lambda - \lambda_0)}{g_0 z^3 \sin \vartheta} \right) g^2 - \right. \\ &- \left. \left. \frac{\sin \vartheta \sin(\lambda - \lambda_0) (R \cos \psi - g_0) g_0 R^2}{(R^2 + g_0^2 - 2g_0 R \cos \psi)^{3/2}} \right\} \sin \vartheta d\vartheta d\lambda. \right. \end{aligned} \quad (I4)$$

В декартовой системе координат

$$\frac{\partial t}{\partial y_0} = \frac{1}{2} \alpha \delta \iint_S \left[ \left( \frac{(H_0 - H)(y_0 - y)}{z^3} - \frac{(x_0 - x)(y_0 - y)}{z^3} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{z^2 - (y_0 - y)^2}{z^2} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{H_0(y_0 - y)}{\{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + H_0^2\}^{3/2}} \right) dx dy, \right. \quad (I5)$$

$$\frac{\partial t}{\partial x_0} = \frac{1}{2} \alpha \delta \iint_S \left[ \left( \frac{(H_0 - H)(x_0 - x)}{z^3} + \frac{z^2 - (x - x_0)^2}{z^2} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{(y_0 - y)(x_0 - x)}{z^3} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{H_0(x - x_0)}{\{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + H_0^2\}^{3/2}} \right) dx dy. \right. \quad (I6)$$

В полярной системе координат

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial \theta_0} &= \frac{1}{2} \alpha \delta \iint_S \left[ \left[ \frac{(H_0 - H)[l_0 - l \cos(\alpha - \alpha_0)]}{z^3} + \frac{z^2 \cos(\alpha - \alpha_0) + [l - l_0 \cos(\alpha - \alpha_0)][l_0 - l \cos(\alpha - \alpha_0)]}{z^2} \frac{\partial H}{\partial \delta} - \right. \right. \\ &- \left. \left. \frac{\sin(\alpha - \alpha_0)[z^2 - l(l_0 - l \cos(\alpha - \alpha_0))]}{z^3} \frac{\partial H}{\partial \lambda} - \frac{H_0[l_0 - l \cos(\alpha - \alpha_0)]}{z^3} \right] l dl d\alpha, \right. \end{aligned} \quad (T7)$$

$$M_{\text{тв}} = J$$

$$\frac{\partial t}{\partial H_0} = \frac{1}{2} \mathcal{A} \int \int \left[ \frac{(H-H_0) \ell \cos(\alpha-\alpha_0)}{z^3} + \frac{\cos(\alpha-\alpha_0)}{z^3} (z^2 - \ell^2) \frac{\partial H}{\partial \ell} - \frac{\sin(\alpha-\alpha_0)}{z \ell} \frac{\partial H}{\partial \alpha} + \frac{H_0 \cos(\alpha-\alpha_0)}{z^3} \right] \ell d\ell d\alpha.$$

Влияние  $\frac{\partial t}{\partial H_0}$  топографической массы на силу тяжести определяет формула

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial H_0} = & \frac{1}{2} \mathcal{A} \int \int \left[ \frac{\partial}{\partial H_0} \frac{\partial z}{\partial H} - \frac{1}{(M+H)^2} \frac{\partial H}{\partial H_0} \frac{\partial z}{\partial B} - \frac{1}{(N+H)^2} \frac{\partial H}{\partial H_0} \frac{\partial z}{\partial L} \right] (M+H)(N+H) \cos B dB dL - \\ & - \frac{1}{2} \mathcal{A} \int \int \frac{\partial}{\partial H_0} \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial H} \right)_{H=0} \right] MN \cos B dB dL. \end{aligned} \quad (18)$$

Производные  $\frac{\partial}{\partial H_0} \frac{\partial z}{\partial H}$ ,  $\frac{\partial}{\partial H_0} \frac{\partial z}{\partial B}$  и  $\frac{\partial}{\partial H_0} \frac{\partial z}{\partial L}$  также приведены в указанной статье.

В сферической системе координат

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial \varphi_0} = & \frac{1}{2} \mathcal{A} \int \int \left[ - \frac{g g_0}{z^3} \sin^2 \psi - \frac{\partial H}{\partial \vartheta} (\sin \psi \cos \vartheta_0 - \cos \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\lambda - \lambda_0)) \frac{(g - g_0 \cos \psi)}{z^3} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{\sin \vartheta_0 \sin(\lambda - \lambda_0)}{\sin \psi} \frac{(g - g_0 \cos \psi)}{z^3} \right] g^2 + \frac{R^3 g_0 \sin^2 \psi}{[R^2 + g^2 - 2R g_0 \cos \psi]^{3/2}} \sin \psi d\vartheta d\lambda. \end{aligned} \quad (19)$$

Рассмотрим теперь формулу влияния топографических масс на силу тяжести для центральной и близких зон в декартовых координатах

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial H_0} = & \frac{1}{2} \mathcal{A} \int \int \frac{\partial}{\partial H_0} \left[ \frac{\partial z}{\partial H} - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} - \left( \frac{\partial z}{\partial H} \right)_{H=0} \right] dx dy = \frac{1}{2} \mathcal{A} \int \int \left\{ \frac{(H-H_0)^2}{z^3} - \frac{1}{z} - \alpha \frac{x-x_0}{z^3} (H-H_0) - \right. \\ & \left. - g \frac{y-y_0}{z^3} (H-H_0) - \frac{H_0^2}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H_0^2]^{3/2}} + \frac{1}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H_0^2]^{1/2}} \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (20)$$

Приведенные формулы можно использовать для учета влияния изостатической массы, если задать закон вычисления ее глубины при гипотезах локальной изостатической компенсации.

Влияние топографической массы центральной зоны в виде изображенного на рис. 2 квадрата ABCD на проектирующуюся в О точку физической поверхности нетрудно вычислить с помощью этой формулы, приняв  $x_0 = y_0 = 0$ . Пусть физическую поверхность Земли на каждом участке AOB, BOC, COD и AOD можно с достаточной точностью представить плоскостью, проходящей через точки, проектирующиеся со-

ответственно в вершинах называемых участков. Нетрудно определить коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  на каждом участке по высотам в его вершинах и выразить

$$z^2 = (1 + \alpha^2)x^2 + 2\alpha\beta xy + (1 + \beta^2)y^2,$$

$$H - H_0 = \alpha x + \beta y.$$

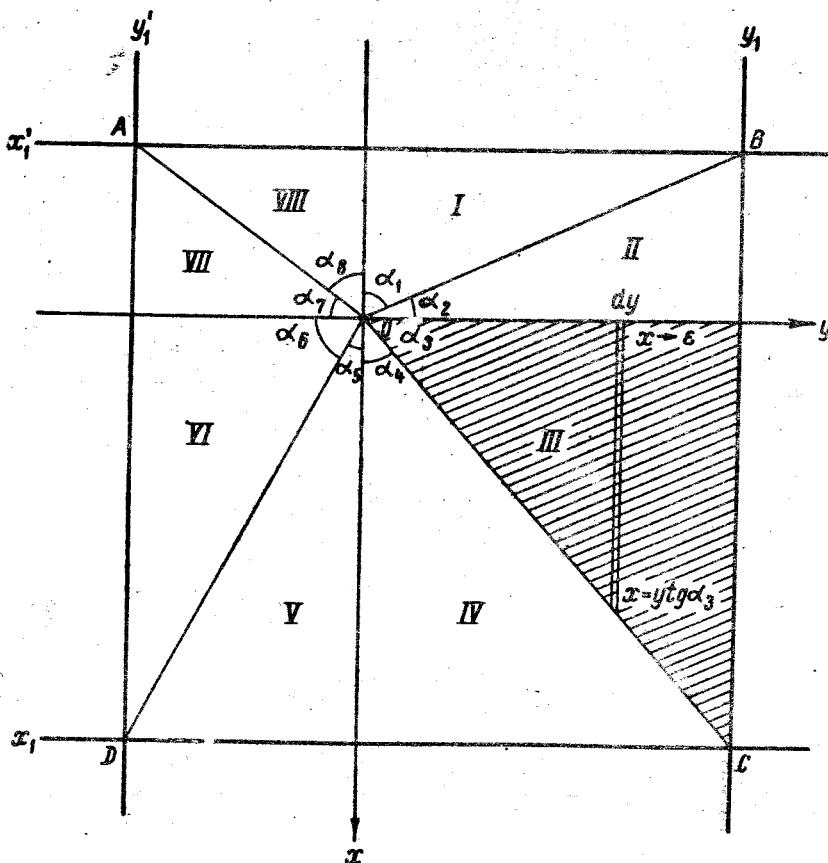


Рис. 2

Тогда в центральной зоне

$$\frac{\partial t}{\partial H_0} = -\frac{1}{2} \mathcal{A} \iint_S \frac{dxdy}{z} - \frac{1}{2} \mathcal{A} H_0^2 \iint_S \frac{dxdy}{(x^2 + y^2 + H_0^2)^{3/2}} + \frac{1}{2} \mathcal{A} \iint_S \frac{dxdy}{(x^2 + y^2 + H_0^2)^{1/2}}. \quad (21)$$

Например, для части III участка ВОС имеем

$$S_{III} \left( \frac{\partial t}{\partial H_0} \right) = -\frac{1}{2} \alpha^2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{y_1} dy \int_{-\infty}^{y_1} \frac{dx}{[(1+\alpha^2)x^2 + (1+\beta^2)y^2 + 2\alpha\beta xy]^{1/2}} + \\ + \frac{1}{2} \alpha^2 \int_{0}^{y_1} dy \int_{0}^{y_1} \frac{dx}{[x^2 + y^2 + H_0^2]^{1/2}} - \\ - \frac{1}{2} \alpha^2 H_0^2 \int_{0}^{y_1} dy \int_{0}^{y_1} \frac{dx}{[x^2 + y^2 + H_0^2]^{3/2}} . \quad (22)$$

Выполнив интегрирование, для первого из этих интегралов найдем

$$I_1 = \frac{y_1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \ln \frac{\sqrt{1+\alpha^2} \sqrt{(1+\alpha^2)\operatorname{tg}^2 \alpha_1 + 2\alpha\beta \operatorname{tg} \alpha_1 + (1+\beta^2)} + (1+\alpha^2) \operatorname{tg} \alpha_1 + \alpha\beta}{\sqrt{1+\alpha^2} \sqrt{1+\beta^2} + \alpha\beta} . \quad (23)$$

Нетрудно получить аналогичные выражения для части II участка ВОС и для каждой из двух частей остальных участков. Поскольку в рассматриваемом интеграле  $x$  и  $y$  равноправны, можно начать интегрирование с той переменной, один из пределов которой стремится к нулю, а другой может быть выражен через другую переменную.

Поскольку подынтегральные выражения остальных интегралов формулы (21) не зависят от изменения высот на участке ВОС и на любом другом участке центральной зоны или прилегающих к ней квадратов, интегрирование в нем можно выполнить по всей учитываемой области. Для простоты проинтегрируем по прямоугольнику, ограниченному осями  $x = 0$ ,  $y = 0$  и параллельными этим осям прямыми  $x = x_1$ ,  $y = y_1$ :

$$J_1 = \int_0^{y_1} dy \int_0^{x_1} \frac{dx}{[x^2 + y^2 + H_0^2]^{1/2}} = \int_0^{y_1} \frac{x_1}{(y_1^2 + H_0^2)(x_1^2 + y_1^2 + H_0^2)^{1/2}} dy .$$

Подставив  $y^2 + H_0^2 = z$ , получим

$$J_1 = \frac{x_1}{2} \int_{H_0^2}^{y_1^2 + H_0^2} \frac{dz}{z \sqrt{z^2 + (x_1^2 - H_0^2)z - x_1^2 H_0^2}} = \frac{x_1}{4H_0} + \frac{1}{2H_0} \operatorname{arc} \sin \frac{x_1^2 y_1^2 - H_0^2 y_1^2 - H_0^4 - x_1^2 H_0^2}{(y_1^2 + H_0^2)(x_1^2 + H_0^2)} . \quad (24)$$

И далее

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^{y_1} dy \int_0^{x_1} \frac{dx}{[x^2 + y^2 + H_0^2]^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{y_1} \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2 + H_0^2}) \Big|_0^{x_1} dy = \\ &= \int_0^{y_1} \ln(x_1 + \sqrt{x_1^2 + y^2 + H_0^2}) dy - \frac{1}{2} \int_0^{y_1} \ln(y^2 + H_0^2) dy. \end{aligned}$$

Интегрированием по частям для первого из этих интегралов найдем

$$\begin{aligned} \int_0^{y_1} \ln(x_1 + \sqrt{x_1^2 + y^2 + H_0^2}) dy &= y_1 \ln(x_1 + \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + H_0^2}) - \\ &- \int_0^{y_1} \frac{y^2 dy}{\sqrt{x_1^2 + H_0^2 + y^2} (x_1 + \sqrt{x_1^2 + H_0^2 + y^2})}. \end{aligned} \quad (25)$$

Второй интеграл является табличным

$$\int_0^{y_1} \ln(y^2 + H_0^2) dy = y_1 \ln(y_1^2 + H_0^2) - 2y_1 + 2H_0 \arctg \frac{y_1}{H_0}.$$

Умножив числитель и знаменатель подынтегрального выражения в формуле (25) на  $x_1 - \sqrt{x_1^2 + H_0^2 + y^2}$ , получим

$$\int_0^{y_1} \frac{y^2 dy}{\sqrt{x_1^2 + H_0^2 + y^2} (x_1 + \sqrt{x_1^2 + H_0^2 + y^2})} = - \int_0^{y_1} \frac{x_1 y^2 dy}{\sqrt{x_1^2 + H_0^2 + y^2} (y^2 + H_0^2)} + \int_0^{y_1} \frac{y^2 dy}{y^2 + H_0^2}. \quad (26)$$

Последний из этих интегралов табличный

$$\int_0^{y_1} \frac{y^2 dy}{y^2 + H_0^2} = y_1 - H_0 \arctg \frac{y_1}{H_0}.$$

Первый из интегралов в выражении (26) преобразуем с помощью подстановки

$$z = y^2 + H_0^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 x_1 \int_0^{y_1} \frac{y^2 dy}{\sqrt{x_1^2 + H_0^2 + y^2} (y^2 + H_0^2)} &= \frac{x_1}{2} \int_{H_0^2}^{y_1^2 + H_0^2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + (x_1^2 - H_0^2)x - H_0^2 x_1^2}} - \frac{x_1 H_0^2}{2} \int_{H_0^2}^{y_1^2 + H_0^2} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + (x_1^2 - H_0^2)x - H_0^2 x_1^2}} = \\
 &= \frac{x_1}{2} \ln \left[ 2y_1 \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + H_0^2} + 2(y_1^2 + H_0^2) + x_1^2 - H_0^2 \right] - \frac{x_1}{2} \ln (x_1^2 + H_0^2) - \\
 &- \frac{H_0}{2} \arcsin \frac{(x_1^2 - H_0^2)(y_1^2 + H_0^2) - 2H_0^2 x_1^2}{(y_1^2 + H_0^2)(x_1^2 + H_0^2)} - \frac{\pi H_0}{4}.
 \end{aligned}$$

Объединив полученные результаты, для рассматриваемого влияния получим

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \alpha \delta f_2 - \frac{1}{2} \alpha \omega H_0^2 f_1 &= \\
 = \frac{1}{2} \alpha \delta \left\{ y_1 \ln \frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + H_0^2}}{\sqrt{y_1^2 + H_0^2}} - \frac{x_1}{2} \ln \frac{x_1^2 + H_0^2}{2y_1 \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + H_0^2} + 2(y_1^2 + H_0^2) + x_1^2 - H_0^2} - \right. \\
 \left. - \frac{\pi H_0}{2} - H_0 \arcsin \frac{(x_1^2 - H_0^2)(y_1^2 + H_0^2) - 2H_0^2 x_1^2}{(y_1^2 + H_0^2)(x_1^2 + H_0^2)} \right\}. \quad (27)
 \end{aligned}$$

В квадратах, прилегающих к центральной зоне, физическую поверхность Земли можно представить плоскостями, проходящими через точки, проектирующиеся в углы квадратов. На каждом квадрате образуются две плоские грани, пересекающиеся по ребру, проектирующемуся на диагональ квадрата (например, диагональ АС, рис. 3).

На стороны квадратов будут проектироваться другие ребра построенной, таким образом, физической поверхности.

Для этих близких зон исходная формула влияния топографических масс на силу тяжести та же, что и для центральной зоны, но выражения для высот, входящих в эту формулу, будут другие, а именно: теперь примем  $H = \alpha x + \beta y + c$ ,  $H - H_0 = \alpha x + \beta y + (c - H_0)$ , а, следовательно, выражение для  $\gamma^2$  при  $x_0 = y_0 = 0$  будет

$$\gamma^2 = x^2 + y^2 + (\alpha x + \beta y + c - H_0)^2$$

и формулу для  $\frac{\partial \gamma}{\partial H_0}$  приведем к следующей

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \gamma}{\partial H_0} = \frac{1}{2} \alpha \delta \left\{ - \iint_S \frac{dxdy}{\gamma^2} + (H_0 - c)^2 \iint_S \frac{dxdy}{\gamma^3} - (H_0 - c) \iint_S \frac{\alpha dx + \beta dy}{\gamma^3} dxdy - \right. \\
 \left. - H_0^2 \iint_S \frac{dxdy}{(\alpha^2 + \beta^2 + H_0^2)^{3/2}} + \iint_S \frac{dxdy}{(\alpha^2 + \beta^2 + H_0^2)^{1/2}} \right\}. \quad (28)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим первый интеграл формулы (28) на участке ABC  
(рис.3):

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_1 + (y-y_1) \operatorname{tg}\alpha} \frac{dx}{(C_1 x^2 + B_1 x + A_1)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{C_1}} \int_{y_1}^{y_2} \left[ \ln [2\sqrt{C_1} \sqrt{C_1 x^2 + B_1 x + A_1} + 2C_1 x + B_1] \right]_{x_1}^{x_1 + (y-y_1) \operatorname{tg}\alpha} dy. \end{aligned}$$

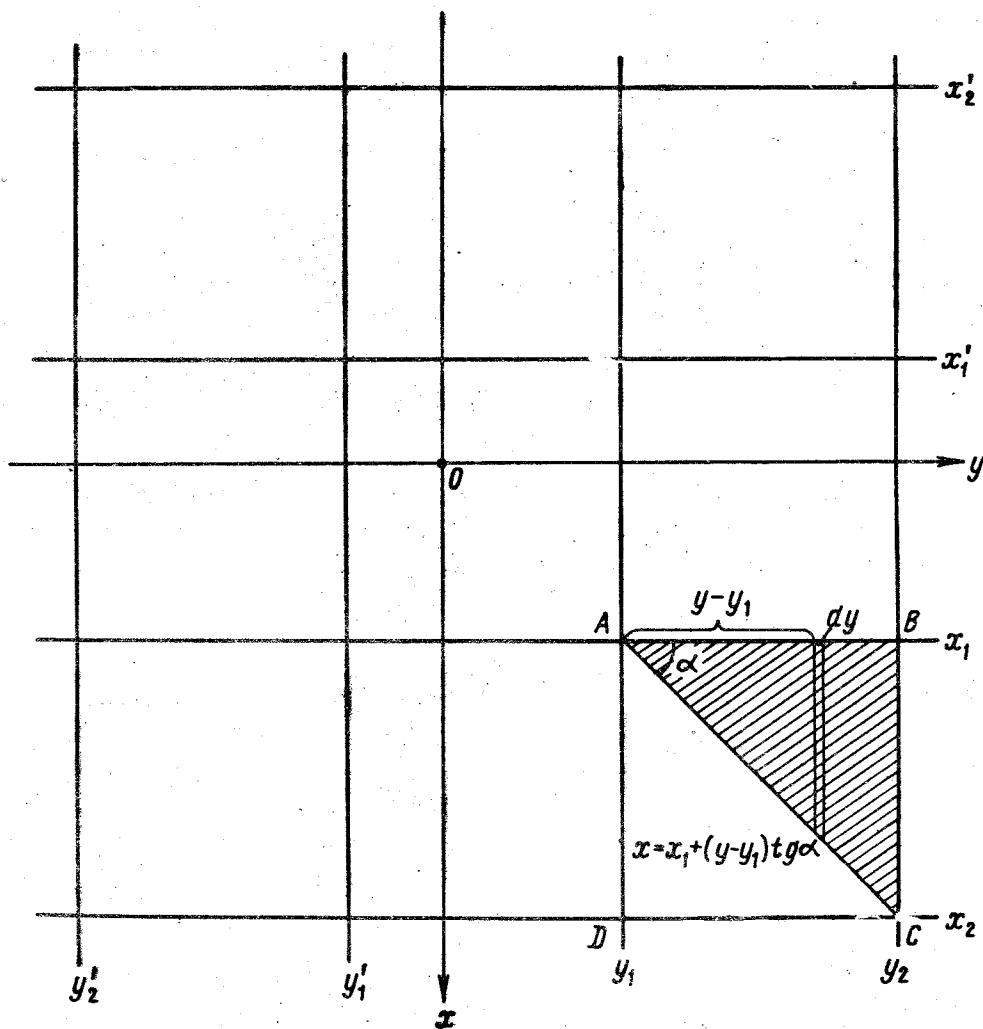


Рис. 3

Здесь обозначено:  $f = x_1 - y_1 \operatorname{tg} \alpha$  ;  
 $C_1 = I + \alpha^2$  ;  
 $B_1 = 2\alpha b y + 2\alpha(c - H_0)$  ;  
 $A_1 = (1 + B^2)y^2 + (c - H_0)^2 + 2B(c - H_0)y$ .

Раскрыв эти обозначения, получим :

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{C_1}} \int_{y_1}^{y_2} \ln [2(C_2 y^2 + B_2 y + A_2)^{1/2} + B_3 y + A_3] dy - \\ - \frac{1}{\sqrt{C_1}} \int_{y_1}^{y_2} \ln [2(C_4 y^2 + B_4 y + A_4)^{1/2} + B_5 y + A_5] dy.$$

Здесь :  $C_2 = C_1 [C_1 \operatorname{tg}^2 \alpha + 2\alpha b \operatorname{tg} \alpha + (1 + B^2)]$  ;  
 $B_2 = C_1 [2C_1 f \operatorname{tg} \alpha + 2\alpha b f + 2\alpha(c - H_0) \operatorname{tg} \alpha + 2B(c - H_0)]$  ;  
 $A_2 = C_1 [C_1 f^2 + 2\alpha(c - H_0)f + (c - H_0)^2]$  ;  
 $B_3 = 2C_1 \operatorname{tg} \alpha + 2\alpha b$  ;  
 $A_3 = 2C_1 f + 2\alpha(c - H_0)$  ;  
 $C_4 = C_1 (1 + B^2)$  ;  
 $B_4 = C_1 [2\alpha b x_1 + 2B(c - H_0)]$  ;  
 $A_4 = C_1 [C_1 x_1^2 + 2\alpha(c - H_0)x_1 + (c - H_0)^2]$  ;  
 $B_5 = 2\alpha b$  ;  
 $A_5 = 2C_1 x_1 + 2\alpha(c - H_0)$ .

Поскольку интегралы в выражении для  $J_1$ , однотипны, рассмотрим первый из них. Интегрированием по частям находим :

$$I_1 = \int_{y_1}^{y_2} \ln [2(C_2 y^2 + B_2 y + A_2)^{1/2} + B_3 y + A_3] dy = \\ = y \ln [2(C_2 y^2 + B_2 y + A_2)^{1/2} + B_3 y + A_3] \Big|_{y_1}^{y_2} - \\ - \int_{y_1}^{y_2} \frac{2C_2 y^2 + B_2 y + B_3 (C_2 y^2 + B_2 y + A_2)^{1/2} y}{(C_2 y^2 + B_2 y + A_2)^{1/2} [2(C_2 y^2 + B_2 y + A_2)^{1/2} + B_3 y + A_3]} dy.$$

Теперь рассмотрим интеграл

$$I_2 = \int_{y_1}^{y_2} \frac{y^2 dy}{(C_2 y^2 + B_2 y + A_2)^{1/2} [2(C_2 y^2 + B_2 y + A_2)^{1/2} + B_3 y + A_3]}.$$

Обозначим:

$$R^2 = C_6 y^2 + B_6 y + A_6$$

и умножим числитель и знаменатель на  $2R - (B_6 y + A_6)$ . Тогда

$$I_3 = 2 \int_{y_1}^{y_2} \frac{y^2 dy}{(C_6 y^2 + B_6 y + A_6)} - B_6 \int_{y_1}^{y_2} \frac{y^2 dy}{R(C_6 y^2 + B_6 y + A_6)} - A_6 \int_{y_1}^{y_2} \frac{y^2 dy}{R(C_6 y^2 + B_6 y + A_6)},$$

где дополнительно обозначено:

$$C_6 = 4C_2 - B_3^2;$$

$$B_6 = 4B_2 - 2A_3 B_3;$$

$$A_6 = 4A_2 - A_3^2.$$

Первый из этих интегралов является табличным (например, [5], стр. 83). Для второго интеграла находим

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^{y_2} \frac{y^2 dy}{R(C_6 y^2 + B_6 y + A_6)} &= \frac{1}{C_6} \int_{y_1}^{y_2} \frac{y dy}{R} - \frac{B_6}{C_6^2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{R} + \\ &+ \int_{y_1}^{y_2} \frac{\left(\frac{B_6^2}{C_6^2} - \frac{A_6}{C_6}\right)y + \frac{A_6 B_6}{C_6^2}}{R(C_6 y^2 + B_6 y + A_6)} dy. \end{aligned}$$

Прежде всего здесь мы умножили числитель и знаменатель подынтегрального выражения на  $C_6$  и к числителю прибавили и вычли из него  $B_6 y^2 + A_6 y$ . Выделив первый член правой части и интеграл

$$-\frac{A_6}{C_6} \int \frac{y dy}{R(C_6 y^2 + B_6 y + A_6)}$$

с оставшимся интегралом мы повторили указанную операцию, прибавив к числителю и вычтя  $B_6 y + A_6 y$ . Все полученные интегралы являются табличными (например, [5], стр. 97 и 103).

Для последнего из интегралов выражения  $I_3$  получаем

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{y^2 dy}{R(C_6 y^2 + B_6 y + A_6)} = \frac{1}{C_6} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{R} - \frac{1}{C_6} \int_{y_1}^{y_2} \frac{(B_6 y + A_6) dy}{R(C_6 y^2 + B_6 y + A_6)},$$

т.е. табличные интегралы уже встречавшегося типа.

Интеграл

$$I_3 = \int_{y_1}^{y_2} \frac{y dy}{R(2R + B_3 y + A_3)},$$

так же как  $I_2$ , приводим к виду

$$I_3 = 2 \int_{y_1}^{y_2} \frac{y dy}{(C_6 y^2 + B_6 y + A_6)} - B_3 \int_{y_1}^{y_2} \frac{y^2 dy}{R(C_6 y^2 + B_6 y + A_6)} - A_3 \int_{y_1}^{y_2} \frac{y dy}{R(C_6 y^2 + B_6 y + A_6)}$$

или

$$I_3 = 2 \int_{y_1}^{y_2} \frac{y dy}{(C_6 y^2 + B_6 y + A_6)} - \frac{B_3}{C_6} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{R} + \int_{y_1}^{y_2} \frac{\left(\frac{B_3 B_6}{C_6} - A_3\right) y + \frac{A_6 B_3}{C_6}}{R(C_6 y^2 + B_6 y + A_6)} dy.$$

Все эти интегралы табличные (первый см., например, [5], стр. 82).

Последний интеграл из  $I_1$

$$I_4 = \int_{y_1}^{y_2} \frac{y dy}{(2R + B_3 y + A_3)}$$

можно привести к уже рассмотренным. Умножив числитель и знаменатель подынтегрального выражения  $I_4$  на  $2R - B_3 y - A_3$ , находим

$$I_4 = 2 \int_{y_1}^{y_2} \frac{R y dy}{(C_6 y^2 + B_6 y + A_6)} - B_3 \int_{y_1}^{y_2} \frac{y^2 dy}{(C_6 y^2 + B_6 y + A_6)} - A_3 \int_{y_1}^{y_2} \frac{y dy}{(C_6 y^2 + B_6 y + A_6)}.$$

Два последние интеграла – уже встречавшиеся табличные. Умножив и разделив первый интеграл на  $R$ , находим

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^{y_2} \frac{R y dy}{(C_6 y^2 + B_6 y + A_6)} &= C_2 \int_{y_1}^{y_2} \frac{y^3 dy}{(C_6 y^2 + B_6 y + A_6) R} + \\ &+ B_2 \int_{y_1}^{y_2} \frac{y^2 dy}{R(C_6 y^2 + B_6 y + A_6)} + A_2 \int_{y_1}^{y_2} \frac{y dy}{R(C_6 y^2 + B_6 y + A_6)}. \end{aligned}$$

Оба первые интеграла раскрыты выше, последний является табличным встречавшегося типа.

Рассмотрим второй интеграл формулы (28)

$$\begin{aligned} J_2 &= (H_o - C)^2 \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{f+y \operatorname{tg} \alpha} \frac{dx}{(C_1 x^2 + B_1 x + A_1)^{3/2}} = \\ &= 2(H_o - C)^2 \int_{y_1}^{y_2} \frac{2C_1 x + B_1}{(C_1 y^2 + B_1 y + A_1) \sqrt{C_1 x^2 + B_1 x + A_1}} \left|_{x_1}^{f+y \operatorname{tg} \alpha} dy , \right. \end{aligned}$$

где

$$A_7 = 4(c - H_o)^2 , \quad B_7 = 8b(c - H_o) , \quad C_7 = 4(I + \alpha^2 + b^2).$$

Выполнив подстановку, получим

$$J_2 = 2(H_o - C)^2 \sqrt{C_1} \int_{y_1}^{y_2} \frac{B_5 y + A_5}{(C_1 y^2 + B_1 y + A_1) \sqrt{C_1 y^2 + B_1 y + A_1}} dy - 2(H_o - C)^2 \sqrt{C_1} \int_{y_1}^{y_2} \frac{B_5 y + A_5}{(C_1 y^2 + B_1 y + A_1) \sqrt{C_1 y^2 + B_1 y + A_1}} dy .$$

Мы получили встречающиеся табличные интегралы.

Третий интеграл формулы (28)

$$J_3 = a(H_o - C) \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{f+y \operatorname{tg} \alpha} \frac{xdx}{(C_1 x^2 + B_1 x + A_1)^{3/2}}$$

можно раскрыть так:

$$J_3 = -2a(H_o - C)\sqrt{C_1} \int_{y_1}^{y_2} \frac{C_1 y^2 + B_1 y + A_1}{(C_1 y^2 + B_1 y + A_1) \sqrt{C_1 y^2 + B_1 y + A_1}} dy + 2a(H_o - C)\sqrt{C_1} \int_{y_1}^{y_2} \frac{C_1 y^2 + B_1 y + A_1}{(C_1 y^2 + B_1 y + A_1) \sqrt{C_1 y^2 + B_1 y + A_1}} dy ,$$

где

$$A_8 = 2(c - H_o)^2 + 2ab^2(c - H_o) , \quad B_8 = 4b(c - H_o) + 2ab^2 + 2a(c - H_o)\operatorname{tg} \alpha , \quad C_8 = 2(1 + b^2) + 2ab\operatorname{tg} \alpha ,$$

$$A_9 = 2(c - H_o)^2 + 2a(c - H_o)x_1 , \quad B_9 = 4b(c - H_o) + 2abx_1 , \quad C_9 = 2(1 + b^2) .$$

Оба эти интеграла, как показано, легко привести к табличным.

Четвертый интеграл формулы (28)

$$J_4 = (H_o - C)b \int_{y_1}^{y_2} y dy \int_{x_1}^{f+y \operatorname{tg} \alpha} \frac{dx}{(C_1 x^2 + B_1 x + A_1)^{3/2}} ,$$

используя выражение для  $J_2$ , приводим к интегралам, встречающимся выше

$$J_4 = 2(H_0 - c) \delta \sqrt{C_1} \int_{y_1}^{y_2} \frac{(B_3 y^2 + A_3 y) dy}{(C_7 y^2 + B_7 y + A_7) \sqrt{C_2 y^2 + B_2 y + A_2}} - 2(H_0 - c) \delta \sqrt{C_1} \int_{y_1}^{y_2} \frac{(B_5 y^2 + A_5 y) dy}{(C_7 y^2 + B_7 y + A_7) \sqrt{C_4 y^2 + B_4 y + A_4}}.$$

Последние члены формулы (28) проинтегрированы в квадратурах (см. формулу 27).

Техники преобразования интегралов указаны автору В.Ф. Еремеевым.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Молоденский М.С. Основные вопросы геодезической гравиметрии.— Тр. ЦНИГАИК, вып. 42, 1945.
2. Молоденский М.С. Новый метод решения геодезических задач.— Тр. ЦНИГАИК, вып. 103, 1954.
3. Hotine M. Geodetic coordinate sistem. A.I.G. Toronto assembly, Study group No.1, 1957.
4. Еремеев В.Ф., Юркина М.И. Некоторые вопросы обработки пространственных сетей.— Тр. ЦНИГАИК, вып. 171, 1966.
5. Градштейн И.С. и Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М., Физматиз, 1963.
6. Hotine M. Mathematical geodesy. ESSA Monograph 2. Washington. U.S. Department of commerce. 1969.
7. Еремеев В.Ф., Юркина М.И. Evaluation of non-linear terms in Molodensky's integral equation for disturbing potential.— Bulletin geodesique, 1968, No.89.

G.A. Alexashina

THE GAUSS FORMULA USED FOR DEDUCING THE INFLUENCE  
OF TOPOGRAPHIC MASSES ON THE POTENTIAL, GRAVITY,  
AND PLUMB-LINE DEFLECTION

#### С и м а г у

The influence of masses of topography on the disturbing potential, gravity, and components of the plumb-line deflection

was determined for cases when the heights are known to be functions of geodetic, spherical, cylindrical, and Cartesian coordinates.

If a rule is given for computing the depth of the isostatic mass as a function of the height of the topographic mass, then the same formulas may be used to account for the influence of the compensating mass under assumption of local isostasy. The possibility is demonstrated of expressing by quadratures the influence of the topographical mass upon gravity if Cartesian coordinates are used.

УДК 528.223:550.3I2:68I.3

Г.А. Алексашина

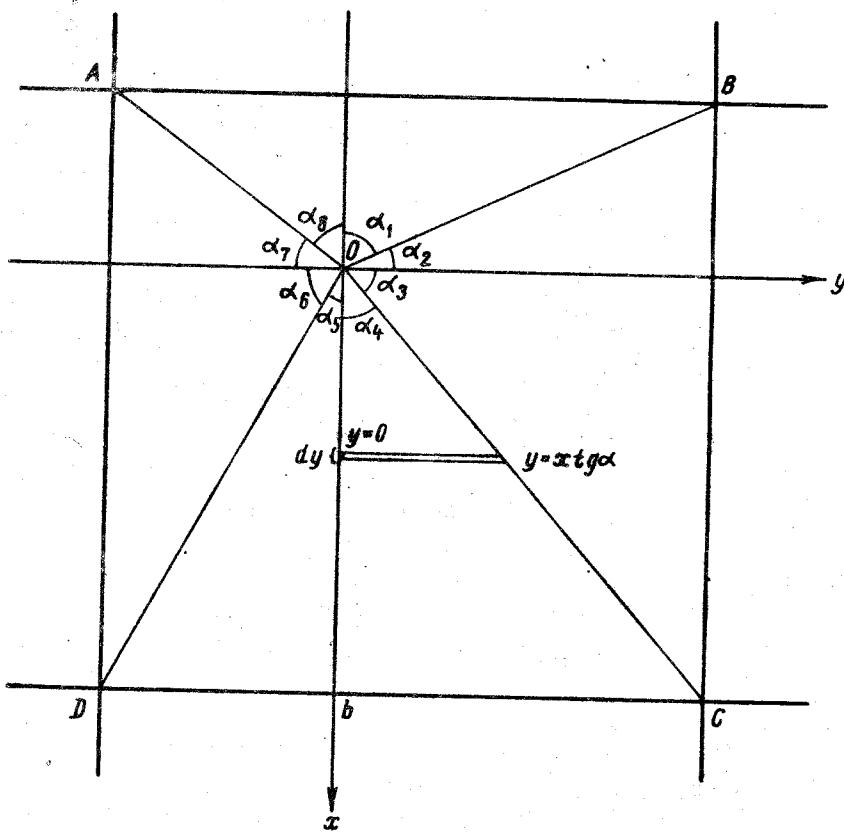
К ВОПРОСУ ОБ УЧЕТЕ ВЛИЯНИЯ БЛИЖАЙШЕЙ ОБЛАСТИ  
НА ТОПОГРАФИЧЕСКУЮ ПОПРАВКУ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

14836-38

При вычислении поправок в силу тяжести за рельеф земной поверхности или за полное влияние топографических масс на электронных вычислительных машинах удобно пользоваться декартовыми координатами и земную поверхность аппроксимировать средними высотами на участках квадратной сетки. Методы таких вычислений и соответствующие формулы рассмотрены неоднократно. В статье автора (Тр. ЦНИИГАИК, вып. 171, 1966) предложен способ учета ближайшей окрестности в этом случае. Влияние призмы, содержащей гравиметрический пункт, и ближайших к этому пункту трех призм с квадратными основаниями заменено там четырьмя телами с прямоугольными основаниями и отвесными боковыми гранями. Один угол всех этих прямоугольников должен совпадать с проекцией гравиметрического пункта на отсечную плоскость; противоположный по диагонали угол - с точкой квадратной сетки. Земная поверхность в этой окрестности аппроксимирована наклонными плоскостями, проходящими через гравиметрический пункт. Наклоны плоскостей можно установить по высотам в квадратах, примыкающих к выделенным.

Выбор наклонов таких аппроксимирующих плоскостей, возможно, будет удобнее, если выделенные призмы заменить четырьмя телами, основаниями которых служат треугольники с вершинами в проекции гравиметрического пункта и в точках квадратной сетки (на рисунке треугольники АО $\Delta$ , АOB, BOC, CO $\Delta$ ). Боковые грани этих призм отвесны, а земная поверхность аппроксимирована плоскостями, проходящими через гравиметрический пункт и точки на земной поверхности, которые проектируются в точки A, B, C,  $\Delta$  квадратной сетки.

Если начало декартовой системы координат совпадает с проекцией О гравиметрического пункта, то по высоте этого пункта и по



высотам в перечисленных точках можно вывести уравнения аппроксимирующих земную поверхность плоскостей в виде

$$H_0 - H = \alpha x + f_y. \quad (I)$$

Вычислим тяжение на силу тяжести тела с основанием  $OBc$  и отвесными боковыми гранями. Сверху это тело ограничено плоскостью выраженной уравнением (I). Имеем:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial T}{\partial g}(OBC) &= \sigma D \int_0^b dx \int_0^{xtg\alpha} dy \int_0^H \frac{(H_0 - h') dh'}{[x^2 + y^2 + (H_0 - h')^2]^{3/2}} = \\
 &= -\sigma D \int_0^b dx \int_0^{xtg\alpha} dy \int_{H_0}^H \frac{z dz}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} = \\
 &= \sigma D \int_0^b dx \int_0^{xtg\alpha} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + (H_0 - H)^2}} - \sigma D \int_0^b dx \int_0^{xtg\alpha} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + H_0^2}} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Далее индекс "4" у угла  $\alpha$  писать не будем.

В соответствии с уравнением (I) для первого из этих интегралов получаем:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \int_0^b dx \int_0^{xtg\alpha} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + (H_0 - H)^2}} = \int_0^b dx \int_0^{xtg\alpha} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + (cx + fy)^2}} = \\
 &= \int_0^b dx \int_0^{xtg\alpha} \frac{dy}{\sqrt{(1+f^2)y^2 + 2cfxy + (1+c^2)x^2}}
 \end{aligned}$$

Поскольку

$$1 + f^2 > 0$$

$$4(1+f^2)(1+c^2)x^2 > 4c^2f^2x^2,$$

находим:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \int_0^b \left[ \frac{1}{\sqrt{1+f^2}} \left( Arsh \frac{cf + (1+f^2)tg\alpha}{(1+c^2+f^2)^{1/2}} - Arsh \frac{cf}{(1+c^2+f^2)^{1/2}} \right) \right] dx = \\
 &= \frac{b}{\sqrt{1+f^2}} \left( Arsh \frac{cf + (1+f^2)tg\alpha}{(1+c^2+f^2)^{1/2}} - Arsh \frac{cf}{(1+c^2+f^2)^{1/2}} \right) \quad (3)
 \end{aligned}$$

Для второго интеграла в уравнении (2) получим:

$$\begin{aligned}
 J_2 &= \int_0^b dx \int_0^{xtg\alpha} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + H_0^2}} = \int_0^b \ln(xtg\alpha + \sqrt{x^2 \sec^2 \alpha + H_0^2}) dx - \\
 &\quad - \int_0^b \ln \sqrt{x^2 + H_0^2} dx \quad (4)
 \end{aligned}$$

Второй из этих интегралов – табличный. В первом выполним интегрирование по частям. Тогда

$$J_2 = b \ln \frac{b \operatorname{tg} \alpha + \sqrt{b^2 \sec^2 \alpha + H_0^2}}{\sqrt{b^2 + H_0^2}} + H_0 (-\arctg \frac{\sqrt{b^2 \sec^2 \alpha + H_0^2}}{H_0 \operatorname{tg} \alpha} + \frac{\pi}{2} - \alpha). \quad (5)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} - \frac{\partial T}{\partial g}(OBC) &= \mathcal{E} \mathfrak{D} \frac{b}{\sqrt{1+f^2}} \left( \operatorname{Arsh} \frac{cf + (1+f^2)t \operatorname{tg} \alpha}{(1+c^2+f^2)^{1/2}} - \operatorname{Arsh} \frac{cf}{(1+c^2+f^2)^{1/2}} \right) - \\ - b \ln \frac{b \operatorname{tg} \alpha + \sqrt{b^2 \sec^2 \alpha + H_0^2}}{\sqrt{b^2 + H_0^2}} &+ H_0 (\arctg \frac{\sqrt{b^2 \sec^2 \alpha + H_0^2}}{H_0 \operatorname{tg} \alpha} - \frac{\pi}{2} + \alpha). \end{aligned} \quad (6)$$

Влияние рельефа на том же участке обс равно

$$\begin{aligned} - \Delta \frac{\partial T}{\partial g}(OBC) &= \mathcal{E} \mathfrak{D} \int dx \int dy \int_{H_0}^H \frac{(H_0 - h) dh}{[x^2 + y^2 + (H_0 - h)^2]^{3/2}} = \\ &= - \mathcal{E} \mathfrak{D} \int_0^b dx \int_0^{\operatorname{tg} \alpha} dy \int_{H_0}^{H_0 - H} \frac{z dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \\ &= \mathcal{E} \mathfrak{D} \int_0^b dx \int_0^{\operatorname{tg} \alpha} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + (H_0 - H)^2}} - \mathcal{E} \mathfrak{D} \int_0^b dx \int_0^{\operatorname{tg} \alpha} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Используя полученные выше результаты, найдем:

$$\begin{aligned} - \Delta \frac{\partial T}{\partial g}(OBC) &= \mathcal{E} \mathfrak{D} \frac{b}{\sqrt{1+f^2}} \left( \operatorname{Arsh} \frac{cf + (1+f^2)t \operatorname{tg} \alpha}{(1+c^2+f^2)^{1/2}} - \operatorname{Arsh} \frac{cf}{(1+c^2+f^2)^{1/2}} \right) - \\ &- \mathcal{E} \mathfrak{D} b \ln (\operatorname{tg} \alpha + \sec \alpha). \end{aligned} \quad (8)$$

Сравнивая полученные формулы с формулами в упомянутой статье автора, видим, что вновь полученные проще.

G.A. Alexashina

ABOUT ACCOUNTING FOR THE INFLUENCE OF THE NEAREST  
ZONE ON TOPOGRAPHICAL CORRECTION TO GRAVITY

S u m m a r y

A method of accounting for the influence of the nearest zone in computing the influence of topographical masses on gravity with the help of electronic computers is described. In the neighbourhood of a gravity point, the mass of topography may be represented by 4 solids. Each of these has a triangle for its base; one vertex of the triangle coincides with the projection of the gravity point whereas the two others coincide with points of a square grid (triangles AOD, AOB, BOC, COD of the Figure). The lateral sides of these solids are sheer, and the Earth's surface is approximated by plane surfaces passing through the gravity point, and through those points on the Earth's surface as are projected to points A, B, C, D of the square grid.

УДК 528.223:550.3I2+52I.93

В.Ф. Еремеев, М.И. Юркина

К ВЫВОДУ ВЕКОВЫХ ИЗМЕНЕНИЙ ЗЕМНОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ  
И ВЕКОВЫХ ДВИЖЕНИЙ ПОЛОСА

Вопросы, связанные с определением движений земной коры, движений полюсов и изменений астрономических широт и долгот, привлекают внимание геодезистов и астрономов. В связи с этими вопросами организуют повторные наблюдения на линиях геометрического нивелирования, повторные измерения силы тяжести и астрономических долгот и по регулярным определениям астрономических широт в нескольких обсерваториях - международную службу движений полюса. Однако при обработке всех таких повторяемых наблюдений недостаточно учитывать необходимость их взаимного согласования. Именно этому обстоятельству посвящают свою заметку авторы, имея в виду прежде всего оценку вековых частей в изменениях перечисленных величин.

Неполное согласование результатов отдельных обсерваторий международной службы движения полюсов заставило Юми и Вако (1968) отделить вековое движение полюсов (по современной оценке  $\sim 0.^{\circ}3$  за 100 лет) от векового смещения зенитов в обсерваториях Мицувара и Юкайа. Смещение первого зенита они оценили в  $\sim 0.^{\circ}0016$  за год, т.е. в  $\sim 0.^{\circ}16$  за 100 лет, смещение второго - в  $\sim 0.^{\circ}0010$  за год, т.е. в  $\sim 0.^{\circ}10$  также за 100 лет. Подобные подходы к обработке результатов международной службы движения полюсов были и раньше. Результат Юми и Вако указывает на возможность изменений в направлении силы тяжести на обсерваториях Мицувара и Юкайа. Вполне достоверных наблюдений смещений отвесных линий в точках земной поверхности - изменений в направлении силы тяжести за период более или менее точных астрономических наблюдений мы пока что не имеем - предполагаемые смещения лежат, как правило, в пределах

ошибок старых наблюдений, однако отрицать возможность таких смещений мы не можем. Упомянутое правило нарушают, например, повторные наблюдения силы тяжести около одного из японских вулканов: за период 1950–1963 гг. зарегистрировано изменение силы тяжести на 0,9 мгл, что позволяет предполагать в этом районе смещение отвеса и изменение астрономической широты или долготы до 0,2" (Иноуэ, Фудзии, Кидзава, 1968). Если возможно вековое смещение оси вращения Земли и вековое смещение соответственной главной центральной оси инерции, то можно допустить и обусловленное перемещениями земных масс более или менее медленно изменяющиеся при перемещении точки по земной поверхности вековое изменение земного гравитационного поля. Возможность соответственного смещения отвесов отмечают почти все астрономы, обсуждающие движение полюсов.

Ниже описан вариант решения задачи о совместном определении вековых изменений земного гравитационного поля и вековых движений полюсов. В основу решения положены принципы Молоденского (1958).

Поправки астрономических наблюдений в астрономо-геодезической сети за приведение к одному моменту времени могут значительно различаться при учете смещений отвеса и без такого учета, если эти смещения имеют, например, порядок вывода Юми и Вако для смещений зенитов названных выше обсерваторий и сохраняют величину и направление в течение длительного времени. В смещениях зенитов, если они будут обнаружены, при этом необходимо отделить влияние планового смещения точки от влияния изменений в направлении силы тяжести в этой точке.

Разрешимость задачи и единственность решения могут быть достигнуты, если составляющие планового смещения точек земной поверхности и элементы изменения земного гравитационного поля можно описать медленно изменяющимися функциями плановых координат. На первых этапах выводов можно считать соответственно постоянными составляющие  $\Delta B$ ,  $\Delta L$  планового смещения точек Старого и Нового Света (или каждого континента в отдельности) – дрейфа континентов.

Допуским возможность перемещения земных масс, можно сопоставить с таким перемещением разность  $t$  потенциалов притяжения этих масс в некоторые два момента времени. В самом общем случае можно объяснить величину  $t$  разностью  $\rho$  плотностей простого слоя на земной поверхности, заменяющего притяжение земной массы. Тогда

$$t = \int \frac{\rho}{\gamma} dS,$$

где  $\gamma$  – расстояние между фиксированной точкой и элементом  $dS$  земной поверхности. В величину  $\rho$  включена гравитационная постоянная, так что размерность плотности  $\rho$  совпадает с размерностью

сили тяжести. Выразив через разности  $t$  и  $\varphi$  изменения астрономических широт и долгот и силы тяжести, можно получить систему интегральных уравнений, определяющих плотность  $\rho$ . Свободные члены этих интегральных уравнений должны быть выражены через повторные определения силы тяжести, повторные определения астрономических широт и долгот. При использовании повторных определений силы тяжести по-видимому не удастся обойтись без результатов повторного геометрического нивелирования. Как отмечено, описанный путь пригоден в общем случае, например, если в исследование в единую систему интегральных уравнений включены горные районы. Более просто можно оценить изменения гравитационного поля, полагая земную поверхность сферической и допуская возможность представления разности  $t$  на этой поверхности в виде разложения по сферическим функциям

$$t = \sum_{m=1}^N \frac{R}{g} \sum_{k=0}^m P_{mk}(\sin B) [a_{mk} \cos kL + b_{mk} \sin kL], \quad (I)$$

где  $R$  – земной радиус,  $B$  – радиус-вектор некоторой фиксированной точки,  $B, L$  – соответственно широта и долгота. Старшее значение  $N$  степени полиномов Лежандра не должно быть велико. Такой путь решения нашей задачи, т.е. решения ее на основе формулы (I), может быть успешным только при условии, что изменения в расположении притягивающих масс происходят на значительных глубинах внутри Земли, а не вблизи ее поверхности. Горные и сейсмоактивные районы теперь нельзя непосредственно включать в исследование. Принято  $a_{\infty} = 0$ , поскольку общее количество земной массы не может измениться.

Разложению (I) соответствуют изменения астрономических широт

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{gR} \frac{\partial t}{\partial B} = -\frac{1}{gR^2} \sum_{m=1}^N \sum_{k=0}^m \frac{\partial P_{mk}}{\partial B} (a_{mk} \cos kL + b_{mk} \sin kL),$$

где  $g$  – сила тяжести, и изменения астрономических долгот

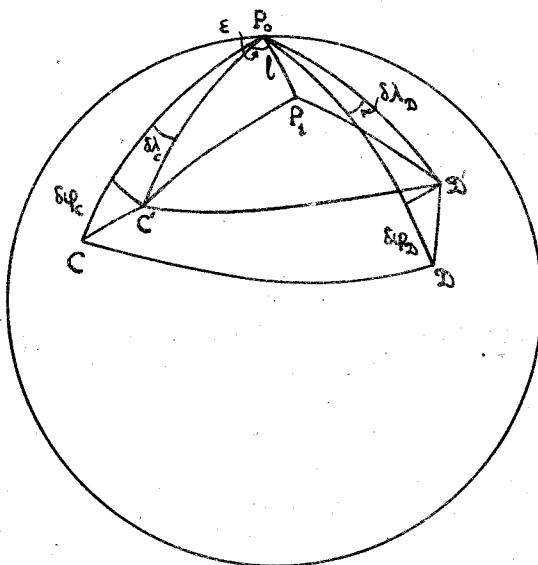
$$\Delta\lambda = -\frac{1}{gR \cos B} \frac{\partial t}{\partial L} = \frac{1}{gR^2 \cos B} \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^m k P_{mk} (a_{mk} \sin kL - b_{mk} \cos kL).$$

Пусть в момент  $T_0$  полюс – пересечение оси вращения Земли и небесной сферы находился в точке  $P_0$ . В этот момент пусть астрономическая широта точки С равна  $\Phi_c = 90^\circ - \text{CP}_0$  (см. рисунок) и астрономическая долгота этой точки равна нулю. В момент  $T_1$

пусть пересечение отвеса точки С и небесной сферы представлено точкой  $C'$ , долгота которой относительно полюса  $P_0$  и первоначального положения отвеса точки С равна углу  $\angle CPC'$ . Обозначим

$$-\frac{1}{gR^2 \cos B_c} \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^m b_{mk} k P_{mk} = \delta \lambda_c.$$

Геодезические долготы будем отсчитывать от точки С.



Меридиональное смещение точки  $C'$  относительно точки С равно

$$-\frac{1}{gR^2} \sum_{m=1}^N \sum_{k=0}^m a_{mk} \left( \frac{\partial P_{mk}}{\partial B} \right)_{B=B_c} + \Delta_c B = \delta \varphi_c.$$

Пусть в момент  $T_0$  астрономическая широта точки  $D$  равна  $\varphi_a = 90^\circ - \Delta P_0$  и астрономическая долгота этой точки равна  $\lambda_a$ . В момент  $T_1$  пусть пересечение небесной сферы и отвеса точки  $D$  представляет точка  $D'$ . Таким образом, в момент  $T_1$  астрономическая долгота точки  $D$  относительно полюса  $P_0$  и первоначального положения меридиана точки С увеличилась на

$$\frac{1}{gR^2 \cos B_D} \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^m k P_{mk} (a_{mk} \sin k L_D - b_{mk} \cos k L_D) + \Delta_D L = \delta \lambda_D. \quad (2)$$

Для меридионального смещения точки  $\Phi$  на небесной сфере находим

$$-\frac{1}{gR^2} \sum_{m=1}^N \sum_{k=0}^m \left( \frac{\partial P_{mk}}{\partial B} \right)_{B=B_p} (\alpha_{rak} \cos kL + \beta_{mk} \sin kL) + \Delta_B = \delta\varphi_a. \quad (3)$$

Пусть в момент  $T_1$  полюс находится в точке  $P_1$ . Таким образом, из астрономических измерений в точке С для ее широты мы вывели бы значение  $\varphi'_c = 90^\circ - C'P_1$ . Долготу этой точки относительно полюса  $P_1$  и нового положения ее меридиана мы снова примем равной нулю. Из астрономических измерений в точке  $\Phi$  для ее широты мы вывели бы значение  $\varphi'_a = 90^\circ - \Phi'P_1$ , и для долготы этой точки получили бы  $\lambda'_a = -C'P_1\Phi'$ .

Выразим дугу  $P_0P_1 = l$  и ее угол  $\varepsilon$  с меридианом  $CP_0$  точки С в момент  $T_0$  через повторные определения астрономических широт точек С и  $\Phi$  и астрономической долготы точки  $\Phi$ . Поправки  $\delta$  будем считать известными. Будем учитывать только линейное влияние малых углов. Определим сначала элементы смещения полюса, используя повторные определения широт. Из сферического треугольника  $C'P_0P_1$  следует

$$\alpha_c = l \cos \varepsilon = \varphi'_c - \varphi_c - \delta\varphi_c. \quad (4)$$

Из сферического треугольника  $\Phi'P_0P_1$  находим

$$y \sin \lambda'_a = \varphi'_a - \varphi_a - \delta\varphi_a - \alpha \cos \lambda'_a, \quad (5)$$

где

$$y = l \sin \varepsilon,$$

и разностью  $\lambda'_a - \lambda_a$  можно пренебречь.

Выразим теперь величины  $\alpha$  и  $y$  через повторные определения астрономической широты и астрономической долготы точки  $\Phi$ . Из сферических треугольников  $C'\Phi'P_0$  и  $C'\Phi'P_1$  имеем тождество

$$\cos C'\Phi' = \cos C'P_0 \cos \Phi'P_0 + \sin C'P_0 \sin \Phi'P_0 \cos C'P_0\Phi' =$$

$$= \cos C'P_1 \cos \Phi'P_1 + \sin C'P_1 \sin \Phi'P_1 \cos C'P_1\Phi',$$

из которого следует

$$\alpha = \frac{\cos \varphi_c \cos \varphi_a \sin \lambda_a + \mu (\cos \varphi_c \sin \varphi_a \cos \lambda_a - \sin \varphi_c \cos \varphi_a)}{\cos \varphi_c \sin \varphi_a - \sin \varphi_c \cos \varphi_a \cos \lambda_a}, \quad (6)$$

где

$$\gamma = \lambda'_a - \lambda_a + \delta\lambda_c - \delta\lambda_b,$$

$$\mu = \varphi'_a - \varphi_a - \delta\varphi_b.$$

Уравнением, определяющим значение  $\gamma$ , будет снова (5). Изложенные выкладки иллюстрируют возможность вывода элементов движения полюса как по паре повторных определений астрономической широты, так и по повторным определениям одной астрономической широты и одной астрономической долготы. Совпадение таких выводов по одной паре точек могло бы иллюстрировать отсутствие смещений отвеса в них и плановых сдвигов этих точек, хотя и не имело бы силы точного доказательства из-за неоднозначности решения: мы всегда можем подобрать такие сдвиги точек и отвесов в них, которые объяснят наблюдаемые изменения астрономических широт и долгот. Совпадение координат  $\alpha$  и  $\gamma$  полюса по многим парам точек имело бы больший вес — большую степень надежности. Полагая поправки  $\delta$  неизвестными, выведенные уравнения можно обратить в уравнения поправок. А именно, из уравнения (5) следует

$$\delta\varphi_b + \alpha \cos \lambda_b + \gamma \sin \lambda_b = \varphi'_a - \varphi_a, \quad (7)$$

из зависимостей (5) и (6) находим

$$(\delta\lambda_b - \delta\lambda_c) \cos \varphi_c \cos \varphi_b + \alpha \cos \varphi_c \sin \varphi_b \sin \lambda_b + \gamma (\sin \varphi_c \cos \varphi_b - \cos \varphi_c \sin \varphi_b \cos \lambda_b) = \\ = (\lambda'_a - \lambda_a) \cos \varphi_c \cos \varphi_b. \quad (8)$$

Для составляющих плановых сдвигов можно составить уравнения поправок по повторным геодезическим связям. Описанный подход представляется необходимым при обработке повторных традиционных астрономических и геодезических измерений. Если величины  $\alpha, \gamma$  и плановые сдвиги достаточно надежно определены новой техникой, перенести их в правые части уравнений не составит труда. При решении рассматриваемой задачи недопустимо пользоваться символическим начальном счета долгот (Гино и Фессель, 1969) — результатом осреднения наблюдений в нескольких обсерваториях. Такой подход уже критикует Изотов (1971). Выше отмечено, что при выводе коэффициентов  $a_{mk}, b_{mk}$  разложения (I) нельзя использовать материалы аномальных районов. Вычислив коэффициенты  $a_{mk}, b_{mk}$  по результатам измерений в тех районах, где едва ли возможны значительные местные возмущения, по формулам (7) и (8) можно проинтерполировать

соответственные значения  $\varphi'$  и  $\lambda'$  на аномальные районы, чтобы затем определить местные возмущения. Результаты наблюдений на большей части обсерваторий международной службы движения полюсов едва ли непосредственно пригодны для выводов коэффициентов  $a_{mk}, b_{mk}$ : при выборе мест для этих обсерваторий пренебрегли сейсмической активностью окрестных районов.

Намереваясь составить уравнение поправок для повторных измерений силы тяжести, заметим, что потенциальному  $t$  соответствуют изменения

$$\Delta g = -\frac{\partial t}{\partial \rho} = \frac{1}{R^2} \sum_{m=1}^N (m+1) \sum_{k=0}^m P_{mk} (\sin B) (a_{mk} \cos kL + b_{mk} \sin kL), \quad (9)$$

а вертикальный сдвиг  $\Delta \varphi$  точки измерения изменяет ее положение относительно центра масс Земли и влечет изменение силы тяжести, равное  $-k \Delta \varphi$ , где  $k$  - нормальное значение вертикального градиента силы тяжести. Сдвиг  $\Delta \varphi$  можно выразить так

$$\Delta \varphi = \Delta \varphi_c + \Delta (H_a - H_c), \quad (10)$$

где  $\Phi$  - точка измерений,  $C$  - начало отсчета высот на земной поверхности,  $\Delta \varphi_c$  - вертикальный сдвиг этой начальной точки. Пользуясь формулой Захария (1873)

$$H_a - H_c = \int_{(C)}^{d} dh_w - R \int_{(C)}^{d} (\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha) (\cos \alpha dB + \cos B \sin \alpha dL), \quad (II)$$

где  $dh_w$  - элементарное нивелирное превышение,  $\xi, \eta$  - составляющие уклонения отвеса,  $\alpha$  - азимут нивелирного хода, находим

$$\begin{aligned} \Delta (H_a - H_c) &= \Delta \int_{(C)}^{d} dh_w - R \int_{(C)}^{d} (\cos \alpha dB + \cos B \sin \alpha dL) \times \\ &\times [(\delta \varphi - \Delta B) \cos \alpha + (\delta \lambda - \Delta L) \cos B \sin \alpha]. \end{aligned} \quad (12)$$

Величины  $\Delta B$  и  $\Delta L$  обозначают плановые сдвиги текущей точки нивелирного хода. Отсчетный геодезический эллипсоид и его ориентировку в точке  $C$  мы предполагаем неизменными. Изменения астрономических широт и долгот нужно раскрыть соответственно формулами (2) и (3). Проделав это, можно убедиться, что плановый сдвиг текущей точки исключается из уравнения (12). Первый член здесь (изменение суммы элементарных нивелирных превышений) определяют повторные нивелировки.

Таким образом, для повторного абсолютного измерения силы тяжести можно составить уравнение

$$\Delta g - \kappa [\Delta S_e + \Delta (H_a - H_c)] = g' - g, \quad (I3)$$

которое вводит в задачу неизвестное  $\Delta S_e$ . Элементарные нивелирные превышения  $\Delta h_w$  по-видимому можно считать безошибочными и, раскрывая зависимость (I3) с помощью формулы (I2), отнести изменения сумм таких превышений в левую часть. Оставаясь на этой точке зрения, к рассматриваемым уравнениям можно добавить условное, выводимое для замкнутых линий повторной нивелировки

$$\Delta \phi \Delta h_w - R \phi (\cos a \sin b + \cos b \sin a \cos l) [(\delta \phi - \Delta \delta) \cos a + (\delta \lambda - \Delta \lambda) \cos b \sin a] = 0. \quad (I4)$$

Составив разность уравнений (I3) для точек  $\Phi$  и  $C$ , можно исключить неизвестное  $\Delta S_e$ . Такой подход необходим при использовании относительных определений силы тяжести.

Единственность решения будет достигнута применением способа наименьших квадратов к перечисленным уравнениям.

К сожалению, еще не ясна несогласованность превышений  $\Delta h_w$  из-за неодновременности измерений на линиях нивелировки и деформаций земной коры при изменениях атмосферного давления (Дарвин, 1882), тепловых влияний, разливов рек и других причин, вызывающих деформации земной коры. Необходимость согласования повторных нивелировок и повторных измерений силы тяжести очевидна, это было отмечено Молоденским и уже обсуждается и осуществляется японскими геодезистами (см., например Накагава 1969 и другие материалы японского симпозиума по гравиметрическим измерениям и точному нивелированию).

Допуская вековые изменения астрономических широт и долгот, нельзя требовать равенства нулю только первого члена формулы (I4), как делают сейчас при обработке повторных нивелирных данных.

Для оценки зависимости между коэффициентами  $a_2$  и  $b_2$ , в разложении (I) и углами между направлениями координатных осей и соответственными главными центральными осями инерции в теле Земли можно использовать известную формулу (напр. Некрасов, 1946, стр. 292)

$$t g 2 \delta = \frac{2 B}{B - C}. \quad (I5)$$

Здесь  $B$  и  $C$  — моменты инерции относительно осей  $Y$  и  $Z$ , не совпадающих с соответственными главными центральными осями,  $\delta$  — центробежный момент инерции, т.е.

$$B = \int y^2 dm,$$

где интегрирование распространено по всей массе  $m$  Земли,  
 $\delta$  - угол между осью  $Z$  и близкой к ней главной центральной  
осью. Принято также

$$\int x z dm = \int x y dm = 0.$$

т.е. ось  $X$  совпадает с главной центральной осью инерции.

Центробежный момент  $\Phi$  инерции связан с коэффициентом  $b_{21}$   
зависимостью

$$R^2 b_{21} = -f \Phi,$$

где  $f$  - гравитационная постоянная. Коэффициент  $B_{21}$ , разложе-  
ния силы тяжести на земной поверхности можно выразить через коэф-  
фициент  $b_{21}$

$$B_{21} = \frac{3b_{21}}{R^2}.$$

Пользуясь выражением (15) и известными численными парамет-  
рами Земли, находим при  $\delta = 0,1$

$$B_{21} \approx \frac{3\delta}{R^4} f (C-B) \approx 0,0016 \text{ мгал}.$$

Поскольку коэффициент  $B_{21}$  должен быть умножен на величину, которая не превосходит 1,5, наибольшее изменение силы тяжести, соответствующее этому значению коэффициента  $B_{21}$ , составляет  $\sim 0,0024$  мгал. Для подобных смещений оси вращения Земли за один и тот же период времени необходимы большие перемещения земной массы. Таким образом, уже в наше время повторные гравиметрические измере-  
ния могут быть полезными при решении описанной задачи. Такое реше-  
ние позволило бы использовать уравнения (7) и (8) для приведе-  
ния астрономических наблюдений к одному моменту времени. Учет по-  
правок  $b_{21}$  соответствовал бы стремлению астрономов выводить по-  
правки широтных наблюдений до 0,001 (Костица, 1966; Сахаров, 1970).

Вывод коэффициентов в разложениях (2) и (3) позволил бы  
из результатов повторных нивелировок влиять смещений от-  
сечка (Фоглер, 1873) и получить собственно вертикальные сдвиги  
(подробнее об этом в статье авторов (1969 г.), описанные в ука-  
занной статье соображения, как им кажется, здесь удалось дополнить  
и уточнить).

При организации международной службы движения полюса много  
внимания уделено компенсации ошибок за положения и собственные дви-  
жения звезд, в используемых уравнениях поправок это обстоятельство  
отражает член  $Z$ . Компенсация таких ошибок достигается располо-

жением станций наблюдения на одной параллели. Некоторая компенсация этих ошибок, вероятно, возможна и в описанном случае.

Из-за относительности геодезических выводов по-видимому целесообразнее за уравнение поправок принимать разность уравнений (7), составленных для точек  $\Delta$  и  $C$ .

Уравнения (7) и (8) возможно использовать для исследования периодического изменения коэффициентов  $a_{mk}$ ,  $b_{mk}$  и элементов движения полюса в течение коротких промежутков времени. Сравнив выведенное таким образом изменение с рассчитанным для некоторой модели Земли можно получить суждение о достоверности параметров этой модели. Подобное использование измерений силы тяжести затруднительно из-за необходимой связи с нивелирными данными.

#### ЛИТЕРАТУРА

Еремеев В.Ф., Юркина М.И. On determination of crustal movements. Проблемы современных движений земной коры. Третий Международный симпозиум, Ленинград, 1968 г., М., 1969.

Изотов А.А. О приведении астрономических наблюдений к неподвижному полюсу. — Геодезия и картография, 1971, № 1.

Костина Л.Д. О повышении точности вычислений широт. Анализ результатов широтных наблюдений. — Труды Ташкентской астрономической обсерватории, 1966, серия II, том 12.

Молоденский М.С. Современные задачи изучения фигуры Земли. — Геодезия и картография, 1958, № 7.

Некрасов А.И. Курс теоретической механики. Т.2. Динамика. М.-Л., Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1946.

Сахаров В.И. Итоги широтных наблюдений в Пулкове с ЗТФ-135 с сентября 1948 по декабрь 1967 г. (19-летний нутационный широтный ряд). — Известия Главной астрономической обсерватории в Пулкове, 1970, № 185.

Darwin G.N. On variations in the vertical due to elasticity of the Earth's surface. The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science, 1882, 14, fifth series, No. 40.

Guinot B., Feissel M. Annual report for 1968. Paris, Bureau Internationale de l'Heure, 1969.

Inouye Noboru, Fujii Yoichiro, Kizawa Takanashi. A study on the time change of gravity in Oshima Island. I. Journal of the geodetic society of Japan /Sokuchi Gakkai Shi/, 1968, 13, No. 3-4.

Nakagawa Ichiro. On continuous observation of gravity. Journal of the geodetic society of Japan /Sokuchi Gakkai Shi/, 1969, 15, No. 1, 2-5. Symposium of gravity survey and precise levelling, May 15, 1969.

Vogler Chr. August. Über Ziele und Hülfsmittel geometrischer Präzisions-Nivellements. München, Literatisch-artistische Anstalt /Th. Reidel/ vormals der Cotta'schen Buchhandlung, 1873.

Yumi Shigeru, Wako Yasujiro. On the secular motion of the mean pole. In "Continental drift, secular motion of the pole, and rotation of the Earth". International astronomical union. Symposium No. 32, held in Stresa, Italy, 21 to 25 march 1967. D. Reidel publishing company. Dordecht-Holland, 1968.

Zachariä G. Beiträge zur Theorie des Schlussfehlers geometrischer Nivellementspolygone.—Astronomische Nachrichten, 1873, 80, No. 1916.

V.F. Yeremeev, M.I. Yurkina  
ON DETERMINATION OF SECULAR VARIATIONS OF EARTH'S GRAVITY FIELD  
AND OF SECULAR POLAR MOVEMENTS

#### S u m m a r y

Expanding the variations  $t$  of gravity potential in series of spherical harmonics (1), it is possible to derive the coefficients  $a_{mk}$ ,  $b_{mk}$  of this expansion from repeated measurements of astronomical latitudes and longitudes and from repeated absolute and relative gravity determinations combined with relevelings. The equations (7) and (8) express the observation equations by repeated determinations of astronomical latitudes and longitudes cor-

respondingly and contain, besides  $\alpha_{MK}$  and  $\beta_{MK}$ , the elements  $x$  and  $y$  of polar movements, and the components of continental drift; the (13) gives the observation equation to repeated absolute gravity determinations, and contains, as an additional unknown quantity, the vertical shift  $\Delta\varphi_c$  of the origin of heights reckoning. A difference of such equations is an observation equation for repeated relative gravity measurements.

УДК 528.26

В.Ф. Еремеев, М.И. Юркина

## ПЕРЕДАЧА АСТРОНОМИЧЕСКИХ КООРДИНАТ И АЗИМУТОВ ЧЕРЕЗ ВЕРТИКАЛЬНЫЕ И ГОРИЗОНТАЛЬНЫЕ УГЛЫ

I. М.С.Молоденскому принадлежит приоритет в развитии геометрических методов современной теории фигуры Земли. Этому вопросу посвящено несколько его статей, опубликованных в период 1949-1954 гг.

Вопросы построения и обработки пространственных сетей все более привлекают внимание геодезистов. В частности, передачей астрономических координат с одного пункта на другой занимались Хирвонен [6], Рудский [4], [5] и авторы [3]. Для такой передачи можно использовать горизонтальные и вертикальные углы в пространственных сетях.

Продолжим рассмотрение зависимостей между астрономическими координатами  $\phi, \lambda$ , азимутами  $\alpha$ , зенитными расстояниями  $\beta$  и горизонтальными углами  $\alpha$ , имея в виду получить еще некоторые формулы и способы для передачи астрономических координат. При сопоставлении переданных указанным образом астрономических координат и непосредственно измеренных можно получить формулы для контроля измерений главным образом вертикальных углов. Эти формулы могут быть полезными при исследовании влияния вертикальной рефракции.

Будем пользоваться общей декартовой геодезической системой координат, начало которой совпадает с центром геодезического отчетного эллипсоида. Ось  $x$  лежит в плоскости начального геодезического меридиана, направлена к Гринвичу и параллельна плоскости начального астрономического меридиана. Ось  $z$  параллельна оси вращения Земли и направлена к северному полюсу. Ось  $y$  перпендикулярна осям  $x$  и  $z$  и направлена на восток. Местная система ко-

ординат в каждой точке определена направление  $Ox'$  к точке севера,  $Oz'$  к астрономическому зениту и перпендикулярна к ним направлениям  $Oy'$  к точке востока. Из рис. 1 несложно установить ориентировку такой местной системы координат. Для этого достаточно составить выражения для направляющих косинусов каждой оси местной системы относительно общей системы координат:

$$\left. \begin{aligned} l_{1x'} &= -\sin \varphi_1 \cos \lambda_1, \\ m_{1x'} &= -\sin \varphi_1 \sin \lambda_1, \\ n_{1x'} &= \cos \varphi_1 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} l_{1y'} &= -\sin \lambda_1, \\ m_{1y'} &= \cos \lambda_1, \\ n_{1y'} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} l_{1z'} &= \cos \varphi_1 \cos \lambda_1, \\ m_{1z'} &= \cos \varphi_1 \sin \lambda_1, \\ n_{1z'} &= \sin \varphi_1 \end{aligned} \right\}$$

С помощью рис. 2 можно вывести направляющие косинусы отрезка  $s_{12}$  в местной системе

$$\left. \begin{aligned} l'_{12} &= \sin \beta_{12} \cos \alpha_{12}, \\ m'_{12} &= \sin \beta_{12} \sin \alpha_{12}, \\ n'_{12} &= \cos \beta_{12} \end{aligned} \right\}$$

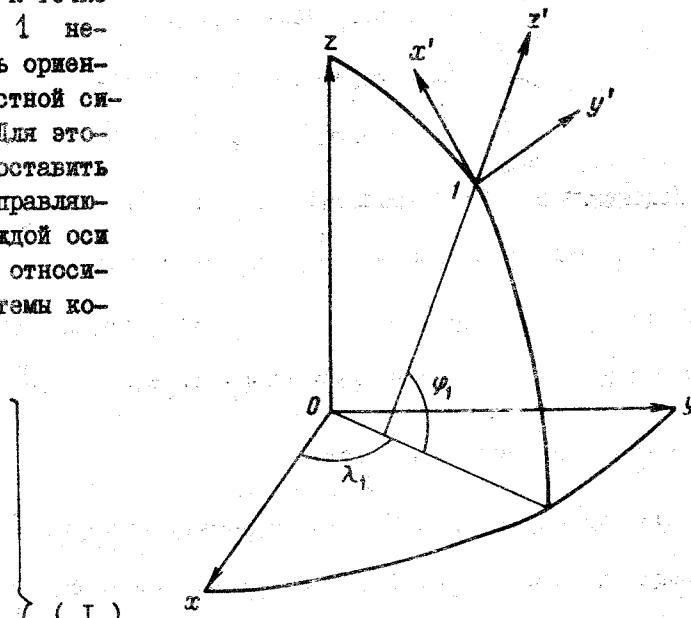


Рис. 1

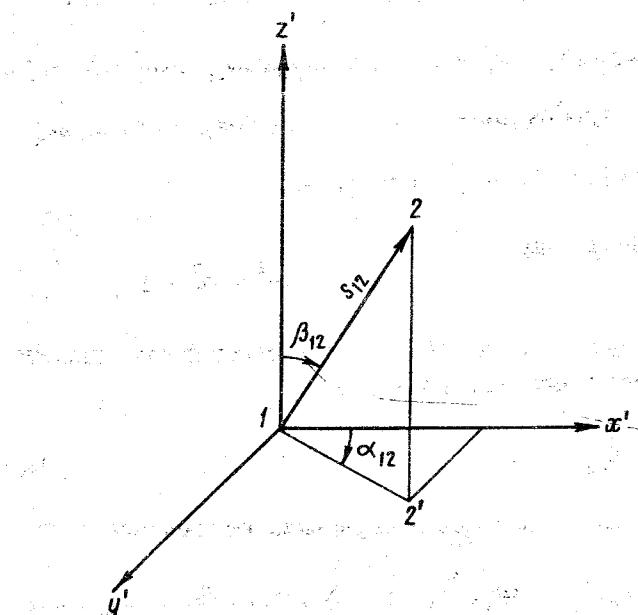


Рис. 2

Направляющие косинусы  $l_{12}$ ,  $m_{12}$ ,  $n_{12}$  отрезка  $s_{12}$  в общей геодезической системе координат определяет система из трех уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} l_{1x1} l_{12} + m_{1x1} m_{12} + n_{1x1} n_{12} = l'_{12} \\ l_{1y1} l_{12} + m_{1y1} m_{12} + n_{1y1} n_{12} = m'_{12} \\ l_{1z1} l_{12} + m_{1z1} m_{12} + n_{1z1} n_{12} = n'_{12} \end{array} \right\}. \quad (3)$$

Подставив в (3) выражения (1) и (2), найдем:

$$\left. \begin{array}{l} -l_{12} \sin \varphi_1 \cos \lambda_1 - m_{12} \sin \varphi_1 \sin \lambda_1 + n_{12} \cos \varphi_1 = \sin \beta_{12} \cos \alpha_{12} \\ -l_{12} \sin \lambda_1 + m_{12} \cos \lambda_1 = \sin \beta_{12} \sin \alpha_{12} \\ l_{12} \cos \varphi_1 \cos \lambda_1 + m_{12} \cos \varphi_1 \sin \lambda_1 + n_{12} \sin \varphi_1 = \cos \beta_{12} \end{array} \right\}. \quad (4)$$

Решение системы (4) дает:

$$\left. \begin{array}{l} l_{12} = -\sin \varphi_1 \cos \lambda_1 \sin \beta_{12} \cos \alpha_{12} - \sin \lambda_1 \sin \beta_{12} \sin \alpha_{12} + \cos \varphi_1 \cos \lambda_1 \cos \beta_{12} \\ m_{12} = -\sin \varphi_1 \sin \lambda_1 \sin \beta_{12} \cos \alpha_{12} + \cos \lambda_1 \sin \beta_{12} \sin \alpha_{12} + \cos \varphi_1 \sin \lambda_1 \cos \beta_{12} \\ n_{12} = \cos \varphi_1 \sin \beta_{12} \cos \alpha_{12} + \sin \varphi_1 \cos \beta_{12} \end{array} \right\}. \quad (5)$$

Для пункта 2 можно аналогично написать:

$$\left. \begin{array}{l} l_{21} = -\sin \varphi_2 \cos \lambda_2 \sin \beta_{21} \cos \alpha_{21} - \sin \lambda_2 \sin \beta_{21} \sin \alpha_{21} + \cos \varphi_2 \cos \lambda_2 \cos \beta_{21} \\ m_{21} = -\sin \varphi_2 \sin \lambda_2 \sin \beta_{21} \cos \alpha_{21} + \cos \lambda_2 \sin \beta_{21} \sin \alpha_{21} + \cos \varphi_2 \sin \lambda_2 \cos \beta_{21} \\ n_{21} = \cos \varphi_2 \sin \beta_{21} \cos \alpha_{21} + \sin \varphi_2 \cos \beta_{21} \end{array} \right\}. \quad (6)$$

Поскольку

$$l^2 + m^2 + n^2 = I,$$

в формулах (5) и (6) третье соотношение является следствием двух остальных. Как известно,

$$l_{12} = -l_{21}, \quad m_{12} = -m_{21}, \quad n_{12} = -n_{21},$$

поэтому между восемью измеряемыми величинами

$$\varphi_1, \lambda_1, \varphi_2, \lambda_2, \beta_{12}, \beta_{21}, \alpha_{12}, \alpha_{21}$$

существуют две зависимости и любые две из перечисленных величин можно выразить через шесть остальных.

Определим, таким образом, значения  $\beta_{21}$  и  $\alpha_{21}$ . Напишем для этого формулы (4) для пункта 2, заменив  $l_{21}$ ,  $m_{21}$ ,  $n_{21}$  на  $l_{12}$ ,  $m_{12}$ ,  $n_{12}$ :

$$\left. \begin{aligned} l_{12} \sin \varphi_2 \cos \lambda_2 + m_{12} \sin \varphi_2 \sin \lambda_2 - n_{12} \cos \varphi_2 &= \sin \beta_{21} \cos \alpha_{21} \\ l_{12} \sin \lambda_2 - m_{12} \cos \lambda_2 &= \sin \beta_{21} \sin \alpha_{21} \\ -l_{12} \cos \varphi_2 \cos \lambda_2 - m_{12} \cos \varphi_2 \sin \lambda_2 - n_{12} \sin \varphi_2 &= \cos \beta_{21} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Поделив второе уравнение в формулах (7) на первое, получим

$$\tan \alpha_{21} = \frac{l_{12} \sin \lambda_2 - m_{12} \cos \lambda_2}{l_{12} \sin \varphi_2 \cos \lambda_2 + m_{12} \sin \varphi_2 \sin \lambda_2 - n_{12} \cos \varphi_2} \quad (8)$$

Третье уравнение определяет  $\beta_{21}$ .

Для выражения  $\varphi_2$  и  $\lambda_2$  через остальные шесть из восьми рассматриваемых величин можно использовать третье уравнение из (6) и второе из (7):

$$\begin{aligned} \sin \beta_{21} \cos \alpha_{21} \cos \varphi_2 + \cos \beta_{21} \sin \varphi_2 &= -n_{12} \\ l_{12} \sin \lambda_2 - m_{12} \cos \lambda_2 &= \sin \beta_{21} \sin \alpha_{21} \end{aligned} \quad (9)$$

Прибавив к этим двум уравнениям еще два очевидных:

$$\sin^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_2 = 1 ;$$

$$\sin^2 \lambda_2 + \cos^2 \lambda_2 = 1 ,$$

получим четыре уравнения для четырех неизвестных  $\sin \varphi_2$ ,  $\cos \varphi_2$ ,  $\sin \lambda_2$ ,  $\cos \lambda_2$ . Решение этих уравнений дает:

$$\cos \varphi_2 = \frac{-n_{12} \sin \beta_{21} \cos \alpha_{21} \pm \cos \beta_{21} \sqrt{1 - n_{12}^2 - \sin^2 \beta_{21} \sin^2 \alpha_{21}}}{1 - \sin^2 \beta_{21} \sin^2 \alpha_{21}} \quad (10)$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{-n_{12} \cos \beta_{21} \pm \sin \beta_{21} \cos \alpha_{21} \sqrt{1 - n_{12}^2 - \sin^2 \beta_{21} \sin^2 \alpha_{21}}}{1 - \sin^2 \beta_{21} \sin^2 \alpha_{21}} \quad (II)$$

$$\sin \lambda_2 = \frac{l_{12} \sin \beta_{21} \sin \alpha_{21} \pm m_{12} \sqrt{1 - n_{12}^2 - \sin^2 \beta_{21} \sin^2 \alpha_{21}}}{1 - n_{12}^2} \quad (I)$$

$$\cos \lambda_2 = \frac{-m_{12} \sin \beta_{21} \sin \alpha_{21} \pm l_{12} \sqrt{1 - n_{12}^2 - \sin^2 \beta_{21} \sin^2 \alpha_{21}}}{1 - n_{12}^2} \quad (II)$$

Линии корня этого решения установить нетрудно.  
Уравнения (9) можно решать проще, полагая в первом из них

$$\frac{\sin \beta_{21} \cos \alpha_{21}}{\cos \beta_{21}} = \operatorname{tg} \omega.$$

Тогда получим

$$\sin(\varphi_2 + \omega) = -\frac{n_{12} \cos \omega}{\cos \beta_{21}}$$

и

$$\varphi_2 = (\varphi_2 + \omega) - \omega. \quad (I2)$$

Для решения второго уравнения полагаем

$$\frac{m_{12}}{l_{12}} = \operatorname{tg} Q.$$

Тогда

$$\sin(\lambda_2 - Q) = \frac{1}{l_{12}} \sin \beta_{21} \sin \alpha_{21} \cos Q$$

и

$$\lambda_2 = (\lambda_2 - Q) + Q.$$

2. Решим теперь такую задачу: в астрономических пунктах I и 2 известны  $\varphi_1, \lambda_1, \varphi_2, \lambda_2, \beta_{13}, \alpha_{13}, \beta_{23}, \alpha_{23}$ , в астрономическом пункте 3 известны  $\beta_{31}$  и  $\beta_{32}$ .

Определим  $\varphi_3, \lambda_3, \alpha_{31}, \alpha_{32}$  и  $\beta_{12}, \beta_{21}, \beta_{23}$ .

Используя последнюю формулу в выражении (4), напишем для астрономических пунктов I и 3

$$(l_{13} \cos \lambda_3 + m_{13} \sin \lambda_3) \cos \varphi_3 + n_{13} \sin \varphi_3 + \cos \beta_{31} = 0. \quad (I3)$$

Формулы (5) определяют направляющие косинусы  $l_{13}, m_{13}, n_{13}$  по известным  $\varphi_1, \lambda_1, \beta_{13}$  и  $\alpha_{13}$ . Аналогично для астрономических пунктов 2 и 3 имеем

$$(l_{23} \cos \lambda_3 + m_{23} \sin \lambda_3) \cos \varphi_3 + n_{23} \sin \varphi_3 + \cos \beta_{32} = 0, \quad (I4)$$

где  $l_{23}, m_{23}$  и  $n_{23}$  также можно считать известными.

Уравнения (I3), (I4) очевидные

$$\sin^2 \varphi_3 + \cos^2 \varphi_3 = 1; \quad (I5)$$

$$\sin^2 \lambda_3 + \cos^2 \lambda_3 = 1 \quad (I6)$$

образуют систему для определения искомых  $\sin \varphi_3$ ,  $\cos \varphi_3$ ,  $\sin \lambda_3$  и  $\cos \lambda_3$ . Разрешим первые два уравнения относительно  $\sin \varphi_3$  и  $\cos \varphi_3$ :

$$\sin \varphi_3 = \frac{(\ell_{13} \cos \lambda_3 + m_{13} \sin \lambda_3) \cos \beta_{32} - (\ell_{23} \cos \lambda_3 + m_{23} \sin \lambda_3) \cos \beta_{31}}{(\ell_{13} \cos \lambda_3 + m_{13} \sin \lambda_3) n_{13} - (\ell_{23} \cos \lambda_3 + m_{23} \sin \lambda_3) n_{23}} ; \quad (I7)$$

$$\cos \varphi_3 = \frac{-n_{13} \cos \beta_{32} + n_{23} \cos \beta_{31}}{(\ell_{13} \cos \lambda_3 + m_{13} \sin \lambda_3) n_{13} - (\ell_{23} \cos \lambda_3 + m_{23} \sin \lambda_3) n_{23}} ; \quad (I8)$$

Используя уравнение (I5), из (I7) и (I8) получаем

$$\begin{aligned} & (\ell_{13} \cos \lambda_3 + m_{13} \sin \lambda_3)^2 (n_{23}^2 - \cos^2 \beta_{32}) - \\ & - 2(\ell_{13} \cos \lambda_3 + m_{13} \sin \lambda_3)(\ell_{23} \cos \lambda_3 + m_{23} \sin \lambda_3)(n_{13} n_{23} - \cos \beta_{31} \cos \beta_{32}) + \\ & + (\ell_{23} \cos \lambda_3 + m_{23} \sin \lambda_3)^2 (n_{13}^2 - \cos^2 \beta_{31}) - (n_{13} \cos \beta_{32} - n_{23} \cos \beta_{31})^2 = 0 . \end{aligned} \quad (I9)$$

Отсюда следует

$$A \cos^2 \lambda_3 - 2B \sin \lambda_3 \cos \lambda_3 + C \sin^2 \lambda_3 - D = 0 , \quad (20)$$

где

$$A = (\ell_{13} n_{23} - \ell_{23} n_{13})^2 - (\ell_{13} \cos \beta_{32} - \ell_{23} \cos \beta_{31})^2 ;$$

$$\begin{aligned} B = & -\ell_{13} m_{13} (n_{23}^2 - \cos^2 \beta_{32}) + (\ell_{13} m_{23} + \ell_{23} m_{13})(n_{13} n_{23} - \cos \beta_{31} \cos \beta_{32}) - \\ & - \ell_{23} m_{23} (n_{13}^2 - \cos^2 \beta_{31}) ; \end{aligned}$$

$$C = (m_{13} n_{23} - m_{23} n_{13})^2 - (m_{13} \cos \beta_{32} - m_{23} \cos \beta_{31})^2 ;$$

$$D = (n_{13} \cos \beta_{32} - n_{23} \cos \beta_{31})^2 .$$

Решение уравнения (20) выполним таким образом. Сперва преобразуем это уравнение, полагая

$$\cos^2 \lambda_3 = \frac{1 + \cos 2 \lambda_3}{2}, \quad \sin^2 \lambda_3 = \frac{1 - \cos 2 \lambda_3}{2}, \quad 2 \sin \lambda_3 \cos \lambda_3 = \sin 2 \lambda_3 .$$

После подстановки в уравнение и последующих упрощений приведем уравнение к такому виду

$$a \cos 2 \lambda_3 - b \sin 2 \lambda_3 = c ,$$

где

$$a = A - C, \quad b = 2B, \quad c = 2D - (A + C) .$$

Решим это уравнение. Положим

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \omega ,$$

где  $\omega$  — вспомогательная известная величина, и подставив в преобразованное уравнение, получим следующее:

$$\sin(\omega - 2 \lambda_3) = \frac{c}{b} \cos \omega , \quad (21)$$

откуда определяем неизвестное

$$\lambda_3 = \frac{\omega - (\omega - 2\lambda_3)}{2}$$

Вычислив  $\lambda_3$ , сможем теперь определить по формуле (17) или (18) астрономическую широту  $\Phi_3$ . Астрономические азимуты  $\alpha_{12}$  и  $\alpha_{21}$  определяет формула (8) при соответствующей замене индексов.

Для определения астрономических азимутов  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{21}$  и астрономических зенитных расстояний  $\beta_{12}$ ,  $\beta_{21}$  необходимо знать направляющие косинусы  $l_{12}$ ,  $m_{12}$ ,  $n_{12}$  и  $l_{21}$ ,  $m_{21}$ ,  $n_{21}$ . Эти величины можно найти следующим образом.

Поскольку направляющие косинусы  $l_{31}$ ,  $m_{31}$ ,  $n_{31}$ , и  $l_{32}$ ,  $m_{32}$ ,  $n_{32}$  известны, определим угол  $A_3$  при вершине 3 плоского треугольника I-2-3

$$\cos A_3 = l_{31}l_{32} + m_{31}m_{32} + n_{31}n_{32}. \quad (22)$$

Составим подобные уравнения для других углов этого треугольника:

$$\left. \begin{aligned} \cos A_1 &= l_{13}l_{12} + m_{13}m_{12} + n_{13}n_{12}, \\ \cos A_2 &= l_{23}l_{21} + m_{23}m_{21} + n_{23}n_{21}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Используя тождества:

$$A_2 = \pi - (A_1 + A_3);$$

$$\cos A_2 = -\cos(A_1 + A_3) = -\cos A_1 \cos A_3 + \sin A_1 \sin A_3,$$

в последнем уравнении исключим  $A_2$  и получим

$$-\cos A_3 \cos A_1 + \sin A_3 \sin A_1 = l_{23}l_{12} + m_{23}m_{12} + n_{23}n_{12}. \quad (24)$$

Проектируя каждую сторону замкнутого треугольника последовательно на оси координат, найдем

$$\left. \begin{aligned} s_{12}l_{12} + s_{23}l_{23} + s_{31}l_{31} &= 0 \\ s_{12}m_{12} + s_{23}m_{23} + s_{31}m_{31} &= 0 \\ s_{12}n_{12} + s_{23}n_{23} + s_{31}n_{31} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Следовательно,

$$\begin{vmatrix} l_{12} & l_{23} & l_{31} \\ m_{12} & m_{23} & m_{31} \\ n_{12} & n_{23} & n_{31} \end{vmatrix} = 0 \quad (26)$$

$$\begin{vmatrix} m_{23} & m_{31} \\ n_{23} & n_{31} \end{vmatrix} l_{12} - \begin{vmatrix} l_{23} & l_{31} \\ n_{23} & n_{31} \end{vmatrix} m_{12} + \begin{vmatrix} l_{23} & l_{31} \\ m_{23} & m_{31} \end{vmatrix} n_{12} = 0. \quad (27)$$

Добавив к трем уравнениям (23), (24) и (27) еще два очевидных:

$$l_{12}^2 + m_{12}^2 + n_{12}^2 = 1, \quad (28)$$

$$\sin^2 A_1 + \cos^2 A_1 = 1, \quad (29)$$

получим пять уравнений для пяти неизвестных  $l_{12}, m_{12}, n_{12}, \cos A_1, \sin A_1$ .

Исключив из уравнений (23) и (24) неизвестную величину  $\cos A_1$ , найдем

$$\begin{aligned} \sin A_3 \sin A_1 &= (l_{23} + \cos A_3 l_{31}) l_{12} + \\ &+ (m_{23} + \cos A_3 m_{31}) m_{12} + (n_{23} + \cos A_3 n_{31}) n_{12}. \end{aligned} \quad (30)$$

Обозначив

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} m_{23} & m_{31} \\ n_{23} & n_{31} \end{vmatrix}, \quad \alpha_2 = - \begin{vmatrix} l_{23} & l_{31} \\ n_{23} & n_{31} \end{vmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{vmatrix} l_{23} & l_{31} \\ m_{23} & m_{31} \end{vmatrix}$$

и определив  $n_{12}$  по формуле (27)

$$n_{12} = -\frac{1}{\alpha_3} (\alpha_1 l_{12} + \alpha_2 m_{12}), \quad (31)$$

исключим  $n_{12}$  из (28) и (30):

$$l_{12}^2 + m_{12}^2 + \frac{1}{\alpha_3^2} (\alpha_1 l_{12} + \alpha_2 m_{12})^2 = 1, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \sin A_1 \sin A_3 &= (l_{23} + \cos A_3 l_{31}) l_{12} + (m_{23} + \cos A_3 m_{31}) m_{12} - \\ &- \frac{1}{\alpha_3} (\alpha_1 l_{12} + \alpha_2 m_{12})(n_{23} + \cos A_3 n_{31}). \end{aligned} \quad (33)$$

Из формул (23), (29) и (31) получаем

$$\sin^2 A_1 + [l_{12} l_{13} + m_{12} m_{13} - \frac{n_{13}}{\alpha_3} (\alpha_1 l_{13} + \alpha_2 m_{13})]^2 = 1 . \quad (34)$$

Уравнения (32), (33) и (34) образуют систему с тремя неизвестными  $l_{12}$ ,  $m_{12}$  и  $\sin A_1$ . Исключив из выражений (33) и (34) неизвестную величину  $\sin A_1$ , получим такую систему с двумя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} l_{12}^2 + a_{22} m_{12}^2 + 2a_{12} l_{12} m_{12} &= 1 , \\ b_{11} l_{12}^2 + b_{22} m_{12}^2 + 2b_{12} l_{12} m_{12} &= 1 , \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

где

$$a_{11} = I + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_3^2}, \quad a_{22} = I + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_3^2}, \quad a_{12} = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3^2},$$

$$b_{11} = \frac{1}{\sin^2 A_3} [(l_{23} + l_{13} \cos A_3) - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} (n_{23} + n_{13} \cos A_3)]^2 + (l_{13} - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} n_{13})^2,$$

$$b_{22} = \frac{1}{\sin^2 A_3} [(m_{23} + m_{13} \cos A_3) - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} (n_{23} + n_{13} \cos A_3)]^2 + (m_{13} - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} n_{13})^2,$$

$$b_{12} = \frac{1}{\sin^2 A_3} [\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3^2} (n_{23} + n_{13} \cos A_3)^2 + (l_{23} + l_{13} \cos A_3)(m_{23} + m_{13} \cos A_3) -$$

$$- \frac{\alpha_2}{\alpha_3} (l_{23} + l_{13} \cos A_3)(n_{23} + n_{13} \cos A_3) - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} (m_{23} + m_{13} \cos A_3)(n_{23} + n_{13} \cos A_3)] +$$

$$+ l_{13} m_{13} + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3^2} n_{13}^2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} l_{13} n_{13} - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} m_{13} n_{13} .$$

Вычтя одно уравнение (35) из другого, получим однородное уравнение

$$(a_{11} - b_{11}) l_{12}^2 + (a_{22} - b_{22}) m_{12}^2 + 2(a_{12} - b_{12}) l_{12} m_{12} = 0, \quad (36)$$

определенм отношение

$$\frac{l_{12}}{m_{12}} = \frac{-(a_{12} - b_{12}) \pm \sqrt{(a_{12} - b_{12})^2 - (a_{11} - b_{11})(a_{22} - b_{22})}}{(a_{11} - b_{11})} = N \quad (37)$$

и, например, из первого уравнения (35) найдем

$$m_{12} = \pm \sqrt{\frac{1}{a_{11} N^2 + 2a_{12} N + a_{22}}} \quad (38)$$

Из уравнения (33) или (34) можно теперь определить  $\sin A_1$  из уравнения (31) можно найти  $n_{12}$ , из уравнения (24) вычислить  $\sin A_1$  (для контроля).

Формула (8) и третья из уравнений (7) определят с соответствующей заменой индексов азимуты  $\alpha_{12}$  и  $\alpha_{21}$  и зенитные расстояния  $\beta_{12}$  и  $\beta_{21}$ .

3. Рассмотрим задачу, ранее решенную Рудским [4] с применением векторного анализа. А именно, пусть будут в треугольнике I-2-3 изъестини  $\varphi_1, \lambda_1, \beta_{12}, \alpha_{12}, \beta_{13}, \alpha_{13}, \beta_{21}, \alpha_{21}, \beta_{23}, \alpha_{23}, \beta_{32}, \alpha_{32}, \alpha_{31}, \beta_{31}$ . Нужно определить  $\varphi_2, \lambda_2, \alpha_{21}, \varphi_3, \lambda_3, \alpha_{31}, \alpha_{23}, \alpha_{32}$ .

Прежде всего можно вычислить  $l_{12}, m_{12}, n_{12}$  и  $l_{13}, m_{13}, n_{13}$  по формулам (5). Следовательно, будут известны и  $l_{23}, m_{23}, n_{23}$ ;  $l_{31}, m_{31}, n_{31}$ .

Углы треугольника  $A_1, A_2, A_3$  можно вычислить по формулам [2]

$$\left. \begin{aligned} \cos A_1 &= \cos \beta_{12} \cos \beta_{13} + \sin \beta_{12} \sin \beta_{13} \cos \alpha_1 \\ \cos A_2 &= \cos \beta_{21} \cos \beta_{23} + \sin \beta_{21} \sin \beta_{23} \cos \alpha_2 \\ \cos A_3 &= \cos \beta_{31} \cos \beta_{32} + \sin \beta_{31} \sin \beta_{32} \cos \alpha_3 \end{aligned} \right\}, \quad (39)$$

в справедливости которых можно убедиться с помощью рис. 3.

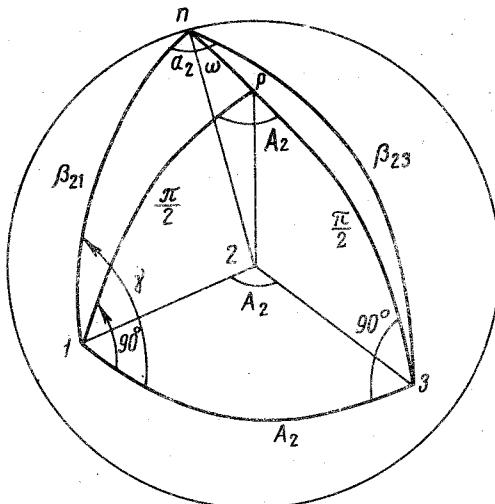


Рис. 3

Направляющие косинусы  $l_{23}, m_{23}, n_{23}$  (и  $l_{32}, m_{32}, n_{32}$ ) определяет система

$$\begin{aligned} \cos A_2 &= l_{21}l_{23} + m_{21}m_{23} + n_{21}n_{23}, \\ -\cos A_3 &= l_{31}l_{23} + m_{31}m_{23} + n_{31}n_{23}, \\ 0 &= \left| \begin{array}{cc} m_{12} & m_{31} \\ n_{12} & n_{31} \end{array} \right| l_{23} - \left| \begin{array}{cc} l_{12} & l_{31} \\ n_{12} & n_{31} \end{array} \right| m_{23} + \left| \begin{array}{cc} l_{12} & l_{21} \\ m_{12} & m_{21} \end{array} \right| n_{23} \end{aligned} \quad \left. \right\}, \quad (40)$$

первые два уравнения которой очевидны, последнее следует из (25).

Неизвестные  $l_{23}$ ,  $m_{23}$ ,  $n_{23}$  можно определить также, применяя к треугольнику теорему синусов.

Подставив выражения  $s_{13}$  и  $s_{12}$  через  $s_{23}$

$$s_{13} = s_{23} \frac{\sin A_2}{\sin A_1}, \quad s_{12} = s_{23} \frac{\sin A_3}{\sin A_1} \quad (41)$$

в уравнения (25) и сократив на  $s_{23}$ , получим

$$\begin{aligned} l_{23} \sin A_1 &= l_{13} \sin A_2 - l_{12} \sin A_3, \\ m_{23} \sin A_1 &= m_{13} \sin A_2 - m_{12} \sin A_3, \\ n_{23} \sin A_1 &= n_{13} \sin A_2 - n_{12} \sin A_3 \end{aligned} \quad \left. \right\}. \quad (42)$$

Эти выражения могут дать контроль для предыдущего решения.

Определим теперь направляющие косинусы  $l_{2n}$ ,  $m_{2n}$ ,  $n_{2n}$  нормали в пункте 2 и используем их для вычисления астрономических координат  $\varphi_2$  и  $\lambda_2$ .

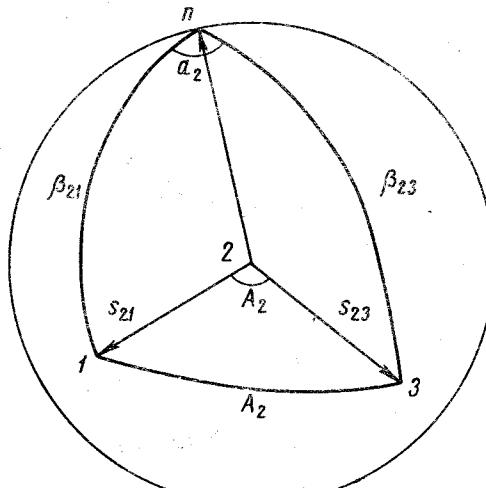


Рис.4

С помощью рис.4, на котором изображена сфера с единичным радиусом, описанная вокруг точки 2, получаем такую систему:

$$\left. \begin{array}{l} l_{21}l_{2n} + m_{21}m_{2n} + n_{21}n_{2n} = \cos \beta_{21}, \\ l_{23}l_{2n} + m_{23}m_{2n} + n_{23}n_{2n} = \cos \beta_{23}, \\ l_{2n}^2 + m_{2n}^2 + n_{2n}^2 = 1. \end{array} \right\} \quad (43)$$

Выразим с помощью первых двух уравнений  $m_{2n}$  и  $n_{2n}$  через  $l_{2n}$

$$m_{2n} = \frac{n_{23} \cos \beta_{21} - n_{21} \cos \beta_{23} + (l_{23}n_{21} - l_{21}n_{23})l_{2n}}{m_{21}n_{23} - m_{23}n_{21}}, \quad (44)$$

$$n_{2n} = \frac{m_{21} \cos \beta_{23} - m_{23} \cos \beta_{21} + (l_{21}m_{23} - l_{23}m_{21})l_{2n}}{m_{21}n_{23} - m_{23}n_{21}}. \quad (45)$$

Подставив оба последних выражения в третье уравнение системы (43), найдем

$$U l_{2n}^2 + V l_{2n} + W = 0, \quad (46)$$

где

$$U = (m_{21}n_{23} - m_{23}n_{21})^2 + (l_{23}n_{21} - l_{21}n_{23})^2 + (l_{21}m_{23} - l_{23}m_{21})^2,$$

$$V = 2(n_{23} \cos \beta_{21} - n_{21} \cos \beta_{23})(l_{23}n_{21} - l_{21}n_{23}) + 2(m_{21} \cos \beta_{23} - m_{23} \cos \beta_{21})(l_{21}m_{23} - l_{23}m_{21}),$$

$$W = (n_{23} \cos \beta_{21} - n_{21} \cos \beta_{23})^2 + (m_{21} \cos \beta_{23} - m_{23} \cos \beta_{21})^2 - (m_{21}n_{23} - m_{23}n_{21})^2.$$

Решив квадратное уравнение (46), найдем  $l_{2n}$ , затем по формулам (44) и (45) можно найти  $m_{2n}$  и  $n_{2n}$ .

Согласно формулам (I):

$$\left. \begin{array}{l} l_{2n} = \cos \varphi_2 \cos \lambda_2, \\ m_{2n} = \cos \varphi_2 \sin \lambda_2, \\ n_{2n} = \sin \varphi_2, \end{array} \right\} \quad (47)$$

теперь легко определить астрономические координаты пункта 2

$$\operatorname{tg} \lambda_2 = \frac{m_{2n}}{\ell_{2n}} ;$$

шаготу  $\varphi_2$  определяет третье уравнение системы (47).

Значение  $\alpha_{21}$  можно определить по формуле (8) или по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha_{21} = \frac{\ell_{21} m_{2n} - m_{21} \ell_{2n}}{n_{2n} (\ell_{21} \ell_{2n} + m_{21} m_{2n}) - n_{21} (\ell_{2n}^2 + m_{2n}^2)} , \quad (48)$$

которая следует из уравнений (8) и (47).

Азимут  $\alpha_{23}$  можно вычислить так:

$$\alpha_{23} = \alpha_{21} - \alpha_2 .$$

Описанным способом можно вычислить астрономические координаты  $\varphi_3$ ,  $\lambda_3$  и азимуты  $\alpha_{31}$ ,  $\alpha_{32} = \alpha_{31} + A_3$ .

Направление нормали в пункте 2 можно определить другим способом, выразив направляющие косинусы  $\ell_{2n}$ ,  $m_{2n}$ ,  $n_{2n}$  так:

$$\left. \begin{aligned} \ell_{2n} &= P \ell_{23} + Q \ell_{21} + R \ell_{2p} , \\ m_{2n} &= P m_{23} + Q m_{21} + R m_{2p} , \\ n_{2n} &= P n_{23} + Q n_{21} + R n_{2p} . \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Здесь  $\ell_{2p}$ ,  $m_{2p}$ ,  $n_{2p}$  обозначают направляющие косинусы перпендикуляра к отрезкам  $s_{21}$  и  $s_{23}$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  — некоторые пока неизвестные числа. Определим эти числа, использовав известные нам углы  $\beta_{21}$  и  $\beta_{23}$  между направлениями  $s_{21}$  и  $s_{2n}$  и направлениями  $s_{23}$  и  $s_{2n}$ , а также угол  $A_2$  между направлениями  $s_{21}$  и  $s_{23}$ . Умножим левые и правые части каждого из уравнений (49) соответственно на  $\ell_{21}$ ,  $m_{21}$ ,  $n_{21}$  и сложим правые и левые произведения по отдельности. Поскольку

$$\begin{aligned} \ell_{2n} \ell_{21} + m_{2n} m_{21} + n_{2n} n_{21} &= \cos \beta_{21} , \\ \ell_{2p} \ell_{21} + m_{2p} m_{21} + n_{2p} n_{21} &= 0 , \\ \ell_{23} \ell_{21} + m_{23} m_{21} + n_{23} n_{21} &= \cos A_2 , \\ \ell_{21}^2 + m_{21}^2 + n_{21}^2 &= 1 , \end{aligned}$$

получаем

$$\cos \beta_{21} = P \cos A_2 + Q . \quad (50)$$

Теперь умножим левые и правые части каждого из уравнений  
 (49) соответственно на  $l_{23}$ ,  $m_{23}$ ,  $n_{23}$  и, пренеся вправо, как и  
 выше, поскольку

$$l_{2n}l_{23} + m_{2n}m_{23} + n_{2n}n_{23} = \cos \beta_{23},$$

$$l_{23}^2 + m_{23}^2 + n_{23}^2 = 1,$$

$$l_{2p}l_{23} + m_{2p}m_{23} + n_{2p}n_{23} = 0,$$

$$l_{21}l_{23} + m_{21}m_{23} + n_{21}n_{23} = \cos A_2,$$

получаем

$$\cos \beta_{23} = P + Q \cos A_2. \quad (51)$$

Уравнения (50) и (51) определяют Р и Q:

$$P = \frac{\cos \beta_{23} - \cos \beta_{21} \cos A_2}{\sin^2 A_2}, \quad (52)$$

$$Q = \frac{\cos \beta_{21} - \cos \beta_{23} \cos A_2}{\sin^2 A_2}. \quad (53)$$

Чтобы определить R, умножим левые и правые части каждого из уравнений (49) на  $l_{2n}$ ,  $m_{2n}$ ,  $n_{2n}$  соответственно и сложим произведения, как и выше, по отдельности

$$I = P \cos \beta_{23} + Q \cos \beta_{21} + R^2. \quad (54)$$

При определении последнего члена учтено, что значение R равно косинусу угла  $\omega$  при точке 2 между направлениями нормали и перпендикуляра к отрезкам  $s_{21}$  и  $s_{23}$

$$R = \cos \omega. \quad (55)$$

Справедливость уравнения (55) можно проверить, умножив правые и левые части уравнений (49) соответственно на  $l_{2p}$ ,  $m_{2p}$  и  $n_{2p}$ . Подставив в формулу (54) выражения (52) и (53) и выразив  $\cos A_2$  по (39), найдем

$$R = \frac{\sin \beta_{21} \sin \beta_{23} \sin A_2}{\sin A_2}. \quad (56)$$

Проще выражение для  $R$  можно получить с помощью рис.3.  
А именно, из сферического треугольника  $I_{np}$  следует

$$\cos \omega = \sin \beta_{21} \cos (\gamma - \frac{\pi}{2}) = \sin \beta_{23} \sin \gamma; \quad (57)$$

из сферического треугольника  $I_{n3}$  находим

$$\sin \gamma = \frac{\sin \beta_{23} \sin \alpha_2}{\sin A_2}. \quad (58)$$

Из уравнений (57) и (58) следует справедливость выражения (56).

Остается определить направляющие косинусы  $\ell_{2p}, m_{2p}, n_{2p}$ .  
Для этого составим очевидную систему уравнений

$$\left. \begin{array}{l} \ell_{21} \ell_{2p} + m_{21} m_{2p} + n_{21} n_{2p} = 0, \\ \ell_{23} \ell_{2p} + m_{23} m_{2p} + n_{23} n_{2p} = 0, \\ \ell_{2p}^2 + m_{2p}^2 + n_{2p}^2 = 1, \end{array} \right\} \quad (59)$$

из решения которой находим

$$\left. \begin{array}{l} \ell_{2p} = \frac{1}{\sin A_2} (m_{21} n_{23} - m_{23} n_{21}), \\ m_{2p} = \frac{1}{\sin A_2} (\ell_{23} n_{21} - \ell_{21} n_{23}), \\ n_{2p} = \frac{1}{\sin A_2} (\ell_{21} m_{23} - \ell_{23} m_{21}), \end{array} \right\} \quad (60)$$

причем

$$\sin^2 A_2 = (m_{21} n_{23} - m_{23} n_{21})^2 + (\ell_{23} n_{21} - \ell_{21} n_{23})^2 + (\ell_{21} m_{23} - \ell_{23} m_{21})^2. \quad (61)$$

Таким образом, направляющие косинусы нормали в точке 2 можно определить такими выражениями!

$$\left. \begin{array}{l} \ell_{2n} = P \ell_{23} + Q \ell_{21} + L (m_{21} n_{23} - m_{23} n_{21}), \\ m_{2n} = P m_{23} + Q m_{21} + L (\ell_{23} n_{21} - \ell_{21} n_{23}), \\ n_{2n} = P n_{23} + Q n_{21} + L (\ell_{21} m_{23} - \ell_{23} m_{21}). \end{array} \right\} \quad (62)$$

$P$  и  $Q$  представлены формулами (52) и (53), значение  $L$  определяет формула

$$L = \frac{\sin \beta_{21} \sin \beta_{32} \sin \alpha_2}{\sin^2 A_2} \quad (63)$$

Вычислив в рассмотренном треугольнике I-2-3 астрономические координаты концов выходной стороны  $s_{23}$  и астрономические азимуты  $\alpha_{23}$  и  $\alpha_{32}$ , можно продолжить определение астрономических координат и азимутов в прилегающих к рассмотренному треугольниках по угловым измерениям в их вершинах.

4. Если в треугольнике I-2-3, кроме перечисленных в начале параграфа 3 известных величин, задана также и сторона  $s_{42}$ , то вычислив по формулам (39) углы  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  и пользуясь теоремой синусов находим

$$s_{43} = s_{42} \frac{\sin A_2}{\sin A_3}, \quad s_{23} = s_{42} \frac{\sin A_3}{\sin A_2}.$$

Угол  $A_3$  можно получить также по формуле

$$A_3 = \pi - A_1 - A_2.$$

Если в пункте I установлены  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  в общей декартовой геодезической системе координат, то

$$x_2 = x_1 + s_{42} l_{42},$$

$$y_2 = y_1 + s_{42} m_{42},$$

$$z_2 = z_1 + s_{42} n_{42}$$

и аналогично для  $x_3$ ,  $y_3$ ,  $z_3$ .

Таким образом, по угловым измерениям в вершинах цепочки треугольников можно передавать не только астрономические координаты и азимуты, но стороны и геодезические координаты. Из сравнения величин, переданных по ряду треугольников и непосредственно измеренных, можно получить контроль и исследовать влияние ошибок, например, связанных с рефракцией.

Зависимость между декартовыми координатами  $x_n^1$ ,  $y_n^1$ ,  $z_n^1$  пункта и в местной системе пункта I и координатами  $x_n$ ,  $y_n$ ,  $z_n$  этого пункта в общей системе можно установить, проектируя

замкнутую ломаную IABnI (рис.5) последовательно на каждую ось местной системы координат:

$$\left. \begin{aligned} & (x_n - x_1) l_{1n} + (y_n - y_1) m_{1n} + (z_n - z_1) n_{1n} - l'_{1n} s_{1n} = 0, \\ & (x_n - x_1) l_{1y} + (y_n - y_1) m_{1y} + (z_n - z_1) n_{1y} - m'_{1n} s_{1n} = 0, \\ & (x_n - x_1) l_{1z} + (y_n - y_1) m_{1z} + (z_n - z_1) n_{1z} - n'_{1n} s_{1n} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

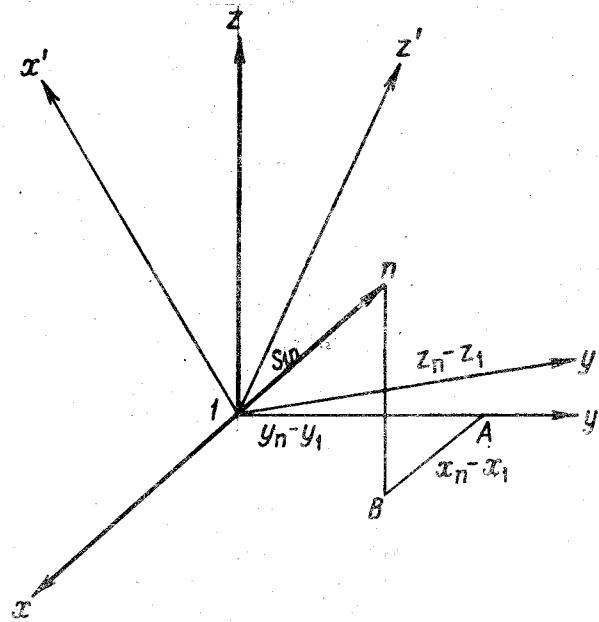


Рис.5

Здесь  $l'_{1n}, m'_{1n}, n'_{1n}$  — направляющие косинусы отрезка In в местной системе координат пункта I. Остальные направляющие косинусы выражены формулами (1).

Последние члены слева в формулах (64) выражают координаты пункта n в местной системе пункта I:

$$\left. \begin{aligned} l'_{1n} s_{1n} &= x'_n \\ m'_{1n} s_{1n} &= y'_n \\ n'_{1n} s_{1n} &= z'_n \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Из формул (I), (64) и (65) следует:

$$\left. \begin{aligned} x'_n &= -(x_n - x_1) \sin \varphi_1 \cos \lambda_1 - (y_n - y_1) \sin \varphi_1 \sin \lambda_1 + (z_n - z_1) \cos \varphi_1, \\ y'_n &= -(x_n - x_1) \sin \lambda_1 + (y_n - y_1) \cos \lambda_1, \\ z'_n &= (x_n - x_1) \cos \varphi_1 \cos \lambda_1 + (y_n - y_1) \cos \varphi_1 \sin \lambda_1 + (z_n - z_1) \sin \varphi_1. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Для обратного перехода имеем:

$$\left. \begin{aligned} (x_n - x_1) &= -x'_n \sin \varphi_1 \cos \lambda_1 - y'_n \sin \lambda_1 + z'_n \cos \varphi_1 \cos \lambda_1, \\ (y_n - y_1) &= -x'_n \sin \varphi_1 \sin \lambda_1 + y'_n \cos \lambda_1 + z'_n \cos \varphi_1 \sin \lambda_1, \\ (z_n - z_1) &= x'_n \cos \varphi_1 + z'_n \sin \varphi_1 \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

или в общем виде:

$$\left. \begin{aligned} x'_{n+1} - x'_n &= x^{(n)} l'_{1x_n} + y^{(n)} l'_{1y_n} + z^{(n)} l'_{1z_n}, \\ y'_{n+1} - y'_n &= x^{(n)} m'_{1x_n} + y^{(n)} m'_{1y_n} + z^{(n)} m'_{1z_n}, \\ z'_{n+1} - z'_n &= x^{(n)} n'_{1x_n} + y^{(n)} n'_{1y_n} + z^{(n)} n'_{1z_n}. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Штрихами здесь отмечены координаты в местной системе пункта I. Индекс  $(n)$  обозначает координаты в местной системе точки  $n$ . Эти координаты справа последовательно умножены на направляющие косинусы осей местной системы в точке I относительно местной системы точки I. Для оси  $x^{(n)}$  можно написать:

$$\left. \begin{aligned} l'_{1x_n} &= l_{1x} l_{nx}^{(n)} + m_{1x} m_{nx}^{(n)} + n_{1x} n_{nx}^{(n)}, \\ m'_{1x_n} &= l_{1y} l_{nx}^{(n)} + m_{1y} m_{nx}^{(n)} + n_{1y} n_{nx}^{(n)}, \\ n'_{1x_n} &= l_{1z} l_{nx}^{(n)} + m_{1z} m_{nx}^{(n)} + n_{1z} n_{nx}^{(n)}. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Направляющие косинусы осей  $y^{(n)}$  и  $z^{(n)}$  относительно осей местной системы точки I можно получить, заменив  $x_n$  на  $y_n$ ,  $x^{(n)}$  на  $y^{(n)}$  и  $x_n$  на  $z_n$ ,  $x^{(n)}$  на  $z^{(n)}$ . Правые части формул (69) и полученных указанной заменой можно определить по формуле (I).

Формулы (68) рекуррентные.

5. Пусть в треугольнике I-2-3 известны  $\varphi_1, \lambda_1, \varphi_2, \lambda_2, \varphi_3, \lambda_3$ , стороны  $s_{12}, s_{13}, s_{23}$ , горизонтальные углы  $a_1, a_2, a_3$ . С точек I, 2 и 3 пусть измерены на некоторый пункт C,

имеющий большую высоту по сравнению с точками I, 2 и 3, зенитные расстояния  $\beta_{1c}$ ,  $\beta_{2c}$ ,  $\beta_{3c}$ , расстояния  $s_{1c}$ ,  $s_{2c}$ ,  $s_{3c}$  и горизонтальные углы  $C12$ ,  $C23$ ,  $C31$ . По этим данным можно определить зенитные расстояния  $\beta_{12}$ ,  $\beta_{13}$ ,  $\beta_{21}$ ,  $\beta_{23}$ ,  $\beta_{31}$ ,  $\beta_{32}$  и, сравнивая их с соответственно измеренными в точках I, 2, 3, исследовать влияние вертикальной рефракции.

Решив треугольник I-C-2 по трем его известным сторонам, можно определить углы  $C12$  и  $I2C$ . Известные соотношения:

$$\cos C12 = \cos \beta_{12} \cos \beta_{1c} + \sin \beta_{12} \sin \beta_{1c} \cos C12, \quad (70)$$

$$\cos I2C = \cos \beta_{21} \cos \beta_{2c} + \sin \beta_{21} \sin \beta_{2c} \cos I2C,$$

левые части которых, таким образом, определены, вместе с очевидными:

$$\sin^2 \beta_{12} + \cos^2 \beta_{12} = 1;$$

$$\sin^2 \beta_{21} + \cos^2 \beta_{21} = 1,$$

образуют две системы из двух уравнений каждая с неизвестными  $\sin \beta_{12}$ ,  $\cos \beta_{12}$  и  $\sin \beta_{21}$ ,  $\cos \beta_{21}$  соответственно.

В треугольниках 2-C-3 и 3-C-I аналогично можно определить  $\beta_{23}$ ,  $\beta_{32}$  и  $\beta_{13}$ ,  $\beta_{31}$ .

Уравнения (70) можно решить проще.

Полагая в первом из них

$$\frac{\cos \beta_{1c}}{\sin \beta_{1c} \cos C12} = \operatorname{tg} \omega,$$

получим для определения  $\beta_{12}$

$$\sin(\beta_{12} + \omega) = \frac{\cos \omega}{\sin \beta_{1c}}$$

и находим

$$\beta_{12} = (\beta_{12} + \omega) - \omega.$$

Для решения второго уравнения полагаем

$$\frac{\cos \beta_{2c}}{\sin \beta_{2c} \cos I2C} = \operatorname{tg} \alpha$$

и получаем

$$\sin(\beta_{21} + Q) = \frac{\cos Q}{\sin \beta_{2c}},$$

$$\beta_{21} = (\beta_{21} + Q) - Q.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Молоденский М.С. Изучение фигуры Земли геометрическим (астрономо-геодезическим) методом.— Сборник статей ГУГК, вып.27, 1949; Тр. ЦНИИГАИК, вып.75, 1950.
2. Молоденский М.С. Новый метод решения геодезических задач.— Тр. ЦНИИГАИК, вып.103, 1954.
3. Еремеев В.Ф., Юркина М.И. Некоторые вопросы обработки пространственных сетей.— Тр. ЦНИИГАИК, вып.171, 1966.
4. Рудский В.И. Передача астрономических координат с одного пункта на другой.— Межведомственный республиканский научно-технический сборник. Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1965, № 2.
5. Рудский В.И. Некоторое обобщение формул передачи астрономических координат и азимута.— Межведомственный республиканский научно-технический сборник. Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1966, № 4.
6. Нирвонер Р.А. Praktische Rechenformeln für die dreidimensionale Geodäsie.—Zeitschrift für Vermessungswesen”, 1964, 89, №5, 145-151.

V.F. Yeremeev, M.I. Yurkina

## TRANSFERRING ASTRONOMICAL COORDINATES, AZIMUTHS AND SIDES BY VERTICAL AND HORIZONTAL ANGLES

### Summary

The following problems have been solved.

1. For astronomical points 1 and 2, the following quantities are known: astronomical latitudes and longitudes  $\varphi_1, \lambda_1, \varphi_2, \lambda_2$ , astronomic azimuths  $\alpha_{13}, \alpha_{23}$  and zenith distances  $\beta_{13}, \beta_{23}$ ; for point 3  $\beta_{31}$  and  $\beta_{32}$  are known. Using these quantities, the values  $\varphi_3, \lambda_3, \alpha_{34}, \alpha_{32}, \alpha_{12}, \beta_{12}, \alpha_{21}, \beta_{21}$  have been found.

2. In a triangle 1-2-3 are known:  $\psi_1$ ,  $\lambda_1$ ,  $\beta_{12}$ ,  $\alpha_{12}$ ,  $\beta_{13}$ ,  
 $\alpha_1 = \alpha_{13} - \alpha_{12}$ ,  $\beta_{21}$ ,  $\beta_{23}$ ,  $\beta_{31}$ ,  $\beta_{32}$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ .

The values of  $\psi_2$ ,  $\lambda_2$ ,  $\alpha_{21}$ ,  $\psi_3$ ,  $\lambda_3$ ,  $\alpha_{31}$ ,  $\alpha_{32}$ ,  $\beta_{32}$  have been determined (this problem was already solved by Rudski).

3. In a triangle 1-2-3, besides the quantities enumerated in (2), the side  $s_{12}$  is known. A method for transferring sides and Cartesian coordinates through a chain of triangles has been considered.

4. In a triangle 1-2-3 are known:  $\psi_1$ ,  $\lambda_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\lambda_2$ ,  $\psi_3$ ,  $\lambda_3$ , the sides  $s_{12}$ ,  $s_{13}$ ,  $s_{23}$ , the horizontal angles  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ . From points 1, 2 and 3 measurements were made on a point C of a higher elevation as compared with the points 1, 2 and 3 and then the zenith distances  $\beta_{1c}$ ,  $\beta_{2c}$ ,  $\beta_{3c}$ , the distances  $s_{1c}$ ,  $s_{2c}$ ,  $s_{3c}$  and the horizontal angles C12, C23, C31 were determined. The zenith distances  $\beta_{12}$ ,  $\beta_{13}$ ,  $\beta_{21}$ ,  $\beta_{23}$ ,  $\beta_{31}$ ,  $\beta_{32}$  were determined, which permits to investigate the influence of vertical refraction through comparison with directly measured quantities.

## ДВЕ ПРЯМЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЗАСЕЧКИ

I. Рассмотрим два случая вычисления геодезических декартовых координат  $x_c, y_c, z_c$  некоторой точки С, на которую выполнены наблюдения с трех точек, 1, 2, 3, декартовы координаты  $x_q, y_q, z_q$  ( $q = 1, 2, 3$ ) которых известны (см. рисунок). Пусть в первом случае из измерений получены геодезические зенитные расстояния  $\ell_{1c}, \ell_{2c}$  и геодезический азимут  $A_{sc}$ .

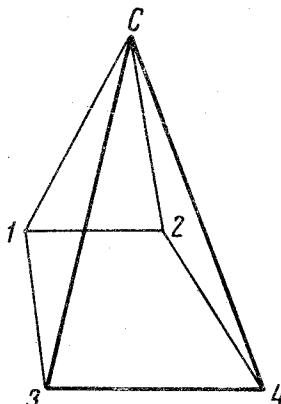
Из известных выражений для направляющих косинусов:

$$\left. \begin{aligned} \ell_{qc} &= \cos B_q \cos L_q \cos z_{qc} - \sin B_q \cos L_q \sin z_{qc} \cos A_{qc} - \sin L_q \sin z_{qc} \sin A_{qc}, \\ m_{qc} &= \cos B_q \sin L_q \cos z_{qc} - \sin B_q \sin L_q \sin z_{qc} \cos A_{qc} + \cos L_q \sin z_{qc} \sin A_{qc}, \\ n_{qc} &= \sin B_q \cos z_{qc} + \cos B_q \sin z_{qc} \cos A_{qc}, \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

составив их для  $q = 1$ , исключим неизвестный нам геодезический азимут  $A_{1c}$ , чтобы получить соотношение между направляющими косинусами  $\ell_{1c}, m_{1c}, n_{1c}$ . Исключив из первых двух уравнений (I)  $\sin A_{1c}$ , получим

$$\begin{aligned} \ell_{1c} \cos L_1 + m_{1c} \sin L_1 &= \\ = \cos B_1 \cos z_{1c} - \sin B_1 \sin z_{1c} \cos A_{1c}. & \quad (2) \end{aligned}$$

Определив из последнего уравнения (I)



$$\cos A_{1c} = \frac{n_{1c} - \sin B_1 \cos z_{1c}}{\cos B_1 \sin z_{1c}}, \quad (3)$$

из уравнений (2) и (3) находим

$$l_{1c} \cos B_1 \cos L_1 + m_{1c} \cos B_1 \sin L_1 + n_{1c} \sin B_1 = \cos z_{1c} . \quad (4)$$

Аналогично для  $q = 2$  можно написать

$$l_{2c} \cos B_2 \cos L_2 + m_{2c} \cos B_2 \sin L_2 + n_{2c} \sin B_2 = \cos z_{2c} . \quad (5)$$

Исключим теперь из уравнений (I), составленных для  $q = 3$ , неизвестное  $z_{3c}$ . Из третьего уравнения (I) находим

$$\cos z_{3c} = \frac{n_{3c} - \cos B_3 \cos A_{3c} \sin z_{3c}}{\sin B_3} .$$

Подставив это выражение в первые два уравнения (I), после преобразования и сокращения находим

$$l_{3c} \sin B_3 = n_{3c} \cos B_3 \cos L_3 - (\cos L_3 \cos A_{3c} + \sin B_3 \sin L_3 \sin A_{3c}) \sin z_{3c} ,$$

$$m_{3c} \sin B_3 = n_{3c} \cos B_3 \sin L_3 - (\sin L_3 \cos A_{3c} - \sin B_3 \cos L_3 \sin A_{3c}) \sin z_{3c} .$$

Испечав из этих двух уравнений  $\sin z_{3c}$ , получим уравнение, связывающее все три неизвестных направляющих косинуса

$$l_{3c} (\sin L_3 \cos A_{3c} - \sin B_3 \cos L_3 \sin A_{3c}) - m_{3c} (\cos L_3 \cos A_{3c} + \sin A_{3c} \sin B_3 \sin L_3) + n_{3c} \cos B_3 \sin A_{3c} = 0 . \quad (6)$$

Если для контроля измерен азимут  $A_{4c}$  с некоторой точки 4, то аналогично

$$l_{4c} (\sin L_4 \cos A_{4c} - \sin B_4 \cos L_4 \sin A_{4c}) - m_{4c} (\cos L_4 \cos A_{4c} + \sin B_4 \sin L_4 \sin A_{4c}) + n_{4c} \cos B_4 \sin A_{4c} = 0 . \quad (7)$$

Имея в виду зависимости:

$$s_{qc} l_{qc} = x_c - x_q ,$$

$$s_{qc} m_{qc} = y_c - y_q ,$$

$$s_{qc} n_{qc} = z_c - z_q ,$$

из уравнений (4) - (7) находим четыре уравнения для неизвестных  $x_c, y_c, z_c$ :

$$(x_c - x_1) \cos B_1 \cos L_1 + (y_c - y_1) \cos B_1 \sin L_1 + (z_c - z_1) \sin B_1 = s_{1c} \cos \alpha_{1c}; \quad (8)$$

$$(x_c - x_2) \cos B_2 \cos L_2 + (y_c - y_2) \cos B_2 \sin L_2 + (z_c - z_2) \sin B_2 = s_{2c} \cos \alpha_{2c}; \quad (9)$$

$$(x_c - x_3) (\sin L_3 \cos A_{3c} - \sin B_3 \cos L_3 \sin A_{3c}) - (y_c - y_3) (\cos L_3 \cos A_{3c} + \sin B_3 \sin L_3 \sin A_{3c}) + (z_c - z_3) \cos B_3 \sin A_{3c} = 0; \quad (10)$$

$$(x_c - x_4) (\sin L_4 \cos A_{4c} - \sin B_4 \cos L_4 \sin A_{4c}) - (y_c - y_4) (\cos L_4 \cos A_{4c} + \sin B_4 \sin L_4 \sin A_{4c}) + (z_c - z_4) \cos B_4 \sin A_{4c} = 0. \quad (II)$$

Представив уравнения (10) и (II) в виде:

$$a_3 x_c + b_3 y_c + c_3 z_c = A_3, \quad (I2)$$

$$a_4 x_c + b_4 y_c + c_4 z_c = A_4, \quad (I3)$$

где

$$a_3 = \sin L_3 \cos A_{3c} - \sin B_3 \cos L_3 \sin A_{3c},$$

$$b_3 = -\cos L_3 \cos A_{3c} - \sin B_3 \sin L_3 \sin A_{3c},$$

$$c_3 = \cos B_3 \sin A_{3c},$$

$$A_3 = a_3 x_3 + b_3 y_3 + c_3 z_3$$

и  $a_4, b_4, c_4, A_4$  должны быть выражены аналогично, и вычитая из обеих частей равенств (I2) и (I3) соответственно известные выражения:

$$a_3 x_1 + b_3 y_1 + c_3 z_1 = \theta_{13},$$

$$a_4 x_1 + b_4 y_1 + c_4 z_1 = \theta_{14},$$

получим:

$$a_3 (x_c - x_1) + b_3 (y_c - y_1) + c_3 (z_c - z_1) = A_3 - \theta_{13} = D_{13}, \quad (I4)$$

$$a_4 (x_c - x_1) + b_4 (y_c - y_1) + c_4 (z_c - z_1) = A_4 - \theta_{14} = D_{14}. \quad (I5)$$

Из решения этих двух уравнений можно определить  $(y_c - y_1)$  и  $(z_c - z_1)$  в функции  $(x_c - x_1)$ . Подставив эти выражения для  $(y_c - y_1)$  и  $(z_c - z_1)$  в уравнение (8), где

$$s_{1c}^2 = (x_c - x_1)^2 + (y_c - y_1)^2 + (z_c - z_1)^2,$$

получим квадратное уравнение относительно  $(x_c - x_1)$ .

Из решения упомянутого квадратного уравнения найдем  $(x_c - x_1)$ , а затем  $(y_c - y_1)$  и  $(z_c - z_1)$ . Одно из решений будет лишним.

Вычитая из уравнений (I2) и (I3) соответственно известные выражения

$$a_3 x_2 + b_3 y_2 + c_3 z_2 = \theta_{23};$$

$$a_4 x_2 + b_4 y_2 + c_4 z_2 = \theta_{24},$$

можно получить

$$a_3(x_c - x_2) + b_3(y_c - y_2) + c_3(z_c - z_2) = A_3 - \theta_{23} = D_{23}; \quad (I6)$$

$$a_4(x_c - x_2) + b_4(y_c - y_2) + c_4(z_c - z_2) = A_4 - \theta_{24} = D_{24}. \quad (I7)$$

Решая эти два уравнения совместно с (9), получим еще одно квадратное уравнение относительно  $(x_c - x_2)$  и затем еще раз найдем значения  $x_c, y_c, z_c$  для контроля.

2. Во втором случае с известных точек пусть будут измерены зенитные расстояния  $z_{qc}$  ( $q = 1, 2, 3, 4$ ). Для однозначного решения задачи достаточно измерения трех зенитных расстояний  $z_{qc}$ . Измерение четвертого  $z_{4c}$  дает контроль.

Согласно формулам (8) и (9) предыдущего случая можно составить четыре уравнения с тремя неизвестными:

$$(x_c - x_q) \cos B_q \cos L_q + (y_c - y_q) \cos B_q \sin L_q + (z_c - z_q) \sin B_q = s_{qc} \cos z_{qc}, \quad (I8)$$

где  $q = 1, 2, 3, 4$ , а  $s_{qc} = \sqrt{(x_c - x_q)^2 + (y_c - y_q)^2 + (z_c - z_q)^2}$ .

После исключения этого квадратного корня, каждое из уравнений (I8) можно привести к виду:

$$\alpha_q x_c^2 + \beta_q y_c^2 + c_q z_c^2 + 2A_q x_c y_c + 2B_q x_c z_c + 2C_q y_c z_c + \\ + 2\alpha_q x_c + 2\beta_q y_c + 2\gamma_q z_c + \delta_q = 0,$$

где  $\alpha_q, \beta_q, c_q, A_q, B_q, C_q, \alpha_q, \beta_q, \gamma_q$  и  $\delta_q$  - некоторые числовые коэффициенты, различные в разных уравнениях.

Решение системы (I8) можно упростить, если приближенно известны расстояния определяемого пункта С от известных пунктов. Приближенные значения этих расстояний можно вычислить, например, по азимутам  $A_{3c}$  и  $A_{4c}$ , измеренным хотя бы с невысокой точностью.

Тогда по исходным данным и известным формулам можно получить углы треугольника С З 4:

$$\left. \begin{aligned} \cos \angle C34 &= l_{34} l_{3c} + m_{34} m_{3c} + n_{34} n_{3c} ; \\ \cos \angle C43 &= l_{43} l_{4c} + m_{43} m_{4c} + n_{43} n_{4c} \end{aligned} \right\} \quad (I9)$$

и затем определить приближенные расстояния  $s_{3c}$  и  $s_{4c}$  по теореме синусов. Вычислив углы 13С и 24С по формулам, аналогичным (I9), из решения треугольников 13С и 24С (по двум сторонам и углу между ними) легко определить расстояния  $s_{1c}$  и  $s_{2c}$ . Вычислив

$$x_c = x_q + s_{qc} l_{qc},$$

$$y_c = y_q + s_{qc} m_{qc},$$

$$z_c = z_q + s_{qc} n_{qc},$$

где  $q = 1, 2, 3, 4$ , и образовав средние значения  $x_c^*, y_c^*, z_c^*$ , можно перевычислить, с использованием этих средних, расстояния  $s_{1c}^*$ ,  $s_{2c}^*$ ,  $s_{3c}^*$ ,  $s_{4c}^*$ , чтобы получить единую систему приближенных координат определяемой точки и соответствующих им расстояний, и после преобразований из системы (I8) получить систему уравнений, линейных относительно малых по величине неизвестных.

Уравнения (I8) вначале представим так:

$$(x_c - x_c^* + x_c^* - x_q) \cos B_q \cos L_q + (y_c - y_c^* + y_c^* - y_q) \cos B_q \sin L_q + \\ + (z_c - z_c^* + z_c^* - z_q) \sin B_q = (s_{qc} - s_{qc}^* + s_{qc}^*) \cos Z_{qc}. \quad (20)$$

Поскольку

$$s_{qc} - s_{qc}^* = \frac{s_{qc}^2 - s_{qc}^{*2}}{s_{qc} + s_{qc}^*} \approx \frac{1}{s_{qc}^*} [(x_c - x_c^*)(x_c^* - x_q) + (y_c - y_c^*)(y_c^* - y_q) + (z_c - z_c^*)(z_c^* - z_q)],$$

а на основании (18)

$$(x_c^* - x_q) \cos B_q \cos L_q + (y_c^* - y_q) \cos B_q \sin L_q + (z_c^* - z_q) \sin B_q = s_{qc}^* \cos Z_{qc}^*,$$

где  $Z_{qc}^*$  — зенитные расстояния направлений с твердых точек  $q$  на точку с координатами  $x_c^*, y_c^*, z_c^*$  (эти зенитные расстояния можно точно вычислять по последней формуле), то из (20) следует

$$\begin{aligned} & (x_c - x_c^*) \cos B_q \cos L_q + (y_c - y_c^*) \cos B_q \sin L_q + (z_c - z_c^*) \sin B_q = \\ & = \frac{1}{s_{qc}^*} [(x_c - x_c^*)(x_c^* - x_q) + (y_c - y_c^*)(y_c^* - y_q) + (z_c - z_c^*)(z_c^* - z_q)] \cos Z_{qc} + \\ & + s_{qc}^* (\cos Z_{qc} - \cos Z_{qc}^*). \end{aligned} \quad (21)$$

Решение системы уравнений (21) уже не представляет труда.

Для уточнения или контроля можно сделать следующее приближение, приняв вместо использованных средних значений  $x_c^*, y_c^*, z_c^*$  уточненные или учтя опущенные квадратичные члены в свободных членах уравнений (21).

V.F. Yeremeev

## TWO RESECTIONS IN SPACE

### Суммагү

Two methods for computation of Cartesian coordinates of a point C observed from three points 1, 2 and 3 of known coordinates are considered.

In the first case the geodetic zenith distances  $z_{1c}$ ,  $z_{2c}$  and a geodetic azimuth  $A_{3c}$  are assumed as given. In the second case, the zenith distances  $z_{qc}$  ( $q = 1, 2, 3$ ) are given.

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Остач О.М. О влиянии сжатия Земли на ее стоксовые постоянные ..... 3-19	
Бровар В.В., Остач О.М., Целлинен Л.П., Шабанова А.И. Испытание на модели Земли формул для вычисления стоксовых постоянных по гравиметрическим данным ..... 20-48	
Еремеев В.Ф. О решении уравнений, определяющих гравитационное поле и фигуру Земли..... 49-56	
Еремеев В.Ф., Юркина М.И. Вывод поправки в аномалию силы тяжести и формул для вычисления высот квазигеоида и уклонений отвеса при аппроксимации земной поверхности плоскими гранями ..... 57-76	
Еремеев В.Ф., Шабанова А.И. Исследование методов вычисления уклонения отвеса на модели Земли ..... 77-106	
Еремеев В.Ф., Юркина М.И. Вычисление поправок $G$ Молоденского и соответственных поправок в уклонения отвеса, если высоты заданы интерполяционным полиномом ..... 107-117	
Еремеев В.Ф., Юркина М.И. Уточненный вывод коэффициентов условных уравнений для совместного уравнивания геодезических широт, долгот и высот квазигеоида.....118-124	
Алексашина Г.А. Вывод топографических влияний на потенциал, силу тяжести и уклонение отвеса с помощью формулы Гаусса.....125-142	
Алексашина Г.А. К вопросу об учете влияния ближайшей области на топографическую поправку силы тяжести.....143-147	

- Еремеев В.Ф., Юркина М.И. К выводу  
вековых изменений земного гравитационного по-  
ля и вековых движений полюса ..... 148-159
- Еремеев В.Ф., Юркина М.И. Передача  
астрономических координат и азимутов через вер-  
тикальные и горизонтальные углы..... 160-180
- Еремеев В.Ф. Две прямые пространственные за-  
сечки..... 181-186

Труды ЦНИИГАиК, вып. 138  
Теория фигуры Земли и геодезическая гравиметрия  
Редактор М.И.Юркина  
Технический редактор Е.Д.Угарова  
Корректор М.А.Бондарчук

Т-19307 от 18/XI-71г. Формат 60x84 1/8 д.л. Объем 11,75 п.л.

Заказ 14836 Цена 1р.10коп. Тираж 300

Фабрика КМП Главного управления вычислительных работ ЦСУ СССР