

СССР НКТП
ГЛАВНОЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Т Р У Д Ы

ЦЕНТРАЛЬНОГО НАУЧНОГО ИНСТИТУТА
ГЕОДЕЗИИ АЭРОСЪЕМКИ И КАРТОГРАФИИ

(ПРЕЖДЕ: ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ ГЕОДЕЗИИ И КАРТОГРАФИИ)

ВЫПУСК 6-й

В. В. КАВРАЙСКИЙ

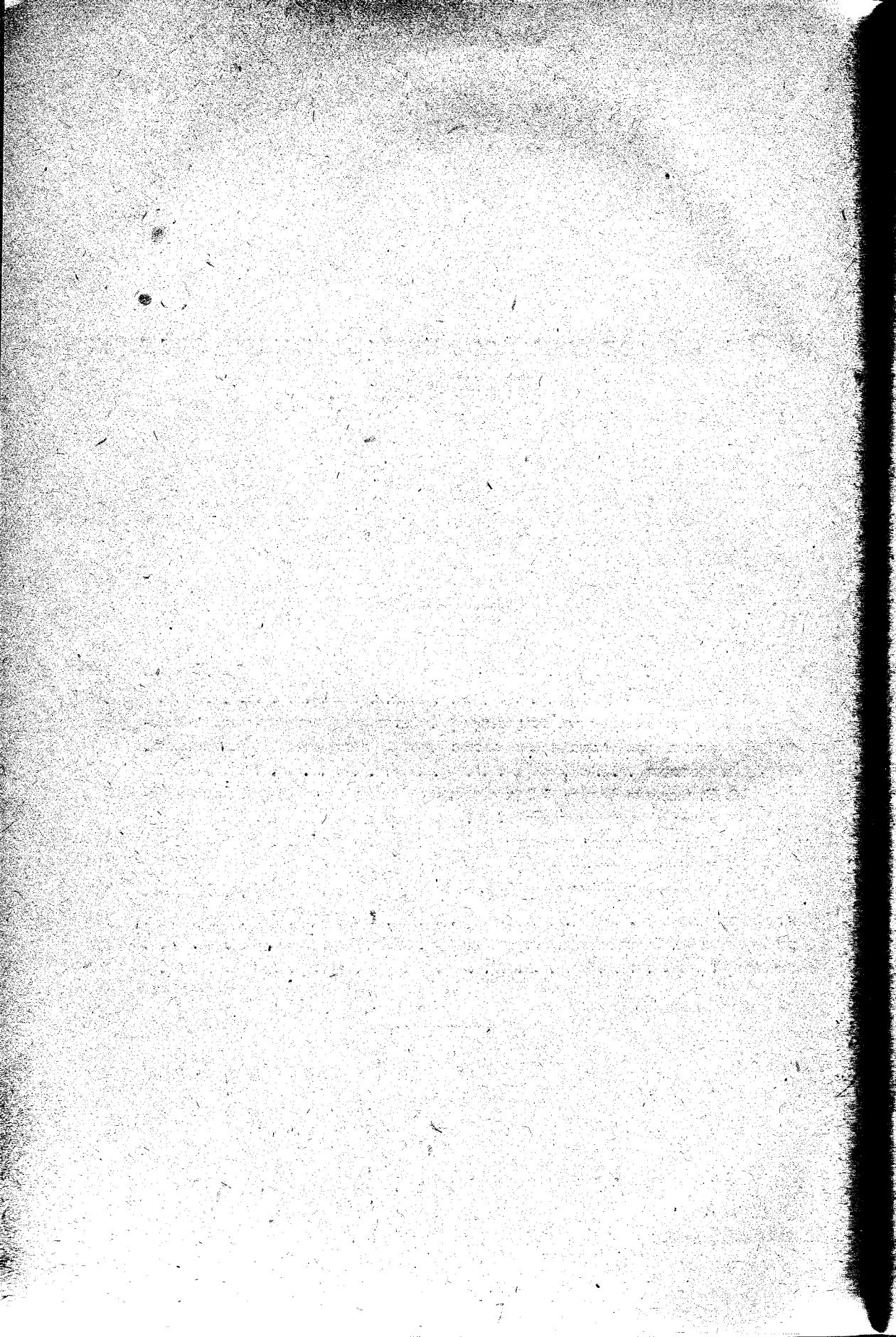
ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КАРТОГРАФИИ

- I. Об оценке достоинства картографических проекций и о некоторых проекциях, выгоднейших для изображения данной страны.
- II. О многогранных проекциях для карт средних масштабов.

II. О многогранных проекциях для карт средних масштабов.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

	Стр.
Введение	115
§ 1. Общие соображения	116
§ 2. Общие формулы для вычисления угловых и линейных разрывов, происходящих при складывании листов карты, построенной в многогранной проекции	117
§ 3. Применение формул § 2 к проекциям, симметричным относительно меридiana и первого вертикала	125
§ 4. „Международная“ проекция	131
§ 5. Конические проекции	135
§ 6. Проекция Гаусса-Крюгера	138
Литература	141
Прибавление. О склеивании листов карты в 1 : 400 000	142
Симметрия	149



О многограных проекциях для карт средних масштабов¹).

В В Е Д Е Н И Е.

Государственный институт геодезии и картографии (ГИГК) приступает к большой работе по исчислению поверхности СССР и его частей—отдельных республик, областей, округов, районов и бассейнов рек.

Собранное в Институте по этому вопросу 3-го мая 1930 года, совещание под председательством проф. Ф. Н. Красовского, по заслушании доклада инженера Д. А. Ларина, пришло, между прочим, к следующим заключениям:

1) Для исчисления поверхностей границы измеряемых областей должны наноситься на карты (а большую частью—на специально построенные картографические сетки) средних масштабов, из коих основным будет $1:1\,000\,000$.

2) Исчисление будет вестись главным образом аналитическим способом, т. е. по таблицам поверхностей сфероидических трапеций, и только остатки, составляющие лишь небольшой процент от всей измеряемой поверхности, будут измеряться графически—планиметром или палеткой.

Инж. Ларин в своем докладе выставил следующие требования к картографической сетке, на которую будут наноситься контуры для исчисления поверхностей: а) простота нанесения контуров, б) простота измерения поверхностей и в) наличие двух координатных сетей, а именно, сети меридианов и параллелей и сети координатных линий, соответствующих принятой ныне в СССР системе плоских прямоугольных координат Гаусса-Крюгера.

Такая двойная сеть позволит в некоторых случаях наносить контуры дважды, следовательно, с контролем, а кроме того, как было справедливо отмечено на совещании, это вообще весьма ценно для нанесения опорных точек по координатам, так как ныне уже имеются координаты именно Гаусса-Крюгера для многих точек, и с каждым годом число таких точек должно быстро возрастать с внедрением в геодезическую практику применения конформных прямоугольных координат для числовой обработки геодезических измерений второго и низших классов.

В настоящее время имеются 24 листа международной карты мира в I/M для территории Союза, изданные Управлением Военных Топографов

¹) Несколько дополненный в теоретической части доклад, прочитанный в Картсекторе ГИГК 21 мая 1930 г.

(с надписями на русском языке). Несомненно, продолжение этой работы должно войти в план деятельности ГИГК, если не в ближайшее время, то в весьма недалеком будущем.

Поэтому довольно значительную по объему работу по нанесению на сетки в I/M административных и физико-географических границ надо спланировать и повести так, чтобы она могла быть впоследствии целиком и наимпростейшим образом использована и для составления международной миллионной карты.

С отмеченных здесь точек зрения и было мне поручено Институтом рассмотреть вопрос о проекциях, которые можно применить для построения таких сеток.

§ 1. Общие соображения.

Все указанные выше требования к проекции приводят прежде всего к тому, что она должна быть многогранной в обобщенном смысле этого слова. Иначе говоря, какой бы род проекции мы ни приняли, ее произвольные постоянные должны быть свои для каждого листа карты, а именно такие, чтобы привести к минимуму искажения в пределах каждого отдельного листа, не претендую зато на возможность соединять неограниченное число листов в одно целое.

Весьма желательно лишь, чтобы практически можно было склеить вместе два соседних листа, а еще лучше—четыре листа, имеющих общую угловую точку.

Совершенно ясно, что деление на листы должно быть принято международное, и не только потому, что так издается международная карта мира, а еще более на том основании, что это деление уже положено фактически в основу разбивки поверхности земли на съемочные трапеции к востоку от Пулковского меридиана и оно же принято¹⁾ III Геодезическим Совещанием при Госплане для координатных полос систем плоских прямоугольных координат Гаусса-Крюгера.

Что касается легкости измерения площадей, то теоретически представляется наиболее правильным взять одну из равновеликих проекций. Однако, практически, при условии 2-м Введения, т. е. при преимущественном применении аналитического метода, и другие проекции будут в этом отношении равноценны. Так, в проекции, наихудшей с этой точки зрения из трех рассматриваемых ниже (международная, конические, Гаусса-Крюгера), а именно в проекции Гаусса-Крюгера, сохраняющей длины вдоль среднего меридиана, наибольшее уклонение масштаба площадей от единицы приблизительно

равно $\frac{1}{365} \cos^2 \phi$, т. е. на самом юге Союза около $\frac{1}{557}$; при чем введением редукционного множителя, общего для целого листа карты, это искажение может быть уменьшено вдвое. Такое искажение вряд ли может иметь значение при измерении малых остаточных площадей планиметром или палеткой.

Простота графического нанесения опорных точек и контуров на готовую простую или двойную сетку также почти одинакова во всех более или менее рационально выбранных проекциях. Равным образом на всякую сеть меридианов и параллелей почти одинаково легко наносится сеть координатных

¹⁾ По моему предложению. В. К.

линий проекции Гаусса-Крюгера, если имеются таблицы таких координат для точек пересечения меридианов и параллелей¹⁾.

Однако для того, чтобы построение двойной сетки и нанесение опорных точек по прямоугольным координатам можно было сделать помошью координатографа и, при наличии только что упомянутых таблиц, без всяких дополнительных вычислений, следовало бы остановиться именно на проекции Гаусса-Крюгера.

Но имея в виду связать предстоящие работы по исчислению площадей с подготовкой листов международной миллионной карты, естественно прежде всего подумать о проекции, принятой для этой карты²⁾.

Я и начну более детальное рассмотрение настоящего вопроса с этой проекции, а затем сопоставлю с ней конические проекции, выдвинутые в ее замену Фришауфом³⁾ и Ломницким⁴⁾ и, наконец, сопоставлю их с проекцией Гаусса-Крюгера в виду вышеуказанных ее положительных сторон. Однако, сперва в нижеследующих §§ 2 и 3 развиты некоторые, отчасти новые, теоретические соображения, общие для всех многогранных проекций.

§ 2. Общие формулы для вычисления угловых и линейных разрывов, происходящих при складывании соседних листов карты, построенной в многогранной проекции.

Выводимые здесь формулы справедливы независимо от того, какая именно проекция применяется, как многогранная, при следующих весьма общих ограничениях и условиях:

1) Все „сферические трапеции“, т. е. фигуры, ограниченные двумя меридианами и двумя параллелями, соответствующие листам карты, изображаются в проекции одного и того же рода, но произвольные постоянные этой проекции — для листов каждого пояса свои и выбираются так, чтобы сделать возможно малыми искажения в пределах листа.

Таким образом, если обозначим через ϕ широту изображаемой точки $M_o(\phi, \lambda)$ и через λ ее долготу от среднего меридиана трапеции, то прямоугольные координаты изображения $M(x, y)$ этой точки на плоскости будут функциями ϕ, λ и средней широты ϕ_0 данной трапеции:

$$x = f_1(\phi, \lambda, \phi_0), \quad y = f_2(\phi, \lambda, \phi_0), \quad (1)$$

при чем функции f_1 и f_2 — одни и те же для всех листов карты.

2) Относительные искажения длин в пределах каждого листа суть малые второго порядка, если принять за малые первого порядка линейные размеры сферической трапеции, выраженные в частях земного радиуса.

1) Например: В. В. Каврайский, Таблицы прямоугольных координат Гаусса-Крюгера для нанесения километровых сеток на топографические карты, изд. В.-Топ. Упр. РККА, М. 1931 г., где даны координаты Гаусса-Крюгера для углов рамок съемочных трапеций масштаба 1 : 50 000, т. е. через 10' по широте и 15' по долготе с точностью до 0,1 м для широт от 36° до 72° и долгот от 0° до 31½°. Во II издании 1933 г. таблицы продолжены на юг до 32°.

2) В выработке этой проекции принимал участие французский геодезист Лаллеман. Он же первый дал ее аналитическое исследование [1]. Поэтому иногда ее называют проекцией Лаллемана. Часто именуют ее „измененной поликонической“ — название, весьма не определившееся. Мы будем называть ее для краткости международной, как иногда делает и Ломницкий в работе [3], часто цитируемой ниже.

3) J. Frischauf [2], стр. 39, 40, 105, 106, 170 и сл. На стр. 40 в строке 10-й снизу следует читать: 25;1 (вместо 2;51).

4) A. Lomnicki [3], стр. 11—23.

Как известно¹⁾, таких проекций существует бесчисленное множество. Проекции же, в которых относительные искажения длин повсюду в пределах изображаемой малой области были бы малыми выше второго порядка, невозможны.

3) Почти все дальнейшие выводы приближенны. А именно, мы пренебрегаем малыми третьего порядка, т. е. порядка $\left(\frac{s}{R}\right)^3$, в отношениях длин и в углах, выраженных в радианах, и, следовательно, малыми порядка $\frac{s^4}{R^3}$ в абсолютных значениях длин. Здесь s — какая-нибудь величина порядка линейных размеров сферической трапеции, а R — радиус Земли.

4) Мы будем принимать Землю за шар и при численных подсчетах считать длину 1° дуги большого круга этого шара равной 111 км, что в масштабе 1 : 1 000 000 представит 111 мм.

Это последнее ограничение не существенно и делается только для упрощения изложения. Нетрудно обобщить все приводимые ниже формулы и на случай сфероида, воспользовавшись теоремой о возможности изобразить малую часть сфероида на шаре с той же средней кривизной с относительными искажениями длин выше второго порядка. Один из способов такого изображения — с точным сохранением углов — предложен и детально разработан Гауссом в его „Исследованиях по высшей геодезии“²⁾.

Чтобы конкретизировать сделанные выше ограничения точности, заметим, что наибольшая полуширина листа миллионной карты (пояс A) $\bar{y} = 333$ мм, радиус Земли, уменьшенный в общем масштабе карты $R = 6370$ мм. Следовательно, приблизительно

$$\frac{\bar{y}}{R} = \frac{1}{19}, \quad \left(\frac{\bar{y}}{R}\right)^3 = \frac{1}{7000}, \quad \left(\frac{\bar{y}}{R}\right)^4 \varphi' = 0,5 \text{ и } \frac{\bar{y}^4}{R^3} = 0,05 \text{ мм}$$

Для крайнего юга СССР (пояс J):

$$\bar{y} = 333 \text{ мм} \cos 36^\circ = 270 \text{ мм}, \quad \frac{\bar{y}}{R} = \frac{1}{24}$$

$$\left(\frac{\bar{y}}{R}\right)^3 = \frac{1}{14000}, \quad \left(\frac{\bar{y}}{R}\right)^4 \varphi' = 0,25, \quad \frac{\bar{y}^4}{R^3} = 0,02 \text{ мм}$$

Обратимся теперь к выводу некоторых соотношений между искажениями на рамках карты. На черт. 1 схематически представлена уменьшенная в общем масштабе карты сферическая трапеция $A_0B_0C_0D_0$. Ограничивающие ее меридианы и параллели проведены сплошными линиями, а штрихами показаны геодезические хорды дуг параллелей, т. е., в случае шара, большие круги A_0D_0 и B_0C_0 .

Обозначим через γ_1 и γ_2 углы между этими большими кругами и параллелями. Они, очевидно, попарно равны между собою и равны сближениям меридианов в углах трапеции относительно ее среднего меридиана.

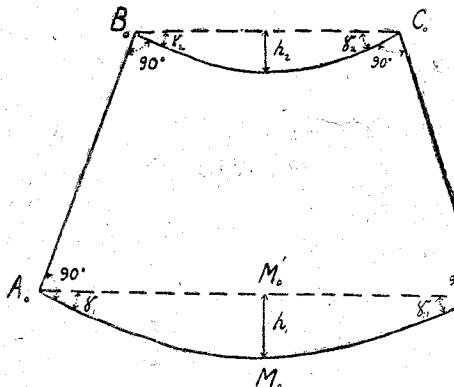
На черт. 2 сплошными и прерывистыми линиями представлены изображения соответствующих линий чертежа 1 в какой-нибудь проекции, удовле-

1) См., например, А. Тиссо [4], стр. 25—27.

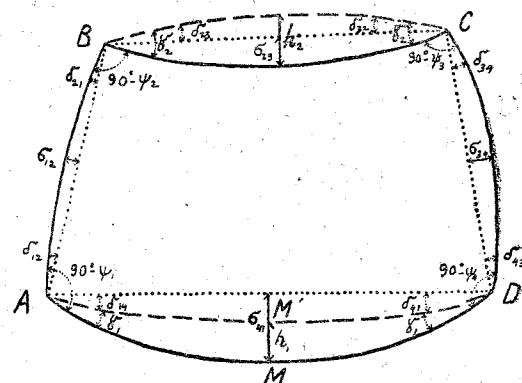
2) Имеются в прекрасном русском переводе А. Тилло [5], стр. 43—72.

творящей поставленным выше условиям, а пунктиром проведены прямые линии.

Согласно терминологии, употребляемой при применении плоских прямоугольных координат в геодезии, назовем поправками направлений за кривизну изображения геодезических линий, или, короче, просто — поправками за кривизну — углы $\delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{23}, \delta_{32}, \delta_{34}, \delta_{43}, \delta_{41}$ и δ_{14} между изображениями дуг больших кругов A_0B_0, B_0C_0, C_0D_0 и D_0A_0 и прямолинейными



Черт. 1.



Черт. 2.

хордами этих изображений. Мы будем считать эти углы δ положительными, когда изображение дуги большого круга лежит вне прямолинейного четырехугольника $ABCD$.

Обозначим, далее, через $90^\circ - \phi_1, 90^\circ - \phi_2, 90^\circ - \phi_3$ и $90^\circ - \phi_4$ внутренние углы криволинейного четырехугольника $ABCD$, изображающего сферическую трапецию $A_0B_0C_0D_0$. Величины ϕ представляют, очевидно, искажения прямых углов этой трапеции, исчисляемые в смысле „нatura“ — „карта“.

Легко подсчитать по формулам сферической тригонометрии, что стрелки h_1 и h_2 дуг параллелей на черт. 1 с принятой нами степенью точности будут

$$h_1 = \frac{\bar{\lambda}^2}{4\varphi^\circ} R \sin 2\phi_1, \quad h_2 = \frac{\bar{\lambda}^2}{4\varphi^\circ} R \sin 2\phi_2 \quad (2)$$

где ϕ_1 и ϕ_2 — крайние широты трапеции, и $\bar{\lambda} = 3^\circ$ долгота ее крайнего меридiana от среднего.

Очевидно, h_1 и h_2 второго порядка. A_0D_0 и B_0C_0 первого порядка, следовательно, поверхности сегментов, заключенных между параллелями A_0D_0 и B_0C_0 и их геодезическими хордами суть малые третьего порядка и, с принятой степенью точности, мы можем считать сферический избыток ε многоугольника $A_0B_0C_0D_0$, образованного дугами больших кругов, равным поверхности S сферической трапеции $A_0B_0C_0D_0$, деленной на R , т. е. сферическому избытку этой трапеции, или — по Гауссу — ее полной кривизне:

$$\varepsilon = \frac{S}{R} \rho' \approx \frac{2\rho'}{\rho^{02}} (\phi_2 - \phi_1) \bar{\lambda} \cos \phi_0 = 25', 14 \cos \phi \quad (3)$$

Будем называть увеличением отношение частного масштаба к общему масштабу.

Пусть a и b суть увеличения по главным направлениям в какой-нибудь точке проекции. Как известно из общей теории искажений, угол u_0 между главным направлением, вдоль которого увеличение равно a , и каким-нибудь направлением изобразится на плоскости углом u , связанным с u_0 уравнением:

$$\sin(u_0 - u) = \frac{a - b}{a + b} \sin(u_0 + u) \quad (4)$$

По условию относительные искажения длин $a - 1$ и $b - 1$, а следовательно и $a - b$ — второго порядка. Тогда с точностью до малых величин третьего порядка включительно:

$$u_0 - u = \frac{1}{2} (a - b) \sin 2u_0 \quad (5)$$

Подобным же образом для какого-нибудь другого направления v_0 из той же точки напишем:

$$v_0 - v = \frac{1}{2} (a - b) \sin 2v_0 \quad (6)$$

Отсюда искажение угла $u_0 - v_0$ будет

$$(u_0 - v_0) - (u - v) = \frac{1}{2} (a - b) (\sin 2u_0 - \sin 2v_0) \quad (7)$$

Если же и сам угол $u_0 - v_0$ — малая величина, то его искажение

$$(u_0 - v_0) - (u - v) = (a - b) (u_0 - v_0) \cos 2u_0 \quad (8)$$

т. е. малой не ниже третьего порядка.

На этом основании мы пренебрегаем искажением углов γ на проекции и обозначаем величины их изображений на чертеже 2 теми же буквами.

Подобным же образом легко показать, что разности стрелок провеса изображений AD и BC дуг большого круга и изображений параллелей AD и BC на черт. 2 будут с принятой степенью точности равны стрелкам провеса h_1 и h_2 параллелей черт. 1.

Подсчитаем теперь и сравним между собою суммы внутренних углов четырехугольника $A_0B_0C_0D_0$, образованного дугами больших кругов на шаре и прямолинейного четырехугольника $ABCD$ на плоскости. По чертежу 1 и по известной теореме сферической геометрии

$$360^\circ - 2\gamma_1 + 2\gamma_2 = 360^\circ + \epsilon \quad (9)$$

а по чертежу 2:

$$360^\circ - \Sigma\psi - 2\gamma_1 + 2\gamma_2 - \Sigma\delta = 360^\circ \quad (10)$$

Сравнивая эти два равенства, находим, что

$$\Sigma\psi + \Sigma\delta = \epsilon \quad (I)$$

Мы получили равенство (I) для сферической трапеции, так как именно эта фигура нас интересует в дальнейшем. Но, очевидно, совершенно по-

добным же образом можно доказать, что вообще алгебраическая сумма искажений внутренних углов многоугольника, образованного дугами больших кругов на шаре и поправок за кривизну для его сторон—постоянна и равна его сферическому избытку, или полной кривизне независимо от рода проекции, при сделанных выше ограничениях.

В силу равенства (5) при $a - b$ второго порядка $\Sigma\phi$ будет также малой второго порядка. По (3) ε есть малая величина второго порядка. Следовательно, по (I) и каждая из поправок за кривизну δ будет малой второго порядка, по крайней мере, если все они одного знака.

Можно доказать, что в проекциях с относительными искажениями длин второго порядка поправки за кривизну всегда будут малыми второго же порядка, независимо от последнего ограничения. Но здесь мы не будем на этом останавливаться.

Обратимся теперь к вопросу о сложении четырех листов карты, имеющих общий угол. На черт. 3 сплошными линиями показаны рамки этих листов, сходящиеся в общей точке O , а пунктиром—хорды этих рамок. Углы x , образованные соответственными хордами, назовем угловыми разрывами.

Очевидно:

$$\Sigma x + C_1 + D_2 + A_3 + B_4 = 360^\circ \quad (11)$$

где C_1, \dots, B_4 суть углы между прямолинейными хордами рамок отдельных листов.

Средняя широта двух южных тождественных между собою листов сетки (I и IV) пусть будет ϕ_0 , а двух северных—(II и III) ϕ_0' .

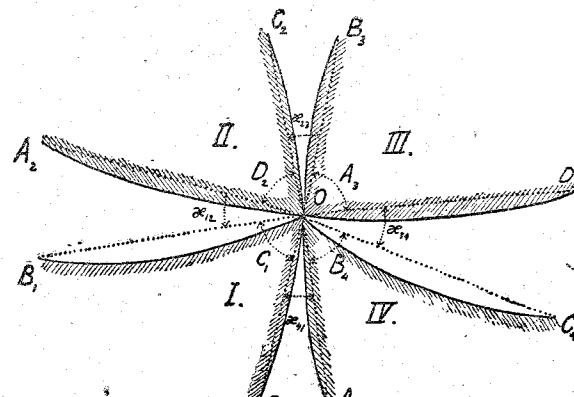
Отмечая величины γ , ψ и δ , относящиеся к верхним листам, штрихами по чертежам 3 и 2 получим:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 90^\circ - \psi_3 + \gamma_2 - \delta_{32} - \delta_{34} \\ D_2 &= 90^\circ - \psi_4' - \gamma_1' - \delta_{43}' - \delta_{41}' \\ A_3 &= 90^\circ - \psi_1' - \gamma_1 - \delta_{14}' - \delta_{12} \\ B_4 &= 90^\circ - \psi_2 + \gamma_2 - \delta_{21} - \delta_{23} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Но γ_1' и γ_2 суть абсолютные величины сближений меридианов в точках одной и той же параллели ϕ_2 , одинаково—на $\pm \lambda$ —удаленных по долготе от средних меридианов соответствующих трапеций.

Следовательно,

$$\gamma_1' = \gamma_2 \quad (13)$$



Черт. 3.

Искажение ψ угла и поправки δ_{12} и δ_{14} за кривизну, положим, в левом нижнем углу листа суть функции ϕ_0 . При всевозможных значениях ϕ_0 они остаются малыми второго порядка, значит, и их производные по ϕ_0 суть малые второго же порядка, а их приращения при изменении ϕ_0 на малую величину $\phi_0' - \phi_0$ первого порядка будут малыми третьего порядка. Поэтому с принятой нами степенью точности можем считать, что

$$\psi'_i = \psi_i, \quad \delta'_{ij} = \delta_{ij}, \quad (i=1, 2, 3, 4; j=1, 2, 3, 4) \quad (14)$$

Подставив (13) и (14) в (12) и (12) в (11), получим

$$\Sigma x - \Sigma \psi - \Sigma \delta = 0 \quad (15)$$

А отсюда и из (I) вытекает весьма любопытный результат:

$$\Sigma x = \varepsilon \quad (II)$$

т. е. сумма угловых разрывов, возникающих при сложении четырех, имеющих общую вершину листов карты, построенной в многогранной проекции, равна сферическому избытку одного листа, независимо от рода проекции, конечно, при сделанных выше общих ограничениях.

Наибольшее линейное расхождение горизонтальных рамок соседних листов, например рамок OB_1 и OA_2 на черт. 3, измеренное перпендикулярно к этим рамкам, очевидно, равно:

$$\begin{aligned} B_1 A_2 \sin \angle A_2 B_1 O &= \frac{OB_1 x_{12}}{\rho'} \approx 2 R \bar{\lambda} \frac{\cos \phi_2 x_{12}}{\rho' \rho} = \\ &= \frac{666 \text{ мм}}{3438} x_{12} \cos \phi_2 = 0,194 \text{ мм } x_{12} \cos \phi_2 \end{aligned} \quad (III)$$

Подобным же образом горизонтальное линейное расхождение вертикальных рамок OC_3 и OB_3 около их концов C_2 и B_3 будет:

$$\begin{aligned} C_2 B_3 \sin \angle B_3 C_2 O &= \frac{OC_2 x_{23}}{\rho'} \approx \frac{2 R (\phi_2 - \phi_1) x_{23}}{\rho' \rho} = \\ &= \frac{444 \text{ мм}}{3438} x_{23} = 0,129 \text{ мм } x_{23} \end{aligned} \quad (IV)$$

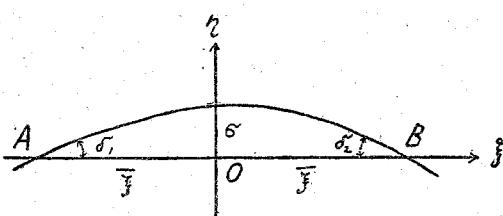
При сложении только двух соседних листов карты возможность практически соединить их в одно целое зависит от разности стрелок прогиба σ (черт. 2)

боков, по которым они складываются. Выведем формулу, связывающую стрелку σ с поправками за кривизну δ и с размерами листа.

Для этого найдем сперва общее приближенное выражение длины стрелки σ (черт. 4) бесконечно малой дуги AB любой кривой через длину 2ξ ее хорды и через углы δ_1 и δ_2 , образуемые ею с этой хордой.

Взяв середину O хорды за начало прямоугольных декартовых координат ξ , т. и направив ось абсцисс по хорде, можно написать уравнение кривой в виде

$$\eta = \sigma + a \xi + b \xi^2 + c \xi^3 + IV \quad (16)$$



Черт. 4.

где IV обозначает величину не ниже четвертого порядка. Эта кривая проходит через $A(-\bar{\xi}, 0)$ и $B(\bar{\xi}, 0)$, следовательно,

$$\left. \begin{array}{l} 0 = \sigma - a\bar{\xi} + b\bar{\xi}^2 - c\bar{\xi}^3 + IV \\ 0 = \sigma + a\bar{\xi} + b\bar{\xi}^2 + c\bar{\xi}^3 + IV \end{array} \right\} \quad (17)$$

откуда

$$\sigma = -b\bar{\xi}^2 + IV \quad (18)$$

Далее,

$$\left. \begin{array}{l} tg \delta_1 = \delta_1 + III = \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)_{\xi=-\bar{\xi}} = a - 2b\bar{\xi} + 3c\bar{\xi}^2 + III \\ tg \delta_2 = \delta_2 + III = -\left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)_{\xi=\bar{\xi}} = -a - 2b\bar{\xi} - 3c\bar{\xi}^2 + III \end{array} \right\} \quad (19)$$

Отсюда

$$\delta_1 + \delta_2 = -4b\bar{\xi}^2 + III \quad (20)$$

Определив $b\bar{\xi}^2$ по (20) и подставив в (18), получим исковую формулу:

$$\sigma = \frac{\delta_1 + \delta_2}{4}\bar{\xi} + III \quad (V)$$

Приложим эту формулу к вычислению стрелок прогиба σ_{23} верхней параллели нижнего листа и σ'_{14} — нижней параллели верхнего листа. По черт. 2 и 5 и формуле (V):

$$\left. \begin{array}{l} \sigma'_{14} = \frac{2\gamma_1' + \delta'_{14} + \delta'_{41}}{8\rho'} A_2 D_2 + IV \\ \sigma_{23} = \frac{2\gamma_2 - \delta_{23} - \delta_{32}}{8\rho'} B_1 C_1 + IV \end{array} \right\} \quad (21)$$

На сфере дуга $A^0_2 D^0_2$ есть в то же время дуга $B^0_1 C^0_1$. На плоскости их изображения, т. е. $-A_2 D_2$ и $-B_1 C_1$ разнятся от натуры, а следовательно между собою на малые порядка $\frac{s^4}{R^3}$. Хорды отличаются от бесконечно малых дуг на величины порядка $\frac{s^3}{R^2}$. Следовательно, в уравнениях (21) можем положить

$$A_2 D_2 = B_1 C_1 = \frac{2R\bar{\lambda} \cos \varphi_2}{\rho^\circ} = 666 \text{ mm} \cos \varphi_2 \quad (22)$$

Как уже было выяснено выше, разности $\gamma_1' - \gamma_2$, $\delta'_{14} - \delta_{14}$ и $\delta'_{41} - \delta_{41}$ — выше второго порядка. Поэтому разность уравнений (21) с принятой степенью точности дает

$$\begin{aligned} \sigma'_{14} - \sigma_{23} &= \frac{\delta_{14} + \delta_{41} + \delta_{23} + \delta_{32}}{8\rho'} \cdot \frac{2R\bar{\lambda} \cos \varphi_2}{\rho^\circ} = \\ &= 0,0242 \text{ mm} (\delta_{14} + \delta_{41} + \delta_{23} + \delta_{32}) \cos \varphi_2 \end{aligned} \quad (VI)$$

если выражать δ в минутах дуги.

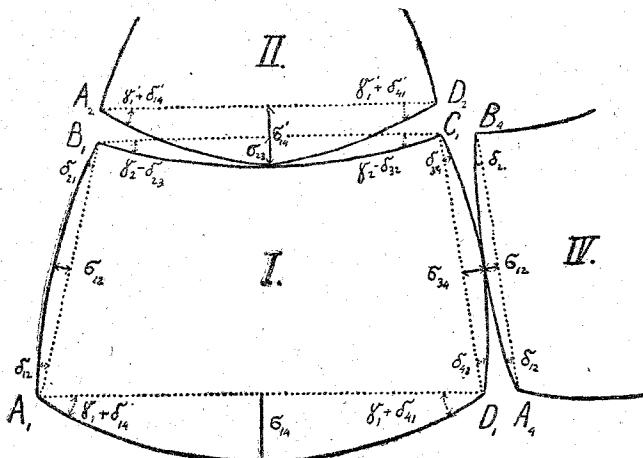
Как видно из черт. 5, таково же будет и вертикальное расхождение рамок соединяемых листов около их концов, если складывать рамки так, чтобы их средние точки совпадали и их хорды были бы параллельны между собою.

Подобным же образом для суммы стрелок правой рамки левого листа и левой рамки правого листа, равной также расхождению вертикальных рамок, измеренному в горизонтальном направлении около их концов (черт. 5), найдем

$$\sigma_{34} + \sigma_{12} = \frac{\delta_{34} + \delta_{43} + \delta_{12} + \delta_{21}}{8 \rho'} \cdot \frac{R (\phi_2 - \phi_1)}{\rho^\circ} = \\ = 0,0161 \text{ mm } (\delta_{34} + \delta_{43} + \delta_{12} + \delta_{21}) \quad (VII)$$

В заключении этого параграфа укажем связь величин σ и δ , т. е. стрелок прогиба меридианов и параллелей карты и поправок за кривизну для геодезических линий, соединяющих смежные углы трапеций — с понятием о геодезической кривизне изображаемых линий и ее искажением.

Геодезической кривизной линии на кривой поверхности около данной точки называется кривизна проекции этой линии на плоскость, касательную к поверхности в этой точке. Из теории поверхностей известно, что геодезическая кривизна не изменяется при изгибе поверхности. Поэтому, если



Черт. 5.

мы опишем вокруг сферы конус, касающийся ее по параллели $A_0M_0D_0$ (черт. 1), а затем развернем этот конус на плоскость, то окружность радиуса $R \operatorname{ctg} \phi_1$, в которую обратится теперь параллель, будет иметь кривизну $\frac{1}{R \operatorname{ctg} \phi_1}$, равную геодезической кривизне данной параллели.

Итак, геодезическая кривизна параллели ϕ_1 есть

$$K_0 = \frac{1}{R \operatorname{ctg} \phi_1} = \frac{\bar{\lambda} \sin \phi_1}{R \bar{\lambda} \cos \phi_1} = \frac{2 \gamma_1}{-A_0 M_0 D_0} + \Pi \quad (23)$$

так как сближение меридиана $\gamma_1 = \bar{\lambda} \sin \phi_1 + \Pi$ и $-A_0 M_0 D_0 = R \bar{\lambda} \cos \phi_1$. Π в (23) обозначает, как и прежде, члены второго порядка, здесь пренебрегаемые. Сама кривизна — величина конечная.

На плоскости (черт. 2) касательные в A и D к изображению AMD параллели образуют между собою угол $2 \gamma_1 + \delta_{14} + \delta_{41}$. Следовательно, средняя кривизна изображения AMD параллели $A_0 M_0 D_0$ есть

$$K = \frac{2 \gamma_1 + \delta_{14} + \delta_{41}}{-AMD} \quad (24)$$

Угол γ_1 и $\sim AMD$ — первого порядка. Следовательно кривизна K тоже величина конечная.

Подобным же образом найдем, что кривизна изображения $AM'D$ дуги большого круга $A_0M_0D_0$ есть

$$K' = \frac{\delta_{14} + \delta_{41}}{\sim AM'D} \quad (25)$$

Здесь δ_{14} и δ_{41} — малые второго порядка, следовательно, K' — малая первого порядка.

Малые дуги AMD и $AM'D$ первого порядка между двумя общими точками разнятся, как известно, на малую величину не ниже третьего порядка. Разность $\sim AMD - \sim A_0M_0D_0$ также третьего порядка в силу того, что относительные искажения длин по условию — второго порядка. Поэтому, ограничиваясь точностью до малых первого порядка включительно для кривизн K_0 , K и K' , можем считать знаменатели выражений (23), (24) и (25) равными между собою. Тогда

$$K = K_0 + K' + \Pi \quad (\text{VIII})$$

т. е., при условиях, указанных в начале параграфа, кривизна изображения параллели, да и вообще всякой сферической кривой конечной геодезической кривизны равна сумме геодезической кривизны этой кривой и кривизны изображения геодезической линии, бесконечно близкой к данной кривой по положению и направлению.

Эта последняя величина является таким образом искажением геодезической кривизны линий данного направления и положения в данной проекции.

Отсюда, между прочим, следует, что если кривизна K изображения параллели равна $\frac{1}{R \operatorname{ctg} \phi}$, т. е. геодезической кривизне K_0 самой параллели, то искажение кривизны, т. е. кривизна изображения геодезической линии, близкой к данной параллели $K' = 0 + \Pi$ и $\delta_{14} + \delta_{41} = 0 + \Pi$, т. е. поправки за кривизну геодезической хорды параллели = 0 с принятой нами степенью точности, по крайней мере в том случае, если знаки δ_{14} и δ_{41} , одинаковы.

§ 3. Применение формул § 2-го к проекциям, симметричным относительно меридиана и первого вертикала.

Назовем симметричными относительно меридиана такие проекции, в которых точки шара, симметричные относительного некоторого определенного меридиана например, среднего меридиана сферической трапеции, изображаются точками, симметричными относительно некоторой прямой на плоскости. Эта последняя прямая, очевидно, необходимо будет изображением среднего меридиана.

Подобным же образом мы будем называть симметричными относительно первого вертикала такие проекции, в которых точки шара, симметричные относительно первого вертикала некоторой точки, например, средней точки сферической трапеции, изображаются на плоскости точками, симметричными

относительно некоторой прямой, которая необходимо будет изображать этот первый вертикаль.

Подчеркнем то обстоятельство, что здесь речь идет не о симметрии изображаемой фигуры, например, сети меридианов и параллелей относительно меридиана и первого вертикала некоторой точки, а о симметрии свойств проекции, как способа изображения, независимо от того, к построению изображения какой сети координатных линий или иной сферической фигуры эта проекция применяется. Например, все азимутальные (zenithalnye) проекции, очевидно, симметричны, относительно любого большого круга, проходящего через их центральную точку или полюс. В то же время изображение сферической трапеции в азимутальной проекции с полюсом в средней точке трапеции не будет симметрично относительно первого вертикала, так как сама изображаемая фигура такой симметрией не обладает.

Все виды искажений суть функции положения точек и иногда — направлений из этих точек. И те и другие мы можем определить по отношению к осям симметрии, а потому ясно, что в симметричных проекциях все виды искажений в симметричных точках будут попарно равны между собою по абсолютной величине.

Так как сферическая трапеция симметрична относительно ее среднего меридиана, то в проекциях, симметричных относительно того же меридиана, будем иметь (срв. черт. 2, 3 и 5)

$$\begin{aligned} \psi_1 = \psi_4, \quad \psi_2 = \psi_3, \quad \delta_{14} = \delta_{41}, \quad \delta_{23} = \delta_{32}, \quad \delta_{12} = \delta_{43}, \quad \delta_{21} = \delta_{34}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{34}, \quad A_1 B_1 = \\ = D_1 C_1 = A_4 B_4 \text{ и } A_2 B_2 = D_2 C_2 = A_3 B_3 \end{aligned} \quad (26)$$

Пусть теперь проекция симметрична относительно первого вертикала средней точки трапеции. Вершины B_0 и C_0 трапеции (черт. 1) не симметричны вершинам A_0 и D_0 относительно первого вертикала. Но легко видеть, что точки — назовем их B'_0 и C'_0 — симметричные с A_0 и D_0 будут отстоять соответственно от B_0 и C_0 на малые величины второго порядка, т. е. порядка $\frac{s^2}{R}$.

Основываясь на этом, можно сказать, что и в этом случае, аналогично предыдущему, но лишь приближенно, с принятой точностью до малых второго порядка включительно, будем иметь

$$\begin{aligned} \psi_2 = \psi_1, \quad \psi_3 = \psi_4, \quad \delta_{21} = \delta_{12}, \quad \delta_{34} = \delta_{43}, \quad \delta_{23} = \delta_{14}, \quad \delta_{32} = \delta_{41}, \quad h_2 - \sigma_{23} = \\ = \sigma_{14} - h_1, \quad \text{и } B_1 C_1 = A_2 D_2 = B'_4 C'_4 = A_3 B_3 \end{aligned} \quad (27)$$

Действительно, из формулы (5) видно, что искажение угла между меридианом $B_0 A_0$ и большим кругом $B_0 C_0$ будет отличаться от искажения ψ_2 угла между тем же меридианом и параллелью $B_0 C_0$ на малую не выше третьего порядка, так как направление большого круга $B_0 C_0$ отличается от направления параллели $B_0 C_0$ на малую величину γ_2 . Следовательно, мы можем рассматривать ψ_2 и аналогично ψ_3 , как искажение углов, образуемых большим кругом $B_0 C_0$ с большими кругами $B_0 A_0$ и $C_0 D_0$. Эти углы суть функции координат точек B_0 и C_0 . С изменением координат этих точек на величины первого порядка они изменяются на величины не выше второго порядка, следовательно с заменой точек B_0 и C_0 точками B'_0 и C'_0 , симметричными с A_0 и D_0 относительно первого вертикала, искажения ψ_2 и ψ_3 изме-

нятся на пренебрегаемые нами величины третьего порядка, так как расстояния $B_0B'_0$ и $C_0C'_0$, как уже замечено, суть малые только второго порядка. Но после такой замены будет, очевидно, $\psi_2 = \psi_1$ по симметрии фигуры $A_0B_0'C_0'D_0$ относительно первого вертикала.

Подобным же образом докажем и приближенные равенства (27) для поправок за кривизну δ .

Относительное искажение длины параллели A_0D_0 (черт. 1) есть малая второго порядка при всевозможных значениях ϕ_0 . С изменением ϕ_0 на малую величину $\phi'_0 - \phi_0$ это искажение изменится на величину выше второго порядка. Поэтому относительные искажения длин дуг параллелей A_1D_1 и A_2D_2 (черт. 5) с принятой степенью точности одинаковы.

Далее, точки параллели B_0C_0 удалены от точек кривой, симметричной с A_0D_0 относительно первого вертикала средней точки трапеции, на малые второго порядка. Поэтому и относительные искажения длин параллелей A_1D_1 и B_1C_1 равны между собою. Значит, и относительные искажения дуг параллелей B_1C_1 и A_2D_2 разнятся на малую величину выше второго порядка. А так как в натуре это одна и та же дуга параллели, то абсолютная разность $A_2D_2 - B_1C_1$ будет выше третьего порядка. Наконец, так как стрелки прогиба этих дуг в силу (VI) различаются на величину порядка $\frac{s^3}{R^2}$, то легко показать, что и хорды этих дуг будут равны между собою с принятой степенью точности, и на черт. 3 и в уравнении (III) можно будет считать $\angle A_2B_1O = 90^\circ + I$.

Если проекция симметрична относительно меридiana и первого вертикала средней точки трапеции, то по (26) и 27) искажения всех четырех углов трапеции одинаковы:

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_4 \equiv \psi^1 \quad (28)$$

все поправки за кривизну для вертикальных рамок одинаковы:

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{34} = \delta_{43} \equiv \delta_e \quad (29)$$

поправки за кривизну для дуг больших кругов, близких к горизонтальным рамкам, также равны между собою:

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \delta_{41} = \delta_{14} \equiv \delta_i \quad (30)$$

наконец, на черт. 3 и 5 хорды

$$A_1B_1 = D_1C_1 = A_4B_4 \quad \text{и} \quad A_2D_2 = B_1C_1 = B_4C_4 = A_3D_3 \quad (31)$$

с принятой степенью точности, определенной в начале § 2.

Принимая это во внимание, перепишем уравнения (I) — (VII) для случая проекции, симметричной относительно меридiana и первого вертикала. Уравнение (I) примет вид

$$\psi + \delta_e + \delta_i = \frac{\epsilon}{4} \quad (I')$$

1) \equiv — знак тождества — показывает, что в данном случае ψ только новое, более краткое, обозначение равных между собою величин ψ_1, ψ_2, ψ_3 и ψ_4 .

При сложении четырех листов карты общим углом линейные расхождения прочих углов будут (черт. 3):

$$B_1 A_2 = \frac{OB_1 x_{12}}{\rho'} = 0,194 \text{ мм } x_{12} \cos \varphi_2 \quad (\text{III}')$$

$$C_2 B_3 = \frac{OC_2 x_{23}}{\rho'} = 0,129 \text{ мм } x_{23} \quad (\text{IV}')$$

и аналогично для остальных углов, причем по (II) и (3) с несущественной заменой φ_0 на φ_2 :

$$x_{12} + x_{23} + x_{34} + x_{41} = \varepsilon = 25',14 \cos \varphi_2 \quad (\text{II}')$$

При сложении двух соседних листов I и II (черт. 5) одного столбца линейные расхождения углов будут

$$B_1 A_2 = C_1 D_2 = \sigma_{14}' - \sigma_{23} = 0,097 \text{ мм } \delta_s \cos \varphi_2, \quad (\text{VI}')$$

и при сложении двух листов I и IV, принадлежащих к одному поясу, для линейных расхождений углов получим:

$$C_1 B_4 = D_1 A_4 = 2 \sigma_{12} = 0,064 \text{ мм } \delta_s \quad (\text{VII}')$$

Чтобы пояснить практическое значение последних формул, заметим, что почти все известные проекции, надлежащим образом примененные, как многоугольные, для изображения сферических трапеций, будут симметричны относительно меридиана и первого вертикала средней точки трапеции, по крайней мере приближенно — с принятою нами степенью точности.

Действительно, для нижеследующих пяти видов проекций шара это строго справедливо и очевидно из самого их определения:

1) азимутальные косые (горизонтные) проекции с центральной точкой или полюсом, в средине сферической трапеции;

2) цилиндрические поперечные проекции, полюс которых совпадает с полюсом среднего меридиана трапеции, т. е. так называемые „проекции на цилиндре, касающемся шара по меридиану“ средней точки трапеции или секущем шар по малым кругам, симметричным относительно этого меридиана;

3) цилиндрические косые проекции с полюсом, совпадающим с полюсом первого вертикала средней точки трапеции;

4) проекция, примененная Шубертом [6] для карты северо-западной части Европейской России; в этой проекции плоские прямоугольные координаты равны отрезкам меридиана и первого вертикала начальной точки, заключенным между этой точкой и точками пересечения этих меридиана и первого вертикала с геодезическими перпендикулярами, опущенными на них из данной точки;

5) проекция, в которой плоские прямоугольные координаты равны геодезическим расстояниям изображаемой точки от меридиана и первого вертикала начальной точки. Эта проекция на практике, кажется, не применялась, но иногда ¹⁾ таким образом ошибочно определяют проекцию Кассини, в которой им построена первая топографическая карта Франции.

1) Например, в известном французском курсе астрономии и элементов высшей геодезии Ф. [7], даже в новейшем издании, редактированном членом Института Буржуа.

Приближенно, с точностью до малых порядка $\frac{s^3}{R^2}$ включительно, являются симметричными относительно меридиана и первого вертикала некоторой начальной точки следующие проекции:

6) конические: равноугольная, равновеликая и равнопромежуточная с наименьшим масштабом вдоль параллели, проходящей через начальную точку;

7) проекция Бонна, средний меридиан и основная, сохраняющая геодезическую кривизну, параллель которой проходит через среднюю точку изображаемой области;

8) простая поликоническая проекция;

9) повидимому, и международная проекция миллионной карты, так называемая измененная поликоническая, приблизительно симметрична относительно меридиана и первого вертикала средней точки сферической трапеции, соответствующей листу карты. — Как увидим ниже, искажения ϕ углов рамок выходят на ней практически равными для всех четырех углов, и все поправки за кривизну δ для линий, близких к горизонтальным рамкам равны нулю, а следовательно и между собою.

Приближенная симметрия проекций 6, 7 и 8 может быть обоснована тем, что плоские прямоугольные координаты изображаемых точек в этих проекциях с точностью до членов порядка $\frac{s^3}{R}$ включительно соответственно совпадают с таковыми же координатами для проекций 3, 5¹⁾ и одной из проекций 2, а именно равнопромежуточной, или проекцией Кассини-Зольднера.

Приведем здесь, как иллюстрацию метода, доказательство только для последнего случая.

В проекции Кассини-Зольднера плоские прямоугольные координаты x, y соответственно равны прямоугольным сферическим ξ, η :

$$x = \xi, \quad y = \eta \quad (32)$$

Эти же последние, как видно из сферического прямоугольного треугольника $P_0B_0M_0$ на черт. 6, связаны с географическими координатами строгими формулами

$$\operatorname{tg}(\phi_0 + \xi) = \operatorname{tg} \phi \sec \lambda \quad (\text{VIII})$$

$$\sin \eta = \cos \phi \sin \lambda \quad (\text{IX})$$

если считать радиус шара равным единице.

Разложим эти выражения в ряды по степеням малых величин ξ, η и λ , отбрасывая члены четвертого и высших порядков:

$$\operatorname{tg}(\phi_0 + \xi) = \operatorname{tg} \phi \left(1 + \frac{\lambda^2}{2}\right) \quad (33)$$

$$\operatorname{tg}(\phi_0 + \xi) - \operatorname{tg} \phi = (\phi_0 + \xi - \phi) \sec^2 \phi = \frac{\lambda^2}{2} \operatorname{tg} \phi \quad (34)$$

и окончательно

$$\xi = \phi - \phi_0 + \frac{\lambda^2}{2} \sin \phi \cos \phi \quad (\text{VIII}')$$

¹⁾ Приближенное тождество проекции 5 с проекцией Бонна отметил Куртье [8], стр. 69, 70, 74 и 75.

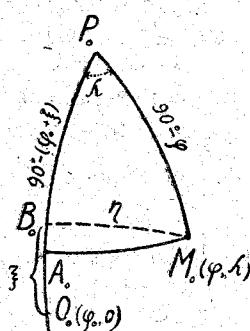
Далее по (IX)

$$\eta - \frac{\eta^3}{6} = \left(\lambda - \frac{\lambda^3}{6} \right) \cos \phi \quad (35)$$

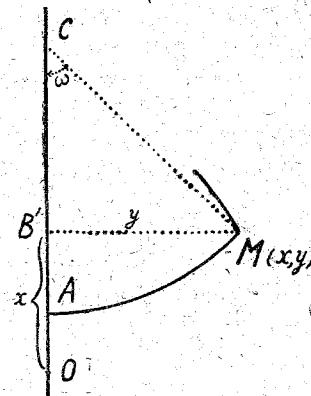
$$\eta = \lambda \cos \phi - \frac{\lambda^3}{6} \cos \phi + \frac{\eta^3}{6} \quad (36)$$

Подставив в последний член $\eta = \lambda \cos \phi$ и заметив, что $\cos \phi - \cos^3 \phi = \cos \phi \sin^2 \phi$, получим окончательно

$$\eta = \lambda \cos \phi - \frac{\lambda^3}{6} \cos \phi \sin^2 \phi \quad (\text{IX}')$$



Черт. 6.



Черт. 7.

В простой поликонической проекции (черт. 7) по ее определению

$$OA = O_0 A_0 = \phi - \phi_0 \quad (37)$$

параллель $A_0 M_0$ изображается окружностью с центром C на среднем меридиане OC карты и с радиусом

$$CM = CA = \operatorname{ctg} \phi \quad (38)$$

и положение точки M на этой параллели определяется тем, что

$$AM = A_0 M_0 = \lambda \cos \phi$$

Из равенств (37) и (38) и черт. 7 $\angle OCM = \omega = \angle AM : CM = \lambda \sin \phi$, $OB' = x = OA + AC - CB' = \phi - \phi_0 + \operatorname{ctg} \phi - \operatorname{ctg} \phi \cos \omega$, $B'M = y = CM \sin \omega = \operatorname{ctg} \phi \sin \omega$.

Итак, строго:

$$x = \phi - \phi_0 + 2 \operatorname{ctg} \phi \sin^2 \frac{\omega}{2} \quad (\text{IX})$$

$$y = \operatorname{ctg} \phi \sin \omega \quad (\text{X})$$

где

$$\omega = \lambda \sin \phi \quad (40)$$

Разлагаем в ряды:

$$\sin^2 \frac{\omega}{2} = \left[\frac{\omega}{2} - \frac{1}{6} \left(\frac{\omega}{2} \right)^3 \right]^2 = \frac{\omega^2}{4} + IV \quad (41)$$

$$x = \varphi - \varphi_0 + 2 \operatorname{ctg} \varphi \frac{\omega^2}{4} = \varphi - \varphi_0 + 2 \operatorname{ctg} \varphi \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{4} = \\ = \varphi - \varphi_0 + \frac{\lambda^2}{2} \sin \varphi \cos \varphi \quad (42)$$

$$y = \operatorname{ctg} \varphi \left(\omega - \frac{\omega^3}{6} \right) = \omega \operatorname{ctg} \varphi - \frac{\omega^3}{6} \operatorname{ctg} \varphi = \lambda \cos \varphi - \frac{\lambda^3}{6} \cos \varphi \sin^2 \varphi \quad (43)$$

Последние формулы, как видим, действительно совпадают с уравнениями (VIII') и (IX') проекции Кассини-Зольднера.

§ 4. „Международная“ проекция.

Проекция для международной карты мира в одну миллионную определена следующим § 5-м резолюций Международного комитета по разработке правил составления этой карты, заседавшего в Лондоне в ноябре 1909 г.¹⁾.

„ а) Проекция карты должна удовлетворять следующим условиям:

1) Меридианы изображаются прямыми линиями.

2) Параллели представляют из себя части окружностей.

б) Ввиду того, что при данном масштабе различные виды проекций, которые могли бы быть приняты, дают изображения, мало отличающиеся одно от другого, и что сокращение и вытягивание бумаги, на которой будет печататься карта, изменяют длину всех расстояний, измеренных на карте и лишают проекцию возможности вполне удовлетворять условиям эквивалентности и²⁾ ортоморфизма, было бы бесполезно придавать слишком большое значение выбору проекции, наиболее совершенной в отношении сходства контуров и равенства площадей. Поэтому следует взять такую проекцию³⁾, которая может быть легко построена и которая позволяет соединение каждого листа вдоль каждой из его четырех сторон с прилегающим листом. Измененная поликоническая проекция с меридианами в виде прямых линий удовлетворяет обоим означенным условиям.

с) Проекция должна быть построена следующим образом: каждый лист вычерчивается совершенно независимо, опираясь на центральный меридиан, представляющий прямую линию, разделенную на градусы. Через полученные таким образом пункты проводятся круги, изображающие параллели; центры этих кругов расположены на продолжении центрального меридiana. Радиус каждого круга равен $v \operatorname{ctg} \lambda$, где v есть отрезок перпендикуляра, опущенного от поверхности земли на данной параллели на земную ось⁴⁾; а λ — широта изображаемой параллели.

На параллелях, ограничивающих листы, т. е. на окружностях, образующих северную и южную стороны листа, наносятся градусы долготы, при чем

¹⁾ Цитирую по статье Е. С. Маркова [9], бывшего представителем России на этом заседании.

²⁾ Ошибка перевода: должно быть „или“.

³⁾ Разрядка здесь и ниже — моя. В. К.

⁴⁾ Ошибка перевода: должно быть не „опущенного... на ось“, а „восстановленного... до пересечения с осью“. Ср. [15].

длина их в точности соответствует масштабу карты. Полученные таким образом на ограничивающих листы карты параллелях точки соединяются прямыми линиями; эти прямые линии изображают меридианы.

Меридианами, имеющими точную, соответствующую масштабу длину на каждом листе, являются два меридиана, расположенные на расстоянии двух градусов по долготе к востоку и западу от центрального меридиана. Действительная длина центрального меридиана равна точной его длине, уменьшенной на небольшую поправку, указанную в специальной таблице¹⁾.

Это определение, несмотря на свою длинноту, страдает неполнотой и уже неоднократно подвергалось критике разными авторами¹⁾. Действительно, при данных размерах земного сфера (Комитетом был принят сфераид Кларка 1880 года) приведенное определение проекции позволяет построить все меридианы и крайние параллели листа, что же касается промежуточных параллелей, то про них сказано только, что они окружности, и даны радиусы этих окружностей. Вопрос же о том, через какие точки, например, среднего или промежуточных — стандартных меридианов проводить эти параллели, остается открытым и разными авторами толкуется разно.

Казалось бы наиболее естественным, что меридианы, сохраняющие общую длину, должны сохранять и длины отдельных своих частей, т. е. что масштаб вдоль них должен быть равен общему масштабу карты. Тогда проекция вполне определится.

Можно делить на равные части средний меридиан, как полагают Дитц и Адамс. Это будет, строго говоря, уже другая проекция.

Лаллеман²⁾ проводит круговые параллели через равноотстоящие точки деления среднего и крайних меридианов. Но тогда радиусы промежуточных параллелей уже не будут равны $\sqrt{\text{ctg } \lambda}$, что противоречит постановлению Комитета.

Хинкс делит на равные части все меридианы и геометрические места соответственных точек принимает за параллели карты. Но тогда они не будут и окружностями.

Русские авторы, писавшие об этой проекции, также вносили свои толкования³⁾. Сетки для листов миллионной карты, издаваемых Военно-топографическим управлением, строятся по „Таблицам графических координат в средних величинах для нанесения сетки 1:1 000 000 карты, составленной в многогранной проекции“ [13], сопоставление которых с вычислениями, сделанными мною также для сфера Бесселя, который положен в их основу, показывает, что ординаты угловых точек (координаты, перпендикулярные среднему меридиану) в этих таблицах точно соответствуют таковым же международной проекции, в абсциссах (исчисляемых от касательных, соответственно, к верхней и нижней параллели карты) — получается незначительная разница в несколько тысячных миллиметра, в длинах же среднего меридиана, т. е. в высотах листов карты, расхождение достигает 0,18 мм (пояс A).

Эти таблицы вычислены известным геодезистом Н. О. Щетиным. Из „Таблиц координат для наноски рамок 1:1 000 000 карты, составленной по

¹⁾ Неполноту его отмечали Дитц и Адамс [10], Ломницкий [3] и даже Хинкс [11] стр. 57, вообще, горячий защитник этой проекции.

²⁾ [1], стр. 4.

³⁾ См., напр., статью В. М. Никифорова в „Геодезисте“ [12].

многогранной проекции А. Пенка на секущих конусах через 4° по широте, начиная от $\phi_0=0$, до $\phi_{18}=72^\circ$, литографированных по рукописи Н. О. Щеткина, и из отношения последнего начальнику Картотдела ВТУ от 11. IX. 1922¹⁾, при котором эти таблицы были им представлены, видно, что исходными данными для их вычисления были не постановления Комитета международной карты, а 1) статья А. Пенка „О составлении и издании карты всей земной поверхности в масштабе 1:1 000 000“, переведенная В. В. Витковским (напечатанная в XXIX томе „Известий Русского Географического О-ва“ за 1893 г., стр. 108—141 и 2) „Два листа таблиц с схематическим изображением географической сетки и координат x , y “, повидимому, международных. Эти данные Н. О. Щеткин согласовал по собственным соображениям, изложенным в названной выше препроводительной записке, так что проекция строго говоря не есть международная. Например, поправка к истинной длине среднего меридиана взята им не с тем расчетом, чтобы меридианы с долготами $\pm 2^\circ$ сохранили свою длину, а принятая разной разности между дугой меридиана и хордой этой дуги, каковая разность повсюду на карте приблизительно равна 0,090 мм.

Все эти варианты почти не различимы между собою на практике, но все же для проекции, положенной в основу такого большого международного предприятия, хотелось бы иметь возможность: 1) определить ее словами достаточно коротко и ясно и 2) вычислять координаты любой точки без какой бы то ни было неопределенности и произвола.

Более существенным с практической стороны недостатком резолюций Комитета о проекции международной карты является неопределенность в вопросе о построении сеток для листов севернее 60-й параллели. Такие листы рекомендовано соединять попарно, но не указано, как изменяются при этом и изменяются ли приведенные выше правила построения сетки для одного листа.

Рассмотрим теперь искажения углов рамок и вопрос о сложении соседних листов.—По определению радиусов параллелей геодезическая кривизна последних не искажается. То же, очевидно, имеет место и для меридианов, так как они изображаются прямыми линиями. Следовательно, все поправки за кривизну δ равны нулю и по (I)

$$\sum \psi = \varepsilon$$

Следующими рассуждениями можно показать, что эти искажения ψ углов рамки равны между собою для всех четырех углов.

Проекция Кассини-Зольднера симметрична относительно меридиана и первого вертикала. Главные, неискажаемые направления в этой проекции суть направления больших кругов, перпендикулярных к среднему меридиану, и направления им перпендикулярные. Направления рамок трапеции отличаются от только что упомянутых на малые величины, а потому с принятой нами степенью точности в этой проекции все ψ равны нулю.

Далее, в проекции Кассини-Зольднера кривизна больших кругов, перпендикулярных к среднему меридиану, не искажается, следовательно, $\delta = 0$.

1) Оба эти документа любезно предоставлены мне военным геодезистом В. Ф. Крыловым.

По доказанному в предыдущем параграфе приближенному тождеству проекции Кассини-Зольднера с простой поливонической должны быть и для этой последней все $\psi = 0$ и $\delta_e = 0$.

Тогда по (I') будет

$$\delta_e = \frac{\epsilon}{4}$$

Если теперь заменить крайние меридианы карты прямыми, то углы между ними и параллелями, очевидно, исказятся в $\frac{1}{4}$ раз на величину поправки δ_e за кривизну для боков рамки, т. е. все ψ будут равны между собой и равны $\frac{\epsilon}{4}$.

Наконец, легко показать, что сближение верхней и нижней рамок на упомянутую в конце резолюции Комитета малую поправку третьего порядка, приблизительно равную разности между длиной среднего меридиана карты и меридиана с долготой 2° от среднего, не влияет на искажение углов рамки в принятых пределах точности. Следовательно, и для международной проекции

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = \frac{\epsilon}{4} \approx 6', 19 \cos \phi_0 \quad (44)$$

что и требовалось доказать.

Чтобы дать представление о численном значении искажений для разных листов, приведем:

сферические избытки	$\epsilon = 25' 1 19/8 17/5 13/3$
и искажения	$\psi = \frac{\epsilon}{4} = 6,3 \quad 4,9 \quad 4,4 \quad 3,3$
для поясов	$A \quad J \quad L \quad O$
крайние широты которых . . .	$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1 = 0^\circ \quad 36^\circ \quad 44^\circ \quad 56^\circ \\ \phi_2 = 4 \quad 40 \quad 48 \quad 60 \end{array} \right.$

По точным вычислениям Ломницкого ¹⁾ для листа пояса A $\psi_1 = \psi_4 = 6' 16''$ и $\psi_2 = \psi_3 = 6' 17''$.

Так как кривизны и длины общих параллелей и общих меридианов двух смежных листов по определению проекции в точности равны между собой, то можно точно соединить любые два соседние листа, при чем в общих угловых точках меридианы или параллели претерпят излом, равный

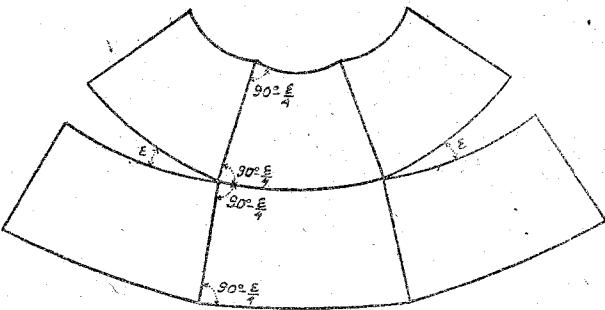
$$2\psi = \frac{\epsilon}{2}$$

При соединении пяти соседних листов крестом никаких разрывов между ними также не будет, но при более важном практически соединении в одно целое четырех листов, имеющих общую точку (соединение „en bloc“),

1) [3], стр., 39, табл. XII A.

произойдут угловые разрывы, сумма которых по (II), как и в других проекциях = ε.

При соединении шести листов получим картину, представленную на черт. 8.



Черт. 8.

Наибольшее искажение 2ω углов и $p-1$ площадей для того же самого невыгодного листа A заемствуем у Ломницкого (табл. X, XI и XII):

$$2\omega = 6'48'', p-1 = ab - 1 = (1 + 0,00137) (1 - 0,0061) - 1 = 0,00076 = \frac{1}{1320}$$

Искажение площадей, как видим, очень невелико.

§ 5. Конические проекции.

Фришауф суроно критиковал международную проекцию и указывал, что ее с успехом могла бы заменить одна из конических.

С особенной полнотой этот вопрос разобран А. Ломницким. Последний автор справедливо полагает, что проекция для международной карты мира должна удовлетворять условиям, сформулированным им в следующих тезисах:

,,1°. Международная карта мира, создаваемая общими силами многих государств, несомненно будет служить и для современников и для потомства показателем наших знаний как теоретических так и практических. Предприятие столь значительное должно быть и подготовлено исчерпывающим образом, сообразно с действительным современным состоянием науки и техники. Следовательно, из числа различных видов проекций, равносильных с практической точки зрения, надо выбрать те, которые имеют в то же время наибольшее научное достоинство.

2°. Пользование Международной картой несомненно распространится так, что она будет находиться в руках всех цивилизованных людей и в школах как высших так и начальных. Необходимо, чтобы всякий образованный человек мог понять принцип этой проекции. Она должна, следовательно, быть сколь возможно простой.

Любопытно, что в результате точных исследований оказывается, что проекции, наиболее простые, будут в данном случае иметь и наибольшую научную ценность.

Следовательно, условия 1° и 2° совместимы между собой.

3°. Чтобы не разрушать результатов огромного труда, уже затраченного на это важное предприятие, можно вводить в проекцию только изменения, практически ничтожные (например, меньшие $\frac{1}{2}$ мм), сохраняя при том общее деление на секции и размер каждого листа.

Эти малые изменения можно вводить в новые издания уже готовых листов и во все новые листы.

4°. Таблицы и инструкции для построения любого листа должны быть точны, ясны, без какой бы то ни было неопределенности.

Они должны относиться ко всей земле вплоть до полюсов.

5°. Ныне, когда конгресс Международного союза геодезистов и астрономов (в Мадриде в 1924 г.) принял для международных работ эллипсоид Хайфорда, следует и для Международной карты мира 1/М принять этот же эллипсоид вместо эллипса Кларка...” ([3], стр. 2—3).

В первой главе цитируемой работы Ломницкий показывает, что замена сфера Кларка сфероидом Хайфорда при сохранении проекции вызовет изменения, практически ничтожные — не превосходящие 0,04 мм. И даже переход от сфера Кларка к сфероиду Бесселя (что для нас особенно интересно) вызвал бы относительные перемещения точек в пределах одного листа не большие 0,062 мм.

Вычислив таблицы для международной проекции на обоих сфероидах — Кларка и Хайфорда, автор выдвигает предложение заменить ее одной из конических и дает для этого подробные таблицы, решающие с исчерпывающей полнотой задачу построения сеток для листов миллионной карты в этих проекциях.

Он рассматривает простую (—равнопромежуточную, сохраняющую длины по меридианам), а также равноугольную и равновеликую проекции, выбирая во всех трех случаях произвольные постоянные так, чтобы увеличение вдоль

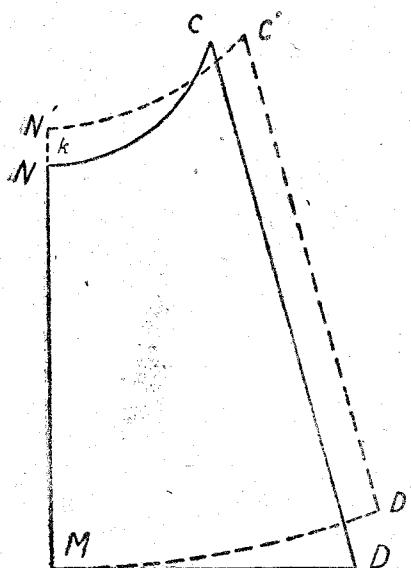
параллелей, отстоящих на 1° от средней, было равно единице, а также указывает и другие способы выбора произвольных постоянных.

Оказывается, что в пределах одного листа карты эти три проекции — равнопромежуточная, равноугольная и равновеликая — практически не различаются. А именно, относительные смещения точек при переходе от простой проекции к равноугольной или равновеликой не превосходят 0,03 мм.

Разница между простой конической и международной проекциями гораздо более значительна, но практически все же невелика. А именно, наибольшее относительное смещение точек на самом невыгодном — прилегающем к экватору листе приблизительно равно $\frac{1}{3}$ мм.

Подробнее это показано (по А. Ломницкому) на черт. 9. Здесь сплошными линиями представлена рамка прилегающего к экватору полулиста в международной проекции, а штрихами — рамка того же полулиста в простой конической проекции. Оказывается

- N' выше N на 0,311 мм
- C' выше C на 0,007 мм
- D' выше D на 0,305 мм
- C' правее C на 0,160 мм
- D' правее D на 0,159 мм



Черт. 9.

и наибольшее расстояние между соответствующими точками:

$$DD' = 0,344 \text{ мм} \approx \frac{1}{3} \text{ мм}$$

Эти числа относятся к международной проекции вычисленной на сфероиде Кларка и конической — на сфероиде Хайфорда. В случае одного сфероида разница будет еще немного меньше.

Разность абсцисс точек D и D' для любой пары соответственных листов легко получается и на основании общих соображений §§ 2—3. Она равна, очевидно, разности стрелок прогиба южной параллели для той и другой проекции.

По формуле (V) и черт. 2 или по первому из уравнений (21) имеем для стрелки прогиба σ_{14} южной рамки в международной проекции

$$\sigma_{14} = \frac{2\gamma}{8\rho'} AD$$

так как геодезическая кривизна рамок в этой проекции не искажается и следовательно, поправки за кривизну δ равны нулю. Здесь γ сближение меридианов в точках M_0 и D_0 на сфере и AD — длина рамки, близко равная 666 мм $\cos \phi_1$, так что

$$\sigma_{14} = \frac{\gamma}{4\rho'} 666 \text{ мм} \cos \phi_1 \quad (45)$$

Подобным же образом для конической проекции, отмечая относящиеся к ней величины штрихами получим

$$\sigma_{14}' = \frac{\gamma + \delta_i'}{4\rho'} 666 \text{ мм} \cos \phi_1 \quad (46)$$

где δ_i' — поправка за кривизну для дуги большого круга, близкой к южной рамке.

Разность выражений (47) и (46) дает для разности абсцисс точек D и D' :

$$\sigma_{14}' - \sigma_{14} = \frac{\delta_i'}{4\rho'} 666 \text{ мм} \cos \phi_1 \quad (47)$$

Но в конической проекции углы рамок и геодезическая кривизна вертикальных рамок не искажаются:

$$\psi' = 0 \text{ и } \delta_i' = 0$$

Следовательно, по (I)

$$\delta_i' = \frac{\epsilon}{4}.$$

Подставляя это значение δ_i' в (48), припоминая, что по (3)

$$\epsilon \approx 25'4 \cos \phi_0$$

и пренебрегая в коэффициенте при малой величине второго порядка разностью $\phi_0 - \phi$, получим окончательно:

$$\sigma_{14}' - \sigma_{14} = \frac{\epsilon}{16\rho'} 666 \text{ мм} \cos \phi_0 = 0,304 \text{ мм} \cos^2 \phi_0 \quad (48)$$

Эта разность абсцисс убывает пропорционально $\cos^2 \phi_0$, т. е. довольно быстро. При $\phi_0 = 45^\circ$ уже $\cos^2 \phi_0 = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим еще линейные расхождения при складывании двух соседних листов миллионной карты, построенной в конической проекции.

Если приблизительно сложить их по общей параллели, как листы I и II на чертеже 5, то по (VI') и (3) с $\delta_e = 0$ и $\delta_i = \frac{1}{4} \varepsilon$

$$B_1 A_2 = C_1 D_2 = 0,608 \text{ мм } \cos^2 \phi_2 \quad (49)$$

Что же касается сложения листов по общему меридиану, как листы I и IV на черт. 5, то оно выполнимо в точности, так как $\delta_e = 0$.

Из приведенных численных сопоставлений Ломницкий заключает, что переход к конической проекции не повлечет за собою пересоставления уже изданных листов карты и потому „равнопромежуточная коническая проекция, представляющая без искажения параллели ϕ_1 и ϕ_2 “), удовлетворяет всем требованиям, указанным введении... и, следовательно, вполне подходит для Международной карты мира в 1:1 000 000“ ([3], стр. 13, разрядка автора).

По вопросу о сложении листов карты Ломницкий замечает, что при сложении двух листов карты по смежной параллели, правда, получатся с краев просветы, „но ширина этих просветов нигде не превосходит 0,6 мм—величины практически ничтожной. Между тем, если складывать листы en bloc, что практически гораздо более важно, чем сложение крестом, точно допускаемое международной проекцией, то и международная проекция и конические проекции образуют просветы одинаковой ширины. Обе, следовательно, равнозначны в этом отношении“ (стр. 23) ²⁾.

Как показано мною выше (формула II), это последнее заключение будет справедливо для всех проекций, применяемых, как многогранные.

Наибольшая величина линейного расхождения соответствующих точек при сложении по параллели двух листов карты, построенных в конической проекции, получается по формуле (VI'), если положить в ней

$$\delta_i = \frac{\varepsilon}{4} = 6',3 \cos \phi_0$$

А. Ломницкий готовил свою статью, как материал „для дискуссии“, которая могла возникнуть по вопросу об изменении проекции для миллионной карты на Международном географическом съезде в Лондоне и Кембридже в июле 1928 г. К сожалению мне пока неизвестно, подвергался ли там пересмотру вопрос о проекции для миллионной карты.

§ 6. Проекция Гаусса-Крюгера.

По причинам, выясненным в начале § 1, для нас интересно посмотреть, нельзя ли заменить с практическими ничтожными изменениями проекцию международную проекцией Гаусса-Крюгера или, отвлекаясь при последую-

1) Отстоящие от средней на $\pm 1^\circ$.

2) Примеч. редакции. В 1922 году в Высшем геодезическом управлении, по указаниям проф. Ф. Н. Красовского, были выполнены расчеты по замене „международной“ проекции одною из конических. Результаты оказались именно те, которые указывает А. Ломницкий. В многогранной „конической“ проекции были построены в ВГУ несколько областных карт в масштабе 1:500 000.

щих приближенных подсчетах от сжатия земли,—поперечной цилиндрической равноугольной проекцией.

Определим прежде всего кривизну рамок в последней проекции и сравним ее с кривизной рамок в проекции международной.

В поперечных цилиндрических проекциях большие круги, перпендикулярные среднему меридиану, представляются прямыми, т. е. их геодезическая кривизна не искается. По доказанному выше то же приближенно должно иметь место и для параллелей.

Итак, с принятой в настоящем исследовании степенью точности, можем сказать, что геодезическая кривизна параллелей в проекции Гаусса не искается так же, как и в международной проекции, т. е. $\delta_e = 0$.

Но в противоположность международной проекции углы между меридианами и параллелями, как и вообще все углы в этой проекции, не исказяются: $\gamma = 0$. Следовательно, по (I')

$$\delta_e = \frac{\epsilon}{4}$$

т. е. сферический избыток распределяется поровну на четыре поправки за кривизну для вертикальных боков рамки (черт. 10).

Стрелки прогиба этих боков по (V) будут:

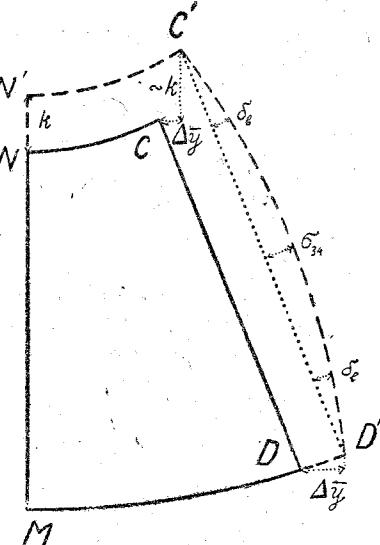
$$\gamma_{12} = \gamma_{34} = \frac{\delta_e}{2 \rho'} 444 \text{ мм} = \frac{\epsilon}{8 \rho'} 444 \text{ мм} = 0,203 \text{ мм} \cos \phi_0 \quad (50)$$

В наихудшем случае — для соседних с экватором листов ($\phi_0 = \pm 2^\circ$) это дает для линейного расхождения двух листов, сложенных по общему меридиану, 0,404 мм, т. е. в полтора раза меньше, чем для конических проекций по (49). Это расхождение убывает пропорционально $\cos \phi_0$. В конических же проекциях, как мы видим оно убывает пропорционально $\cos^2 \phi_0$. Для широт больших 48° , где листы карты становятся в ширину меньше, чем в длину, расхождение становится меньше для конической проекции.

Черт. 10, аналогичный черт. 9, представляет разницу между рамками полулиста в международной проекции (сплошные линии) и в проекции Гаусса-Крюгера (штрихи), сохраняющей длины вдоль среднего меридиана.

Расхождение NN' , очевидно, равно поправке k для среднего меридиана, упомянутой в последнем пункте цитированной выше резолюции Международного комитета, т. е. максимум 0,271 мм (срв. таб. I—А или II—А в работе [3] Ломницкого).

Расхождение в ординатах углов рамок получим так. В международной проекции эти ординаты в точности те же, как в простой поликонической. В поликонической — с точностью порядка $\frac{s^3}{R^2}$ включительно — те же, как



Черт. 10.

в проекции Зольднера. А в проекции Гаусса ординаты, как известно, больше зольднеровских на

$$\Delta \bar{y} = \frac{\bar{y}^3}{6 R^3} \approx 0,153 \text{ мм} \cos^3 \varphi \quad (51)$$

Расхождение по абсциссам для угловых точек C и C' будет приблизительно то же, как и для точек N и N' , т. е. $=k$ в силу сохранения геодезической кривизны параллелей в обоих сравниваемых проекциях.

Сопоставим теперь в табличке для нескольких зон (A, J, L и O) эти расхождения $\Delta \bar{y}$ и k по ординатам и абсциссам, а также поправки за кривизну δ_e для вертикальных рамок проекции Гаусса-Крюгера и стрелки провеса $\sigma_{12} = \sigma_{34}$ тех же рамок, представляющие, очевидно, половину линейного расхождения соответствующих углов при сложении двух листов по общему меридиану. По общей параллели, конечно, рамки листов, построенных в проекции Гаусса-Крюгера, сложатся без разрыва.

Пояс	Φ	\bar{y}	$\Delta \bar{y}$	k	$\delta_e = \frac{\varepsilon}{4} \sigma_{12} = \sigma_{34}$
O	60	166 мм	0,019* мм	0,076 мм	3/33 0,109* мм ¹⁾
	56	187 »	0,027* »		
L	48	224 »	0,046* »	0,131 »	4,37 0,141* »
	44	241 »	0,057* »		
J	40	256 »	0,069 »	0,169 »	4,90 0,158 »
	36	270 »	0,081 »		
A	4	333 »	0,147 »	0,271 »	6,28 0,202 »
	0	334 »	0,153 »		

Сопоставление этих чисел с величинами, приведенными выше для конических проекций, и их незначительность показывают, что проекция Гаусса-Крюгера даже в том виде, как она принята у нас в СССР для геодезических вычислений, т. е. с увеличением по среднему меридиану, равным единице, может заменить международную проекцию с не меньшим успехом, чем предлагаемая Ломницким коническая.

Но наибольшие расхождения могут быть еще уменьшены введением редукционного множителя, общего для всего листа и даже можно совсем аннулировать расхождение по абсциссам k (черт. 10), если взять этот множитель равным

$$1 - \frac{k}{444}$$

Однако более целесообразным или, по крайней мере, более принципиально обоснованным было бы введение редукционного множителя, приводящего к единице средний масштаб площадей в пределах листа или же уменьшающего вдвое крайние искажения длин (срв. начало § 1). В обоих этих слу-

1) Табличка вычислена помощью логарифмической линейки по приведенным выше приближенным формулам. Числа, отмеченные *, получены и вычислением по точным формулам, при чем результат получен тот же.

чаях проекция Гаусса-Крюгера будет отличаться от международной еще меньше, чем показано в только что приведенной табличке.

Не лишне заметить, что введение редукционного множителя, очевидно, можно сделать и не аналитически, а так сказать оптически, если при изготавлении сеток будет применена фотография.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ch. Lallemand, La Carte du Monde au millionième et les erreurs dues à son mode de projection, Extrait du Comptes Rendus de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences, Congrès de Dijon, 1911, Paris.
- [2] J. Fritschaufi, Beiträge zur Landesaufnahme und Kartographie des Erdspähröids, B. Teubner, 1919 (—дополнение к книге того же автора: Die mathematischen Grundlagen der Landesaufnahme und Kartographie des Erdspähröids, Stuttgart, 1913).
- [3] A. Lemnicki, Sur le choix de la projection pour la Carte du Monde au millionième (materiaux pour la discussion). Extrait du Bulletin „Wiadomosci Sluzby Geograficznej“ Warszawa, 1928.
- [4] А. Тиссо, Изображение одной поверхности на другой и составление географических карт, пер. Д. Рашкова, М. 1899.
- [5] Гаусс, Бессель и Ганзен, Геодезические исследования, издание и перевод А. Тилло, Спб. 1866.
- [6] Шуберт, Тригонометрическая съемка губерний: С.-Петербургской, Псковской, Витебской и части Новгородской, „Записки военно-топогр. депо“, ч. VII, Спб. 1842, стр. 4 и сл.
- [7] Faye, Cours d'astronomie de l'Ecole Polytechnique, Paris, Gauthier-Willars éd., 1881, I part., p. 350.
- [8] A. Courtier, Choix d'un système de représentation pour la rédaction des levés hydrographiques, „Annales hydrographiques“, 1912, № 964, pp. 19—88.
- [9] Е. С. Марков, Карта земного шара в масштабе 1 : 1 000 000, „Известия Русск. Географ. О-ва“, т. I (1914), вып. III и IV, IIб, стр. 101—116.
- [10] Ch. Deetz and O. Adams, Elements of map projection, U. S. Coast and Geodetic Survey, Spec. Publication № 68, Wash., 1921.
- [11] A. Hinks, Map projection, Cambridge, 1912.
- [12] В. М. Никифоров, Многогранная проекция, „Геодезист“, 1925, № 4—5 и 1926, №№ 1—2 и 3—4.
- [13] Условные знаки и инструкция для составления и вычерчивания 1 : 1 000 000 карты, М. 1924.
- [14] A. R. H. (inks), The projection of the international map, „The Geograph. Journ.“, LXX, № 3 (IX. 1927), pp. 289—291 (начало полемики с Ломницким).
- [15] International Map Committee. Resolutions and Proceedings of the International Map Committee assembled in London, November, 1909. London, 1910.

B. Каврайский

Одесса

1930. VII. 17

Приложение. О склеивании листов карты в 1:400 000.

1. В связи с выбором проекции для карты СССР в 1:400 000 с листами, обнимающими по 3° по долготе и по 2° по широте, возникла следующая задача: сравнить между собою проекции Гаусса-Крюгера, международную (Лаллемана) и равнопромежуточную коническую, предложенную Ломницким взамен международной, с точки зрения возможности склеивать вместе 18

листов карты, расположенные: а) в двух соседних столбцах по 9 листов в каждом или б) в двух поясах по 9 листов в каждом.

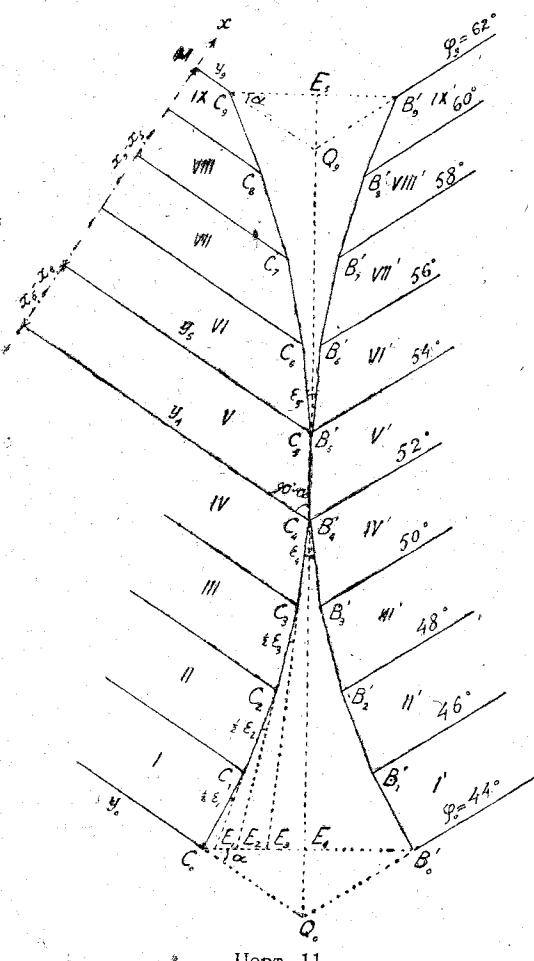
Разностью кривизн (и длин) тех рамок смежных листов, по которым происходит склеивание, при этом пренебрегаем и считаем, что листы склеиваются по хордам этих рамок, если рамки криволинейны. Для упрощения расчетов можно принять Землю за шар.

Прежде всего приложим к решению этого вопроса приближенные формулы параграфа 2, общие для всех проекций, примененных, как многогранные, а затем проверим результаты точными подсчетами для каждой из названных проекций в отдельности, по крайней мере для практически более важного в СССР случая соединения двух столбцов.

2. На чертеже 11 представлена схематически область соединения двух таких столбцов, простирающаяся от параллели 44° (на два с лишним градуса южнее Одессы) до параллели 62° (на

два градуса севернее Ленинграда). Вместо рамок здесь взяты прямо хорды этих рамок.

Спрашивается, каковы будут линейные разрывы $C_0B'_0$ и $C_9B'_9$ на верхнем и нижнем краях, если соединить сперва средние листы V и V' по хордам боковых рамок, а все прочие — по хордам горизонтальных рамок? По теореме (II) и по формуле (3) § 2 единственный в данном случае при



Черт. 11.

сложении листов V, V' IV и IV' угловой разрыв равен среднему сферическому избытку складываемых листов:

$$\angle C_a C_4 B'_3 = \varepsilon_4 = 6',28 \cos \varphi_4 \quad (a)$$

Угол между хордой $C_4 C_3$ и продолжением $C_4 E_4$ хорды $C_5 C_4$ равен, очевидно, $\frac{1}{2} \varepsilon_4$.

Подобным же образом

$$\angle E_2 C_3 E_3 = \frac{1}{2} \varepsilon_3, \quad \angle E_1 C_2 E_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_2 \text{ и т. д...}$$

По чертежу:

$$C_0 B'_0 = 2 C_0 E_4 = 2 (C_4 E_3 \sin \frac{1}{2} \varepsilon_4 + C_3 E_2 \sin \frac{1}{2} \varepsilon_3 : \sin \angle E_2 E_3 C_3 + \angle C_2 E_1 \sin \frac{1}{2} \varepsilon_2 : \sin \angle E_1 E_2 C_2 + C_1 C_0 \sin \frac{1}{2} \varepsilon_1 : \sin \angle C_0 E_1 C_1) \quad (b)$$

Обозначая через b длину бока листа, приблизительно одинаковую для всех листов, а именно:

$$b = 222 \text{ км} : 400000 = 555 \text{ мм}$$

имеем весьма приближенно:

$$C_4 E_3 = 4b, \quad C_3 E_2 = 3b, \quad C_2 E_1 = 2b \quad \text{и} \quad C_1 E = b$$

Подставив эти значения в (b), заменив синусы малых углов ε дугами и пренебрегая различием между синусами углов при E_3, E_2 и E_1 и единице, получим:

$$C_0 B'_0 = b \sin 1' (4 \varepsilon_4 + 3 \varepsilon_3 + 2 \varepsilon_2 + \varepsilon_1)$$

или по (a) и аналогичным формулам для прочих ε

$$C_0 B'_0 = (555 \text{ мм} \times 6',28 : 3438') (4 \cos \varphi_4 + 3 \cos \varphi_3 + 2 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1)$$

Для значений $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, надписанных на чертеже 11, это дает:

$$C_0 B'_0 = 6,5 \text{ миллиметров} \quad (c)$$

Совершенно подобным же образом найдем

$$C_9 B'_9 = 1,013 \text{ мм} (4 \cos \varphi_5 + 3 \cos \varphi_6 + 2 \cos \varphi_7 + \cos \varphi_8) \quad (d)$$

или

$$C_9 B'_9 = 5,7 \text{ миллиметров} \quad (e)$$

Высота всего столбца будет приблизительно $555 \text{ мм} \times 9 = 5,0$ метров. При такой длине вряд ли представит затруднение уничтожение разрывов в 6 мм на концах путем деформации бумаги.

3. На чертеже 12 представлено сложение двух поясов. Средние листы соединены по хордам горизонтальных рамок, а прочие—по хордам вертикальных рамок. Имеется линейный разрыв $C_9 D'_9$ на правом краю полосы, очевидно, равный таковому же на левом краю. Мы будем искать численное значение этой величины для двух южных поясов с общей параллелью 46° , которых он maximum.

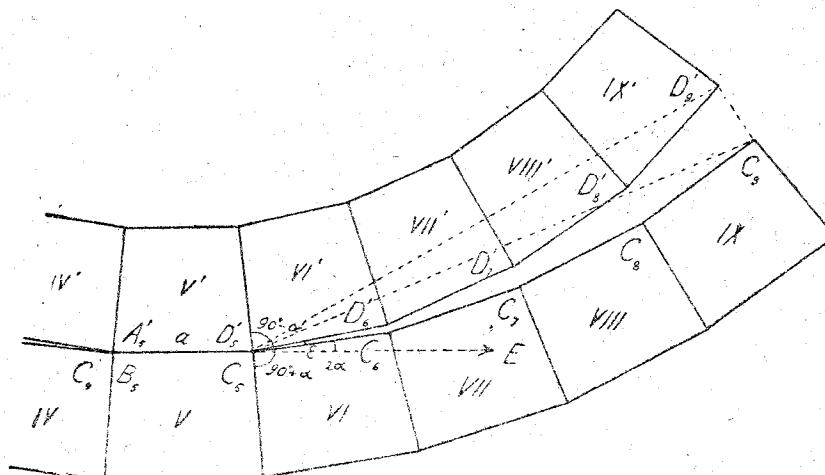
Обозначим через $90^\circ + \alpha$ верхние углы между хордами рамок нижних листов и через $90^\circ - \alpha'$ нижние углы на верхних листах. По теореме (II) § 2 угловой разрыв $\angle D'_6 C_5 C_6$ листов V, V', VI и VI' равен среднему сферическому избытку этих листов

$$\epsilon = 6'28 \cos 46^\circ$$

а по чертежу

$$\epsilon = 2(\alpha' - \alpha) \quad (f)$$

Углы, образуемые равными между собою хордами $C_5 C_6, C_6 C_7, C_7 C_8, C_8 C_9$ и диагональю $C_5 C_9$ с продолжением $C_5 E$ хорды $C_4 C_5$, очевидно, равны соответственно: $2\alpha, 4\alpha, 6\alpha, 8\alpha$ и 5α .



Черт. 12.

Подобным же образом углы, образуемые хордами $D'_5 D'_6, D'_6 D'_7, \dots$ нижних рамок верхнего пояса и диагональю $D'_5 D'_9$ с той же прямой $C_5 E$ суть: $2\alpha', 4\alpha', 6\alpha', 8\alpha'$ и $5\alpha'$.

Следовательно, углы, образуемые хордами $D'_5 D'_6, D'_6 D'_7, D'_7 D'_8, D'_8 D'_9$ и $C_5 C_6, C_6 C_7, C_7 C_8, C_8 C_9$ с биссектром угла $D'_9 C_5 C_9$, будут, соответственно:

$$2\alpha' - \frac{5}{2}(\alpha + \alpha'), 4\alpha' - \frac{5}{2}(\alpha + \alpha'), 6\alpha' - \frac{5}{2}(\alpha + \alpha'), 8\alpha' - \frac{5}{2}(\alpha + \alpha'),$$

$$2\alpha - \frac{5}{2}(\alpha + \alpha'), 4\alpha - \frac{5}{2}(\alpha + \alpha'), 6\alpha - \frac{5}{2}(\alpha + \alpha'), 8\alpha - \frac{5}{2}(\alpha + \alpha'),$$

Чтобы получить приближенно расстояние $C_9 D_9'$, спроектируем ломаную $C_9 C_8 C_7 C_6 C_5 D'_6 D'_7 D'_8 D'_9$ на направление, перпендикулярное биссектру угла $D'_9 C_5 C_9$, приблизительно параллельное $C_9 D_9'$, поскольку можно считать $C_5 D_9' = C_5 C_9$. Обозначив $C_5 C_6 = C_6 C_7 = \dots \approx C_5 D_9' = D'_6 D'_7 = \dots = a$, получим:

$$\begin{aligned} C_9 D_9' &= a \{ \sin [2\alpha' - \frac{5}{2}(\alpha + \alpha')] - \sin [2\alpha - \frac{5}{2}(\alpha + \alpha')] + \\ &\quad + \sin [4\alpha' - \frac{5}{2}(\alpha + \alpha')] - \sin [4\alpha - \frac{5}{2}(\alpha + \alpha')] + \\ &\quad + \sin [6\alpha' - \frac{5}{2}(\alpha + \alpha')] - \sin [6\alpha - \frac{5}{2}(\alpha + \alpha')] + \\ &\quad + \sin [8\alpha' - \frac{5}{2}(\alpha + \alpha')] - \sin [8\alpha - \frac{5}{2}(\alpha + \alpha')] \} = \\ &= 2a \{ \sin(\alpha' - \alpha) \cos^3 \frac{1}{2}(\alpha + \alpha') + \sin 2(\alpha' - \alpha) \cos^1 \frac{1}{2}(\alpha + \alpha') + \\ &\quad + \sin 3(\alpha' - \alpha) \cos^1 \frac{1}{2}(\alpha + \alpha') + \sin 4(\alpha' - \alpha) \cos^3 \frac{1}{2}(\alpha + \alpha') \} \end{aligned}$$

Углы α и α' около 1° , следовательно $\frac{3}{2}(\alpha + \alpha')$ около 3° . Пренебрегая различием косинуса этого угла от единицы, подставляя $\alpha' - \alpha$ из (f) и заменяя синусы малых углов дугами, получим:

$$C_9 D_9' = a \varepsilon \sin 1' (1 + 2 + 3 + 4) = 10 a \varepsilon \sin 1' \quad (g)$$

При $\phi = 46^\circ \cos \phi = 0,6947$, $\varepsilon = 6',28 \cos \phi = 4',37$, $a = 111 \text{ км} \times \cos \phi \times 3 : 400 000 = 579 \text{ мм}$, и

$$C_9 D_9' = 7,4 \text{ миллиметра.} \quad (h)$$

Длина всей полосы будет приблизительно: $579 \text{ мм} \times 9 = 5,2 \text{ метра.}$

Повторим, что сделанные выводы имеют силу для всякой проекции, примененной как многогранная, при весьма общих ограничениях, формулированных в начале § 2.

4. Проверим теперь вычисление линейных разрывов в случае двух столбцов листов по точным формулам для трех названных выше проекций.

Из вычисленных мною и изданных Управлением военных топографов РККА „Таблиц прямоугольных координат Гаусса-Крюгера...“ (М. 1931 г.) берем прямоугольные координаты точек C_0, C_4, C_5, C_9 . В масштабе 1 : 400 000 они будут:

$$\begin{array}{ll} x_0 = 12\,186,06 \text{ мм} & y_0 = 300,74 \text{ мм} \\ x_4 = 14\,409,53 & y_4 = 257,50 \\ x_5 = 14\,965,85 & y_5 = 245,87 \\ x_9 = 17\,192,79 & y_9 = 196,46 \end{array}$$

По чертежу 11, из трапеции V

$$\operatorname{tg} \alpha = (y_4 - y_5) : (x_5 - x_4) = (8.32\,025) \quad (i)$$

откуда

$$\alpha = 1^\circ 12'$$

Далее по чертежу

$$C_9 Q_9 = Q_9 B_9' = y_5 - (x_5 - x_4) \operatorname{tg} \alpha - y_9 \quad (j)$$

и искомый линейный разрыв

$$C_9 B_9' = 2 C_9 Q_9 \cos \alpha \approx 2 C_9 Q_9 \quad (k)$$

если ограничиться тремя значащими цифрами.

Совершенно так же найдем, что

$$C_0 B_0' = 2 C_0 Q_0 \quad (k')$$

где

$$C_0 Q_0 = y_4 + (x_4 - x_0) \operatorname{tg} \alpha - y_0 \quad (j')$$

По этим формулам с пятизначными логарифмами вычислено:

$$C_0 B_0' = 6,48 \text{ мм}, \quad C_9 B_9' = 5,72 \text{ мм} \quad (l)$$

5. Если мы возьмем столбец листов международной миллионной карты, то прямоугольные координаты угловых точек будут, как известно, отличаться от координат соответствующих точек простой поликонической проекции только вследствие сокращения высоты каждого листа на поправку

$$k = \frac{1}{2} R \operatorname{arc}^2 \lambda \operatorname{arc}(\phi_n - \phi_s) \cos^2 \frac{1}{2} (\phi_n + \phi_s) \quad (m)$$

аннулирующую искажение длин двух меридианов, удаленных по долготе на $\pm \lambda$ от осевого. Здесь R — радиус Земли, уменьшенный в общем масштабе карты, ϕ_n и ϕ_s — широты крайних параллелей листа.

Для миллионной карты $k = 0,271 \text{ mm} \cos^2 \frac{1}{2} (\phi_s + \phi_n)$. В данном случае R в $2\frac{1}{2}$ раза больше, а λ и $\phi_n - \phi_s$ вдвое меньше, чем для миллионной карты, так что:

$$k = 0,271 \text{ mm} \times 2\frac{1}{2} \times \frac{1}{8} \cos^2 \frac{1}{2} (\phi_s + \phi_n) = 0,085 \text{ mm} \cos^2 \frac{1}{4} (\phi_s + \phi_n)$$

Пренебрежем этим практически незаметным изменением координат углов рамок и будем искать линейный разрыв при соединении двух трехградусных полос карты 1:400 000, построенной в простой поликонической проекции. Землю примем за шар, на котором дуга большого круга в 18° равна дуге меридиана сфероида Бесселя от 44° до 62° широты. Это дает $R \operatorname{arc} 1^\circ = 111,27 \text{ km}$ или $278,18 \text{ mm}$ в масштабе карты и $R = 15939 \text{ mm} = [4.202 45]$ в масштабе карты.

С этими исходными данными по формулам поликонической проекции

$$\left. \begin{aligned} x &= R \operatorname{arc}(\phi - \phi_0) + 2 R \operatorname{ctg} \phi \sin^2 \frac{1}{2} (\lambda \sin \phi) \\ y &= R \operatorname{ctg} \phi \sin (\lambda \sin \phi) \end{aligned} \right\} \quad (n)$$

вычислены координаты точек C_0, C_4, C_5, C_9 черт. 11:

$$\begin{array}{ll} x_0 = 2,73 \text{ mm} & r_0 = 300,14 \text{ mm} \\ x_4 = 2228,05 & r_4 = 256,88 \\ x_5 = 2784,33 & r_5 = 245,24 \\ x_9 = 5009,41 & r_9 = 195,88 \end{array}$$

при чем начало координат взято на южной рамке южного листа I. Далее по тем же формулам (i), (j), (k), (j') и (k'), как и выше, вычислены: $\alpha = 1^\circ 12'$ и линейные разрывы

$$C_0 B_0' = 6,60 \text{ mm} \text{ и } C_9 B_9' = 5,60 \text{ mm} \quad (o)$$

6. Обращаемся к конической равнопромежуточной проекции шара с тем же радиусом $R = 15939 \text{ mm}$.

Формулы такой проекции, как известно, суть:

$$\text{радиус параллели карты } \rho = \rho_0 - R \operatorname{arc} \phi \quad (p)$$

$$\text{долгота на карте . . . } \lambda' = \alpha \lambda \quad (q)$$

где ρ_0 и α — произвольные постоянные. Вместо них введем широты ϕ_1, ϕ_2 так называемых „параллелей сечения“, т. е. параллелей, вдоль которых длины не искажаются.

Увеличение вдоль параллелей

$$n = \alpha \rho : R \cos \phi = \alpha (\rho_0 - R \arcsin \phi) : R \cos \phi$$

По условию $n_1 = n_2 = 1$, т. е.

$$\alpha (\rho_0 - R \arcsin \phi_1) : R \cos \phi_1 = \alpha (\rho_0 - R \arcsin \phi_2) : R \cos \phi_2 = 1$$

Написав производную отсюда пропорцию

$$\alpha R (\arcsin \phi_2 - \arcsin \phi_1) : R (\cos \phi_1 - \cos \phi_2) = 1$$

выразим α через ϕ_1 и ϕ_2 .

$$\alpha = (\cos \phi_1 - \cos \phi_2) : \arcsin (\phi_2 - \phi_1) \quad (r)$$

Обозначим через $\bar{\lambda}_4'$ и $\bar{\lambda}_5'$ долготы на карте граничных меридианов на двух соседних листах IV и V черт. 11. $\angle C_3 C_4 Q_0$, который мы обозначили через $1/2 \varepsilon_4$, будет в данном случае

$$1/2 \varepsilon_4 = \bar{\lambda}_5' - \bar{\lambda}_4' = (\alpha_5 - \alpha_4) \bar{\lambda} \quad (s)$$

по (q). Здесь $\bar{\lambda}$ разность долгот крайнего и среднего меридианов в натуре. Обозначим через $2 \Delta \phi$ разность широт крайних параллелей листа карты и через $\pm \delta \phi$ — расстояние параллелей, сохраняющих длину от средней параллели листа. Тогда ϕ_1 и ϕ_2 формулы (r) будут:

$$\text{для листа V } \phi_1 = \phi_4 + \Delta \phi - \delta \phi, \quad \phi_2 = \phi_4 + \Delta \phi + \delta \phi$$

$$\text{для листа IV } \phi_1 = \phi_4 - \Delta \phi - \delta \phi, \quad \phi_2 = \phi_4 - \Delta \phi + \delta \phi$$

Подставив эти выражения в формулу (r), написанную для V и IV листов, получим:

$$\begin{aligned} \alpha_5 &= [\cos(\phi_4 + \Delta \phi - \delta \phi) - \cos(\phi_4 + \Delta \phi + \delta \phi)] : \arcsin 2 \delta \phi = \\ &= \sin(\phi_4 + \Delta \phi) \sin \delta \phi : \arcsin \delta \phi \end{aligned}$$

$$\alpha_4 = \sin(\phi_4 - \Delta \phi) \sin \delta \phi : \arcsin \delta \phi$$

и далее по (s)

$$\begin{aligned} \varepsilon_4 &= 2 [\sin(\phi_4 + \Delta \phi) - \sin(\phi_4 - \Delta \phi)] (\sin \delta \phi : \arcsin \delta \phi) \cdot \bar{\lambda} = \\ &= (4 \sin \Delta \phi \sin \delta \phi : \arcsin \delta \phi) \cos \phi_4 \cdot \bar{\lambda} \end{aligned} \quad (t)$$

В данном случае $\bar{\lambda} = 1/2^\circ$, $\Delta \phi = 2^\circ$.

По предложению Ломницкого для миллионной карты $\delta \phi = 1^\circ$, следовательно, в нашем случае $\delta \phi = 1/2^\circ$. С этими данными находим:

$$\varepsilon_i = 6',2827 \cos \phi_i \quad (u)$$

При $\delta \phi = 0$, т. е. для так называемой проекции на касательном конусе мы имели бы:

$$\varepsilon_i = 4 \bar{\lambda} \sin \Delta \phi \cos \phi_i = 6',2829 \cos \phi_i$$

т. е. почти то же самое. Оба эти значения ϵ практически совпадают с полученными выше (форм. (a)) по приближенным формулам для всякой многоугольной проекции, а потому и линейные разрывы для конической проекции выходят почти те же (с, е), а именно, при

$$b=111,27 \text{ км} \times 2 : 400\,000 = 556,35 \text{ мм}$$

$$C_0 B'_0 = b \times 6',2827 \sin 1' (4 \cos \varphi_4 + 3 \cos \varphi_3 + 2 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1) = 6,53 \text{ мм},$$

$$C_9 B'_9 = b \times 6',2827 \sin 1' (4 \cos \varphi_5 + 3 \cos \varphi_6 + 2 \cos \varphi_7 + \cos \varphi_8) = 5,68 \text{ мм}$$

B. Каурайский

Ленинград,
1932. XI. 3.