

Ф. Н. КРАСОВСКИЙ

ИЗБРАННЫЕ  
СОЧИНЕНИЯ

ТОМ  
IV

ГЕОДЕЗИЗДАТ  

---

1955



Ф. Н. Красовский

# ИЗБРАННЫЕ СОЧИНЕНИЯ

Том IV

Под редакцией С. Г. Судакова

---

---

Издательство геодезической литературы  
МОСКВА \* 1955

Печатается по постановлению Ученого совета Московского института инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии.

Председатель комиссии по изданию трудов Ф. Н. Красовского

проф. д-р техн. наук В. В. Данилов

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В четвертом томе избранных сочинений Ф. Н. Красовского публикуется вторая часть «Руководства по высшей геодезии» и статья «Главная геодезическая основа СССР (общая оценка постановки и программ работ; вопросы правильной обработки астрономо-геодезической сети)».

«Руководство по высшей геодезии», часть II, было написано в 1939—1940 гг. и издано в начале 1942 г. как учебник для геодезических вузов и факультетов.

Сейчас нет особой необходимости подробно говорить о выдающемся значении Руководства в геодезической науке — оно достаточно выяснено за прошедшее десятилетие в научных исследованиях советских геодезистов. Более того, основные научные выводы этого труда положены в основу дальнейших работ по развитию астрономо-геодезических сетей в СССР и странах народной демократии.

Признанием особых научных достоинств Руководства явилось признание Ф. Н. Красовскому Сталинской премии первой степени.

Оценивая состояние мировой геодезической науки после выхода в свет второй части Руководства, Ф. Н. Красовский, при всей своей скромности, говорил о том, что теперь зарубежная геодезия в своем развитии осталась далеко позади советской геодезии. Такое заключение не оставляет тени сомнения в своей справедливости. Западно-европейские и американские геодезисты и сейчас стоят еще в стороне от новых идей в геодезии, которые уже развиты в советской геодезической науке Ф. Н. Красовским и его учениками.

Ф. Н. Красовский был строгим критиком недостатков, но более всего он был строг в оценке своих собственных трудов. В его представлении вторая часть Руководства казалась далекой от совершенства.

Несмотря на тяжелую болезнь, Ф. Н. Красовский незадолго до своей кончины предпринял коренную переработку своего труда.

В 1946—1947 гг. автору этих строк не раз приходилось говорить с Ф. Н. Красовским о новом издании первой части Руководства, но он всегда указывал, что не может приняться за другую работу пока не подготовит к новому изданию второй части.

Судя по заметкам, сохранившимся в архиве, Ф. Н. Красовский намечал обширную переработку книги, намереваясь в ряде мест воспользоваться результатами научных трудов советских геодезистов и в особенности исследованиями Н. А. Урмаева.

К глубокому сожалению, труд вскоре был прерван — Ф. Н. Красовскому удалось лишь закончить общий просмотр книги и частично переработать первые две главы.

В настоящем издании § 1, 3, 9, 10, 15 и 16 (нумерация параграфов везде дается по изданию 1942 г.) печатаются с исправлениями и дополнениями, которые внес сам Ф. Н. Красовский.

Вторая часть Руководства издавалась как учебник, в тексте которого было значительное количество примеров геодезических вычислений,



объяснений к таблицам и образцов их, а также обычных для учебника справочных сведений.

В настоящее время вследствие того, что в геодезических работах СССР с 1946 г. принят вместо референц-эллипсоида Бесселя референц-эллипсоид Красовского, многочисленные старые таблицы и все связанное с ними утратили свое значение и заменены новыми таблицами, в составе которых имеются и подробные пояснения к их употреблению и достаточное число примеров геодезических вычислений.

Поэтому при подготовке к изданию настоящего тома было признано целесообразным произвести соответствующие сокращения текста.

Сокращения затронули, частично или полностью, § 24, 29, 31, 33, 34, 41, 42, 61, 62, 63, 65, 73, 118, 123, 124 и приложение 1.

Кроме того:

1) полностью исключен § 64 — «Формулы и таблицы для счетной машины при  $l < 2^\circ$ ».

В этом параграфе приведены формулы, которые не нашли применения в вычислительной практике СССР;

2) в § 114 исключена в соответствии с замечанием Ф. Н. Красовского часть текста, относящаяся к составлению азимутального условия по способу И. Ю. Пранис-Праневича;

3) в § 89 исключено все относящееся к использованию астрономических пунктов в качестве исходных при постановке топографических съемок. В многолетней практике в СССР получил распространение другой порядок использования астрономических пунктов при съемках мелкого масштаба, чем описанный в Руководстве способ, предложенный Корпусом военных топографов в середине XIX столетия;

4) признано также целесообразным не помещать «Списка сочинений, статей, рефератов» и алфавитного указателя.

Против издания 1942 г. приложение II перенесено в § 22, где и излагается вывод дифференциального уравнения (168).

В остальном изменения свелись к исправлению опечаток в формулах, вкравшихся в первое издание книги, и внесению незначительных редакционных изменений.

В связи с указанными изменениями текста Руководства дана новая нумерация параграфов, таблиц и формул.

«Руководство по высшей геодезии» часть II, по утверждению Ф. Н. Красовского, является вторым изданием «Высшей геодезии» часть II, вышедшей в свет в 1932 г. Такое утверждение не совсем точно. Сличение текстов обеих книг показывает, что Руководство в значительной своей части является самостоятельным научным трудом, только включающим часть содержания «Высшей геодезии» издания 1932 г.

Сопоставление указанных двух трудов представляет значительный интерес; таким путем наглядно выявляется движение научной мысли в высшей геодезии за последние два десятилетия.

В предисловии к Руководству затрагиваются некоторые существенные проблемы высшей геодезии. Среди них вопрос о «картографическом» подходе в геодезии является наиболее важным.

«Картографический» подход в геодезии никогда не ограничивался только областью обработки геодезических сетей; он всегда распространялся и на область их создания. Сущность его состояла в том, что служебная роль геодезических сетей рассматривалась только в связи с требованиями топографических съемок сравнительно мелкого масштаба, крайне не требовательных к точности геодезической основы. Прямым следствием «картографического» подхода было то, что не в меру су-

ществовавших возможностей снижалась точность измерений в геодезических сетях, применялись упрощенные методы обработки, не уделялось внимания закреплению пунктов на местности, принижалось научное значение схемы и программы построения геодезических сетей и т. п. Взгляд на геодезические сети как нечто временное, недолговечное — вот основа «картографического» подхода в геодезии. Его последствия общеизвестны — на протяжении немногим более столетия в ряде обширных районов геодезические сети прокладывались по нескольку раз.

Советские геодезисты внесли значительный вклад в дело преодоления плохих традиций прошлого, однако нельзя еще сказать, что «картографический» подход в геодезии полностью преодолен как в теории, так и в практике геодезических работ.

Ф. Н. Красовский более чем кто либо другой понимал перспективу дальнейшего развития геодезических работ в СССР и он же первый направил научную мысль на разработку узловых вопросов геодезической теории и правильную постановку геодезического дела в государстве.

Современное состояние государственных геодезических работ следует оценивать не только по тому, как они отвечают требованиям настоящего времени, а также и по тому, как они будут отвечать требованиям отдаленного будущего. Только в этом случае государственные геодезические сети будут являться капитальным вкладом в народное хозяйство.

Указанное положение имеет весьма важное значение для СССР, с его огромной территорией, где замена одних геодезических сетей другими не может совершаться в течение относительно короткого промежутка времени. Кроме того известно, насколько сложен этап в развитии новых геодезических сетей, когда старые и новые сети по необходимости существуют одновременно.

Современные методы и технические средства, даже в массовых работах, обеспечивают весьма высокую точность геодезических измерений. Это, в соединении с правильной обработкой, дает возможность в будущем долго использовать резервы точности в геодезических сетях для решения разнообразных задач науки и техники.

Следует иметь в виду, что возражение против «картографического» подхода нельзя понимать как отрицание органической связи, существующей между геодезическими сетями и топографическими картами. Суть дела состоит в том, что геодезические сети должны являться основой не только карт и съемок сравнительно мелких масштабов, но и съемок точных, которые неизбежно возникают в ходе народнохозяйственного строительства. С другой стороны, служебная роль геодезических сетей не может ограничиваться только областью съемочных работ, так как решение ряда задач науки и техники предъявляет и будет предъявлять к геодезическим сетям требования несравненно более высокие, нежели съемочное дело.

Большое значение имеет также указание Ф. Н. Красовского на необходимость более широкого использования в геодезии средств математики; справедливость его не нуждается в каких-либо пояснениях. В связи с этим следует только заметить, чтобы приведенное указание не было понято геодезистами дословно и только как относящееся к разработке вопросов сфероидической геодезии.

Ф. Н. Красовский придавал большое значение решению геодезических задач и в своих трудах немало уделял внимания выводам соответствующих формул, анализу их точности и их практической значимости. Всякий интересующийся может найти в издании 1932 г. при-

надлежащие Ф. Н. Красовскому оригинальные выводы формул Шрейбера, формул со средними аргументами для расстояний до 40 км и формул Гельмерта со средней широтой. Несмотря на то, что эти выводы громоздки, тем не менее они представляют определенный интерес в методическом отношении.

Всесторонне разрабатывая в главе IV Руководства вопросы вычисления геодезических координат, Ф. Н. Красовский имел в виду предстоящую работу по уравниванию астрономо-геодезической сети СССР, для выполнения которой требовались достаточно простые и точные формулы для решения геодезических задач.

В последующее время Ф. Н. Красовский принимал активное участие в разработке таблиц для вычислений координат в связи с введением нового референц-эллипсоида в практику геодезических работ СССР. В этой работе рекомендации Ф. Н. Красовского по применению формул для решения геодезических задач были полностью приняты геодезическим производством.

С введением в практику геодезических работ плоских прямоугольных координат, геодезические координаты вычисляются только в триангуляции I класса. Однако не исключено, что в недалеком будущем геодезические координаты вновь будут вычисляться и в триангуляции низших классов, для которого потребуются и соответствующие формулы и особенно удобные таблицы.

Излагая в главе V вопрос о сферических координатах, Ф. А. Красовский делает вывод о том, что «вероятно в будущем подтвердится целесообразность введения прямоугольных сфероидических координат и в практику геодезических работ». Та же мысль, но в более определенной форме, высказана в предисловии: «Нам представляется, что именно прямоугольные сфероидические координаты будут основными координатами практической геодезии в будущем». Полезность применения этих координат в решении ряда задач сфероидической геодезии достаточно хорошо показана в Руководстве. Насколько хороши будут эти координаты в геодезической практике, уверенно можно сказать только после глубокой научной разработки вопроса об общих требованиях к системе координат для решения многочисленных задач геодезии, картографии и т. д.

Как показывает история геодезии, вопрос о системе координат, употребляемой в практике, имеет очень большое значение, а решение этого вопроса представляет очень серьезные затруднения по вполне понятным причинам. Если современная геодезическая практика требует применения такой системы координат, которая обладала бы наибольшей общностью и возможностью достаточно точно решать все главные геодезические задачи, то геодезическая практика будущего эти требования еще больше усилит.

До настоящего времени такой была система геодезических координат. Эта система обслуживает не только нужды геодезии, но является употребительной и в других науках о Земле, с которой она до известной степени связана органически. Очевидно, значение этой системы координат со временем будет все больше возрастать.

Система прямоугольных сфероидических координат не обладает многими ценными качествами системы геодезических координат; она же не может исключить и системы плоских конформных прямоугольных координат, которые получили значительное распространение в практике геодезических работ в силу ряда их ценных качеств, хотя применение их и не везде достаточно обоснованно.



Система плоских прямоугольных координат в конформной проекции, начиная с 1928 г., получила в СССР повсеместное применение и сравнительно быстро вытеснила координаты Зольднера и другие системы координат. В то время, когда эта система вводилась, пришлось учитывать необходимость применения ее не только в шестиградусных, но и в трехградусных зонах. Одновременно появилась необходимость введения полос перекрытия, для которых вычисляются координаты в двух зонах. В связи с развитием крупномасштабных и инженерных съемок в дополнение к указанным зонам пришлось вводить еще более мелкие, полуградусные зоны. Однако и в этом случае на краю таких узких полос искажения длины линий достигают 1 : 20 000, что в точных геодезических работах и расчетах может потребовать введения редукций.

Система плоских прямоугольных координат внедрялась в практику геодезических работ для того, чтобы устранить большой беспорядок, вызванный применением плоских и сферических координат Зольднера. В этом смысле введение новой системы координат было мероприятием прогрессивным. Однако вопрос о системе координат для геодезических сетей, обслуживающих высокоточные расчеты и вопрос о выборе проекции для крупномасштабных съемок нуждается в дополнительном глубоком изучении, так как современное положение указывает на существенные недостатки в этом деле. Изучение этого вопроса в настоящее время, когда крупномасштабные съемки только что начинают развиваться, будет наиболее рациональным.

В главе VI описаны координаты, которые в литературе более всего известны под названием координат Гаусса-Крюгера. Основанием для такого названия принимают общезвестные заслуги Гаусса в разработке общей теории конформного изображения одной поверхности на другой, применение этой теории для решения ряда геодезических задач, а также применение прямоугольных плоских координат при вычислении ганновской триангуляции. Упоминание имени Крюгера в названии системы координат обычно связывают с работами этого ученого по выводу формул для непосредственного перехода от геодезических координат к координатам прямоугольным в конформной проекции и обратно.

Следует также дополнить, что указанная система координат получила наиболее детальную разработку в трудах советских ученых, среди которых немалая заслуга принадлежит Ф. Н. Красовскому. В Советском Союзе имеются наиболее подробные таблицы для вычислений прямоугольных координат и наиболее подробные руководства по их применению; здесь же эти координаты и проекция получили наибольшее распространение и развитие в практике топографо-геодезических работ.

Как видно, заслуги Крюгера в разработке системы прямоугольных плоских координат в конформной проекции не являются из ряда вон выходящими.

Поэтому в советской геодезической литературе с некоторого времени указанные координаты именуются координатами Гаусса в память его заслуг перед геодезией.

В главе IX «Руководства» убедительно показана необходимость учета уклонения отвесных линий, или, что все равно, отступлений поверхности геоида от референц-эллипсоида при обработке геодезических сетей и, кроме того, указаны средства, несравненно более приемлемые, чем астрономическое нивелирование, для определения высот геоида над принятым референц-эллипсоидом.

Как известно, идея астрономо-гравиметрического нивелирования принадлежит Ф. Н. Красовскому, и она оказалась достаточно плодотворной в разработке М. С. Молоденского. В настоящее время теория и программа астрономо-гравиметрического нивелирования настолько разработаны, что представилось возможным включить его составной частью в общую программу построения государственной геодезической сети СССР. Астрономо-гравиметрическое нивелирование позволило поставить как практическую задачу введение метода проектирования в обработку геодезических сетей, позволившего поднять обработку астрономо-геодезических сетей на более высокую научную ступень.

Уместно указать, что геодезисты капиталистических стран до настоящего времени не применяют метода проектирования, а в вопросах теории этого вопроса находятся на позициях примерно двадцатилетней давности.

В данной главе Ф. Н. Красовским вновь рассмотрен вопрос о значении пунктов Лапласа в геодезических сетях. Он делает обоснованное заключение о том, что введение в состав геодезических сетей пунктов Лапласа повышает их точность, а в применении к рядам триангуляции I класса — позволяет приблизить их точность к рядам более сложного построения.

В целом глава IX является программным документом как для дальнейших научных исследований, так и для геодезической практики. В этой связи следует указать на то, что только после научных исследований Ф. Н. Красовского и М. С. Молоденского гравиметрия в геодезии заняла подобающее место.

В этой связи особое значение имеет глава о градусных измерениях.

В главе X, помимо исторических сведений о градусных измерениях и развитии астрономо-геодезических работ, дана современная теория градусных измерений. Эта теория в течение длительного времени находилась в состоянии, сформировавшемся в XVIII столетии, несмотря на то, что вопросами градусных измерений занимались многие видные ученые. В начале XX столетия американские геодезисты, воспользовавшись гипотезой изостазии для обработки градусных измерений, казалось, продвинули теорию градусных измерений вперед. Однако на этом пути геодезической науки не удалось достигнуть существенных успехов. Эллипсоид Хейфорда, определенный с применением гипотезы изостазии, взятой в наиболее «ортодоксальной» форме, считавшийся некоторое время наиболее обоснованным среди других выводов и потому принятый Международной Геодезической Ассоциацией в 1924 г. в качестве «международного», оказался по своим размерам сильно преувеличенным. Первым на это обратил внимание Ф. Н. Красовский; в последующее время это было подтверждено исследованиями ЦНИИГАиК. В настоящее время американские геодезисты сами признали, что размеры эллипсоида Хейфорда действительно преувеличены.

Ф. Н. Красовский также считал, что применение гипотезы изостазии в градусных измерениях дает эффект, но он всегда указывал на слабые стороны этой гипотезы и на необходимость известной осторожности в оценке выводов, полученных с ее участием.

Заслуга Ф. Н. Красовского состоит в том, что он первый поставил вопрос о привлечении гравитационных материалов для решения задачи о размерах и фигуре Земли, как материалов, не связанных с различного рода предположениями о строении Земли. Первый опыт использования гравиметрических материалов в целях градусных измерений

показал, что высшая геодезия получила новое основание для решения своей задачи, несравненно более совершенное, чем изостазия. В дальнейших исследованиях формы и размеров Земли уже нет необходимости в том произвольном отборе материалов для градусных измерений, который был характерен для прошлого, так как трудами Ф. Н. Красовского, М. С. Молоденского, А. А. Изотова и др. в данный вопрос внесена достаточная ясность.

Теперь гипотеза изостазии утратила значение в высшей геодезии, которое она заняла в свое время без достаточных к тому научных оснований.

Дальнейшие успехи в исследовании размеров и формы Земли могут быть достигнуты только в том случае, если необходимые для этого астрономо-геодезические и гравиметрические материалы будут собираться по определенной программе и плану, подлежаще соображениям для указанной цели. Как видно, для градусных измерений теперь уже недостаточно использования случайных дуг градусных измерений, продолженных, как правило, с целями картографическими.

Тот перечень материалов мировых градусных измерений, который приведен в главе X, в настоящее время можно существенно пополнить только за счет новых материалов по СССР и странам народной демократии, где астрономо-геодезические и гравиметрические работы развиваются довольно быстро. В других странах эти работы ведутся очень медленно или совсем не ведутся. Здесь можно упомянуть только о работах по большой меридиональной дуге в Южной Америке и заканчивающихся работах по дуге  $30^\circ$  меридиана в Африке. Однако указанные работы ведутся по программе старых градусных измерений, мало отвечающих современным научным требованиям.

Американцы на Римском конгрессе Международного Геодезического и Геофизического Союза в 1954 г. заявили о том, что они в недалеком будущем приступят к выводу новых размеров земного эллипсоида, используя для этого, помимо уже известных градусных измерений, материалы по меридиональным дугам Америки и Африки.

Относительно этих выводов можно сказать, что они будут иметь значение не большее, чем многие из известных выводов, так как они будут получены на той же старой методической основе, которая себя уже изжила.

В главе о методах обработки больших астрономо-геодезических сетей Ф. Н. Красовским сформулированы основные принципы уравнивания этих сетей, а также дана подробная разработка способа их уравнивания, известного под названием способа Красовского. Способ Красовского на данном этапе развития геодезической науки является наиболее обоснованным в научном отношении и наиболее доступным для уравнивания больших астрономо-геодезических сетей. Как известно, способ Красовского в 1940 г. был принят для уравнивания астрономо-геодезической сети СССР и таким образом получил практическую проверку на уравнивании такой сети, для которой способ Гельмерта не мог быть применен в силу своей громоздкости. Этот способ получил детальную разработку в инструкции по уравниванию астрономо-геодезической сети СССР, которая разрабатывалась при активном участии Ф. Н. Красовского; им же были одобрены и предложения Д. А. Ларина, существенно упрощавшие уравнивательные вычисления.

В способе Красовского, как и в способе Гельмерта, при уравнивании астрономо-геодезической сети, построенной в виде полигонов, составленных из рядов, звенья триангуляции заменяются геодезическими линиями, для того, чтобы избежать трудности решения большого числа



нормальных уравнений. В настоящее время представляется возможным переход к геодезическим линиям в способе Красовского исключить применением многогруппового метода решения нормальных уравнений по способу И. Ю. Прапис-Працевича и средств новой вычислительной техники. Исключение в способе Красовского перехода к геодезическим линиям делает уравнивание астрономо-геодезической сети более естественным, а главное уменьшает опасность деформации полигонально-уравненных звеньев, образующих полигоны.

Статья «Главная геодезическая основа СССР» была написана в середине 1943 г. в связи с подготовкой к уравниванию астрономо-геодезической сети СССР. В данном томе она печатается полностью по тексту, опубликованному в Сборнике научно-технических и производственных статей по геодезии, картографии, топографии, аэросъемке и гравиметрии, выпуск II за 1943 г.

По своему содержанию статья разделяется на две части, из которых первая часть содержит рекомендации по усовершенствованию полных работ в астрономо-геодезической сети, а вторая — касается вопросов ее обработки. Во второй части повторены те же выводы, что и в Руководстве, но с дополнением их подсчетами деформаций, возникающих в уравненных полигонах астрономо-геодезической сети при применении метода развертывания; здесь же высказаны серьезные соображения относительно необходимости перехода в СССР от эллипсоида Бесселя на новый референц-эллипсоид.

В целом статья не утратила своего значения, а многие вопросы, поставленные в статье, достойны дальнейшей научной разработки.

Следует заметить, что некоторые рекомендации, касающиеся построения государственной геодезической сети, не нашли отражения в практике работ СССР в силу коренных изменений, происшедших в ее схеме и программе. Современная схема построения государственной геодезической сети не предусматривает построение рядов триангуляции II класса, а роль главной геодезической основы выполняет сплошная сеть триангуляции II класса, по своей точности не отличающаяся от триангуляции I класса.

Ряды триангуляции I класса выполняют очень важные функции в общей системе государственной геодезической сети. Их значение будет сохраняться до тех пор, пока в том или ином обширном районе или во всем государстве не будет построена высокоточная сплошная сеть триангуляции, которая позволит более строго решать все вопросы, которые сейчас решаются триангуляцией I класса.

Исходя из особенностей служебной роли рядов триангуляции I класса признано возможным существенно не изменять их конструкции, оставив для построения ту экономическую форму, которую в свое время рекомендовал Ф. Н. Красовский.

Как и прежде, в государственной геодезической сети не предусматривается определение фундаментальных азимутов Лапласа, так как роль этих азимутов в укреплении всей системы азимутов Лапласа остается не выясненной.

Вообще следует сказать, что происходящие изменения в требованиях к геодезическим сетям поставило решение вопроса о схеме и программе построения государственных геодезических сетей в новое положение, которого, конечно, не мог предвидеть Ф. Н. Красовский.

*С. Г. Судаков.*

# РУКОВОДСТВО ПО ВЫСШЕЙ ГЕОДЕЗИИ

## ЧАСТЬ II

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Первое издание моей книги «Курс высшей геодезии, часть II» относится к концу 1932 г.; издание это тогда сильно затянулось, рукопись была мною сдана в конце 1929 г., а к составлению ее я приступил в 1927 г. В тот период основные геодезические работы в СССР уже получили солидную постановку, но развитие их, которое можно было считать большим в европейском масштабе, однако было еще скромным по сравнению с запросами повой жизни в СССР; только с 1932 г. начинается в наших основных астрономо-геодезических работах то надлежащее их развитие, которое отвечает почти в полной мере запросам в СССР к главной геодезической основе как со стороны практической, так и со стороны научной. В период 1926—1929 гг. только еще вставляли перед советскими геодезистами вопросы надлежащей обработки значительной астрономо-геодезической сети, но никто не предполагал, что уже в 1936 г. эта сеть распространится за пределы Европейской части СССР, дойдет до Владивостока и сделается уже к этому году не только значительной, но и колоссальной. Научные задачи высшей геодезии и научное использование астрономо-геодезических материалов укладывались тогда в те рамки, которые были установлены видными заграничными учеными к 1910—1915 гг. При этом характерным являлась неразработанность вопросов по совместному использованию астрономо-геодезических и гравиметрических материалов в ряде научных задач геодезии и даже отсутствие постановки таких вопросов. Характерным являлось и то обстоятельство, что в вопросах обработки и вычисления геодезических материалов, покрывающих значительную территорию, господствовал подход, который следует назвать «картографическим»: если все благополучно получается в пределах одного-двух полигонов триангуляции I класса, то более не о чем и беспокоиться с точки зрения запросов практики. Несомненно, в первом издании Курса высшей геодезии, часть II отразилось многое из того, что вело в указанный период к суженной постановке вопросов и задач высшей геодезии.

В настоящем издании моей книги «Руководство по высшей геодезии, часть II» должно было учесть, что советские основные астрономо-геодезические работы уже охватывают громаднейшую территорию, что в ближайшее время возможно встанет вопрос совместной обработки материалов их с материалами астрономо-геодезических работ по США и по Западной Европе. Очевидно, на очередь встает усиление математической части учебного курса по высшей геодезии. Но предстоящая перед геодезистами перспектива будущего, полагаю, призывает вообще к более широкому использованию средств математики в геодезии, к повой разработке ряда вопросов так называемой «сфероидической геодезии», стремясь при этом к постановке этих вопросов, как задач



математических, и возможно приближаясь к *общему их решению*. Та связь геодезии с математикой, которая была в свое время так блестяще и гениально проведена Гауссом и Бесселем, вновь выдвигается советской действительностью. Конечно, не мне по плечу братья за новое продолжение работ Гаусса и Бесселя; но дать ту трактовку хотя бы некоторых вопросов высшей геодезии, которая вытекает из *общих математических оснований* и которая, вероятно, усилит подготовку будущих геодезистов в использовании ими в будущем математики, я считал уместным и нужным в новой переработке курса высшей геодезии.

С 1932 г. в СССР по постановлению Правительства учреждается общая гравиметрическая съемка нашей страны; это предприятие громаднейшего значения и в смысле научном, и в смысле практическом успешно осуществляется с тех пор. К этому времени вопрос использования гравиметрических материалов в целях геодезических получил для нас особую остроту. Научные работы в этом направлении по Центральному научно-исследовательскому институту геодезии, аэросъемки и картографии\*, дали определенные и значительные результаты. Вопросы о программах градусных измерений, о задачах этих градусных измерений, о методах обработки используемых совместно астрономо-геодезических и гравиметрических материалов при получении выводов из градусных измерений, вопросы установления исходных геодезических дат в СССР и вывода эллипсоида из астрономо-геодезической сети СССР — все эти вопросы получают новое освещение и новую разработку. Развитие гравиметрических работ в СССР позволило поставить строго вопрос о переходе от геоида к эллипсоиду при обработке главной геодезической основы; этот вопрос разработан в последние годы мною, и полагаю, что при нашей огромной территории это имеет практическое значение. Конечно, нужно учитывать и то, что надлежащее решение этого вопроса вызывается, по моему мнению, и достоинством Советского Союза: вместо неопределенных математически, искажающих геометрическую ясность и стройность высшей геодезии, методов обработки геодезических материалов, *«практически»*, однако, более или менее приемлемых, следует перейти к строго обоснованным геометрически методам, хотя бы это и влекло за собой добавочную работу; если же эта работа мала, благодаря наличию соответственных материалов, и в частности гравиметрических, то такой переход для передовой страны обязателен.

Все эти новые установки и должно было отразить в новом издании курса высшей геодезии, часть II. Соответственно сказанному, в новом издании Руководства по высшей геодезии внесены следующие изменения и дополнения.

В главе II «Исследование кривых на эллипсоиде», используя общий математический аппарат, решается задача определения угла между геодезической линией и нормальным сечением и дается уравнение для «приведенной» длины геодезической линии. Далее, в главе III «Решение сфероидических треугольников», применяя гауссову «Общую теорию поверхностей», дается связь между геодезическими полярными и прямоугольными координатами с ошибками лишь на величины шестого порядка малости. Это позволяет, во-первых, дать более точное и более изящное решение больших сфероидических треугольников (со сторонами до 400 км), а во-вторых, в главе IV («Вычисление геодезических широт, долгот и азимутов») дать вывод формул

\* В дальнейшем этот Институт именуется ЦНИИГАиК.

Крюгера для прямоугольных сфероидических координат для расстояний между точками до 800 км — правда для частного случая, когда начало координат совпадает с одной из рассматриваемых точек. Далее в той же главе IV даются для сфероидических прямоугольных координат точнейшие формулы для вычисления геодезических широт, долгот и азимутов, также отвечающие расстояниям между точками до 800 км. Изложение перечисленных вопросов в составе глав II, III и IV, думается, хорошо иллюстрирует применение математических методов и выгоды применения этих методов в высшей геодезии; конечно, это применение своеобразное, оно потребовало соответствующих подходов, которые из математики не вытекают. Учащиеся на этих вопросах получают некоторое новое вооружение, которое не давалось в прежних курсах, и надеюсь, на этой основе в будущем дадут уже свои, важные результаты. Новая переработка указанных вопросов сопровождается в ряде случаев упрощением выкладок.

В главе V заметно сокращен вопрос о прямоугольных сферических координатах Зольднера и о проекции Зольднера; это обусловлено, конечно, тем, что в настоящее время практическое значение этого вопроса утратилось. Но за то в этой же V главе заново и достаточно представлен вопрос о сфероидических прямоугольных координатах. Нам представляется, что именно прямоугольные сфероидические координаты будут основными координатами практической геодезии в будущем. Для получения их по измеряемым в геодезических работах величинам еще нет прямого и общего решения, но это не умаляет их значения и выгод их применения. Эти выгоды уже ощущаются в главе VI — «О прямоугольных плоских координатах Гаусса-Крюгера». Эта глава VI переработана, и переработка именно заключается в применении прямоугольных сфероидических координат и соотношений, им соответствующих, причем получается и упрощение выкладок и выявление связи проекции с натурой.

В главе IV дается вывод так называемых формул «с средней широтой и средним азимутом» для переноса геодезических координат и азимутов; этого не было в прежнем издании. Теперь это позволило значительно сократить главу VII — «О применении теории конформного отображения эллипсоида на шаре», оставив в ней полное освещение методов Гаусса, имеющих такое важное общенаучное значение, но устранив ряд утомительных выкладок. Мы исключили также из этой главы метод Шрейбера «двойного проектирования» эллипсоида на плоскость, который по введению в геодезию прямоугольных сфероидических координат вообще утратил свое значение. Мы также исключили изложение формул Гельмерта переноса геодезических координат и азимутов на значительные расстояния потому, что в настоящее время эти формулы должно считать замененными новыми формулами, вывод которых дается в главе IV.

Глава IX «Об отклонениях отвесных линий и исследовании отступлений геоида от эллипсоида» не только существенно переработана, но и существенно дополнена. Здесь освещены результаты работы о континентальных ондуляциях геоида и общие результаты гравиметрических и астрономо-геодезических работ; здесь дается обоснование астрономо-гравиметрического нивелирования, излагаются способы определения профилей геоида и устанавливаются методы перехода от геоида к референц-эллипсоиду на основе совместного использования астрономо-геодезических и гравиметрических материалов;

здесь приводятся интереснейшие выводы из работ ЦНИИГАиК. Наконец, здесь освещается связь постановки основных астрономо-геодезических, геодезических и топографических работ с отклонениями отвесных линий и с отступлениями геоида от формы эллипсоидальной. В этой главе уже выявлена связь геодезии с гравиметрией и связь точной и надлежащей обработки значительных триангуляций с определенной программой астрономических и гравиметрических работ. В этой же главе даются новые дифференциальные формулы, обеспечивающие точные результаты в обработке градусных измерений огромного протяжения.

Глава X — «О градусных измерениях» также значительно переработана. Переработка обусловлена, во-первых, опять-таки вопросом совместного использования астрономо-геодезических и гравиметрических материалов; во-вторых, новой постановкой задач градусных измерений, которая выдвинута в СССР в 1934 г. в виде предложения ввести астрономо-гравиметрическое нивелирование по дугам градусных измерений (а также и для целей точной обработки значительной триангуляции), что и было начато осуществлением по ЦНИИГАиК уже в 1935 г.; в третьих, огромным новым материалом по СССР, собранным к настоящему времени, и результатами использования этого материала. Полагаю, что в этой главе достаточно выявлены новые подходы к исследованию общей фигуры Земли и освещено громадное значение геодезических работ по СССР, обусловленное именно тем, что при постановке их, в силу указаний Коммунистической партии *практическое использование непременно связывается с научным использованием.*

При издании в 1938—1939 гг. моего «Руководства по высшей геодезии, часть I» во втором выпуске этой книги подробно изложены методы обработки геодезических сетей, которые частью ранее были отнесены во II часть первого издания курса высшей геодезии. В настоящем издании во II части Руководства по высшей геодезии оставлено изложение методов обработки только астрономо-геодезических сетей. Это выполняется в XI, последней, главе книги. Здесь также дается много нового материала, и ряд вопросов отработан заново — в соответствии с тем, что точная обработка нашей грандиозной астрономо-геодезической сети стоит на очереди; целому ряду будущих инженеров-геодезистов предстоит принять в этой большой работе то или иное участие, и я стремился дать им в этой книге все, чем располагаю.

Ввиду того, что геодезическое основное производство (ГУГК) издало и издает за последние годы прекрасные пособия и таблицы по геодезическим вычислениям, я счел возможным в настоящей книге сократить число примеров на вычисления.

Не мне, конечно, судить, насколько новые переработки вопросов высшей геодезии, исполненные мною и потребовавшие, конечно, не мало труда, являются удачными и целесообразно направленными. За мной моя сорокалетняя деятельность, моя работа по ЦНИИГАиК, моя связь с Главным управлением геодезии и картографии, мое знание развития геодезической деятельности в СССР. Это дает мне уверенность, что настоящая книга является шагом вперед по сравнению с первым изданием II части курса высшей геодезии, относящимся к 1932 г., и что по ней студенты-геодезисты лучше ознакомятся со своей специальностью.

Ряд параграфов главы IX и главы X требует знакомства с курсом «Гравиметрии и фигуры Земли», которое у питомцев геодезического факультета Московского института инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии имеется в достаточной мере.

## Глава I

# ЗЕМНОЙ СФЕРОИД

### § 1. Основные размеры

Из исполненных до сих пор в разных странах градусных измерений мы имеем к настоящему времени целый ряд выводов экваториальной оси и полярного сжатия земного эллипсоида. Приведем в таблице 1 важнейшие из этих выводов.

Таблица 1

Автор	Год	Большая полуось в метрах	Сжатие
Деламбр . . . . .	1800	63 75 653	1 : 334,0
Вальбек . . . . .	1819	63 76 896	1 : 302,8
Бессель . . . . .	1841	63 77 397	1 : 299,15
Кларк . . . . .	1866	63 78 206	1 : 295,0
Кларк . . . . .	1880	63 78 249	1 : 293,47
Хейфорд . . . . .	1910	63 78 388	1 : 297,0
Красовский . . . . .	1936	63 78 210	1 : 248,6
Гельмерт . . . . .	1907	63 78 200	1 : 298,3
ЦНИИГАиК <sup>1</sup> . . . . .	1940	63 78 245	1 : 298,3

Вывод Деламбра имеет лишь историческое значение, как первый достаточно обоснованный вывод размеров и сжатия земного эллипсоида; длина четверти земного меридиана с большой полуосью и сжатием по Деламбру получается равной ровно 10 000 000 м, и, следовательно, именно в результате работы Деламбра была точно установлена длина метра.

Вывод Вальбека мы приводим по двум причинам: во-первых, Вальбек применил в своей обработке материалов по имевшимся к тому времени градусным измерениям способ наименьших квадратов, предвосхитив, следовательно, идеи Гаусса; во-вторых, эллипсоид Вальбека использовался при обработке целого ряда старых русских триангуляций, выполненных до 1880 г., и, следовательно, с геодезическими результатами, отнесенными к этому эллипсоиду, советским геодезистам возможно придется иметь еще дело.



Вывод Бесселя основан на использовании дуг градусных измерений, имеющих общую протяженность в  $50^\circ$ ; в числе этих дуг — часть знаменитой русской дуги Струве ( $8^\circ$ ), дуга западно-европейского меридиана ( $15^\circ$ ), часть главной меридианной дуги, измеренной англичанами в Индии ( $16^\circ$ ) и ряд мелких, ничтожных дуг. Его вывод земного эллипсоида был принят в свое время, как имеющий значительный вес. Однако его экваториальная полуось преуменьшена примерно на  $800\text{ м}^*$ .

Первый и второй выводы английского геодезиста Кларка основаны на значительно большем материале, чем у Бесселя; общее протяжение дуг градусных измерений, использованных Кларком, около  $75^\circ$ ; значительную роль в выводе Кларка сыграла большая русская дуга Струве, протяжением в  $25^\circ 20'$  и большая индийская дуга протяжением в  $21\frac{1}{2}^\circ$ . Как увидим в главе о градусных измерениях, географическое положение этих обеих больших дуг, командующих в выводе Кларка, работает, в силу действительного расположения больших волн геоида, на увеличение выводимого из них сжатия эллипсоида. Поэтому выводы Кларка, особенно второй, в отношении полученного из них значения сжатия, приходится поставить под вопросом. Эллипсоид 1866 г. принят в геодезических работах США, Канады и Мексики.

Эллипсоид Хейфорда был выведен, используя материалы только по астрономо-геодезической сети США, правда очень обширной; протяжение дуг этой сети около  $150^\circ$ , т. е. Хейфорд располагал «линейным» материалом гораздо большим, чем Кларк, но размещенным плотно на площади одной страны. Существенно новым в выводе Хейфорда явилось применение теории изостатической компенсации в земной коре к обработке материалов градусных измерений США. Об изостатической компенсации сказано в введении к курсу высшей геодезии (см. стр. 34, часть I, вып. 1). Применение этой теории изостазии является, несомненно, значительным шагом вперед в вопросах надлежащей обработки материалов градусных измерений; оно привело к блестящему устранению противоречий между астрономической и геодезической частью в астрономо-геодезической сети США; вывод сжатия совпал у Хейфорда с выводом из измерений силы тяжести, считающимся наиболее надежным. Неудивительно, что вывод Хейфорда был поставлен на первое место, принимая, конечно, во внимание и значительность материалов по США. Однако все-таки нет оснований приписывать ему общее значение, так как использованные материалы относятся к одной, хотя и большой, стране.

Вывод проф. Ф. Н. Красовского<sup>2</sup> основан на использовании материалов Хейфорда по США, но с некоторой, имеющей значение, переработкой их; материалов по Западной Европе; больших материалов по СССР, собранных советскими геодезистами до 1934 г. — эти материалы впервые используются в работах Красовского вместе с материалами по США и по Западной Европе; при общей обработке всех этих значительных материалов применен, кроме того, учет влияния трехосности земного эллипсоида. Материалам по США противопоставлен почти столь же большой материал по Старому Свету; учет влияния трехосности, вследствие значительности протяжения астрономо-геодезической сети СССР по долготе, получает при совместном использовании градусных измерений США и СССР существенно большую надежность, чем в предшествующих выводах.

\* Отчасти из-за неверных данных, принятых Бесселем по английским дугам.

В выводе Гельмерта для сжатия принято его значение, выведенное из измерений силы тяжести, а полуось получена как среднее по весам из выводов по градусным измерениям Европы и из вывода 1906 г. по американским материалам.

Надежное определение земного сжатия из градусных измерений является особенно трудной задачей: нужно иметь значительное число больших дуг градусных измерений, притом соответственно распределенных географически. Мнение, что сжатие Земли следует принимать то, которое выводится из обработки определений силы тяжести, т. е. равное  $1 : 297^*$ , имеет за собой довольно веские аргументы. Нужно сказать, что числа третьей и четвертой графы табл. 1 тесно между собою связаны: если задаваться другим значением сжатия, чем приведенное в некоторой строке табл. 1, то из тех же градусных измерений мы получим в этой строке заметно иное значение для большой полуоси. Результат Деламбура для большой полуоси при перечислении его на сжатие  $1 : 297$  увеличится примерно на 1200 м.

Недостаточность материалов, использованных в проделанных до настоящего столетия выводах из градусных измерений размеров и сжатия земного эллипсоида, является одной из причин ненадежности этих выводов, при которой вообще нельзя было ставить задачи по выводу размеров и сжатия общего земного эллипсоида, представляющего фигуру Земли в целом. Современные астрономо-геодезические материалы примерно в десять раз превышают по линейному протяжению дуг меридианов и параллелей материалы, использованные Кларком; с другой стороны, эти современные материалы относятся не только к Западной Европе и Индии, но и к СССР, США, Африке, Индо-Китаю и даже отчасти к Австралии. Другими словами, и объем современных градусных измерений, и географическое их размещение, и изменения в их программах и в постановке позволяют рассчитывать на заметное приближение геодезических выводов к установлению общего земного эллипсоида. Конечно, большую роль в этом деле играет то развитие астрономо-геодезических работ, которое мы имеем в СССР.

Вывод проф. Красовского<sup>2</sup> вряд ли ошибочен в размере большой полуоси более чем на 100 м, и в выводе сжатия — более чем на полторы единицы в знаменателе сжатия.

В заключение параграфа напомним из введения к курсу высшей геодезии определения геоида и общего земного эллипсоида (стр. 16 и 25, части I, вып. 1 Руководства по высшей геодезии). Поверхностью геоида мы называем ту основную уровенную поверхность, которая совпадает с водной поверхностью океанов, рассматриваемых в состоянии полного их покоя, полного равновесия; на океанах и морях поверхность геоида определяется «средними» уровнями их; на континентах продолжение средней уровенной поверхности океанов, всюду перпендикулярное к направлениям отвесных линий, образует соответственную «континентальную» часть поверхности геоида. Общий земной эллипсоид определяется так: 1) центр его совпадает с центром тяжести Земли, и плоскость его экватора — с плоскостью земного экватора; 2) объем этого эллипсоида равен объему геоида; 3) сумма квадратов высотных отступлений геоида от общего эллипсоида должна быть наименьшей.

\* Или равное  $1 : 298,3$  по последним выводам Международного Геодезического Союза.

Отступления геоида от общего земного эллипсоида не превышают 150 м. Общий земной эллипсоид представляет наилучшим образом геоид в целом, и задача вывода именно этого эллипсоида должна стоять при обработке градусных измерений.

## § 2. Референц-эллипсоид

Все измеренные на геодезических пунктах величины затем относят «к уровню моря», т. е. редуцируют их на поверхность геоида. Таким образом, в результате мы можем считать геодезические сети расположенными на поверхности геоида. Однако сложность и главное неизвестность этой поверхности вынуждают нас отказаться от обработки и вычисления геодезических сетей на поверхности геоида. В геодезии мы заменяем геоид некоторым эллипсоидом вращения. Вернее, мы вводим некоторую вспомогательную поверхность, и именно поверхность эллипсоида вращения, достаточно близкую к поверхности геоида в пределах интересующей нас более или менее значительной территории; на эту поверхность мы должны перенести геодезическую сеть, полученную на геоиде в результате приведения измеренных базисов, углов и направлений «к уровню моря». Проекции геодезических точек на выбранную вспомогательную эллипсоидальную поверхность определяются на ней в той или иной системе эллипсоидальных координат, самые же геодезические точки будут определяемы этими координатами их проекций и высотами  $h$  их над поверхностью вспомогательного эллипсоида.

Эллипсоид, определенно расположенный в земном теле, на поверхность которого, достаточно близкую к поверхности геоида, переносятся все геодезические пункты и на ней определяются затем в той или иной системе координат, называется референц-эллипсоидом. Коротче говоря, при определении положения геодезических пунктов референц-эллипсоид заменяет геоид, и его поверхность есть та, на которой ведется обработка и вычисление геодезических сетей данной страны.

При выборе референц-эллипсоида прежде всего приходится решать вопрос о размерах его осей и значении сжатия. Этот вопрос приходится ставить в связь с вопросом перехода от геодезической сети на геоиде к ее проекции на поверхность референц-эллипсоида. Очевидно, что такой переход возможен к выполнению с достаточной строгостью только тогда, когда мы, хотя бы и приближенно, знаем поверхность геоида в интересующей нас ее части и положение этой поверхности относительно референц-эллипсоида. Прежний взгляд, что расстояния и направления, взятые на поверхности геоида, можно считать изменяющимися пренебрегаемо мало при переносе их на референц-эллипсоид — должен быть оставлен. Это будет доказано во второй половине нашей книги. Чем значительнее площадь, покрываемая астрономо-геодезической сетью, тем более строго приходится при ее вычислении подходить к вопросу надежного перехода от сети на геоиде к ее проекции на референц-эллипсоид. Должно сказать, что не только указанный старый взгляд господствует в геодезии до сих пор, но обычно не располагают и теми необходимыми данными, которые хотя бы грубо давали возможность установить расположение соответственных частей двух поверхностей — геоида и референц-эллипсоида. Исключением является пока только астрономо-геодезическая сеть СССР (и до известной степени — сеть США). Понятно, что единственным выходом при этих условиях является выбор размеров референц-эллипсоида и установление его ориентировки та-

ким образом, чтобы обусловить возможно большую близость его поверхности к поверхности геоида в пределах рассматриваемой территории. Мы в последующих главах вернемся к этому вопросу, сейчас же ограничимся указанием, что требуемая близость обеих поверхностей должна быть очень тесная (в пределе 10 м по высоте), и что она не всегда осуществима из-за наличия на большой территории значительных волн геоида.

Казалось бы, что если мы располагаем данными для редуцирования элементов геоида на референц-эллипсоид, то тогда выбор этого последнего допускает значительную свободу. Но, конечно, чем значительнее редукции, тем более хлопотливо их надежное определение и тем ответственнее становится их вывод; но, кроме того, нецелесообразно в геодезии на референц-эллипсоиде получать расстояния, азимуты, горизонтальные углы, площади более или менее заметно (и притом заведомо) отличающиеся от соответственных им элементов в натуре. Поэтому и в этом случае, допуская некоторую свободу в выборе референц-эллипсоида, все-таки нужно стремиться к возможно большей близости его поверхности к поверхности геоида в пределах рассматриваемой территории.

Принятый в СССР эллипсоид Бесселя вследствие погрешности на 800 м в размере его экваториальной полуоси, отступает от геоида на 400 м в районах Дальнего Востока, что, между прочим, вызывает огромные по величине редукции расстояний. Понятно, здесь, в первых параграфах курса, мы даем только некоторые установки; детально вопрос о значении выбора того или иного эллипсоида и все вопросы, с этим связанные, будут разобраны в последних главах книги.

Референц-эллипсоид должен быть определенно и надлежаще установлен в теле Земли или, как говорят, надлежаще «ориентирован». То ориентирование референц-эллипсоида, которое обычно применяется в геодезических работах, — именно ориентирование по астрономическим данным в исходном пункте  $A$  государственной триангуляции может быть представлено так. Полагая геодезическую широту, геодезическую долготу и исходный геодезический азимут в этом исходном пункте соответственно равными астрономическим широте, долготе и азимуту в том же исходном пункте и одновременно принимая высоту  $h_0$  геоида над референц-эллипсоидом в исходном пункте  $A$  государственной триангуляции равной нулю\*, мы тем самым получаем: 1) совпадение проекции точки  $A$  на референц-эллипсоид с самой точкой  $A$  на поверхности геоида; 2) совпадение плоскости геодезического меридиана точки  $A$  (плоскости, проходящей на референц-эллипсоиде через нормаль к его поверхности в  $A$  и малую ось этого эллипсоида) с плоскостью астрономического меридиана в  $A$ ; 3) совпадение нормали в  $A$  к эллипсоиду с отвесной линией в  $A$ . Очевидно, при такой ориентировке референц-эллипсоид располагается вполне определенно в земном теле и определенным образом связывается с геоидом. Очевидно, что эта ориентировка при безошибочности исходной широты и азимута обуславливает параллельность малой оси и плоскости экватора референц-эллипсоида соответственно с осью вращения Земли и плоскостью земного экватора. Но, конечно, центр эллипсоида не будет вообще находиться ни на оси вращения Земли, ни в плоскости земного экватора. Однако эта ориентировка

\* Т. е. принимаем высоту центра геодезического знака в  $A$  над уровнем моря, выведенную из нивелировки, равной высоте его же над поверхностью референц-эллипсоида.

референц-эллипсоида не может быть признана соответствующей требованиям наилучшего расположения его относительно геоида. Если в исходном пункте  $A$  имеется более или менее значительное отклонение отвесной линии от нормали к общему земному эллипсоиду, то это обусловит заметный сдвиг референц-эллипсоида относительно общего земного эллипсоида и относительно геоида в целом при ориентировке референц-эллипсоида по астрономическим данным в точке  $A$ . Если в исходном пункте  $A$  имеем заметное повышение или понижение геоида относительно общего земного эллипсоида, то принятие  $h_0$  равным нулю поведет также к сдвигу референц-эллипсоида относительно геоида в целом. Вопрос об этих сдвигах будет рассмотрен в соответствующей главе нашего курса. Сейчас уместно отметить, что при неудачном выборе исходного пункта  $A$  эти сдвиги могут по направлению нормали к поверхности референц-эллипсоида достигать в удаленных от  $A$  точках значений в 200—300 м, и влияние их при переходе от геоида к референц-эллипсоиду будет непренебрегаемым. Надлежащая обработка значительной астрономо-геодезической сети требует предварительного определения в исходном пункте  $A$  отклонения отвеса от нормали к общему земному эллипсоиду или в крайнем случае — от нормали к наилучше подходящему для данной страны эллипсоиду, и кроме того — определения высоты  $h_0$  геоида в точке  $A$  над общим земным эллипсоидом или в крайнем случае — над поверхностью наилучше подходящего эллипсоида. Зная указанные элементы в  $A$ , мы можем переориентировать референц-эллипсоид так, чтобы при этом обеспечить везде возможно большую близость его поверхности к поверхности геоида и тем самым или заметно уменьшить погрешности, вытекающие из-за пренебрежения редукциями при переходе от геоида на референц-эллипсоид, или сделать эти редукции малыми и удобно подсчитываемыми.

Уместно также отметить, что два референц-эллипсоида с одними и теми же размерами и сжатием, но ориентированные по астрономическим данным двух различных исходных пунктов — например пункта в Пулкове и пункта в Ташкенте — занимают различное положение в теле Земли, и сдвиг одного эллипсоида относительно другого полностью обусловлен различием отклонений отвесных линий в том и другом пункте. Поэтому недостаточно указывать, что триангуляция вычисляется на эллипсоиде Бесселя или на эллипсоиде Кларка, и т. п., но нужно еще указывать, по какому пункту и по каким данным в нем этот эллипсоид ориентирован. Вычисление разных частей государственной триангуляции на референц-эллипсоидах, одних и тех же по размерам и сжатию, но ориентированных по астрономическим данным в различных исходных пунктах, равносильно введению для различных частей государства различных систем геодезических координат, связь между которыми может быть установлена лишь косвенным путем и притом не в полной мере. Ясно, что такой порядок является недопустимым.

### § 3. Системы координат, применяемые в высшей геодезии

В дальнейшем мы допускаем, что переход на референц-эллипсоид выполнен, и займемся теперь вопросами геометрии на поверхности эллипсоида вращения.

Будем называть через  $a$  длину большой полуоси эллипсоида, через  $b$  — длину его малой (полярной) полуоси. Проведем через некоторую

точку  $M$  поверхности эллипсоида (черт. 1) плоскость  $PMP_1$ , содержащую полярную ось  $PP_1$ ; сечение поверхности эллипсоида этой плоскостью будет меридианный эллипс  $PEP_1E_1$  точки  $M$ . Центр эллипсоида пусть находится в  $O$ , экватор эллипсоида пусть представляется окружностью  $E_1KE$ .

Для меридианного эллипса имеем эксцентриситет  $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ , так

называемый «второй» эксцентриситет  $e' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$ .

Сжатие земного эллипсоида  $\alpha = \frac{a - b}{a}$ . Между  $e$  и  $e'$  существуют соотношения

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}; \quad e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2}$$

Далее имеем

$$\alpha = 1 - \frac{b}{a}; \quad b = a\sqrt{1 - e^2};$$

$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2}; \quad e^2 = 2\alpha - \alpha^2.$$

Приближенно

$$e^2 = 2\alpha; \quad e^2 = 1 : 150.$$

В высшей геодезии приходится еще пользоваться такими вспомогательными при вычислениях величинами

$$n = \frac{a - b}{a + b}; \quad m^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}; \quad (1)$$

$$c = \frac{a^2}{b} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}}. \quad (2)$$

Величина  $c$  равна радиусу кривизны меридианного эллипса на полюсах эллипсоида. Для эллипсоида Красовского<sup>2</sup> имеем:

$$a = 637\,8245$$

$$\lg a = 6.804\,701\,1973$$

$$b = 635\,6863$$

$$\lg b = 6.803\,242\,8531$$

$$c = 639\,9699$$

$$\lg c = 6.806\,159\,5414$$

$$e^2 = 0.006\,693\,421\,62$$

$$\lg e^2 = 7.825\,648\,1824_{-10}$$

$$e'^2 = 0.006\,738\,525\,41$$

$$\lg e'^2 = 7.828\,564\,8707_{-10}$$

$$\alpha = 1 : 298,3$$

$$\lg \alpha = 7.525\,346\,7466_{-10}$$

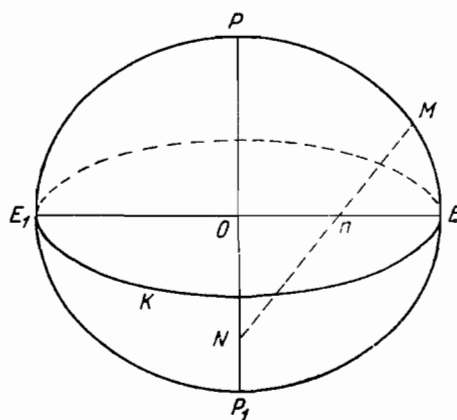
$$\sqrt{1 - e^2} = 0.996\,647\,6701$$

$$\lg \sqrt{1 - e^2} = 9.998\,541\,6558_{-10}$$

$$\sqrt{1 + e'^2} = 1.003\,363\,6057$$

$$\lg \sqrt{1 + e'^2} = 0.001\,458\,3442_{-10}$$

1. В теоретических выводах иногда полезно пользоваться системой прямоугольных прямолинейных координат  $X, Y, Z$ , принимая при этом центр  $O$  эллипсоида (черт. 2) за начало координат, располагая ось  $OZ$  по полярной оси эллипсоида, а оси  $OX$  и  $OY$  — в плоскости экватора эллипсоида, причем плоскость  $ZOX$  берется совпадающей с плоскостью первого меридиана  $PEP_1$ , а, следовательно, плоскость  $ZOY$  совпадает с меридианом, имеющим долготу  $90^\circ$ .



Черт. 1

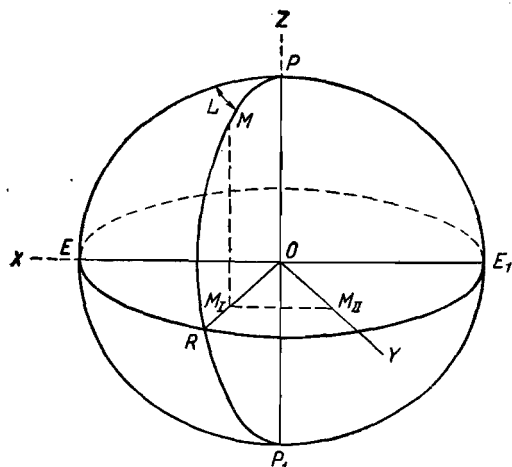


2. Называя через  $L$  геодезическую долготу точки  $M$ , т. е. угол между плоскостями меридианов  $PEP_1$  и  $PMP_1$ , можем определить положение точки  $M$  этой долготой  $L$  и прямоугольными координатами  $MM_1 = y$  и  $OM_1 = x$  (черт. 3), взятыми в плоскости меридианного эллипса  $PMP_1$  и отнесенными к его центру и осям. Именно ось  $Ox$  располагаем по большой оси  $OR$  эллипса  $PMRP_1$ , а ось  $Oy$  — по малой его оси  $OP$ .

Очевидно, имеем

$$y = Z; \quad x = \sqrt{X^2 + Y^2}; \quad X = x \cos L; \quad Y = x \sin L. \quad (3)$$

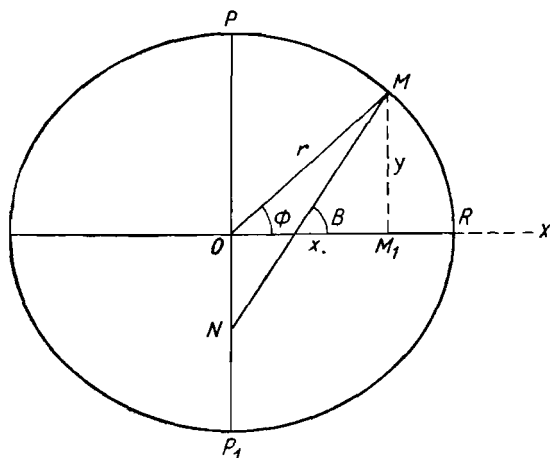
Система  $L, x, y$  также применяется только в теоретических выводах.



Черт. 2.

3. Следующая система координат образуется геодезической широтой  $B$  и геодезической долготой  $L$ . Геодезическая широта точки  $M$  есть угол, образуемый нормалью в этой точке к поверхности эллипсоида с плоскостью его экватора; определение геодезической долготы только что было дано выше. Так как нормаль  $MN$  (черт. 3) к поверхности эллипсоида лежит в плоскости меридиана  $PRP_1$  точки  $M$ , то, очевидно, геодезической широте равен угол этой нормали с большой осью  $OR$  меридианного эллипса  $PRP_1$ . Геодезические широты и долготы, или

«геодезические координаты», являются главными координатами в высшей геодезии. Система  $B$  и  $L$  является наиболее удобной *общей для всей Земли* координатной системой и наиболее удобной для связи всех геодезических результатов и материалов всех съемок в одно общее це-

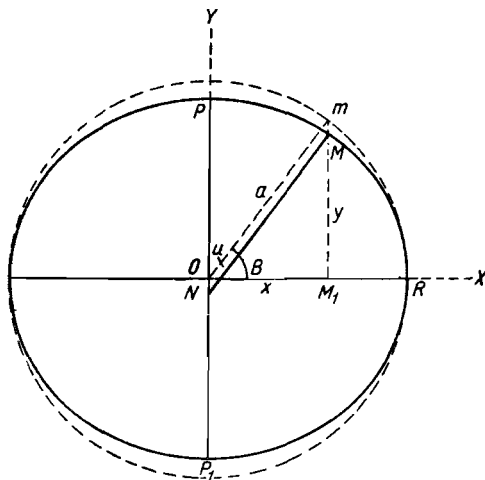


Черт. 3.

лое, если эти съемки покрывают значительные сплошные площади или ведутся в значительных, но отдельных друг от друга районах. В научных задачах геодезии существенную роль играет сравнение направлений

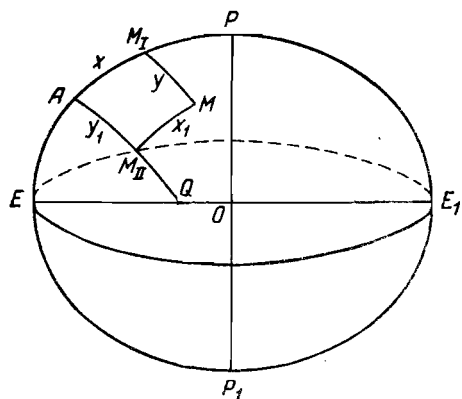
нормалей к эллипсоиду, построенных в значительном числе геодезических точек, с направлениями отвесных линий в тех же точках, и, конечно, система  $B$  и  $L$  является той самой, которая непосредственно отвечает этим запросам. В картографии основными линиями на каждой карте являются меридианы и параллели, определяемые уравнениями  $L = c_1$  и  $B = c_2$ .

4. Под геоцентрической широтой  $\Phi$  точки  $M$  понимают угол радиуса-вектора  $OM$  (черт. 3) с плоскостью экватора эллипсоида или, что все равно, с большой осью  $OR$  эллипса  $PMRP_1$ . Присоединяя к  $L$  геоцентрическую широту  $\Phi$  точки  $M$ , мы этим вполне определяем ее положение. Эта система координат употребляется в некоторых вопросах астрономии (расчет затмений, покрытий звезд Луной) и нередко в картографии. При применении в картографии ряда проекций сперва выгодно перейти от эллипсоида к шару, а затем уже полученное изображение эллипсоида на шаре переносить на плоскость в избранной картографической проекции. При этом переход от эллипсоида к шару может быть получен путем переноса точек эллипсоида по их радиусам-векторам (до встречи со сферой); тогда долгота  $L$  сохраняется, а широта  $B$  заменится геоцентрической широтой  $\Phi$ .



Черт. 4.

5. Описав из  $O$ , как из центра, в плоскости эллипса  $PMRP_1$  окружность радиуса  $OR = a$  (черт. 4), продолжим ординату  $MM_1$  до встречи ее с этой окружностью в  $m$ ; соединив  $m$  с  $O$ , назовем угол  $mOR$  приведенной широтой  $u$  точки  $M$ . Приведенная широта вместе с долготой  $L$  образует пятую систему координат. Широта  $u$  применяется с успехом при теоретических разработках вопросов, относящихся до передачи геодезических координат и азимутов на значительное расстояние; поэтому вообще в теоретической части высшей геодезии приведенная широта  $u$  находит достаточно обширное применение. Практического значения эта широта, конечно, не имеет вовсе.



Черт. 5.

### Поверхностные координаты.

6. Прямоугольные сферические координаты. Примем некоторый меридиан  $PAP_1$  (черт. 5) за осевой и точку  $A$  за нем, заданную ее геодезической широтой и долготой, за начало координат. Абсциссы  $x$  будем откладывать от  $A$  по меридианному эллипсу  $PAP_1$  считая их положительными

к северу от  $A$  и отрицательными — к югу от  $A$ . Для определения точки  $M$  проводим из нее геодезическую линию  $MM_1$  (линию кратчайшего расстояния на эллипсоиде вращения), которая в  $M_1$  пересекала бы осевой меридиан под прямым углом. Длина криволинейного отрезка  $MM_1$  представит ординату  $y$  точки  $M$  в рассматриваемой системе прямоугольных сфероидических координат. Эти прямоугольные сфероидические координаты  $x$  и  $y$  являются прямым обобщением так называемых прямоугольных сферических координат по Зольднеру, применявшихся широко до 1919 г. (с давних пор) в Австрии и других странах в землемерных и геодезических работах по земельному кадастру, в горном деле и т. п.

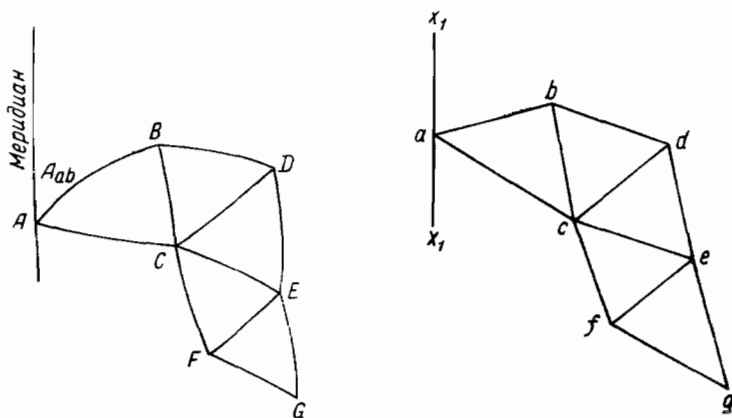
7. Поперечно-осная система прямоугольных сфероидических координат. Если роль осевой линии мы отведем не меридианному эллипсу  $PAP_1$ , а геодезической линии  $AQ$ , перпендикулярной к меридиану  $PAP_1$  в  $A$ , то относительно этой поперечно расположенной оси будем определять положение точки  $M$  криволинейным отрезком  $AM_{11} = y_1$  по этой оси и отрезком  $MM_{11} = x_1$ , причем геодезическая линия  $MM_{11}$  пересекает под прямым углом осевую линию  $AQ$ . Применение поперечно-осной системы мыслится как выгодное как будто бы в случае территории, растянутой с запада на восток и с сравнительно малым протяжением с юга на север, однако в действительности эти координаты применения не получили. Конечно, мысль наиболее выгодного выбора системы поверхностных координат, отвечающего очертанию обрабатываемой геодезически территории, заслуживает внимания; однако приходится считаться со сложностью математического выражения поверхностных координат через основные данные в геодезии, т. е. через длины линий и направления их.

Плоские прямоугольные координаты в той или иной проекции поверхности эллипсоида на плоскость. Поверхностные координаты, в особенности сферические прямоугольные координаты по Зольднеру, находили свое применение в прикладной геодезии, причем в основе лежало такое соображение: после получения на сфере этих координат  $x$  и  $y$  для опорных геодезических точек, в дальнейшем их использовании, т. е. при вставке между опорными точками сетей низших разрядов, при сгущении опорной сети точками, определяемыми засечками, при построении рамок съемочных планшетов и т. д., эти координаты рассматривались уже просто как плоские прямоугольные координаты. Другими словами, использование прямоугольных сферических координат основывалось на применении изображения эллипсоида на плоскости в проекции Зольднера-Кассини, в которой именно принимается, что абсцисса и ордината изображения точки эллипсоида на плоскости равны соответственно абсциссе и ординате в 6-й системе поверхностных координат. По ряду соображений эта проекция Зольднера-Кассини была оставлена с 1920 г., но важно отметить, что поверхностные координаты применялись в прикладной геодезии всегда с целью последующего перехода от них к обычным прямоугольным плоским координатам, чтобы затем иметь полную простоту обработки и использования материалов детальных геодезических сетей и съемок. Но переход от эллипсоида в некоторой проекции на плоскость может быть сделан и без использования, в качестве промежуточных, поверхностных прямоугольных координат.

Если закон условного изображения эллипсоида на плоскости представлен уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(B, L) \\ y &= f_2(B, L) \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

то, пользуясь этими уравнениями, мы можем получить формулы для перехода от расстояний и углов в триангуляции на эллипсоиде к соответствующим им расстояниям и углам в триангуляции на плоскости, пункты которой являются изображениями соответственных пунктов триангуляции на эллипсоиде, но соединение которых на плоскости выполняется уже прямыми линиями. Таким образом, дело складывается из таких действий: 1) выбора целесообразной проекции эллипсоида на плоскости и составления уравнений (4); 2) перехода по уравнениям (4) от заданных геодезических координат  $B$  и  $L$  точки  $A$  к прямоугольным плоским координатам точки  $a$ , являющейся изображением точки  $A$  (черт. 6);



Черт. 6.

3) перехода от данного азимута  $A_{ab}$  и данной длины стороны  $AB$  к углу  $\alpha_{ab}$  прямой  $ab$  с прямой  $x_1x_1$ , параллельной оси абсцисс на плоскости, и к длине прямой  $ab$ ; 4) перехода от углов в треугольниках  $BAC$ ,  $BCD$ ,  $DCE$  (черт. 6) на эллипсоиде к углам  $bac$ ,  $bcd$ ,  $dce$  в треугольниках на плоскости; 5) вычисления плоских прямоугольных координат точек  $a, b, c, d, \dots$ . Применение и использование таких плоских прямоугольных координат, конечно, может быть целесообразным практически только в пределах некоторой части поверхности эллипсоида, сравнительно небольшой, т. е. в пределах некоторой зоны, подлежащей установленной. Большую территорию приходится, следовательно, разделять на зоны, в каждой зоне будет применяться своя система прямоугольных плоских координат, но один и тот же закон изображения любой зоны на плоскости, установленный уравнениями (4). Вид функций  $f_1$  и  $f_2$ , т. е. род проекции, может быть весьма различным.

8. Система координат Гаусса-Крюгера есть одна из систем плоских прямоугольных координат, соответствующая изображению эллипсоида на плоскости в проекции Гаусса. Важно отметить, что эта проекция Гаусса и координаты Гаусса-Крюгера по веским соображениям получили применение с 1930 г. в СССР; в системе этих координат обрабатываются теперь все геодезические сети, начиная с сетей II класса, и на основе использования этих координат опорных точек все съемки — государственные и ведомственные, — ведутся в «проекции» Гаусса, применяемой, конечно, по зонам.

9. При выборе функций  $f_1$  и  $f_2$  в уравнениях (4) приходится руководствоваться требованиями возможной простоты перехода от элементов геодезических сетей на эллипсоиде к соответствующим элементам изображения этих сетей на плоскости, при соблюдении одновременно высокой точности в выполнении этого перехода. Протяженность территории с севера на юг, с востока на запад, вид граничного контура территории, ее географическое положение — все это влияет на выбор функций  $f_1$  и  $f_2$  при достижении удобств перехода от эллипсоида на плоскость. Проекция Гаусса-Крюгера удобна для СССР, но если иметь дело с территорией округленного очертания и притом не столь большого размера (например, радиуса 500—700 км), то более удобной может оказаться иная проекция. Поэтому укажем еще на плоские прямоугольные координаты Руссилья, соответствующие изображению эллипсоида в стереографической проекции. Эта проекция и координаты Руссилья применяются во Франции и применялись в Польше.

#### § 4. Связь между некоторыми системами координат

1. Связь между геодезической широтой  $B$  и координатами  $x$  и  $y$ , отнесенными к центру и осям меридианного эллипса. Уравнение меридианного эллипса  $PRP_1$  точки  $M$ , изображенного на черт. 3, напишется так

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ или } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1. \quad (5)$$

С другой стороны, нормаль  $MN$  образует с положительным направлением оси  $OX$  угол, определяемый уравнением

$$\operatorname{tg} B = -\frac{dx}{dy}. \quad (6)$$

Следовательно, дифференцируя (5), получим

$$\begin{aligned} \frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} \frac{dy}{dx} &= 0, \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}, \\ \operatorname{tg} B &= \frac{a^2 y}{b^2 x} = \frac{y}{(1-e^2)x}. \end{aligned} \quad (7)$$

Исключая из (5) и (7) постепенно  $x$  и  $y$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2 \operatorname{tg}^2 B x^2}{a^4} &= 1, \\ \frac{x^2}{a^2} [1 + (1-e^2) \operatorname{tg}^2 B] &= 1, \\ x^2 \left( 1 + \operatorname{tg}^2 B - \frac{e^2 \sin^2 B}{\cos^2 B} \right) &= a^2, \\ x &= \sqrt{\frac{a \cos B}{1 - e^2 \sin^2 B}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (7)

$$y = (1 - e^2) \operatorname{tg} Bx,$$

поэтому

$$y = \frac{a(1 - e^2) \sin B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}. \quad (9)$$

Очевидно,  $x$  равно радиусу параллели точки  $M$ ; поэтому формула (8) применяется довольно часто.

Применяя (3), мы можем сейчас же написать выражения координат  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  первой системы в функции геодезической широты  $B$ . Имеем

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{a \cos B \cos L}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}; & Y &= \frac{a \cos B \sin L}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \\ Z &= \frac{a(1 - e^2) \sin B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

2. Связь между геодезической широтой  $B$  и геоцентрической широтой  $\Phi$ . Из черт. 3 имеем

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{y}{x}; \quad \operatorname{tg} B = \frac{1}{1 - e^2} \frac{y}{x}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \Phi = (1 - e^2) \operatorname{tg} B. \quad (11)$$

Следует иметь разность  $B - \Phi$  в виде ряда. Для этого применим следующий вспомогательный вывод. Пусть

$$s = \frac{\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta} = \frac{\sin(\gamma - \beta)}{\sin(\gamma + \beta)}, \quad (a)$$

причем  $\gamma - \beta$  есть малая величина. Следовательно,

$$\sin(\gamma - \beta) = s \sin(\gamma + \beta).$$

Далее положим

$$\gamma - \beta = u$$

и отсюда напишем

$$\gamma - u = \beta \text{ или } 2\gamma - u = \gamma + \beta.$$

Другими словами,

$$\sin u = s \sin(2\gamma - u). \quad (b)$$

Как известно

$$e^{iu} = \cos u + i \sin u, \quad e^{-iu} = \cos u - i \sin u,$$

понимая под  $e$  основание неперовых логарифмов, а  $i = \sqrt{-1}$ .

Поэтому

$$\begin{aligned} e^{iu} - e^{-iu} &= 2i \sin u = 2is \sin(2\gamma - u), \\ e^{iu} + e^{-iu} &= s[e^{i(2\gamma - u)} + e^{-i(2\gamma - u)}]. \end{aligned}$$



Умножая последнее уравнение на  $e^{iu}$ , получаем

$$\begin{aligned} e^{2iu} - 1 &= s [e^{2i\gamma} - e^{-2i\gamma} e^{2iu}], \\ e^{2iu} &= 1 + s e^{2i\gamma} - s e^{-2i\gamma} e^{2iu}, \\ e^{2iu} (1 + s e^{-2i\gamma}) &= 1 + s e^{2i\gamma}; \\ e^{2iu} &= \frac{1 + s e^{2i\gamma}}{1 + s e^{-2i\gamma}}. \end{aligned} \quad (c)$$

Логарифмируя в натуральных логарифмах уравнение (c) и помня, что

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad \text{при } x < 1,$$

получаем

$$\begin{aligned} 2iu &= s e^{2i\gamma} - \frac{s^2}{2} e^{4i\gamma} + \frac{s^3}{3} e^{6i\gamma} - \frac{s^4}{4} e^{8i\gamma} + \dots - \\ &- \left( s e^{-2i\gamma} - \frac{s^2}{2} e^{-4i\gamma} + \frac{s^3}{3} e^{-6i\gamma} - \frac{s^4}{4} e^{-8i\gamma} + \dots \right); \\ 2iu &= s (e^{2i\gamma} - e^{-2i\gamma}) - \frac{s^2}{2} (e^{4i\gamma} - e^{-4i\gamma}) + \frac{s^3}{3} (e^{6i\gamma} - e^{-6i\gamma}) - \dots; \\ 2iu &= 2is \sin 2\gamma - 2 \frac{s^2}{2} i \sin 4\gamma + 2 \frac{s^3}{3} i \sin 6\gamma - 2 \frac{s^4}{4} i \sin 8\gamma + \dots \end{aligned}$$

Окончательно

$$u = \gamma - \beta = s \sin 2\gamma - \frac{s^2}{2} \sin 4\gamma + \frac{s^3}{3} \sin 6\gamma + \frac{s^4}{4} \sin 8\gamma + \dots \quad (12)$$

причем

$$s = \frac{\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta} = \frac{\sin(\gamma - \beta)}{\sin(\gamma + \beta)} = \frac{\sin u}{\sin(\gamma + \beta)}.$$

Применим ряд (12) к уравнению (11), из которого имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} B - \operatorname{tg} \Phi &= e^2 \operatorname{tg} B; \\ \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} \Phi &= (2 - e^2) \operatorname{tg} B; \\ \frac{\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} \Phi}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} \Phi} &= \frac{e^2}{2 - e^2} = m. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} B - \Phi &= m \rho'' \sin 2B - \frac{m^2}{2} \rho'' \sin 4B + \frac{m^3}{3} \rho'' \sin 6B - \\ &- \frac{m^4}{4} \rho'' \sin 8B + \frac{m^5}{5} \rho'' \sin 10B - \dots, \end{aligned}$$

или

$$B - \Phi = \rho'' \left[ \frac{e^2}{2 - e^2} \sin 2B - \frac{e^4}{2(2 - e^2)^2} \sin 4B + \frac{e^6}{3(2 - e^2)^3} \sin 6B - \right. \\ \left. - \frac{e^8}{4(2 - e^2)^4} \sin 8B + \frac{e^8}{5(2 - e^2)^5} \sin 10B - \dots \right]. \quad (13)$$

Если удерживать только члены порядка  $e^2$ , то

$$B - \Phi = \rho'' \frac{e^2}{2} \sin 2B = \alpha \sin 2B \rho''. \quad (14)$$

Очевидно, наибольшее значение  $(B - \Phi)$  будет при широте места  $45^\circ$ , и это наибольшее значение будет около  $11', 8$ .

3. Связь между геоцентрической широтой и координатами  $x$  и  $y$ , отнесенными к центру и осям меридианного эллипса; выражение радиуса-вектора. Называя  $OM$  (черт. 3) через  $r$ , имеем

$$x = r \cos \Phi; \quad y = r \sin \Phi.$$

Подставляя эти выражения в уравнения меридианного эллипса, получаем

$$\frac{r^2 \cos^2 \Phi}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 \Phi}{a^2 (1 - e^2)} = 1; \\ \frac{r^2}{a^2 (1 - e^2)} [\cos^2 \Phi (1 - e^2) + \sin^2 \Phi] = 1; \\ \left. \begin{aligned} r &= \frac{a \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \Phi}} \\ x &= \frac{a \sqrt{1 - e^2} \cos \Phi}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \Phi}}; \quad y = \frac{a \sqrt{1 - e^2} \sin \Phi}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \Phi}} \end{aligned} \right\}. \quad (15)$$

Формулу для  $r$  преобразуем, вводя в нее  $B$  вместо  $\Phi$ . Так как

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ x = \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \quad y = \frac{a (1 - e^2) \sin B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}},$$

то

$$r^2 = \frac{a^2 [\cos^2 B + (1 - e^2)^2 \sin^2 B]}{1 - e^2 \sin^2 B}, \\ r^2 = \frac{a^2 [1 + e^2 (e^2 - 2) \sin^2 B]}{1 - e^2 \sin^2 B}.$$

Удерживая лишь члены с  $e^4$ , получим

$$r = a (1 - e^2 \sin^2 B)^{-1/2} \left[ 1 - e^2 \sin^2 B + \frac{e^4}{2} \sin^2 B \cos^2 B \right]; \quad (16)$$

$$r = a \left( 1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 B + \frac{e^4}{2} \sin^2 B - \frac{5}{8} e^4 \sin^4 B \right) \quad (17)$$

4. Связь приведенной широты  $u$  с геодезической. Из черт. 4 имеем

$$x = a \cos u, \quad y = \frac{b}{a} a \sin u = b \sin u,$$

а на основании (8) и (9)

$$a \cos u = \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}; \quad b \sin u = \frac{a (1 - e^2) \sin B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} \operatorname{tg} u &= (1 - e^2) \operatorname{tg} B, \\ \operatorname{tg} u &= \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} B. \end{aligned} \quad (18)$$

Так как

$$n = \frac{a - b}{a + b} = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}},$$

а из (18) следует

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} B - \operatorname{tg} u &= (1 - \sqrt{1 - e^2}) \operatorname{tg} B, \\ \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} u &= (1 + \sqrt{1 - e^2}) \operatorname{tg} B, \\ \frac{\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} u}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} u} &= n, \end{aligned}$$

то, применяя формулу (12) при  $s = n$ , напомним

$$\frac{(B - u'')}{\rho''} = n \sin 2B - \frac{n^2}{2} \sin 4B + \frac{n^3}{3} \sin 6B - \frac{n^4}{4} \sin 8B + \dots \quad (19)$$

Приближенно, удерживая лишь члены с  $e^2$ ,

$$(B - u'') = \frac{e^2}{4} \rho'' \sin 2B.$$

Наконец, на основании (3) и (10)

$$\left. \begin{aligned} Z &= b \sin u = a \sqrt{1 - e^2} \sin u \\ X &= a \cos u \cos L \\ Y &= a \cos u \sin L \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

## § 5. Главные радиусы кривизны в данной точке эллипсоида

Меридианное сечение  $PME_1P_1E$  (черт. 7) точки  $M$  будет, конечно, одним из двух главных нормальных сечений в ней. Плоскость  $WMO_1$ , нормальная в  $M$  и перпендикулярная к меридиану точки  $M$ , носит название плоскости первого вертикала и пересекает эллипсоид по эллипсу  $WMO_1$ , который будет вторым из главных нормальных в точке  $M$  сечений.

Будем обозначать через  $M$  и  $N$  соответственно радиусы кривизны в  $M$  меридианной кривой и сечения первого вертикала. Радиус  $M$  найдем так

$$M = - \frac{\left\{ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

(Знак минус взят вследствие того, что  $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ ). Так как

$$\frac{dy}{dx} = - \operatorname{ctg} B,$$

то

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sin^2 B} \frac{dB}{dx}.$$

Но из (8) имеем

$$dx = a [-\sin B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-1/2} + e^2 \sin B \cos^2 B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2}] dB,$$

$$\frac{dx}{dB} = a \sin B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2} [-(1 - e^2 \sin^2 B) + e^2 \cos^2 B],$$

$$\frac{dx}{dB} = -a \sin B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/4} (1 - e^2).$$

Поэтому

$$M = (1 + \operatorname{ctg}^2 B)^{3/2} \sin^2 B a \sin B \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}};$$

$$M = \frac{a (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}} \quad (21)$$

Из (21) ясно, что  $M$  непрерывно возрастает при изменении от 0 до  $90^\circ$ .

Вводя функцию

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}, \quad (22)$$

напишем

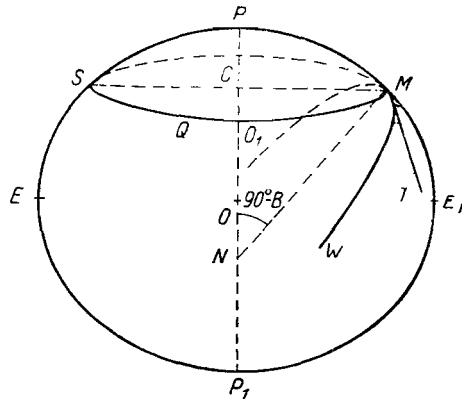
$$M = \frac{a (1 - e^2)}{W^3} \quad (23)$$

Введем еще функцию

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B}. \quad (24)$$

Так как

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}, \quad e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2},$$



Черт. 7.

то

$$1 - e^2 \sin^2 B = 1 - \frac{e'^2}{1 + e'^2} \sin^2 B = \frac{1 + e'^2 \cos^2 B}{1 + e'^2}.$$

$$M = \frac{a(1 + e'^2)^{1/2}}{V^3},$$

или согласно (2)

$$M = \frac{c}{V^3}. \quad (25)$$

Для определения радиуса  $N$  первого вертикала проведем касательную  $MT$  к параллели  $MQS$  точки  $M$ . Пусть центр этой параллели находится в  $C$ . Касательная  $MT$ , лежащая в перпендикулярной к меридиану плоскости  $MQSC$  и перпендикулярная к пересечению  $MC$  этих плоскостей, будет перпендикулярна к плоскости меридиана  $PME_1P_1$ . Поэтому плоскость первого вертикала будет содержать прямую  $MT$  и, кроме того, если  $MN$  — нормаль в  $M$ , то угол  $TMN$  равен  $90^\circ$ . Следовательно,  $MT$  будет касательной и к кривой  $OMW$ . Параллель  $MQS$ , являющаяся косым в  $M$  сечением, имеет, таким образом, общую касательную с нормальным сечением первого вертикала. Воспользуемся поэтому теперь теоремой Менъе: если через точку поверхности проведены два сечения — одно нормальное и другое косвенное, причем в рассматриваемой точке эти сечения имеют общую касательную, — то радиус кривизны косвенного сечения равен радиусу кривизны нормального сечения, умноженному на косинус угла между плоскостями этих двух сечений.

Нетрудно видеть, что угол  $QMTN$  между плоскостями параллели и первого вертикала измеряется углом  $CMN = B$ . Поэтому

$$\overline{MC} = \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = N \cos B;$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \quad (26)$$

или

$$N = \frac{a}{W} = \frac{c}{V}. \quad (27)$$

Из черт. 7

$$\overline{MN} = \frac{\overline{MC}}{\cos B} = N,$$

т. е. длина нормали  $\overline{MN}$  равна радиусу первого вертикала.

Из (21) и (26) имеем

$$\frac{N}{M} = \frac{1 - e^2 \sin^2 B}{1 - e^2} = \frac{1 - e^2 + e^2 \cos^2 B}{1 - e^2} = 1 + \frac{e^2 \cos^2 B}{1 - e^2},$$

откуда легко видеть, что

$$N > M.$$

Величины  $\frac{\rho''}{M}$  и  $\frac{\rho''}{N}$  обозначаются соответственно символами (1) и (2), а логарифмы величин (1) и (2) даются по аргументу широты в геодезических таблицах

$$\frac{\rho''}{M} = (1); \quad \frac{\rho''}{N} = (2). \quad (28)$$

### § 6. Средний радиус кривизны $R$

Средним радиусом кривизны  $R$  называется среднее арифметическое из радиусов кривизны всех возможных нормальных сечений, проводимых на эллипсоиде из точки  $M$ . Если на черт. 8 меридиан представлен линией  $PMP_1$ , а сечение первого вертикала — линией  $WMO$ , то пусть кривая  $MA$  представляет нормальное сечение, имеющее азимут  $A$ . По теореме Эйлера для радиуса кривизны  $\rho_A$  сечения  $MA$  имеем

$$\frac{1}{\rho_A} = \frac{\cos^2 A}{M} + \frac{\sin^2 A}{N}. \quad (29)$$

Отсюда

$$\rho_A = \frac{MN}{N \cos^2 A + M \sin^2 A}. \quad (30)$$

Вообразим, что  $A$  принимает последовательно такие значения:

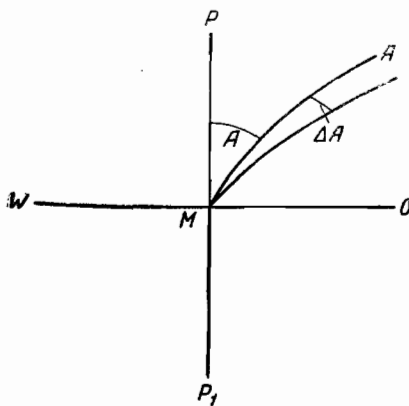
$$0, \Delta A, 2\Delta A, 3\Delta A, \dots, 2\pi - 3\Delta A, 2\pi - 2\Delta A, 2\pi - \Delta A,$$

причем  $\Delta A$  — малая величина. Применим формулу (30) для всех этих значений  $A$ , число которых, очевидно, будет равно  $\frac{2\pi}{\Delta A}$ . Вычислим затем

$$R_1 = \frac{\sum_{A=0}^{A=2\pi-\Delta A} \frac{MN}{N \cos^2 A + M \sin^2 A}}{\frac{2\pi}{\Delta A}} = \frac{\sum_{A=0}^{A=2\pi-\Delta A} \frac{MN \Delta A}{N \cos^2 A + M \sin^2 A}}{2\pi},$$

причем под знаком  $\Sigma$  заставим  $A$  пройти последовательно значения  $0, \Delta A, 2\Delta A, \dots, 2\pi - 3\Delta A, 2\pi - 2\Delta A, \dots$ . Очевидно,  $R = \lim R_1$  при  $\Delta A$ , бесконечно убывающем. Понятно теперь

$$R = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{MN}{N \cos^2 A + M \sin^2 A} dA;$$



Черт. 8



$$R = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M \frac{dA}{\cos^2 A}}{1 + \frac{M}{N} \operatorname{tg}^2 A} = \frac{2}{\pi} \sqrt{MN} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\frac{M}{N}} \frac{dA}{\cos^2 A}}{1 + \left( \sqrt{\frac{M}{N}} \operatorname{tg} A \right)^2};$$

$$R = \frac{2}{\pi} \sqrt{MN} \left[ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \sqrt{\frac{M}{N}} \operatorname{tg} A \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \sqrt{MN} \frac{\pi}{2};$$

$$R = \sqrt{MN} = \frac{a \sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \sin^2 B}. \quad (31)$$

Радиус  $M$  меридианного сечения служит для вычисления длин меридианных дуг и разностей широт; радиус  $N$  первого вертикала служит для вычисления длин дуг параллелей, разностей долгот и разностей азимутов. Радиус  $R$  применяется в вопросах развертывания тех или иных частей эллипсоида на сфере и при вычислении избытков сферических треугольников. В геодезических таблицах даются величины  $\lg R$  и значения логарифмов величины

$$\frac{\rho''}{2R^2} = \frac{\rho''}{2MN}. \quad (32)$$

### § 7. Радиус кривизны произвольного нормального сечения

Формула (30) может быть еще написана так

$$\rho_A = \frac{N}{\frac{N}{M} \cos^2 A + \sin^2 A} = \frac{N}{\left(1 + \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2 B\right) \cos^2 A + \sin^2 A},$$

или

$$\rho_A = \frac{N}{1 + \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2 B \cos^2 A}. \quad (33)$$

Из (33), вводя

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}; \quad \eta^2 = e'^2 \cos^2 B, \quad (34)$$

имеем

$$\rho_A = \frac{N}{1 + e'^2 \cos^2 B \cos^2 A} = \frac{N}{1 + \eta^2 \cos^2 A}, \quad (35)$$

$$\lg \rho_A = \lg N - \mu \eta^2 \cos^2 A + \frac{\mu}{2} \eta^4 \cos^4 A - \frac{\mu \eta^6}{2} \cos^6 A \dots, \quad (36)$$

понимая под  $\mu$  модуль неперовых логарифмов. При  $A = 45^\circ$

$$\rho_{45} = \frac{2MN}{M + N}.$$

## § 8. Вычисление длины дуги меридиана

Прежде вывода формулы для дуги меридиана надлежит сделать вывод ряда, представляющего четную степень синуса.

Напишем известные соотношения

$$e^{ix} = p = \cos x + i \sin x,$$

$$e^{-ix} = q = \cos x - i \sin x,$$

где  $e$  — основание неперовых логарифмов. Отсюда

$$\left. \begin{aligned} pq &= 1 \\ p + q &= 2 \cos x; \quad p - q = 2i \sin x \end{aligned} \right\}; \quad (37)$$

$$\left. \begin{aligned} p^m &= \cos mx + i \sin mx; \quad p^m + q^m = 2 \cos mx; \\ q^m &= \cos mx - i \sin mx; \quad p^m - q^m = 2i \sin mx; \quad p^m q^m = 1 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

На основании (37)

$$\begin{aligned} (2 \cos x)^m &= p^m + q^m + m(p^{m-1}q + p q^{m-1}) + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} (p^{m-2}q^2 + \\ &+ p^2 q^{m-2}) + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (p^{m-3}q^3 + p^3 q^{m-3}) + \dots \end{aligned}$$

а на основании (38)

$$\begin{aligned} (2 \cos x)^m &= 2 \cos mx + m 2 \cos (m-2)x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} 2 \cos (m-4)x + \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 2 \cos (m-6)x + \dots \end{aligned} \quad (38')$$

Если  $m = 2n$ , т. е.  $m$  — четное, то все члены ряда для  $(2 \cos x)^m$  будут образовываться по написанному закону, за исключением последнего, соответствующему среднему или  $(n+1)$ -му члену бинома Ньютона: для этого члена не будет парного в разложении бинома и он пишется так

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2) \dots (2n-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} p^n q^n.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (2 \cos x)^{2n} &= \cos 2nx + 2n \cos (2n-2)x + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} \cos (2n-4)x + \\ &+ \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos (2n-6)x + \dots + \\ &+ \frac{2n(2n-1)(2n-2) \dots [2n-(k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \cos (2n-2k)x + \dots + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{2n(2n-1)(2n-2) \dots (2n-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}; \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned}
(\cos x)^{2n} 2^{2n-1} = & \frac{1}{2} \frac{2n(2n-1) \dots [2n-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} + \\
& + \frac{2n(2n-1) \dots [2n-(n-2)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} \cos 2x + \\
& + \frac{2n(2n-1) \dots [2n-(n-3)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2)} \cos 4x + \dots + \\
& + \frac{2n(2n-1) \dots [2n-(k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \cos (2n-2k)x + \dots + \\
& + \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos (2n-6)x + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} \cos (2n-4)x + \\
& + 2n \cos (2n-2)x + \cos 2nx. \quad (40)
\end{aligned}$$

Формула для  $\sin^{2n} x$  легко получится из (40), если иметь в виду

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x; \quad \cos 2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos 2x; \\
\cos 4\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos 4x; \quad \cos 6\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos 6x; \\
&\dots
\end{aligned}$$

Именно

$$\begin{aligned}
2^{2n-1} (\sin x)^{2n} = & \frac{1}{2} \frac{2n(2n-1) \dots [2n-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} - \\
& - \frac{2n(2n-1) \dots [2n-(n-2)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} \cos 2x + \frac{2n(2n-1) \dots [2n-(n-3)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2)} \cos 4x - \\
& - \frac{2n(2n-1) \dots [2n-(n-4)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-3)} \cos 6x + \\
& + \frac{2n(2n-1) \dots [2n-(n-5)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-4)} \cos 8x - \dots \quad (41)
\end{aligned}$$

Применяя формулу (41), пишем:

$$\left. \begin{aligned}
\sin^2 x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \\
\sin^4 x &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \\
\sin^6 x &= \frac{5}{16} - \frac{15}{32} \cos 2x + \frac{3}{16} \cos 4x - \frac{1}{32} \cos 6x \\
\sin^8 x &= \frac{35}{128} - \frac{7}{16} \cos 2x + \frac{7}{32} \cos 4x - \frac{1}{16} \cos 6x + \frac{1}{128} \cos 8x \\
\sin^{10} x &= \frac{63}{256} - \frac{105}{256} \cos 2x + \frac{15}{64} \cos 4x - \frac{45}{512} \cos 6x + \frac{5}{256} \cos 8x - \\
&\quad - \frac{1}{512} \cos 10x
\end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Теперь разложим по биному Ньютона функцию

$$\frac{1}{W^3} (1 - e^2 \sin^2 B)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{W^3} = & 1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 B + \frac{15}{8} e^4 \sin^4 B + \frac{105}{48} e^6 \sin^6 B + \\ & + \frac{945}{384} e^8 \sin^8 B + \frac{693}{256} e^{10} \sin^{10} B + \dots \end{aligned}$$

Заменяя же здесь четные степени синуса согласно (42),

$$\begin{aligned} = & 1 + \frac{3}{4} e^2 - \frac{3}{4} e^2 \cos 2B + \frac{45}{64} e^4 - \frac{15}{16} e^4 \cos 2B + \frac{15}{64} e^4 \cos 4B + \\ & + \frac{175}{256} e^6 - \frac{525}{512} e^6 \cos 2B + \frac{105}{256} e^6 \cos 4B - \frac{35}{512} e^6 \cos 6B + \\ & + \frac{11\,025}{16\,384} e^8 - \frac{2205}{2048} e^8 \cos 2B + \frac{2205}{4096} e^8 \cos 4B + \frac{315}{2048} e^8 \cos 6B + \\ & + \frac{315}{16\,384} e^8 \cos 8B + \dots; \\ = & \left( 1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4 + \frac{175}{256} e^6 + \frac{11\,025}{16\,384} e^8 + \frac{43\,659}{65\,536} e^{10} \right) - \\ & - \left( \frac{3}{4} e^2 + \frac{15}{16} e^4 + \frac{525}{512} e^6 + \frac{2205}{2048} e^8 + \frac{72\,765}{65\,536} e^{10} \right) \cos 2B + \\ & + \left( \frac{15}{64} e^4 + \frac{105}{256} e^6 + \frac{2205}{4096} e^8 + \frac{10\,395}{16\,384} e^{10} \right) \cos 4B - \\ & - \left( \frac{35}{512} e^6 + \frac{315}{2048} e^8 + \frac{31\,185}{131\,072} e^{10} \right) \cos 6B + \\ & + \left( \frac{315}{16\,384} e^8 + \frac{3\,465}{65\,536} e^{10} \right) \cos 8B - \dots \quad (43) \end{aligned}$$

Обозначая

$$\left. \begin{aligned} A = & 1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4 + \frac{175}{256} e^6 + \frac{11\,025}{16\,384} e^8 + \frac{43\,659}{65\,536} e^{10} \\ B = & \frac{3}{4} e^2 + \frac{15}{16} e^4 + \frac{525}{512} e^6 + \frac{2205}{2048} e^8 + \frac{72\,765}{65\,536} e^{10} \\ C = & \frac{15}{64} e^4 + \frac{105}{256} e^6 + \frac{2205}{4096} e^8 + \frac{10\,395}{16\,384} e^{10} \\ D = & \frac{35}{512} e^6 + \frac{315}{2048} e^8 + \frac{31\,185}{131\,072} e^{10} \\ E = & \frac{315}{16\,384} e^8 + \frac{3\,465}{65\,536} e^{10} \end{aligned} \right\}, \quad (44)$$

получаем

$$\frac{1}{W^3} = A - B \cos 2B + C \cos 4B - D \cos 6B + E \cos 8B + \dots \quad (45)$$

Обозначая дифференциал дуги меридиана через  $dS$ , напомним

$$dS = M dB = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^3 \sin^2 B)^{3/2}} dB = \frac{a(1-e^2)}{W^3} dB.$$

Следовательно, длина  $S$  дуги меридиана между параллелями с широтами  $B_1$  и  $B_2$  получится так:

$$S = \int_{B_1}^{B_2} \frac{a(1-e^2)}{W^3} dB = a(1-e^2) \int_{B_1}^{B_2} \frac{dB}{W^3};$$

$$S = a(1-e^2) \int_{B_1}^{B_2} (A - B \cos 2B + C \cos 4B - D \cos 6B + \\ + E \cos 8B + \dots) dB;$$

$$S = a(1-e^2) \left[ A(B_2 - B_1) - \frac{B}{2} (\sin 2B_2 - \sin 2B_1) + \frac{C}{4} (\sin 4B_2 - \right. \\ \left. - \sin 4B_1) - \frac{D}{6} (\sin 6B_2 - \sin 6B_1) + \frac{E}{8} (\sin 8B_2 - \sin 8B_1) \right].$$

Отсюда, пользуясь (44), получим для длины  $S_0^B$  дуги меридиана от экватора до параллели с широтой  $B$

$$S_0^B = a(1-e^2) \left[ A \frac{B''}{\rho''} - \frac{B}{2} \sin 2B + \frac{C}{4} \sin 4B - \frac{D}{6} \sin 6B + \right. \\ \left. + \frac{E}{8} \sin 8B \right]; \quad (46)$$

$$S_0^B = a(1-e^2) \left\{ \left( 1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4 + \frac{175}{256} e^6 + \frac{11\,025}{16\,384} e^8 + \frac{43\,659}{65\,536} e^{10} \right) \frac{B''}{\rho''} - \right. \\ - \left( \frac{3}{8} e^2 + \frac{15}{32} e^4 + \frac{525}{1024} e^6 + \frac{2205}{4096} e^8 + \frac{72\,765}{131\,072} e^{10} \right) \sin 2B + \\ + \left( \frac{15}{256} e^4 + \frac{105}{1024} e^6 + \frac{2205}{16\,384} e^8 + \frac{10\,395}{65\,536} e^{10} \right) \sin 4B - \\ - \left( \frac{35}{3072} e^6 + \frac{105}{4096} e^8 + \frac{10\,395}{262\,144} e^{10} \right) \sin 6B + \\ \left. + \left( \frac{315}{131\,072} e^8 + \frac{3465}{524\,288} e^{10} \right) \sin 8B \right\}. \quad (47)$$

Формула (47) употребляется только при вычислении геодезических таблиц, когда при значениях  $B$ , изменяющихся от 0 до 90°, длина дуги  $S$  вообще значительна.

Полагая в (47)  $B = 90^\circ$ , получим длину  $Q$  четверти земного меридиана

$$Q = a(1 - e^2) \left( 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \dots \right) \frac{\pi}{2}. \quad (48)$$

Выражение (45) преобразуем так

$$\begin{aligned} S = a(1 - e^2) \left\{ A \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} - B \sin(B_2 - B_1) \cos(B_2 + B_1) + \right. \\ \left. + \frac{C}{2} \sin 2(B_2 - B_1) \cos 2(B_2 + B_1) - \frac{D}{3} \sin 3(B_2 - B_1) \cos 3(B_2 + B_1) + \right. \\ \left. + \frac{E}{4} \sin 4(B_2 - B_1) \cos 4(B_2 + B_1) \right\}, \quad (49) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} S = a(1 - e^2) \left\{ \left( 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 \right) \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} - \right. \\ \left. - \left( \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 \right) \sin(B_2 - B_1) \cos(B_2 + B_1) + \right. \\ \left. + \left( \frac{15}{128}e^4 + \frac{105}{512}e^6 \right) \sin 2(B_2 - B_1) \cos 2(B_2 + B_1) - \right. \\ \left. - \frac{35}{1536}e^6 \sin 3(B_2 - B_1) \cos 3(B_2 + B_1) \right\}, \quad (50) \end{aligned}$$

если пренебрегать членами с  $e^8$ .

Предположим, что  $B_2 + B_1 = 90^\circ$ , т. е. что средняя широта дуги равна  $45^\circ$ ; обозначая длину такой дуги  ${}_{45}S_{B_1}^{B_2}$ , напомним из (50)

$$\begin{aligned} {}_{45}S_{B_1}^{B_2} = a(1 - e^2) \left\{ \left( 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 \right) \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} - \right. \\ \left. - \left( \frac{15}{128}e^4 + \frac{105}{512}e^6 \right) \sin 2(B_2 - B_1) \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{{}_{45}S_{B_1}^{B_2}}{Q} = \frac{B_2 - B_1}{\frac{\pi}{2}} - \frac{\left( \frac{15}{128}e^4 + \frac{105}{512}e^6 \right) \sin 2(B_2 - B_1)}{\frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{3}{4}e^2 \right)}.$$

Если в последнем уравнении, в правой его части, отбросить второй член, то левая его часть будет искажена не более как на 1:130 000 своей величины; с этой точностью

$$Q = \frac{{}_{45}S_{B_1}^{B_2} \pi}{2(B_2 - B_1)}. \quad (51)$$

Отсюда делаем вывод: измерение некоторой дуги, имеющей среднюю широту  $45^\circ$ , соединенное, конечно, с астрономическим определением ее амплитуды  $(B_2 - B_1)$ , позволяет вывести  $Q$  по формуле (51) с хорошей точностью без знания размеров полуосей и сжатия земного эллипсоида.



Этим именно и воспользовался Деламбр в самом конце XVIII столетия для определения из градусного измерения во Франции, под средней широтой  $45^\circ$ , длины  $Q$  четверти земного меридиана и вывода отсюда длины метра, которая была установлена революционным законодательным собранием как одна десятиллионная от  $Q$ .

Понятно, что, пользуясь приближенно установленным к концу XVIII столетия размером полярного сжатия, можно было достаточно хорошо вычислить поправочный член

$$\frac{\left(\frac{15}{128}e^4 + \frac{105}{512}e^6\right) \sin 2(B_2 - B_1)}{\frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{3}{4}e^2 + \dots\right)}.$$

Обратимся теперь снова к формуле (50) с целью получения из нее той формулы для дуги меридиана, которой пользуются при обработке градусных измерений. Так как длину дуг (меридианных) из триангуляции получают с ошибкой не менее 1 : 400 000, то в формуле (49) можем отбросить члены с  $e^6$ , так как это даст ошибку в  $S$ , меньшую 1 : 3 000 000. Кроме того, примем

$$\sin(B_2 - B_1) = (B_2 - B_1) - \frac{(B_2 - B_1)^3}{6};$$

$$\sin 2(B_2 - B_1) = 2(B_2 - B_1);$$

$$\frac{B_2 + B_1}{2} = B_m = \text{средней широте дуги } S.$$

Тогда

$$S = a(1 - e^2) \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \left\{ 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 - \left( \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 \right) \cos 2B_m + \right. \\ \left. + \frac{15}{64}e^4 \cos 4B_m + \frac{3}{4}e^2 \frac{(B_2 - B_1)''^2}{\rho''^2} \cos 2B_m \right\}. \quad (52)$$

Даже при  $S = 2000$  км и при  $B_2 - B_1 = \frac{1}{3}$ , отброшенный в (52) член

$$\frac{15}{64 \cdot 6} e^4 (B_2 - B_1)^2 \cos 2B_m$$

даст ошибку в  $S$  не более 1 : 6 000 000. Формулу (52) переписываем далее так

$$S = a \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \left\{ 1 - \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2B_m \right) e^2 - \right. \\ \left. - \left( \frac{3}{64} + \frac{3}{16} \cos 2B_m - \frac{15}{64} \cos 4B_m \right) e^4 + \frac{e^2 (B_2 - B_1)''^2}{8 \rho''^2} \cos 2B_m \right\}. \quad (53)$$

Формулой (53) надлежит пользоваться при выводе размеров земного эллипсоида из градусных измерений. В этой формуле  $(B_2 - B_1)$  выражено в секундах.

Для вычислений в триангуляции необходимо, однако, дать еще формулу, более простую, чем (53), и более отвечающую цели. Обозначая

$$B_m = \frac{B_2 + B_1}{2}; \quad M_m = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin B_m)^{3/2}} = \frac{a(1 - e^2)}{W_m^3},$$

на основании (45), напомним

$$S_1 = M_m \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} = a(1 - e^2) \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \times \\ \times (A - B \cos 2B_m + C \cos 4B_m - D \cos 6B_m),$$

причем  $S_1$  — вспомогательная величина, вводимая на время.

Удерживая же в  $S_1$  только члены с  $e^2$  и  $e^4$ , как и в (53), напомним

$$S_1 = a(1 - e^2) \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \left\{ 1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4 - \left( \frac{3}{4} e^2 + \frac{15}{16} e^4 \right) \cos 2B_m + \right. \\ \left. + \frac{15}{64} e^4 \cos 4B_m \right\}. \quad (54)$$

Сравнивая (54) и (52), имеем

$$S = S_1 + \frac{a(1 - e^2)}{8} \frac{e^2 (B_2 - B_1)''^3}{\rho''^3} \cos 2B_m. \quad (55)$$

Для  $S_1 < 600$  км можем пренебречь величиной различия  $M_m$  от  $a(1 - e^2)$  в члене с  $(B_2 - B_1)^3$  и написать

$$S = M_m \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \left\{ 1 + \frac{e^2 (B_2 - B_1)''^2}{8 \rho''^2} \cos 2B_m \right\}. \quad (56)$$

Формулой (56) следует пользоваться в триангуляции при  $S$ , лежащем в пределах 45—400 км. При  $S$ , меньшем 45 км, формулу (56) можно еще упростить и представить в таком виде

$$S = M_m \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''}; \quad (57)$$

причем ошибка в  $(B_2 - B_1)$ , вычисляемом по  $S$  по формуле (57), не превысит в наших широтах  $0'',00003$  и, наоборот, — ошибка в  $S$ , вычисляемом по  $(B_2 - B_1)$ , не превысит одного миллиметра.

Таким образом, при вычислении длины дуги меридиана, меньшей 45 км, можно ее рассматривать как сферическую с центральным углом, равным разности широт ее конечных точек, и описанную радиусом меридианного сечения для средней точки дуги. Применяя формулу (28), напомним

$$(B_2 - B_1)'' = (1)_m S. \quad (58)$$

## § 9. Длина дуги параллели

Так как радиус параллели равен

$$N \cos B = \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = \frac{a \cos B}{W},$$

то длина  $S'$  дуги параллели под широтой  $B$  с разностью долгот  $l$  конечных ее точек равна

$$S' = N \cos B \frac{l''}{\rho} = \frac{l \cos B}{(2)}.$$

Отсюда

$$l'' = (2) S' \sec B. \quad (59)$$

Таблица 2 дает длины дуг параллелей для широт от 35 до 75° на эллипсоиде Красовского<sup>3</sup>.

Таблица 2

$B$	$l = 1^\circ$	$l = 1'$	$l = 1''$	$B$	$l = 1^\circ$	$l = 1'$	$l = 1''$
	м	м	м		м	м	м
35	91289,701	1521,495	25,358	56	62393,807	1039,897	17,332
36	90165,200	1502,753	25,046	57	60773,194	1012,887	16,881
37	89013,163	1483,553	24,726	58	59133,843	985,564	16,426
38	87833,932	1463,899	24,398	59	57476,253	957,938	15,966
39	86627,854	1443,798	24,063	60	55800,926	930,015	15,500
40	85395,286	1423,255	23,721	61	54108,374	901,806	15,030
41	84136,593	1402,277	23,371	62	52399,113	873,319	14,555
42	82852,147	1380,869	23,014	63	50673,663	844,561	14,076
43	81542,330	1359,039	22,651	64	48932,551	815,543	13,592
44	80207,533	1336,792	22,280	65	47176,311	786,272	13,105
45	78848,151	1314,136	21,902	66	45405,480	756,758	12,613
46	77464,592	1291,077	21,518	67	43620,601	727,010	12,117
47	76057,267	1267,661	21,127	68	41822,220	697,037	11,617
48	74626,597	1243,777	20,730	69	40010,892	666,848	11,114
49	73173,012	1219,550	20,326	70	38187,172	636,453	10,608
50	71696,947	1194,949	19,916	71	36351,621	605,860	10,098
51	70198,846	1169,981	19,500	72	34504,806	575,080	9,585
52	68679,158	1144,653	19,078	73	32647,295	544,122	9,069
53	67138,343	1118,972	18,650	74	30779,661	512,994	8,550
54	65576,863	1092,948	18,216	75	28902,482	481,708	8,028
55	63995,192	1066,587	17,776				

Таблица 3

<i>B</i>	Длина градуса по меридиану <i>м</i>	$\Delta$	<i>B</i>	Длина градуса по меридиану <i>м</i>	$\Delta$
35			55		18,411
36	110 951 ,700	18,534	56	111 334 ,582	18,173
37	970 ,234	18,738	57	352 ,755	17,910
38	988 ,972	18,918	58	370 ,665	17,625
39	111 007 ,890	19,078	59	388 ,290	17,318
40	026 ,968	19,213	60	405 ,608	16,992
41	046 ,181	19,324	61	422 ,600	16,643
42	065 ,505	19,415	62	439 ,243	16,274
43	084 ,920	19,478	63	455 ,517	15,884
44	104 ,398	19,520	64	471 ,401	15,476
45	123 ,918	19,539	65	486 ,877	15,048
46	143 ,457	19,530	66	501 ,925	14,602
47	162 ,987	19,502	67	516 ,527	14,135
48	182 ,489	19,448	68	530 ,662	13,655
49	201 ,937	19,371	69	544 ,317	13,156
50	221 ,308	19,268	70	557 ,473	12,639
51	240 ,576	19,144	71	570 ,112	12,108
52	259 ,720	18,996	72	582 ,220	11,563
53	278 ,716	18,825	73	593 ,783	11,002
54	297 ,541	18,630	74	604 ,785	10,427
55	316 ,171		75	615 ,212	

Таблица 3 дает длины градуса по меридиану между широтами 35 и 75° на эллипсоиде Красовского<sup>3</sup>.

Наибольшее изменение длины градуса имеет место при широте 45°, оно равно 19,54 м.

### § 10. Вычисление площадей части и всей поверхности эллипсоида

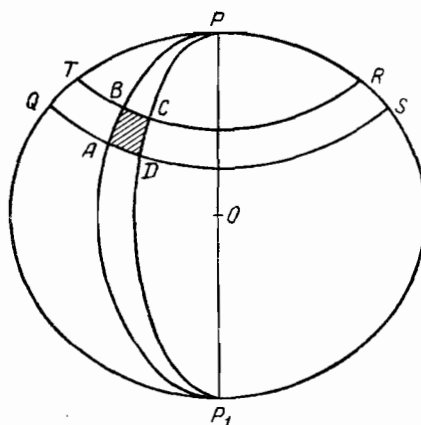
Возьмем на эллипсоиде (черт. 9) два бесконечно близких меридиана  $PBAP_1$  и  $PCDP_1$  с долготами  $l$  и  $l+dl$  и две бесконечно близких параллели  $QADS$  и  $TBCR$  с широтами  $B$  и  $B+dB$ . Площадь трапеции  $ABCD$  будет, конечно, равна

$$dT = MN \cos B \, dl \, dB,$$

а площадь  $dZ$  зоны, заключенной между параллелями  $TR$  и  $QS$ ,

$$dZ = 2\pi MN \cos B \, dB = 2\pi R^2 \cos B \, dB,$$

$$dZ = 2\pi b^2 \frac{\cos B \, dB}{(1 - e^2 \sin^2 B)^2}.$$



Черт. 9

Следовательно, поверхность зоны между параллелями с широтами  $B_2$  и  $B_1$  будет

$$Z = 2\pi b^2 \int_{B_1}^{B_2} \frac{\cos BdB}{(1 - e^2 \sin^2 B)^2}.$$

Далее имеем

$$\cos B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-2} = \cos B + 2e^2 \sin^2 B \cos B + 3e^4 \sin^4 B \cos B + \\ + 4e^6 \cos B \sin^6 B + \dots$$

Поэтому

$$Z = 2\pi b^2 \int_{B_1}^{B_2} (\cos B + 2e^2 \sin^2 B \cos B + 3e^4 \sin^4 B \cos B + \\ + 4e^6 \cos B \sin^6 B + \dots) dB; \\ Z = 2\pi b^2 \left[ \sin B + \frac{2}{3} e^2 \sin^3 B + \frac{3}{5} e^4 \sin^5 B + \frac{4}{7} e^6 \sin^7 B + \right. \\ \left. + \frac{5}{9} e^8 \sin^9 B + \dots \right] \quad (60)$$

Чтобы сделать эту формулу удобной для вычислений при произвольных  $B_2$  и  $B_1$ , надлежит воспользоваться формулами, представляющими синусы нечетных степеней в функциях синусов кратных дуг. Воспользуемся для этого формулой (38'), в которой положим  $m=2n+1$  и в которой, очевидно, последний член правой части будет тогда равен

$$2 \frac{(2n+1) 2n (2n-1) \dots (n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cos x.$$

Следовательно,

$$\cos^{2n+1} x = \frac{1}{2^{2n}} \left\{ \frac{(2n+1) 2n \dots (n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cos x + \right. \\ + \frac{(2n+1) 2n \dots (n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} \cos 3x + \frac{(2n+1) 2n \dots (n+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2)} \cos 5x + \\ \left. + \frac{(2n+1) 2n \dots (n+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-3)} \cos 7x + \dots \right\}.$$

Отсюда, заменяя

$$\cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = \sin x, \quad \cos 3 \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = -\sin 3x, \\ \cos 5 \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = \sin 5x, \dots \dots \dots$$

получим

$$\begin{aligned} \sin^{2n+1} x = & \frac{1}{2^{2n}} \left\{ \frac{(2n+1) 2n \dots (n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \sin x - \right. \\ & - \frac{(2n+1) 2n \dots (n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} \sin 3x + \frac{(2n+1) 2n \dots (n+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2)} \sin 5x - \\ & \left. - \frac{(2n+1) 2n \dots (n+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-3)} \sin 7x + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (61)$$

Применяя (61), получим

$$\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x,$$

$$\sin^5 x = \frac{5}{8} \sin x - \frac{5}{16} \sin 3x + \frac{1}{16} \sin 5x,$$

$$\sin^7 x = \frac{35}{64} \sin x - \frac{21}{64} \sin 3x + \frac{7}{64} \sin 5x - \frac{1}{64} \sin 7x,$$

$$\sin^9 x = \frac{63}{128} \sin x - \frac{21}{64} \sin 3x + \frac{9}{64} \sin 5x - \frac{9}{256} \sin 7x + \frac{1}{256} \sin 9x,$$

.....

и, подставляя эти выражения в (60),

$$\begin{aligned} Z = 2\pi b^2 \left\{ (\sin B_2 - \sin B_1) \left( 1 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{3}{8} e^4 + \frac{5}{16} e^6 + \frac{35}{128} e^8 \right) - \right. \\ - (\sin 3B_2 - \sin 3B_1) \left( \frac{1}{6} e^2 + \frac{3}{16} e^4 + \frac{3}{16} e^6 + \frac{35}{192} e^8 \right) + \\ + (\sin 5B_2 - \sin 5B_1) \left( \frac{3}{80} e^4 + \frac{1}{16} e^6 + \frac{5}{64} e^8 \right) - \\ \left. - (\sin 7B_2 - \sin 7B_1) \left( \frac{1}{112} e^6 + \frac{5}{256} e^8 \right) + (\sin 9B_2 - \sin 9B_1) \frac{5}{2304} e^8 \right\}. \end{aligned} \quad (62)$$

Отсюда площадь зоны от экватора до параллели с широтой  $B$ :

$$\begin{aligned} Z_0^B = 2\pi b^2 \left\{ \left( 1 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{3}{8} e^4 + \frac{5}{16} e^6 + \frac{35}{128} e^8 \right) \sin B - \right. \\ - \left( \frac{1}{6} e^2 + \frac{3}{16} e^4 + \frac{3}{16} e^6 + \frac{35}{192} e^8 \right) \sin 3B + \\ + \left( \frac{3}{80} e^4 + \frac{1}{16} e^6 + \frac{5}{64} e^8 \right) \sin 5B - \\ \left. - \left( \frac{1}{112} e^6 + \frac{5}{256} e^8 \right) \sin 7B + \frac{5}{2304} e^8 \sin 9B \right\}. \end{aligned} \quad (63)$$

Площадь всей поверхности  $\Sigma$  эллипсоида из (60) и из (63)

$$\Sigma = 4\pi b^2 \left\{ 1 + \frac{2}{3} e^2 + \frac{3}{5} e^4 + \frac{4}{7} e^6 + \frac{5}{9} e^8 + \frac{6}{11} e^{10} + \dots \right\}. \quad (64)$$

Вводя среднюю широту  $B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}$ , преобразуем формулу (62)

так:

$$\begin{aligned} Z = 4\pi b^2 \left\{ \left( 1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \frac{35}{128}e^8 \right) \sin \frac{B_2 - B_1}{2} \cos B_m - \right. \\ - \left( \frac{1}{6}e^2 + \frac{3}{16}e^4 + \frac{3}{16}e^6 + \frac{35}{192}e^8 \right) \sin \frac{3}{2}(B_2 - B_1) \cos 3B_m + \\ + \left( \frac{3}{80}e^4 + \frac{1}{16}e^6 + \frac{5}{64}e^8 \right) \sin \frac{5}{2}(B_2 - B_1) \cos 5B_m - \\ - \left( \frac{1}{112}e^6 + \frac{5}{256}e^8 \right) \sin \frac{7}{2}(B_2 - B_1) \cos 7B_m + \\ \left. + \frac{5}{2304}e^8 \sin \frac{9}{2}(B_2 - B_1) \cos 9B_m \right\}. \quad (65) \end{aligned}$$

В геодезических работах приходится вычислять площади трапеций:

- а) карты в масштабе 1 : 1 000 000 при  $B_2 - B_1 = 4^\circ$  и при  $\Delta l = 6'$ ;
- б) топографической карты в масштабе 1 : 100 000 при  $B_2 - B_1 = 20'$  и при  $\Delta l = 30'$ ;
- в) съемочных планшетов в масштабе 1 : 50 000 при  $B_2 - B_1 = 10'$  и при  $\Delta l = 15'$  и пр.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} A' &= 1 + \frac{e^2}{2} + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \frac{35}{128}e^8; \\ B' &= \frac{e^2}{6} + \frac{3}{16}e^4 + \frac{3}{16}e^6 + \frac{35}{192}e^8; \\ C' &= \frac{3}{80}e^4 + \frac{1}{16}e^6 + \frac{5}{64}e^8; \\ D' &= \frac{1}{112}e^6 + \frac{5}{256}e^8; \\ E' &= \frac{5}{2304}e^8. \end{aligned}$$

Для градусной трапеции  $G$ , при  $B_2 - B_1 = 1^\circ$  и  $\Delta l = 1'$ , из (65) будем иметь

$$\begin{aligned} G = \frac{\pi b^2}{90} \left\{ A' \sin 30' \cos B_m - B' \sin 1^\circ 30' \cos 3B_m + \right. \\ \left. + C' \sin 2^\circ 30' \cos 5B_m - D' \sin 3^\circ 30' \cos 7B_m \right\}. \end{aligned}$$

Для трапеции  $M_4^6$  карты в масштабе 1 : 1 000 000

$$\begin{aligned} M_4^6 = \frac{\pi b^2}{15} \left\{ A' \sin 2^\circ \cos B_m - B' \sin 6^\circ \cos 3B_m + C' \sin 10^\circ \cos 5B_m - \right. \\ \left. - D' \sin 14^\circ \cos 7B_m + E' \sin 18^\circ \cos 9B_m \right\}. \end{aligned}$$

Для трапеции  $T$  карты в масштабе 1 : 100 000:

$$T = \frac{\pi b^2}{180} \left\{ A' \sin 10' \cos B_m - B' \sin 30' \cos 3B_m + C' \sin 50' \cos 5B_m - \right. \\ \left. - D' \sin 70' \cos 7B_m \right\}$$

Для трапеции  $P$  планшета в масштабе 1 : 50 000:

$$P = \frac{\pi b^2}{360} \left\{ A' \sin 5' \cos B_m - B' \sin 15' \cos 3B_m + C' \sin 25' \cos 5B_m - \right. \\ \left. - D' \sin 35' \cos 7B_m \right\}$$

### § 11. Расчет рамок съёмочных трапеций

Пусть съёмочная трапеция  $ACDB$  (черт. 10) имеет широту  $B_2$  для северной рамки  $AC$ , широту  $B_1$  для южной рамки  $BD$  и разность долгот  $\Delta l$  для восточной и западной рамок. Назовем

$$\Delta B'' = (B_2 - B_1)'',$$

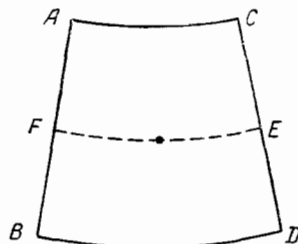
$$B_m = \frac{B_2 + B_1}{2},$$

$n$  — знаменатель численного масштаба съёмки. Выражая размеры рамок планшета в сантиметрах, получим

$$\left. \begin{aligned} \widetilde{AC} &= \frac{100}{n} N_2 \cos B_2 \frac{\Delta l''}{\rho''} = \frac{100}{n} \frac{\Delta l'' \cos B_2}{(2)_2} \\ \widetilde{BD} &= \frac{100}{n} \frac{\Delta l'' \cos B_1}{(2)_1} \\ AB = CD &= \frac{100}{n} \frac{\Delta B''}{(1)_m} \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Величины  $(2)_1$ ,  $(2)_2$  и  $(1)_m$  должны быть взяты из геодезических таблиц соответственно по  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_m$ . Конечно, если имеются таблицы дуг меридианов с интервалом в  $10'$  и таблицы длин дуг параллелей с интервалом по широте в  $10'$  и при  $\Delta l = 1^\circ$ , то вместо (66) можно применить более простые вычисления.

Представим себе (черт. 11) конус с вершиной  $S$  на продолжении малой оси  $PP_1$  земного эллипсоида и касающийся поверхности эллипсоида по параллели  $FE$ , средней для съёмочной трапеции (широта ее равна  $B_m$ ). Если по образующим конуса  $ES$  и  $FS$  отложить от  $E$  и  $F$  вверх и вниз отрезки  $EC = FA$  и  $ED = FB$  (черт. 10) и соединить две верхние точки и две нижние точки окружностями с центром в  $S$ , то на конусе получится трапеция, которая практи-



Черт. 10

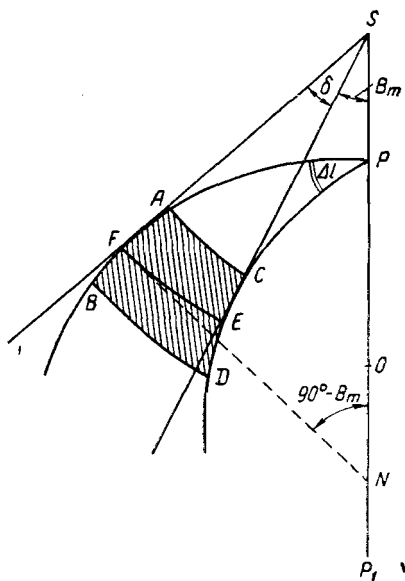


чески совпадет со съемочной трапеции  $ABDC$ . Другими словами, трапецию черт. 11 можно считать расположенной на конусе  $SFE$ . Отрезок образующей  $SF = SE$  этого конуса будет равен

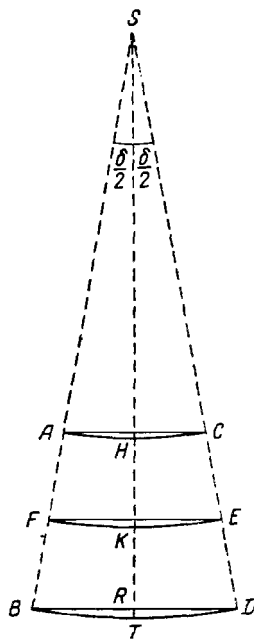
$$\overline{SF} = \overline{FH} \operatorname{ctg} B_m = N_m \operatorname{ctg} B_m.$$

Поэтому угол  $\delta$  при вершине конуса, соответствующий дуге  $FE$ , вычислится так

$$\delta = \frac{\widehat{FE}}{N_m \operatorname{ctg} B_m} = \frac{N_m \cos B_m \Delta l}{N_m \operatorname{ctg} B_m} = \Delta l \sin B_m.$$



Черт. 11



Черт. 12

Развернув конус в плоскость, будем иметь (черт. 12), что стрелка  $h = \overline{RT}$  дуги  $BTD$  равна:

$$h = \overline{ST} - \overline{BS} \cos \frac{\delta}{2} = \overline{ST} \left( 1 - \cos \frac{\delta}{2} \right);$$

$$h = (N_m \operatorname{ctg} B_m + \overline{FB}) 2 \sin^2 \frac{\delta}{4};$$

$$h = N_m \operatorname{ctg} B_m \frac{\delta''^2}{8\rho''^2};$$

$$h = N_m \sin B_m \cos B_m \frac{\Delta l''^2}{8\rho''^2};$$

$$h = N_m \frac{\Delta l''^2}{16\rho''^2} \sin 2B_m. \quad (67)$$

При  $\Delta l = 30'$  получим, что  $h \leq 30$  м.

При  $\Delta l = 15'$  получим, что  $h \leq 7,5$  м.

Различие  $\Delta$  между длиной  $S$  дуги  $BTD$  и длиной хорды  $BD$  будет равно  $\frac{8}{s} \frac{h^2}{S}$ . Это различие  $\Delta$  даже при  $\Delta l = 30'$  будет менее одного

метра. Другими словами, хорды  $BD$  и  $AC$  можно рассчитывать для целей съёмки как дуги  $AC$  и  $BD$  по формулам (66).

Для построения трапеции  $ACDB$  можно пользоваться или штангенциркулем, или координатографом. Обозначая  $AB = CD = c$ , хорду  $AC = b$ , хорду  $BD = a$ , диагональ  $AD = d$ , легко получаем

$$d = \sqrt{ab + c^2}.$$

Для масштабов 1 : 50 000 и более крупных величиной  $h$  можно пренебрегать.

---

## ИССЛЕДОВАНИЕ КРИВЫХ НА ЭЛЛИПСОИДЕ

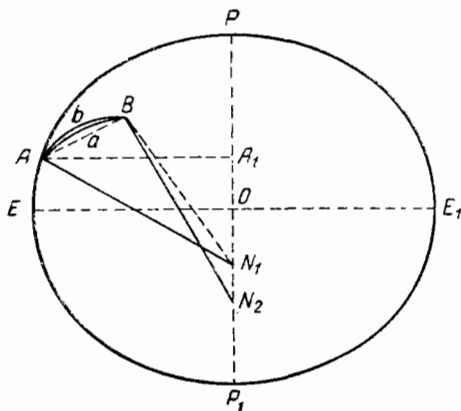
### § 12. Понятие о взаимных нормальных сечениях, геодезической линии и кривой провешивания

Пусть имеем на эллипсоиде две точки  $A$  и  $B$  с широтами  $B_1$  и  $B_2$ , причем  $B_2 > B_1$ . Пусть  $N_1$  и  $N_2$  являются пересечениями нормалей к поверхности эллипсоида в точках  $A$  и  $B$  с малой его осью (черт. 13). Опустив из  $A$  перпендикуляр на малую ось  $PP_1$ , будем иметь

$$\begin{aligned}\overline{OA_1} &= y_a = \frac{a(1-e^2)\sin B_1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}}, \\ \overline{N_1A_1} &= \frac{a\sin B_1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}}, \\ \overline{ON_1} &= N_1A_1 - OA_1 = \frac{ae^2\sin B_1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}}.\end{aligned}\quad (68)$$

Применяя формулу (68) к точке  $B$ , найдем

$$\overline{ON_2} = \frac{ae^2\sin B_2}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}}.$$



Черт. 13

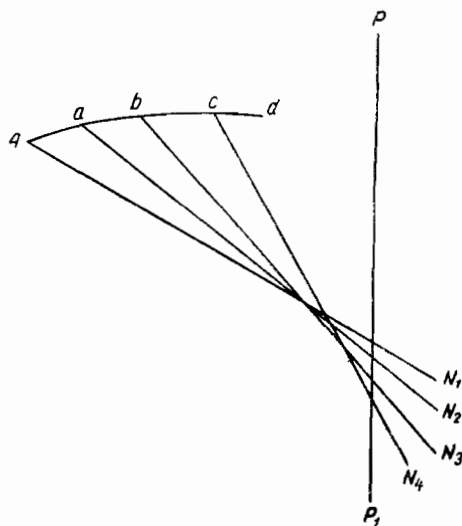
которая, очевидно, расположится более северно, чем кривая  $AaB$  при  $B_2 > B_1$ . Таким образом, между двумя точками  $A$  и  $B$  проходят два нормальных сечения:  $AaB$  будет прямым сечением в  $A$ ;  $AbB$  будет прямым сечением в  $B$  и обратным сечением в  $A$ . Две эти кривые  $AaB$  и  $AbB$  называются взаимными нормальными сечениями. С двойственностью нормальных сечений между  $A$  и  $B$  приходится, конечно, так или иначе считаться.

Очевидно, кривую  $AaB$  мы получим, если, установив теодолит так, чтобы его вертикальная ось совпала с нормалью  $AN_1$  в  $A$ , направим его трубу на  $B$  и будем затем, вращая эту трубу только около горизонтальной оси теодолита, отмечать точки на поверхности эллипсоида, лежащие в визирной плоскости трубы. Другими словами, здесь выполняется вешение с одной установки инструмента в начале линии по заданному ее концу.

Геодезической линией на некоторой поверхности называют такую кривую, в каждой точке которой соприкасающаяся ее плоскость проходит через нормаль к поверхности в той же точке. Геодезическая линия, соединяющая точки  $A$  и  $B$  поверхности, является кратчайшим расстоянием на поверхности между этими точками.

Представим себе (черт. 14), что  $PP_1$  — малая ось эллипсоида и  $AN_1$  — нормаль к его поверхности в точке  $A$ . Установив в  $A$  теодолит так, что его вертикальная ось совпадает с  $AN_1$ , наметим трубой теодолита на поверхности эллипсоида точку  $a$  к северо-востоку от  $A$  и близкую к  $A$ . Затем, перенеся теодолит в  $a$ , установим его вертикальную ось по нормали  $aN_2$  в  $a$ , направим трубу теодолита на  $A$ , повернем алидаду инструмента точно на  $180^\circ$ , после чего отметим в плоскости трубы точку  $b$ , близкую к  $a$ . После этого перенесем теодолит в  $b$ , установим его вертикальную ось по нормали  $bN_3$  в  $b$ , направим трубу теодолита на  $a$ , и, повернув алидаду точно на  $180^\circ$ , отметим в плоскости трубы точку  $c$ , близкую к  $b$  и т. д. Очевидно, первая плоскость  $AaN_1$  не совпадает со второй плоскостью  $AabN_2$ , а эта — не совпадает с третьей плоскостью  $abcN_3$ , и т. д. Если теперь вообразим, что  $A$  и  $a$ ,  $a$  и  $b$ ,  $b$  и  $c$  бесконечно близки между собой, то эти точки, очевидно, определяют на эллипсоиде некоторую, непрерывную кривую, для которой плоскости  $AaN_1$ ,  $abcN_3$ ,  $bcdN_4$ , ... явятся соприкасающимися в точках  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ... этой кривой, оставаясь нормальными к эллипсоиду соответственно в тех же точках, — т. е. в построенной кривой каждые смежные три точки, определяющие соприкасающуюся плоскость в средней из них, лежат в плоскости, нормальной в этой точке к поверхности эллипсоида. Такая кривая, конечно, есть линия геодезическая, являющаяся, как видно, на эллипсоиде кривой двойной кривизны. Для вставки геодезической линии между точками  $A$  и  $B$  эллипсоида (черт. 13) указанным путем посредством теодолита необходимо, очевидно, знать направление первого элемента этой кривой, т. е. угол, образуемый в  $A$  геодезической линией с плоскостью  $BN_1A$  или с нормальной кривой  $AaB$ , причем при разбивке кривой придется дать теодолиту бесконечное число установок между  $A$  и  $B$ , двигаясь непрерывно от  $A$  к  $B$ .

Другими словами, для построения геодезической линии между  $A$  и  $B$

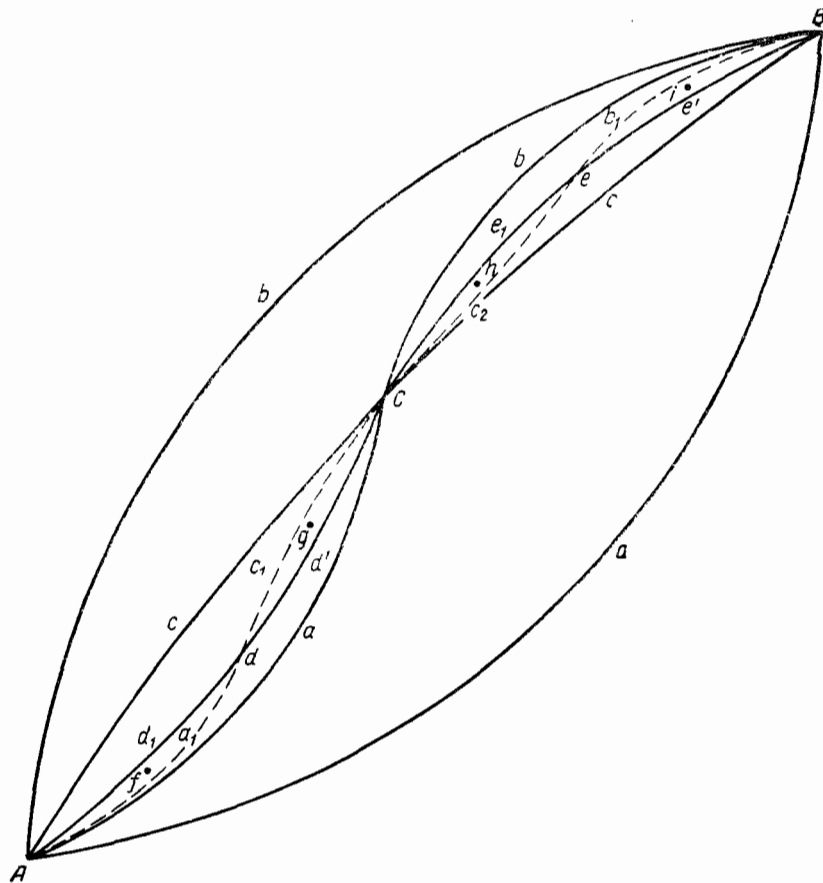


Черт. 14

нужно вообразить такое вешение, в котором каждая последующая точка находится только по двум ей предшествующим, а продвижение вперед при нахождении каждой новой точки — бесконечно мало.

Остановимся теперь еще на ином, аналитическом способе разбивки геодезической линии между  $A$  и  $B$ .

Пусть на черт. 15  $AaB$  — нормальное в  $A$  сечение,  $BbA$  — нормальное сечение в  $B$ . Соединив  $A$  и  $B$  хордой, отыщем на ней среднюю точку, в которой проведем нормаль к поверхности эллипсоида; пусть пересечение этой нормали с поверхностью случится в  $C$ . Проведем плоскость



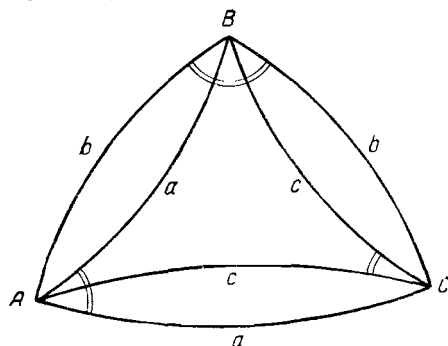
Черт. 15

через нормаль в  $C$  и через точку  $A$ , мы будем иметь, что эта плоскость пройдет и через  $B$ . Пусть сечение эллипсоида этой плоскостью будет кривая  $AcCcB$ . Так как  $C$  более северна, чем  $A$ , и более южна, чем  $B$ , то прямое нормальное сечение в  $A$ , соединяющее эту точку с  $C$ , представится кривой  $AaC$ , а прямое нормальное в  $B$  сечение, соединяющее  $B$  с  $C$ , представится кривой  $BbC$ . Соединив хордами  $A$  с  $C$  и  $C$  с  $B$ , найдем на этих хордах средние точки и в них проведем нормали к поверхности эллипсоида; пусть пересечения этих нормалей с поверхностью эллипсоида будут соответственно в  $d$  и  $e$ . Проведем нормальную плоскость в  $d$ , проходящую через  $A$ , будем иметь, что она пройдет и через точку  $C$  и даст на поверхности эллипсоида кривую  $Ad, dd'C$ , нормаль-

ную в  $d$ . Точно так же, построив в  $e$  нормальную плоскость, проходящую через  $C$ , будем иметь, что она пройдет через  $B$  и даст на эллипсоиде кривую  $Ce_1ee'$ , нормальную в  $e$ . Очевидно, прямое сечение в  $A$ , соединяющее эту точку с  $d$ , представится кривой  $Aa_1d$ ; прямое нормальное сечение в  $C$ , соединяющее эту точку с  $d$ , представится кривой  $dc_1C$ ; прямое сечение с  $B$  на  $e$  представится кривой  $eb_1B$ ; прямое сечение с  $C$  на  $e$  представится кривой  $Cc_2e$ .

Соединив теперь последовательно хордами  $A$  с  $d$ ,  $d$  с  $C$ ,  $C$  с  $e$  и  $e$  с  $B$ , в серединах этих хорд проводим нормали к поверхности и отмечаем точки  $f, g, h, i$  — пересечения этих нормалей с поверхностью эллипсоида. Соединив далее хордами  $A$  с  $f$ ,  $f$  с  $d$ ,  $d$  с  $g$ ,  $g$  с  $C$ ,  $C$  с  $h$ ,  $h$  с  $e$ ,  $e$  с  $i$ ,  $i$  с  $B$ , в средних точках таких хорд проводим нормали к поверхности и отмечаем пересечения этих нормалей с эллипсоидом и т. д. Если представить себе продолжение такого построения до бесконечности, то в пределе его мы придем к элементарным хордам, концы которых дадут на эллипсоиде непрерывную между  $A$  и  $B$  кривую. При этом плоскость, проходящая через нормаль к эллипсоиду, проведенную из середины некоторой элементарной хорды и через самую эту хорду, обратится в соприкасающуюся плоскость полученной кривой в ее точке, соответствующей середине рассматриваемой хорды. Поэтому очевидно, что построенная кривая будет геодезической линией между  $A$  и  $B$ . Геодезическая линия соединит точки, соответствующие серединам последовательных хорд, т. е. пройдет через  $A, f, d, g, C, h, e, i, B$ .

В заключение параграфа скажем несколько слов о кривой провешивания. Если между  $A$  и  $B$  будем находить точку под условием, чтобы нормальная плоскость в ней проходила одновременно и через  $A$  и через  $B$ , то линия, соединяющая все такие точки, и будет кривой провешивания: это, следовательно, будет геометрическое место точек, разность азимутов в которых на конечные точки линии равна  $180^\circ$ ; очевидно, что кривой провешивания можно дать и иное



Черт. 16

определение: это есть геометрическое место точек встречи с поверхностью нормалей к ней, проведенных из точек хорды, соединяющей конечные точки  $A$  и  $B$  кривой. Кривая провешивания никакого значения в геодезии не имеет. Понятно, что при измерении углов в триангуляции мы имеем дело с нормальными плоскостями и с кривыми нормальных сечений. Измеренные в триангуляции углы образованы на каждой точке прямыми нормальными в ней сечениями. На черт. 16 отчеркнуты углы, измеренные на пунктах  $B, A$  и  $C$ ; по существу образуется треугольник с шестью сторонами. Кривая геодезическая вводится в триангуляцию путем введения соответственных редуций в измеренные углы или направления.

### § 13. Приближенные формулы для разностей широт, долгот и азимутов на эллипсоиде вращения

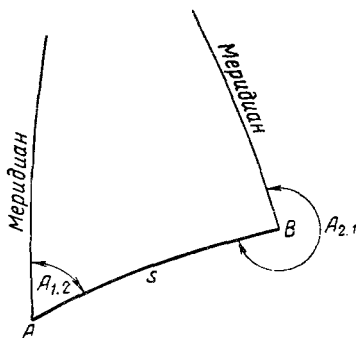
Допустим, что нам даны: геодезическая широта  $B_1$  точки  $A$  (черт. 17), геодезическая долгота  $L_1$  той же точки и азимут  $A_{1.2}$  в  $A$  геодезической

линии, соединяющей  $A$  с  $B$ ; длина линии  $AB$  также дана и равна  $s$ . Этими данными положение  $B$  вполне определяется. Называя для  $B$ : геодезические широту и долготу ее через  $B_2$  и  $L_2$  и обратный азимут с  $B$  на  $A$  через  $A_{2,1}$ , мы, конечно, скажем, что  $B_2$ ,  $L_2$  и  $A_{2,1}$  суть функции  $B_1$ ,  $A_{1,2}$  и  $s$ . Или имеем право написать такие ряды

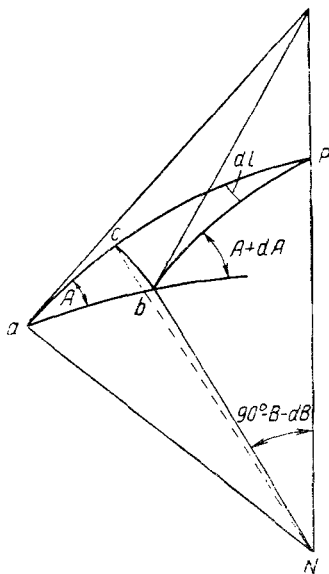
$$\left. \begin{aligned} B_2 &= B_1 + \left(\frac{dB}{ds}\right)_0 s + \left(\frac{d^2B}{ds^2}\right)_0 \frac{s^2}{1 \cdot 2} + \left(\frac{d^3B}{ds^3}\right)_0 \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \\ L_2 &= L_1 + \left(\frac{dL}{ds}\right)_0 s + \left(\frac{d^2L}{ds^2}\right)_0 \frac{s^2}{1 \cdot 2} + \left(\frac{d^3L}{ds^3}\right)_0 \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \\ A_{2,1} - 180^\circ &= A_{1,2} + \left(\frac{dA}{ds}\right)_0 s + \left(\frac{d^2A}{ds^2}\right)_0 \frac{s^2}{1 \cdot 2} + \\ &\quad + \left(\frac{d^3A}{ds^3}\right)_0 \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

В формуле (69)  $l = L_2 - L_1$ ;  $L_2 = L_1 + l$ .

Понятно, что при данных  $B_1$  и  $A_{1,2}$  разность широт  $B_2 - B_1$ , разность долгот  $l = L_2 - L_1$  и разность азимутов  $A_{2,1} - A_{1,2} - 180^\circ$  изменяются



Черт. 17



Черт. 18

только с изменением расстояния  $s$ , что собственно и выражено рядами (69). В дальнейшем мы полностью используем ряды (69), развитые до членов с  $s^5$ ; теперь же ограничимся только членами со второй степенью  $s$ .

Возьмем на эллипсоиде (черт. 18) элементарную дугу  $ab$ , равную  $ds$ ; пусть полюс эллипсоида в  $P$ ; нормаль в  $b$  пусть встречается малую ось эллипсоида в  $N$ ; азимут элемента  $ds$  в  $a$  равен  $A$ . Проведя элементарную дугу  $bc$  перпендикулярно к меридиану  $aP$  точки  $a$ , мы можем рассматривать  $\overline{bc}$  в отношении длины этого отрезка и как сече-

ние первого вертикала, и как дугу параллели, проведенную через  $b$ . Мы имеем из элементарного треугольника  $abc$

$$ac = ds \cos A; \quad bc = ds \sin A.$$

Разность широт  $dB$  точек  $a$  и  $b$  равна разности широт точек  $a$  и  $c$ . Следовательно,

$$dB = \frac{ds \cos A}{M}; \quad \frac{dB}{ds} = \frac{\cos A}{M}. \quad (70)$$

Далее, для разности долгот точек  $b$  и  $a$  имеем

$$dl = \frac{ds \sin A}{N \cos B}; \quad \frac{dl}{ds} = \frac{\sin A}{N \cos B}. \quad (71)$$

( $B$  — широта точки  $a$  или точки  $b$ ).

Построим теперь сферический треугольник  $c_1 b_1 p$  (черт. 18а), соответствующий трехграннику с вершиной в  $N$  и ребрами  $cN$ ,  $bN$ ,  $PN$  (черт. 18); в нем угол при  $c_1$  равен  $90^\circ$ , угол при  $p$  равен  $dl$ , стороны  $c_1 p$  и  $b_1 p$  каждую можно принять равной  $90^\circ - (B + dB)$ , угол же при  $b_1$  назовем через  $90^\circ - t$ . Мы имеем

$$\cos(90^\circ - t) = \sin dl \sin(B + dB).$$

Отсюда

$$\sin t = \sin dl \sin B; \quad t = dl \sin B.$$

По из черт. 18

$$A + dA = 180^\circ - (90^\circ - t) - (90^\circ - A) = A + t.$$

Следовательно,

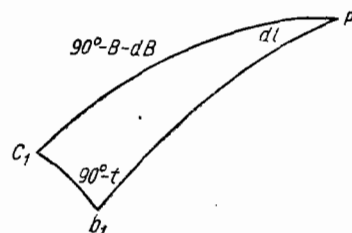
$$dA = t = dl \sin B = \frac{ds \sin A}{N} \operatorname{tg} B;$$

$$\frac{dA}{ds} = \frac{\sin A}{N} \operatorname{tg} B. \quad (72)$$

Используя (70), (71) и (72), мы из (69) напишем

$$\left. \begin{aligned} B_2 - B_1 &= \frac{\cos A_{1,2}}{M_1} s \\ l = L_2 - L_1 &= \frac{\sin A_{1,2}}{N_1 \cos B_1} s \\ A_{2,1} &= A_{1,2} \pm 180^\circ + \frac{\sin A_{1,2}}{N_1} \operatorname{tg} B_1 s \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

В (73) величины  $M_1$  и  $N_1$  суть главные радиусы кривизны в  $A$ , т. е. под широтой  $B_1$ . Формулы (73), конечно, грубы; они для расчетов могут быть использованы только в работе по карте в масштабе 1:400 000 и мельче. Но они нам будут нужны в ближайших параграфах для соображения размеров тех членов, которые мы будем отбрасывать. При получении вторых производных в (69) мы будем (только в настоящем параграфе) рассматривать эллипсоид, как шар, или, другими словами,



Черт. 18а



будем пренебрегать изменениями  $M$  и  $N$  в (70), (71) и (72) при дальнейшем дифференцировании этих выражений. Мы напишем тогда

$$\frac{d^2 B}{ds^2} = -\frac{\sin A}{M} \frac{dA}{ds} = -\frac{\sin^2 A}{MN} \operatorname{tg} B; \quad (74)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 l}{ds^2} &= \frac{\cos A}{N \cos B} \frac{dA}{ds} + \frac{\sin A}{N} \frac{\operatorname{tg} B}{\cos B} \frac{dB}{ds}; \\ \frac{d^2 l}{ds^2} &= \frac{\sin A \cos A}{N^2 \cos B} \operatorname{tg} B + \frac{\sin A \cos A}{MN} \frac{\operatorname{tg} B}{\cos B}; \\ \frac{d^2 l}{ds^2} &= \frac{\operatorname{tg} B \sec B \sin 2A}{MN}; \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A}{ds^2} &= \frac{\cos A}{N} \operatorname{tg} B \frac{dA}{ds} + \frac{\sin A}{N} \sec^2 B \frac{dB}{ds} = \frac{\sin A \cos A}{N^2} \operatorname{tg}^2 B + \\ &+ \frac{\sin A \cos A}{MN} (1 + \operatorname{tg}^2 B); \\ \frac{d^2 A}{ds^2} &= \frac{\sin A \cos A}{MN} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 B). \end{aligned} \quad (76)$$

Отсюда во втором приближении

$$\left. \begin{aligned} (B_2 - B_1)'' &= \frac{\rho'' \cos A_{1,2}}{M_1} s - \frac{s^2 \sin^2 A_{1,2}}{2 M_1 N_1} \operatorname{tg} B_1 \rho'' \\ (L_2 - L_1)'' &= \frac{\rho'' s \sin A_{1,2} \sec B_1}{N_1} + \frac{s^2 \sin 2A_{1,2}}{2 M_1 N_1} \operatorname{tg} B_1 \sec B_1 \rho'' \\ A_{2,1} &= A_{1,2} \pm 180^\circ + s \sin A_{1,2} \operatorname{tg} B_1 \frac{\rho''}{N_1} + \\ &+ \frac{s^2 \sin A_{1,2} \cos A_{1,2}}{2} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 B_1) \frac{\rho''}{M_1 N_1} \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

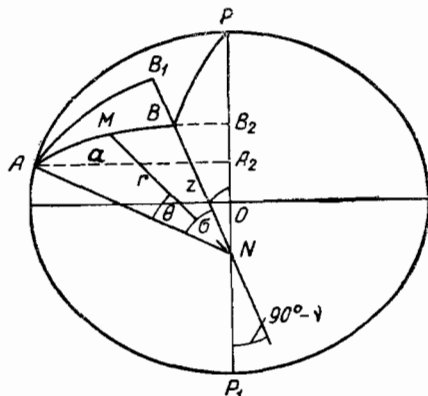
Приближенность формул (77) сказывается только уже в сотых долях секунды в  $B_2$ ,  $L_2$  и  $A_{2,1}$  при  $s \leq 32$  км (среднее значение стороны триангуляции I класса в СССР). Другими словами, они пригодны в целях картографии до масштаба 1 : 25 000 включительно.

#### § 14. Сравнение длины дуги нормального сечения с длиной дуги окружности

На черт. 19 точка  $N$  есть пересечение малой оси эллипсоида нормально в  $A$  к его поверхности; точка  $A$  имеет широту  $B_1$ , кривая  $AaB$  есть нормальное сечение, азимут которого в  $A$  равен  $A_{1,2}$ , а длина —  $s$ . Соединим  $B$  с  $N$  и опишем в плоскости  $ABN$  окружность из центра  $N$  радиусом, равным радиусу кривизны  $N_1$  первого вертикала в точке  $A$

$$N_1 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}}.$$

Пересечение  $BN$  с окружностью назовем через  $B_1$ . Сравним длины дуг  $\widehat{AB_1}$  и  $\widehat{AB} = s$ . Для этого, приняв  $AN$  за ось полярных координат с началом в  $N$  и отсчитывая амплитуды в плоскости  $ANB$ , найдем уравнение кривой  $AaB$  в полярных координатах, а затем выразим длину дуги  $\widehat{AB}$  в функции угла  $\sigma = \angle ANB$ , широты  $B_1$  и азимута  $A_{1,2}$ . Длину  $\widehat{BN}$  назовем через  $z$ , а угол, который прямая  $BN$  делает с плоскостью



Черт. 19

экватора эллипсоида, — через  $v$ . Опустив из  $A$  перпендикуляр  $AA_2$  на  $PP_1$  будем иметь

$$\overline{A_2O} = y = \frac{a(1-e^2)\sin B_1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}}; \quad (9)$$

$$\overline{A_2N} = \frac{a\sin B_1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}};$$

$$\overline{ON} = \frac{ae^2\sin B_1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}} = N_1 e^2 \sin B_1. \quad (68)$$

Опустив перпендикуляр  $BB_2$  на  $PP_1$ , будем рассматривать точку  $B$  как отнесенную к осям и центру меридианного эллипса  $PBP_1$  и тогда напомним

$$\frac{\overline{BB_2}^2}{a^2} + \frac{\overline{B_2O}^2}{b^2} = 1;$$

$$\overline{BB_2} = z \cos v; \quad \overline{B_2O} = z \sin v - \overline{NO};$$

$$\frac{z^2 \cos^2 v}{a^2} + \frac{z^2 \sin^2 v - 2z N_1 e^2 \sin B_1 \sin v + e^4 N_1^2 \sin^2 B_1}{a^2(1-e^2)} = 1,$$

или

$$z^2 \cos^2 v - z^2 e^2 \cos^2 v + z^2 \sin^2 v - 2z N_1 e^2 \sin v \sin B_1 + e^4 N_1^2 \sin^2 B_1 = a^2(1-e^2).$$

Выражая же  $a$  через  $N_1$ , напомним

$$\begin{aligned} z^2 (1 - e^2 \cos^2 \nu) - 2z N_1 e^2 \sin \nu \sin B_1 + e^4 N_1^2 \sin^2 B_1 = \\ = N_1^2 - N_1^2 e^2 \sin^2 B_1 - N_1^2 e^2 + e^4 N_1^2 \sin^2 B_1; \end{aligned}$$

$$\left(\frac{z}{N_1}\right)^2 (1 - e^2 \cos^2 \nu - 2 \frac{z}{N_1} e^2 \sin \nu \sin B_1 = 1 - e^2 - e^2 \sin^2 B_1. \quad (78)$$

Обозначим  $\frac{z}{N_1} = q$ ; имея в виду, что при  $\sigma = 0$  величина  $\nu = B_1$  и  $\left(\frac{z}{N_1}\right)_0 = 1$ , разложим  $\frac{z}{N_1}$  в ряд Тейлора, полагая, что при  $\sigma$  текущем  $\nu = B_1 + \Delta\nu$ .

Имеем

$$\frac{z}{N_1} = 1 + \left(\frac{dq}{d\nu}\right)_0 \Delta\nu + \left(\frac{d^2q}{d\nu^2}\right)_0 \frac{\Delta\nu^2}{1 \cdot 2} + \left(\frac{d^3q}{d\nu^3}\right)_0 \frac{\Delta\nu^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Дифференцируя уравнение (78), найдем

$$\begin{aligned} q \frac{dq}{d\nu} (1 - e^2 \cos^2 \nu) + q^2 e^2 \cos \nu \sin \nu - e^2 \cdot \sin \nu \sin B_1 \frac{dq}{d\nu} - \\ - e^2 q \cos \nu \sin B_1 = 0. \end{aligned} \quad (79)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \left(\frac{dq}{d\nu}\right)_0 (1 - e^2 \cos^2 B_1) + e^2 \sin B_1 \cos B_1 - e^2 \sin^2 B_1 \left(\frac{dq}{d\nu}\right)_0 - \\ - e^2 \sin B_1 \cos B_1 = 0; \\ \left(\frac{dq}{d\nu}\right)_0 = 0. \end{aligned} \quad (80)$$

Дифференцируя (79), с принятием затем во внимание, что  $\left(\frac{dq}{d\nu}\right)_0 = 0$ , имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{dq}{d\nu}\right)^2 (1 - e^2 \cos^2 \nu) + q \frac{d^2q}{d\nu^2} (1 - e^2 \cos^2 \nu) + 2q \frac{dq}{d\nu} \sin \nu \cos \nu + \\ + 2q \frac{dq}{d\nu} e^2 \sin \nu \cos \nu + e^2 q^2 \cos 2\nu - \frac{d^2q}{d\nu^2} e^2 \sin \nu \sin B_1 - \\ - e^2 \frac{dq}{d\nu} \cos \nu \sin B_1 - e^2 \frac{dq}{d\nu} \cos \nu \sin B_1 + e^2 q \sin \nu \sin B_1 = 0; \end{aligned} \quad (81)$$

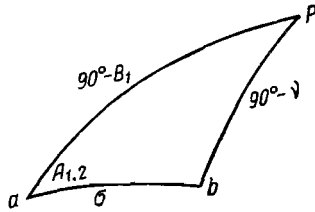
$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2q}{d\nu^2}\right)_0 (1 - e^2 \cos^2 B_1) + e^2 \cos 2B_1 - \left(\frac{d^2q}{d\nu^2}\right)_0 e^2 \sin^2 B_1 + e^2 \sin^2 B_1 = 0; \\ \left(\frac{d^2q}{d\nu^2}\right)_0 = - \frac{e^2 \cos^2 B_1}{1 - e^2}. \end{aligned} \quad (82)$$

Дифференцируя же (81) с принятием сразу во внимание, что  $\left(\frac{dq}{dv}\right)_0 = 0$ , получим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^3q}{dv^3}\right)_0 (1 - e^2 \cos^2 B_1) + 2e^2 \left(\frac{d^2q}{dv^2}\right)_0 \sin B_1 \cos B_1 + \\ & + 4e^2 \left(\frac{d^2q}{dv^2}\right)_0 \sin B_1 \cos B_1 - 2e^2 \sin 2B_1 - \left(\frac{d^3q}{dv^3}\right)_0 e^2 \sin^2 B_1 - \\ & - \left(\frac{d^2q}{dv^2}\right)_0 e^2 \sin B_1 \cos B_1 - 2e^2 \left(\frac{d^2q}{dv^2}\right)_0 \sin B_1 \cos B_1 + \\ & + e^2 \sin B_1 \cos B_1 = 0; \\ & \left(\frac{d^3q}{dv^3}\right)_0 = \frac{3}{2} \frac{e^2 \sin 2B_1}{1 - e^2} + \frac{3e^4}{(1 - e^2)^2} \sin B_1 \cos^3 B_1. \end{aligned} \quad (83)$$

Следовательно, на основании (80), (82) и (83)

$$\frac{z}{N_1} = 1 - \frac{e'^2}{2} \cos^2 B_1 \Delta v^2 + \frac{e'^2}{4} \sin 2B_1 (1 + e'^2 \cos^2 B_1) \Delta v^3. \quad (84)$$



Черт. 20

Построим сферический треугольник  $abp$  (черт. 20), соответствующий трехграннику с ребрами  $AN$ ,  $BN$ ,  $PN$ ; из этого треугольника следует

$$\begin{aligned} \sin \nu &= \sin B_1 \cos \sigma + \cos B_1 \sin \sigma \cos A_{1.2}; \\ \sin \nu &= \sin B_1 \left(1 - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^4}{24}\right) + \sigma \left(1 - \frac{\sigma^2}{6}\right) \cos B_1 \cos A_{1.2}; \\ \sin \nu - \sin B_1 &= \sigma \cos B_1 \cos A_{1.2} - \frac{\sigma^2}{2} \sin B_1 - \\ & - \frac{\sigma^3}{6} \cos B_1 \cos A_{1.2} + \frac{\sigma^4}{24} \sin B_1; \\ \Delta \nu \cos B_1 - \frac{\Delta \nu^2}{2} \sin B_1 - \frac{\Delta \nu^3}{6} \cos B_1 + \frac{\Delta \nu^4}{24} \sin B_1 &= \\ = \sigma \cos B_1 \cos A_{1.2} - \frac{\sigma^2}{2} \sin B_1 - \frac{\sigma^3}{6} \cos B_1 \cos A_{1.2} + \frac{\sigma^4}{24} \sin B_1. \end{aligned}$$

В первом приближении, с ошибкой на величины порядка  $\sigma^2$ , имеем

$$\Delta \nu = \sigma \cos A_{1.2}.$$

Поэтому во втором приближении с ошибкой на величины порядка  $\sigma^3$ .

$$\Delta v \sigma \cos A_{1.2} - \frac{\sigma^2}{2} \sin^2 A_{1.2} \operatorname{tg} B_1. \quad (85)$$

Подставляя (85) в (84), найдем, вводя притом  $\eta^2 = e'^2 \cos^2 B_1$ ,

$$\begin{aligned} \frac{z}{N_1} = 1 - \frac{\eta^2}{2} \sigma^2 \cos^2 A_{1.2} + \frac{\eta^2}{2} \sigma^3 \operatorname{tg} B_1 \cos A_{1.2} + \\ + \frac{\eta^4}{2} \sigma^3 \operatorname{tg} B_1 \cos^3 A_{1.2}, \end{aligned} \quad (86)$$

с отбрасыванием  $e^2 \cdot \sigma^4$ ,  $e^4 \cdot \sigma^4$ , ...

Определяя теперь текущую на дуге  $AB$  точку  $M$  (черт. 19) ее координатами:  $M\bar{N} = r$  и углом  $ANM = \Theta$ , которые находятся, понятно, в зависимости, выражаемой уравнением (86), напишем для дифференциала  $ds$  длины дуги  $AaB$

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\Theta^2};$$

$$\frac{dr}{N_1} = -\eta^2 \cos^2 A_{1.2} \Theta d\Theta + \frac{3}{2} \eta^2 \operatorname{tg} B_1 \cos A_{1.2} (1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2}) \Theta^2 d\Theta;$$

$$\begin{aligned} ds = & \left\{ N_1^2 (\eta^4 \cos^4 A_{1.2} \Theta^2 - 3\eta^4 \cos^3 A_{1.2} \operatorname{tg} B_1 \Theta^3) + \right. \\ & \left. + N_1^2 \left[ 1 - \frac{\eta^2}{2} \cos^2 A_{1.2} \Theta^2 + \frac{\eta^2}{2} \operatorname{tg} B_1 \cos A_{1.2} (1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2}) \Theta^3 \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} d\Theta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ds = N_1 \left[ 1 - \frac{\eta^2}{2} \cos^2 A_{1.2} \Theta^2 + \frac{\eta^2}{2} \operatorname{tg} B_1 \cos A_{1.2} (1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2}) \Theta^3 \right] \times \\ \times \sqrt{1 + \eta^4 \cos^3 A_{1.2} \Theta^2 (\cos A_{1.2} - 3\Theta \operatorname{tg} B_1)} d\Theta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ds = N_1 \left[ 1 - \frac{\eta^2}{2} \cos^2 A_{1.2} \Theta^2 + \frac{\eta^4}{2} \cos^4 A_{1.2} \Theta^2 + \right. \\ \left. + \frac{\eta^2}{2} \operatorname{tg} B_1 \cos A_{1.2} (1 - 2\eta^2 \cos^2 A_{1.2}) \Theta^3 \right] d\Theta. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} s = N_1 \sigma - \frac{N_1}{6} \eta^2 \cos^2 A_{1.2} \sigma^3 + \frac{N_1}{6} \eta^4 \cos^4 A_{1.2} \sigma^3 + \\ + \frac{N_1}{8} \eta^2 \operatorname{tg} B_1 \cos A_{1.2} (1 - 2\eta^2 \cos^2 A_{1.2}) \sigma^4, \end{aligned} \quad (87)$$

с ошибкой на величины порядка  $N e^2 \sigma^5$  и более малые. С той же точностью

$$\begin{aligned} \sigma'' = \frac{s\rho''}{N_1} \left\{ 1 + \frac{\eta^2}{6} \frac{s^2}{N_1^2} \cos^2 A_{1.2} - \frac{\eta^4}{6} \frac{s^2}{N_1^2} \cos^4 A_{1.2} - \right. \\ \left. - \frac{\eta^2 \operatorname{tg} B_1 \cos A_{1.2}}{8N_1^3} (1 - 2\eta^2 \cos^2 A_{1.2}) s^3 \right\}. \end{aligned} \quad (88)$$

При  $s < 40$  км достаточно принимать

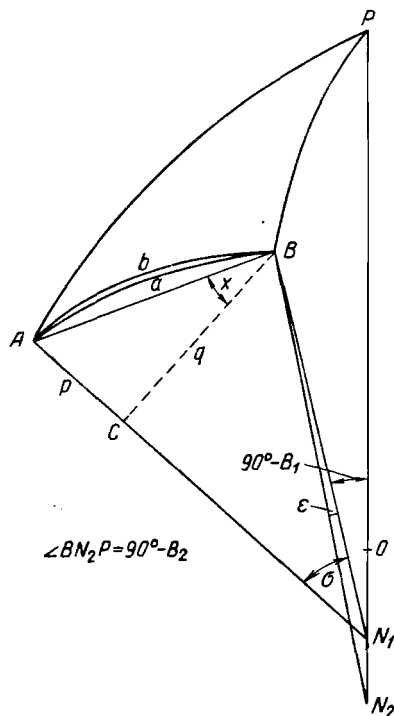
$$\varphi'' = \frac{\rho''}{N_1} s = (2)_1 s. \quad (89)$$

При  $s \leq 100$  км достаточно принимать

$$\sigma'' = (2)_1 s \left[ 1 + \frac{\eta^2 s^2}{6N_1^2} \cos^2 A_{1.2} \right]. \quad (90)$$

### § 15. Расхождение взаимных нормальных сечений и угол между ними

На черт. 21  $AN_1$  — нормаль к эллипсоиду в точке  $A$ , имеющей широту  $B_1$ ;  $BN_2$  — нормаль в точке  $B$ , имеющей широту  $B_2$ ;  $AaB$  — нормальное сечение, прямое в  $A$ ;  $BbA$  — нормальное сечение, прямое в  $B$ ;



Черт. 21

$PON_2$  — малая ось эллипсоида,  $O$  — центр эллипсоида;  $\sigma = \angle AN_1B$ . Через  $s$  и  $A_{1.2}$  назовем поперечному длину дуги  $AaB$  и азимут в  $A$  кривой  $AaB$ . Через  $p$  и  $q$  назовем катеты прямоугольного треугольника  $ACB$ , а через  $x$  — угол между хордой  $AB$  и перпендикуляром  $BC$ , опущенным из  $B$  на нормаль  $AN_1$ . Из (86) имеем

$$\begin{aligned} \overline{BN}_1 &= N_1 \left( 1 - \frac{\eta^2}{2} \sigma^2 \cos^2 A_{1.2} + \frac{\eta^2}{2} \sigma^3 \operatorname{tg} B_1 \cos A_{1.2} \right); \\ q &= N_1 \left( 1 - \frac{\eta^2}{2} \sigma^2 \cos^2 A_{1.2} + \frac{\eta^2}{2} \sigma^3 \operatorname{tg} B_1 \cos A_{1.2} \right) \sin \sigma; \\ p &= N_1 \left( 2 \sin^2 \frac{\sigma}{2} + \frac{\eta^2}{2} \sigma^2 \cos^2 A_{1.2} - \frac{\eta^2}{2} \sigma^3 \operatorname{tg} B_1 \cos A_{1.2} \right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} + \frac{\eta^2}{2} \sigma \cos^2 A_{1,2} - \frac{\eta^2}{2} \sigma^2 \operatorname{tg} B_1 \cos A_{1,2} + \dots, \\ x &= \frac{\sigma}{2} + \frac{\eta^2}{2} \sigma \cos^2 A_{1,2} - \frac{\eta^2}{2} \sigma^2 \operatorname{tg} B_1 \cos A_{1,2} + \dots = \frac{\sigma}{2} + \Delta, \end{aligned} \quad (91)$$

при этом в (91) отброшены члены порядка  $\eta^2 \sigma^2$  и более малые. Пользуясь (68), имеем

$\overline{N_1 N_2} = e^2 (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1)$ ;  $N_1 = \overline{AN_1}$ ;  $N_2 = \overline{BN_2}$ ;  
Называя угол  $N_2 B N_1$  через  $\varepsilon$ , получим

$$\frac{\sin \varepsilon}{\cos B_2} = \frac{e^2 (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1)}{N_1 \left( 1 - \frac{\eta^2}{2} \sigma^2 \cos^2 A_{1,2} + \frac{\eta^2}{2} \sigma^3 \operatorname{tg} B_1 \cos A_{1,2} \right)};$$

$$\sin \varepsilon = e^2 \cos B_2 \left( \frac{N_2}{N_1} \sin B_2 - \sin B_1 \right) + \text{члены порядка } \eta^4 \sigma^3. \quad (92)$$

Построим теперь (черт. 22) сферический треугольник  $an_2n_1$ , соответствующий трехграннику с вершиной в  $B$  и с ребрами  $BA$ ,  $BN_2$  и  $BN_1$ .

Угол при  $a$  в нем назовем через  $f$  — это угол между плоскостями  $ABN_1$  и  $ABN_2$  взаимных нормальных сечений. Так как треугольник  $BN_1N_2$  лежит в плоскости меридиана  $PBN_2$  точки  $B$ , то угол при  $n_2$  в треугольнике  $an_2n_1$  равен  $360^\circ - A_{2,1}$ , где  $A_{2,1}$  — азимут в  $B$  на  $A$ . Сторона  $an_1$  равна  $90^\circ - \sigma + x = 90^\circ - \frac{\sigma}{2} + \Delta$ , где  $\Delta$  — величина порядка  $\eta^2 \sigma$ . Из треугольника  $an_2n_1$  напишем

$$\sin f = - \frac{\sin A_{2,1} e^2 \cos B_2 \left( \frac{N_2}{N_1} \sin B_2 - \sin B_1 \right)}{\cos \left( \frac{\sigma}{2} - \Delta \right)}$$

с ошибкой на величины порядка  $e^4 \sigma^3$

Применяя (77) и (89), будем иметь далее

$$\sin f = (\sin A_{1,2} + \sigma \operatorname{tg} B_1 \sin A_{1,2} \cos A_{1,2}) e^2 \cos B_2 (\sin B_2 - \sin B_1)$$

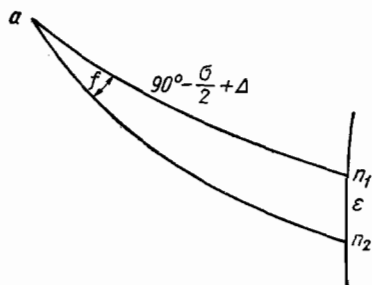
с ошибкой на величины порядка  $e^3 \sigma^3$ ,  $e^4 \sigma$ , ...

Так как можно принять

$$B_2 = B_1 + \sigma \cos A_{1,2} - \frac{\sigma^2}{2} \sin^2 A_{1,2} \operatorname{tg} B_1,$$

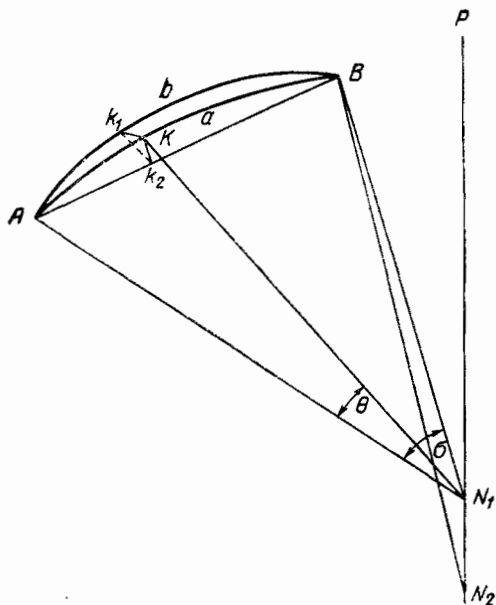
то далее

$$\begin{aligned} \sin f &= e^2 \sin A_{1,2} \cos B_2 \left\{ (1 + \sigma \operatorname{tg} B_1 \cos A_{1,2}) \times \right. \\ &\times \left[ \left( \sigma \cos A_{1,2} - \frac{\sigma^2}{2} \sin^2 A_{1,2} \operatorname{tg} B_1 \right) \cos B_1 - \frac{\sigma^2}{2} \cos^2 A_{1,2} \sin B_1 \right] \Big\}; \end{aligned}$$



Черт. 22

$$\begin{aligned}\sin f &= e^2 \sigma \sin A_{1.2} \cos B_2 \cos B_1 \left[ \cos A_{1.2} - \frac{\sigma}{2} \operatorname{tg} B_1 + \sigma \operatorname{tg} B_1 \cos^2 A_{1.2} \right]; \\ \sin f &= e^2 \sigma \sin A_{1.2} \cos^2 B_1 \times \\ &\times \left[ \cos A_{1.2} - \frac{\sigma}{2} \operatorname{tg} B_1 + \sigma \operatorname{tg} B_1 \cos^2 A_{1.2} - \sigma \cos^2 A_{1.2} \operatorname{tg} B_1 \right]; \\ \sin f &= \frac{e^2 \sigma}{2} \sin 2A_{1.2} \cos^2 B_1 - \frac{e^2 \sigma^2}{2} \sin A_{1.2} \sin B_1 \cos B_1. \quad (93)\end{aligned}$$



Черт. 23

Возьмем теперь на кривой  $AaB$  (черт. 23) точку  $K$ , для которой  $\angle AN_1K$  равен  $\Theta$ . Угол  $BAN_1$  на основании (91) равен

$$\angle BAN_1 = 90^\circ - \frac{\sigma}{2} - \frac{\eta^2}{2} \sigma \cos^2 A_{1.2}.$$

Применяя же (90) к точкам  $A$  и  $K$

$$\angle KAN_1 = 90^\circ - \frac{\Theta}{2} - \frac{\eta^2}{2} \Theta \cos^2 A_{1.2}.$$

Отсюда

$$\angle KAB = \frac{\sigma - \Theta}{2} + \frac{\eta^2}{2} (\sigma - \Theta) \cos^2 A_{1.2}.$$

Построим в  $K$  плоскость, перпендикулярную к хорде  $AB$ , и отметим пересечения этой плоскости с хордой  $AB$  и с кривой  $BbA$  в  $k_2$  и  $k_1$ . В треугольнике  $k_1Kk_2$  угол при  $k_2$  равен  $f$ , угол же при  $K$  можно считать



равным  $90^\circ$ . Длина хорды  $AK$  может быть принята равной  $2N_1 \sin \frac{\theta}{2}$  с ошибкой лишь на величины порядка  $e^2 \theta^3$ . Поэтому

$$Kk_2 = 2N_1 \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\sigma - \theta}{2}$$

с ошибкой на величины порядка  $e^2 \theta^4$ ;

$$k_1 K = 2N_1 \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\sigma - \theta}{2} e^2 \sigma \sin A_{1.2} \cos^2 B_1 \left( \cos A_{1.2} - \frac{\sigma}{2} \operatorname{tg} B_1 \right). \quad (94)$$

Формула (94) дает расхождение взаимных нормальных сечений с ошибкой порядка  $e^2 \sigma^5$ ,  $e^4 \sigma^3$ , ..., т. е. с высокой степенью точности. Мы, конечно, имеем право эту формулу упростить еще так

$$k_1 K = N_1 \frac{e^2 \theta (\sigma - \theta) \sigma}{2} \sin A_{1.2} \cos^2 B_1 \left( \cos A_{1.2} - \frac{\sigma}{2} \operatorname{tg} B_1 \right). \quad (95)$$

При  $\theta = \frac{\sigma}{2}$  имеем наибольшее расхождение взаимных нормальных сечений; оно равно

$$k_1 K_{\max} = N_1 \frac{e^2 \sigma^3}{8} \sin A_{1.2} \cos^2 B_1 \left( \cos A_{1.2} - \frac{\sigma}{2} \operatorname{tg} B_1 \right). \quad (96)$$

Очевидно, наибольшее расхождение между кривыми имеем при  $A_{1.2} = 45^\circ$ . В широте  $45^\circ$  имеем

$$k_1 K_{\max} \leq N_1 \frac{e^2 \sigma^3}{16}.$$

При  $s = 106$  км и  $\sigma = 1 : 60$  в широте  $45^\circ$  имеем

$$k_1 K_{\max} \leq 0,01 \text{ м},$$

При  $s = 320$  км величина  $k_1 K$  меньше  $0,333$  м. При  $s = 32$  км, величина расхождения взаимных нормальных сечений не превышает  $0,3$  мм! (для широт  $45^\circ$ ). Другими словами, *при обычных сторонах триангуляции I класса ( $s=32$  км) можно считать взаимные нормальные сечения между собой просто сливающимися.*

Проводимые в данной точке  $A$  взаимные нормальные сечения сливаются между собой в меридиане, т. е. при  $A_{1.2} = 0^\circ$  или  $180^\circ$ ; при азимутах  $45$ ,  $135$ ,  $225$  и  $315^\circ$  расхождение между кривыми, построенными в данной точке  $A$ , достигает наибольшего значения; при азимуте, определяемом уравнением

$$\cos A_{1.2} = \frac{\sigma}{2} \operatorname{tg} B_1, \quad (97)$$

кривые взаимных нормальных сечений сливаются. Конечно, это происходит тогда, когда точки  $A$  и  $B$  лежат на одной параллели, т. е. когда точки  $N_1$  и  $N_2$  сливаются (черт. 23), и когда уравнение (97) заменяется более точным

$$\cos A_{1.2} = \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \operatorname{tg} B_1.$$

Представим себе теперь процесс бесконечного убывания  $\theta$  и приближения точки  $K$  к  $A$  (черт. 23); в пределе хорды  $AK$  и  $Ak_1$  обратятся

в касательные в  $A$  к кривым  $AaB$  и  $AbB$  и угол между ними даст разность азимутов:  $A_{1.2}$  и  $\beta_{1.2}$ , понимая под  $\beta_{1.2}$  азимут в  $A$  обратного нормального сечения или азимут в  $A$  кривой  $AbB$ . Мы, конечно, имеем

$$A_{1.2} - \beta_{1.2} = \lim_{AK \rightarrow \Theta=0} \frac{Kk_1}{AK} = \sin \frac{\sigma - \Theta}{2} e^2 \sigma \sin A_{1.2} \cos^2 B_1 \left( \cos A_{1.2} - \frac{\sigma}{2} \operatorname{tg} B_1 \right);$$

$$(A_{1.2} - \beta_{1.2})'' = \frac{e^2 \sigma''^2}{2\rho''} \sin A_{1.2} \cos^2 B_1 \left( \cos A_{1.2} - \frac{\sigma''}{2\rho''} \operatorname{tg} B_1 \right). \quad (98)$$

При  $s = 106$  км  $(A_{1.2} - \beta_{1.2})'' = 0'',046$ , а при  $s = 32$  км...  $0'',004$  (в широте  $45^\circ$ ). Отсюда мы делаем немаловажное следующее заключение: несмотря на значительную близость друг к другу взаимных нормальных сечений при расстояниях между их конечными точками порядка длин сторон триангуляции первого класса (30—70 км), все-таки при передаче геодезических азимутов и при вычислениях геодезических координат не следует заранее устанавливать низшего предела для длины стороны треугольника триангуляции, при котором можно пренебрегать двойственностью взаимных нормальных кривых (или углом между ними). Нужно иметь в виду, что наблюдаемое на данном геодезическом пункте горизонтальное направление подлежит еще ряду редукций, о которых будет указано в последующих главах курса, причем в *сумме* этих редукций следует обеспечивать заранее установленную точность вывода этой суммы, считаясь с этой точностью и при учете влияния двойственности взаимных нормальных сечений.

При азимутах, *не близких к  $90^\circ$* , мы можем вместо (98) применить такую формулу

$$(A_{1.2} - \beta_{1.2})'' = \frac{e^2 \sigma''^2}{4\rho''} \sin 2A_{1.2} \cos^2 B_1. \quad (99)$$

Чтобы не считаться при вычислении триангуляции I класса с двойственностью взаимных нормальных сечений, надлежит тогда *соединение* геодезических точек на эллипсонде вращения выполнять *геодезическими линиями*; тогда в точке  $A$  азимут геодезической линии  $AB$  получается посредством вычитания из азимута  $A_{1.2}$  угла между геодезической линией и прямым нормальным сечением.

## § 16. Сравнение геодезической линии с нормальной кривой

В § 12 мы дали определение геодезической кривой. При обработке триангуляции I класса нужно знать формулу, определяющую угол в  $A$  кривой геодезической  $AB$  либо с одним из нормальных сечений, например  $AaB$ , либо со вторым нормальным сечением  $AbB$  (черт. 15).

Однако выводы этих углов являются значительно более сложными, чем приведенный в § 15 вывод угла между взаимными нормальными кривыми.

Обозначая через  $\delta$  угол геодезической линии  $AB$  в точке  $A$  с прямым в той же точке нормальным сечением  $AaB$ , мы приведем сперва без вывода формулу для  $\delta$ , данную в свое время Бесселем

$$\delta'' = \frac{\rho'' \eta^2 s^2}{6N_1^2} \sin A_{1.2} \left( \cos A_{1.2} - \frac{s}{4N_1} \operatorname{tg} B_1 \right) \Bigg|, \quad (100)$$

$$\delta = A_{1.2} - A_{1.2}^c$$

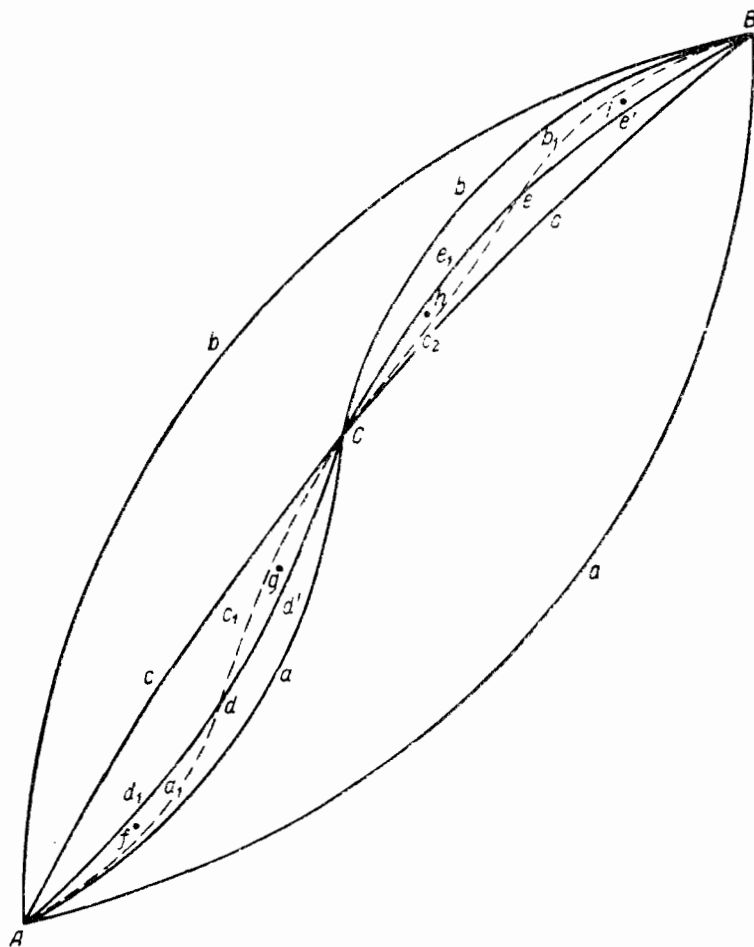
причем:  $B_1$  — широта точки  $A$ ;

$s$  — расстояние  $AB$  по геодезической линии  $AB$  или, все равно, по нормальной кривой  $AaB$ ;

$$\eta^2 = e^2 \cos^2 B;$$

$A_{1.2}$  — азимут в  $A$  нормальной кривой  $AaB$ ;

$A_{1.2}^c$  — азимут в  $A$  геодезической линии  $AB$ .



Черт. 15

В формуле (100) член с  $\frac{s^3}{N_1^3} \operatorname{tg} B_1$  дает менее  $0'',03$  даже при  $s = 640$  км и менее  $1:17\,000$  секунды при  $s = 80$  км. Очевидно, при обработке триангуляции можно всегда принимать

$$\delta'' = \frac{\rho'' \eta_1^2}{12N_1^2} s^2 \sin 2A_{1.2}. \quad (101)$$

Отбрасываемые в формуле (100) члены имеют порядок  $\frac{\gamma^2 \sigma^4}{72}$  и  $\frac{\gamma^4 \sigma^2}{12}$  и в сумме влияют при расстоянии  $s = 800$  км на определение  $\delta$  ошибкой

вообще всего в несколько тысячных долей секунды ( $0'',003—0'',004$ ) и не более  $0'',01$ .

Следовательно, формула (100) отвечает вообще всем запросам геодезической практики и теории, за исключением редких случаев, когда  $s$  будет более 1000 км и когда строгость решения задачи остается высокой.

Назовем через  $\beta_{1,2}$  азимут в  $A$  обратного нормального сечения  $AbB$  (или сечения с  $B$  на  $A$ ).

Вычитая из (98) формулу (100), получим в  $A$  разности азимутов геодезической линии  $AB$  и обратного нормального сечения  $AbB$  в таком виде

$$A^{\circ}_{1,2} - \beta_{1,2} = \frac{\rho'' \eta^2 s^2}{3N_1^2} \sin A_{1,2} \left( \cos A_{1,2} - \frac{5}{8} \frac{s}{N_1} \operatorname{tg} B_1 \right). \quad (102)$$

Сравнение формул (98) и (100) показывает, что при азимуте  $A^{\circ}_{1,2}$ , достаточно отличающемся от  $90^{\circ}$  (или  $270^{\circ}$ ), геодезическая линия делит почти точно угол  $\Delta$  между взаимными нормальными сечениями в отношении 1 : 2.

С другой стороны, в § 12 при разбивке «аналитическим» методом геодезической линии между точками поверхности  $A$  и  $B$ , мы уже могли предвидеть, что в случае эллипсоида вращения, очень близкого к шару, нормальная кривая  $ACB$  (черт. 15) делит почти пополам углы  $A$  и  $B$ .

Между нормальными кривыми  $AbB$  и  $AaB$  исследование, опускаемое мною здесь (см. издание книги 1942 г.), показывает, что отклонение в  $A$  касательной кривой  $AcC$  от биссектрисы угла  $\Delta$  при  $s = 400$  км выражается вообще в тысячных долях секунды (даже при азимутах  $A_{1,2}$ , отличающихся от  $90^{\circ}$  или  $270^{\circ}$  менее чем на  $\pm 10^{\circ}$ ).

Следовательно, если пренебрегать при  $s < 400$  км ошибками в  $A^{\circ}_{1,2}$  в тысячных секунды, то, называя попрежнему угол в  $A$  между взаимно нормальными кривыми через  $\Delta$ , по черт. 15 сделаем такой расчет:

$$\begin{aligned} \text{угол между кривыми } AcC \text{ и } AaB &= \frac{\Delta}{2} \\ \text{„ „ „ } AcC \text{ и } AaC &= \frac{\Delta}{4} \\ \text{„ „ „ } Ad_1d \text{ и } AcC &= \frac{\Delta}{8} \\ \text{„ „ „ } Ad_1d \text{ и } AaB &= \frac{\Delta}{2} - \frac{\Delta}{8} \\ \text{„ „ „ } Ad_1d \text{ и } Aa_1d &= \frac{\Delta}{16} \\ \text{„ „ „ } Ad_1d \text{ и } Afd &= \frac{\Delta}{32} \\ \text{„ „ „ } Afd \text{ и } AaB &= \frac{\Delta}{2} - \frac{\Delta}{8} - \frac{\Delta}{32} \end{aligned}$$

Угол между взаимными сечениями, соединяющими  $A$  с  $f$ , будет равен  $\frac{\Delta}{64}$ , и угол следующей кривой, соответствующей уже хорде  $Af$  с

кривой  $AaB$  получится путем вычитания  $\frac{\Delta}{128}$  из угла между  $Afd$  и  $AaB$  и т. д.

Таким образом, угол  $\delta$  между первым элементом в  $A$  геодезической линии  $AB$  и кривой  $AaB$  вычислится так:

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{\Delta}{2} - \frac{\Delta}{8} - \frac{\Delta}{32} - \frac{\Delta}{128} - \frac{\Delta}{512} \dots \\ \delta &= \frac{\Delta}{2} \left( 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{64} - \frac{1}{256} \dots \right) \\ \delta &= \frac{\Delta}{2} \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{\Delta}{3}\end{aligned}\quad (103)$$

с ошибкой в  $\delta$  при  $s$ , меньшем 400 км вообще только в тысячных секунды (причем из рассмотрения исключаются случаи, когда  $A_{1,2}$  отличается от  $90^\circ$  и  $270^\circ$  меньше чем на  $10^\circ$ ).

Конечно,  $\delta$  есть разность азимутов в  $A$  геодезической линии  $AB$  и прямого нормального сечения  $AaB$ .

При  $s = 400$  км величина  $\delta$  выражается вообще тысячными долями секунды. Отсюда ясно, как малы углы между «соответствующими» элементами геодезической линии и прямого нормального сечения и как близко геодезическая линия проходит от взаимных нормальных сечений; причем под «соответствующими» элементами можно понимать отстоящие на одинаковое расстояние  $s$  от начала кривой  $A$  элементы нормальной кривой и по геодезической линии.

Исследование показывает, что различие длин геодезической линии и нормального сечения при  $s < 600$  км не превышает одной соты тысячной метра.

Очевидно, всегда можно принимать, что длина любой из нормальных кривых не отличается от кратчайшего расстояния, считаемого по геодезической линии.

## § 17. Дифференциальные уравнения геодезической линии и ее свойства

Если поверхность дана уравнением

$$f(x, y, z) = 0,$$

а геодезическая на ней линия уравнениями

$$x = \varphi(s),$$

$$y = \chi(s),$$

$$z = \psi(s),$$

причем под  $s$  понимается длина дуги геодезической линии, то из условия прохождения соприкасающейся плоскости этой кривой через нормаль к поверхности или (что то же) из условия совпадения главной нормали кривой с нормалью к поверхности, напомним такие дифференциальные уравнения, определяющие геодезическую линию

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{d^2 x}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{d^2 y}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{d^2 z}{ds^2}}, \quad (104)$$

потому что косинусы углов  $\alpha, \beta, \gamma$ , образуемых нормалью к поверхности с осями координат, будут

$$\cos \alpha = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{D}, \quad \cos \beta = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{D}, \quad \cos \gamma = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{D};$$

$$D = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2},$$

а косинусы углов  $\lambda, \mu, \nu$  главной нормали к кривой выражаются так

$$\cos \lambda = R \frac{d^2 x}{ds^2}, \quad \cos \mu = R \frac{d^2 y}{ds^2}, \quad \cos \nu = R \frac{d^2 z}{ds^2};$$

$$R = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2 x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{ds^2}\right)^2}} = \text{радиусу «первой кривизны» кривой.}$$

Теперь допустим, что имеем дело с поверхностью вращения, уравнение которой в общем виде напомним так

$$x^2 + y^2 - f(z) = 0.$$

Тогда уравнения (104) перепишутся так

$$\frac{2x}{\frac{d^2 x}{ds^2}} = \frac{2y}{\frac{d^2 y}{ds^2}} = -\frac{f'(z)}{\frac{d^2 z}{ds^2}} \dots \left[ f'(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right],$$

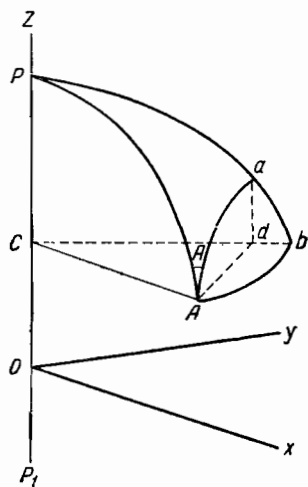
или

$$\frac{2x}{\frac{d^2 x}{ds^2}} = -\frac{f'(z)}{\frac{d^2 z}{ds^2}}; \quad (105)$$

$$\frac{x}{\frac{d^2 x}{ds^2}} = \frac{y}{\frac{d^2 y}{ds^2}}. \quad (106)$$

Займемся уравнением (106), из которого напомним

$$x \frac{d^2 y}{ds^2} - y \frac{d^2 x}{ds^2} = 0.$$



Черт. 24

Интеграл этого уравнения напишется сразу так

$$x dy - y dx = C ds. \quad (107)$$

Если  $Aa$  (черт. 24) — элемент геодезической линии, имеющий длину  $ds$  и азимут  $A$ , то проекция его на параллель точки  $A$ , т. е. отрезок  $Ab$ , будет равна  $ds \sin A$ . С другой стороны, если  $C$  — центр параллели точки  $A$ ,  $ACb$  — плоскость этой параллели, параллельная плоскости  $XOY$ ,  $PP_1$  — ось вращения поверхности, совпадающая с осью  $Z$ , то, называя через  $d$  проекцию  $a$  на плоскость параллели  $ACb$ ,

через  $r$  радиус параллели  $Ab$ , равный  $CA = Cb$ , через  $x, y, z$  координаты точки  $A$ , через  $x + dx, y + dy, z + dz$  координаты точки  $a$ , имеем для  $d$  координаты  $x + dx, y + dy$  и  $z$  и напишем

$$\frac{1}{2} (x dy - y dx) = \text{площади треугольника } AdC,$$

$$\frac{1}{2} r ds \sin A = \text{площади сектора } AbC.$$

Так как при бесконечно малых  $dx$  и  $dy$

$$r ds \sin A = x dy - y dx,$$

то на основании (107)

$$r \sin A = C. \quad (108)$$

Для эллипсоида

$r = a \cos u$  ( $u$  — приведенная широта).

Поэтому для эллипсоида

$$\cos u_1 \sin A_1 = \cos u_2 \sin A_2 = \cos u_3 \sin A_3 = \dots = C, \quad (109)$$

причем под  $u_1$  и  $A_1, u_2$  и  $A_2, u_3$  и  $A_3$  понимаются приведенные широты первой, второй, третьей, ... точек, принадлежащих геодезической кривой, а под  $A_1, A_2, A_3, \dots$  — азимуты этой линии соответственно в тех же точках.

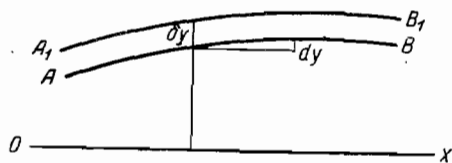
Итак, для геодезической линии *произведение радиуса параллели точки на синус азимута геодезической линии в той же точке есть величина постоянная.*

Или *произведение косинуса приведенной широты точки геодезической линии на синус азимута геодезической линии в той же точке есть величина постоянная.*

Пусть имеем функцию  $F(x, y, y')$ , в которую входят, кроме  $x$ , только его функция  $y$  и ее производная  $y'$ , причем при  $x = a$  и  $x = b$  эта функция  $y$  может иметь только заданные наперед значения. Будем теперь отыскивать тот вид функции  $y$ , при котором величина  $J$ , равная

$$J = \int_a^b F(x, y, y') dx,$$

будет иметь наибольшее или наименьшее значение.



Черт. 25

Если  $dy$  есть дифференциал  $y$ , соответствующий дифференциалу  $dx$ , то в отличие от  $dy$  будет называть через  $\delta y$  то изменение значения  $y$ , которое при данном  $x$  вызывается *изменением вида  $y$* , как функции  $x$ . Различие между  $\delta y$  и  $dy$  выявлено на черт. 25, на котором кривая  $AB$

соответствует одному виду функции  $y$ , а кривая  $A_1B_1$  — бесконечно близкому к нему виду той же функции. Назовем через  $y$  ту искомую функцию от  $x$ , при которой  $J$  будет иметь наибольшее или наименьшее значение, а через  $y + \delta y$  — функцию, бесконечно близкую по своему виду к  $y$  и удовлетворяющую условию при  $x = a$  и при  $x = b$

$$\delta y = 0.$$

Это условие, очевидно, равносильно требованию, чтобы все кривые  $AB, A_1B_1, \dots$  проходили через две данные точки. Назовем далее через  $J_1, F_1$  и  $y_1$  соответственно значения  $J, F$ , и  $y'$  при переходе от  $y$ , обращающего в минимум функцию  $J$ , к  $y + \delta y$ .

Очевидно, имеем

$$y_1 = \frac{d(y + \delta x)}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{d\delta y}{dx} = y' + \frac{d\delta y}{dx};$$

$$F_1 = F\left(x, y + \delta y, y' + \frac{d\delta y}{dx}\right);$$

$$F_1 = F(x, y, y') + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d\delta y}{dx}.$$

Поэтому

$$J_1 = J + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y} \delta y dx + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d\delta y}{dx} dx, \quad (110)$$

$$J_1 = J + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y} \delta y dx + \left[ \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y - \int_a^b \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx \right], \quad (111)$$

причем слагаемые

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y - \int_a^b \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx \right]$$

в (111) получились в результате интегрирования по частям

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d\delta y}{dx} dx$$

в правой части (110). Так как  $\delta y$  при  $x = a$  и  $x = b$  равно нулю, то

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_a^b = 0.$$

С другой стороны, при maximum'e или minimum'e функции  $J$  разность  $J_1 - J$  равна нулю.

Вследствие этого, из (128) получаем

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx = 0.$$

Вследствие же произвольности  $\delta y$  получаем

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0. \quad (112)$$

Уравнением (112) вопрос о нахождении  $y$  сводится к интегрированию уравнения второго порядка.

Применим только что изложенное к отысканию *кривой кратчайшего расстояния* между двумя заданными точками на поверхности эллипсоида



вращения. Если назовем элемент некоторой кривой через  $ds$ , его азимут через  $A$ , то на основании (70) и (71)

$$M dB = ds \cos A,$$

$$N \cos B dl = ds \sin A.$$

Отсюда

$$ds = \left[ M^2 + N^2 \cos^2 B \left( \frac{dl}{dB} \right)^2 \right]^{1/2} dB,$$

$$s = \int_{B_1}^{B_2} \left[ M^2 + N^2 \cos^2 B \left( \frac{dl}{dB} \right)^2 \right]^{1/2} dB, \quad (113)$$

причем под  $s$  понимается длина дуги кривой между точками  $A$  и  $B$ ; точка  $B$  на этой кривой определяется ее широтой  $B_1$ ; вид же кривой, очевидно, определяется видом  $\frac{dl}{dB}$  или видом зависимости долготы от широты в текущей точке кривой. Сравнивая (113) с уравнением для  $J$ , мы видим, что роль  $x$  играет широта  $B$ , роль  $y$  — долгота  $l$ , а роль  $y'$  — производная  $\frac{dl}{dB}$ .

Поэтому для кривой кратчайшего расстояния между  $A$  и  $B$ , применяя (112), получим

$$\frac{\partial F}{\partial l} = 0,$$

так как  $l$  явно не входит в подынтегральную функцию. Обозначая

$$q = \frac{\partial l}{\partial B},$$

имеем

$$\frac{d}{dB} \left( \frac{\partial F}{\partial q} \right) = 0,$$

или

$$\frac{\partial F}{\partial q} = C.$$

Но из (113)

$$\frac{\partial F}{\partial q} = \frac{N^2 \cos^2 B \frac{dl}{dB}}{\left[ M^2 + N^2 \cos^2 B \left( \frac{dl}{dB} \right)^2 \right]^{1/2}}.$$

Поэтому кривая кратчайшего расстояния определяется уравнением

$$\frac{N^2 \cos^2 B \frac{dl}{dB}}{\left[ M^2 + N^2 \cos^2 B \left( \frac{dl}{dB} \right)^2 \right]^{1/2}} = C. \quad (114)$$

Из уравнений

$$ds \cos A = M dB,$$

$$ds \sin A = N \cos B dl,$$

имеем

$$\frac{dl}{dB} N \cos B = M \operatorname{tg} A.$$

Поэтому

$$\frac{NM \cos B \operatorname{tg} A}{[M^2 + M^2 \operatorname{tg}^2 A]^{1/2}} = C;$$

$$\frac{NM \cos B \operatorname{tg} A}{M \frac{1}{\cos A}} = C;$$

$$N \cos B \sin A = C. \quad (115)$$

Так как

$$N \cos B = a \cos u,$$

то

$$a \cos u \sin A = C. \quad (116)$$

Уравнение (116) тождественно с (109). Так как на данной поверхности одно из уравнений (105) и (106) вполне определяет кривую геодезическую, то (109) также вполне определяет геодезическую кривую на эллипсоиде вращения. Отсюда заключаем, что кривая геодезическая, определяемая как таковая, в каждой точке которой главная нормаль совпадает с нормалью к поверхности, тождественна с кривой кратчайшего расстояния.

### § 18. Вывод угла между геодезической линией и взаимными нормальными сечениями. Разность азимутов геодезической линии и прямого и обратного нормального сечения

В пункте  $A$  произвольной поверхности примем начало прямоугольной системы координат, ось  $z$  направим по нормали в  $A$  к этой поверхности, плоскость  $xAy$  совпадает, следовательно, с касательной плоскостью в  $A$  к поверхности, плоскости  $zAx$  и  $zAy$  пусть совпадают с плоскостями главных в  $A$  нормальных сечений. Некоторый пункт  $B$  поверхности с координатами  $x, y, z$  соединим с  $A$  геодезической линией и азимут в  $A$  этой линии назовем через  $A_{1,2}$ , длину же линии  $AB$  обозначим через  $s$ . Пусть уравнение поверхности дано в виде

$$z = f(x, y). \quad (117)$$

Введем далее обозначения

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}; \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad v = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \quad (118)$$

Для  $x, y, z$  точки  $B$  можем написать такие выражения

$$\left. \begin{aligned} x &= s \left( \frac{dx}{ds} \right)_0 + \frac{s^2}{2!} \left( \frac{d^2x}{ds^2} \right)_0 + \frac{s^3}{3!} \left( \frac{d^3x}{ds^3} \right)_0 + \dots \\ y &= s \left( \frac{dy}{ds} \right)_0 + \frac{s^2}{2!} \left( \frac{d^2y}{ds^2} \right)_0 + \frac{s^3}{3!} \left( \frac{d^3y}{ds^3} \right)_0 + \dots \\ z &= s \left( \frac{dz}{ds} \right)_0 + \frac{s^2}{2!} \left( \frac{d^2z}{ds^2} \right)_0 + \frac{s^3}{3!} \left( \frac{d^3z}{ds^3} \right)_0 + \dots \end{aligned} \right\}. \quad (119)$$

Задача наша, прежде всего, состоит в получении  $x$  и  $y$ , т. е. в получении производных  $\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^3x}{ds^3}, \dots, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^3y}{ds^3}, \dots$ . Для этого, однако, придется нам сперва получить выражения производных  $\frac{dz}{ds}, \frac{d^2z}{ds^2}, \frac{d^3z}{ds^3}$  в функции искоемых производных  $\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^3x}{ds^3}, \dots, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^3y}{ds^3}$  и величин  $p$  и  $q$  и их производных, что выполняется следующим образом.

Косинусы углов  $\alpha, \beta, \gamma$  нормали к поверхности в  $B$  определяются уравнениями

$$\cos \alpha = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}; \quad \cos \beta = -\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}};$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \quad (120)$$

Уравнение (104) теперь перепишем так

$$\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\cos \alpha} = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\cos \beta} = \frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\cos \gamma} = \frac{1}{R}; \quad \frac{1}{R} \frac{\cos^2 A_{2+1}}{M} + \frac{\sin^2 A_{2+1}}{N}. \quad (120a)$$

Дифференциальные уравнения геодезической линии можно еще написать так

$$\frac{d^2x}{ds^2} + p \frac{d^2z}{ds^2} = 0; \quad \frac{d^2y}{ds^2} + q \frac{d^2z}{ds^2} = 0. \quad (121)$$

Из (117) имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{ds} &= p \frac{dx}{ds} + q \frac{dy}{ds}; \\ \frac{d^2z}{ds^2} &= p \frac{d^2x}{ds^2} + q \frac{d^2y}{ds^2} + 1 \left( \frac{dp}{ds} \frac{dx}{ds} + \frac{dq}{ds} \frac{dy}{ds} \right) \\ \frac{d^3z}{ds^3} &= p \frac{d^3x}{ds^3} + q \frac{d^3y}{ds^3} + 2 \left( \frac{dp}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dq}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} \right) + \\ &\quad + 1 \left( \frac{d^2p}{ds^2} \frac{dx}{ds} + \frac{d^2q}{ds^2} \frac{dy}{ds} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (122)$$

Нетрудно получить  $\frac{d^4z}{ds^4}, \frac{d^5z}{ds^5}, \dots$ , так как закономерность при переходе от  $\frac{d^kz}{ds^k}$  к  $\frac{d^{k+1}z}{ds^{k+1}}$  вполне ясна.

Теперь переходим к составлению выражений производных  $x$  и  $y$  по  $s$ , а также производных  $p, q, r, v, t$ . Из (121) имеем

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -p \frac{d^2z}{ds^2}; \quad \frac{d^2y}{ds^2} = -q \frac{d^2z}{ds^2}. \quad (123)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^3x}{ds^3} &= -p \frac{d^3z}{ds^3} - \frac{dp}{ds} \frac{d^2z}{ds^2} \\ \frac{d^4x}{ds^4} &= -p \frac{d^4z}{ds^4} - 2 \frac{dp}{ds} \frac{d^3z}{ds^3} - \frac{d^2p}{ds^2} \frac{d^2z}{ds^2} \end{aligned} \right\}; \quad (124)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^3y}{ds^3} &= -q \frac{d^3z}{ds^3} - \frac{dq}{ds} \frac{d^2z}{ds^2} \\ \frac{d^4y}{ds^4} &= -q \frac{d^4z}{ds^4} - 2 \frac{dq}{ds} \frac{d^3z}{ds^3} - \frac{d^2q}{ds^2} \frac{d^2z}{ds^2} \end{aligned} \right\}; \quad (125)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{ds} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds} = r \frac{dx}{ds} + v \frac{dy}{ds} \\ \frac{d^2p}{ds^2} &= r \frac{d^2x}{ds^2} + v \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dr}{ds} \frac{dx}{ds} + \frac{dv}{ds} \frac{dy}{ds} \end{aligned} \right\}; \quad (126)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{ds} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{dy}{ds} = v \frac{dx}{ds} + t \frac{dy}{ds} \\ \frac{d^2q}{ds^2} &= v \frac{d^2x}{ds^2} + t \frac{d^2y}{ds^2} + \left( \frac{dv}{ds} \frac{dx}{ds} + \frac{dt}{ds} \frac{dy}{ds} \right) \end{aligned} \right\}; \quad (127)$$

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\ \frac{dr}{ds} &= \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \frac{dy}{ds} \end{aligned} \right\}; \quad (128)$$

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{dv}{ds} &= \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \frac{dy}{ds} \end{aligned} \right\}; \quad (129)$$

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ \frac{dt}{ds} &= \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \frac{dy}{ds} \end{aligned} \right\}. \quad (130)$$

План наших дальнейших действий таков:

а) все частные производные, стоящие в (118) и в (126)–(130), выводятся из уравнения (117) и после подстановки в них выражения коор-

динат точки  $A$  ( $x=0$ ,  $y=0$ ;  $z=0$ ) останются известными. Так как  $\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 = \cos A_{1,2}$  и  $\left(\frac{dy}{ds}\right)_0 = \sin A_{1,2}$ , то одновременно становятся известными и отнесенные к точке  $A$  производные  $\frac{dp}{ps}$ ,  $\frac{dq}{ds}$ ,  $\frac{dr}{ds}$ ,  $\frac{dv}{ds}$ ,  $\frac{dt}{ds}$ ;

б) после определения  $p$  и  $q$  становятся по (120) известными  $\frac{d^2x}{ds^2}$ ,  $\frac{d^2y}{ds^2}$  и  $\frac{d^2z}{ds^2}$  и определяются вторые производные  $p$  и  $q$  по  $s$ ;

в) при сделанном выборе системы координат  $p_0 = 0$  и  $q_0 = 0$ , поэтому из (124) и (125) определяются  $\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0$  и  $\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0$ , а затем из (122) —  $\left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)_0$ ;

г) вследствие равенства нулю  $p_0$  и  $q_0$ , определяются из (124) и (125)  $\left(\frac{d^4x}{ds^4}\right)_0$  и  $\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right)_0$ . Если бы ряды (119) продолжались далее четвертых степеней  $s$ , то тогда далее следовало бы определение третьих производных  $p$  и  $q$ , вторых производных  $v$ ,  $r$  и  $t$ , затем определение  $\left(\frac{d^4z}{ds^4}\right)_0$  и т. д. При выполнении этого плана перейдем на эллипсоид вращения. Назовем через  $B_0$  широту точки  $A$ . Уравнение эллипсоида в принятой системе прямоугольных координат напишется так

$$2z = \frac{x^2}{M_0} + \frac{y^2}{N_0} - \frac{2e^2 \sin B_0 \cos B_0}{1 - e^2} \frac{xz}{N_0} + \frac{1 - e^2 \cos^2 B_0}{1 - e^2} \frac{z^2}{N_0}. \quad (131)$$

Обозначим

$$V^2 = \frac{N}{M}; \quad 1 + \eta^2 = 1 + e'^2 \cos^2 B = V^2;$$

$$A = -2\eta^2 \operatorname{tg} B_0; \quad C = \frac{1 - e^2 \cos^2 B_0}{1 - e^2} = 1 + \eta^2 \operatorname{tg}^2 B_0$$

и перепишем еще уравнение (131) так

$$2N_0 z = V_0^2 x^2 + y^2 + Axz + Cz^2.$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} 2N_0 \frac{\partial z}{\partial x} &= 2V_0^2 x + Az + Ax \frac{\partial z}{\partial x} + 2Cz \frac{\partial z}{\partial x}; \\ p &= \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2V_0^2 x + Az}{2N_0 - Ax - 2Cz} \\ 2N_0 \frac{\partial z}{\partial y} &= 2y + Ax \frac{\partial z}{\partial y} + 2Cz \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned} \right\}; \quad (132)$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{2N_0 - Ax - 2Cz}; \quad (132a)$$

$$2N_0 - Ax - 2Cz = D; \quad D_0 = 2N_0;$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial x} &= \frac{-2AN_0 + A^2x - 4V_0^2 Cx}{D}; & \left(\frac{\partial D}{\partial x}\right)_0 &= -A \\ \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\right)_0 &= -\frac{2V_0^2 C}{N_0}; & \frac{\partial D}{\partial y} &= -\frac{4Cy}{D}; & \left(\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\right)_0 &= -\frac{2C}{N_0} \end{aligned} \right\}. \quad (133)$$

Теперь имеем из (132)

$$p_0 = 0, \quad q_0 = 0,$$

из (123)

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0 &= 0; & \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0 &= 0; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -\frac{2y}{D^2} \frac{\partial D}{\partial x}; & \nu_0 &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_0 = 0. \end{aligned}$$

Из (132)

$$pD = 2V_0^2 x + Az;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} D + p \frac{\partial D}{\partial x} = 2V_0^2 + Ap; \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0 = r_0 = \frac{V^2}{N_0} = \frac{1}{M_0}; \quad (134)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} D + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial D}{\partial x} + p \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} = A \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};$$

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)_0 2N_0 - 2 \frac{A}{M_0} = \frac{A}{M_0}; \quad \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)_0 = \frac{3}{2} A \frac{V_0^2}{N_0^2} = \frac{3}{2} A \frac{1}{M_0 N_0}. \quad (135)$$

Из (132a)

$$qD = 2y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} D + q \frac{\partial D}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} D + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \frac{\partial D}{\partial x} + q \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} = 0; \quad \left(\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}\right)_0 = 0; \quad (136)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} D + q \frac{\partial D}{\partial y} = 2; \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{1}{N_0}; \quad \left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)_0 = 0; \quad (137)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} D + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \frac{\partial D}{\partial y} + q \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} = 0;$$

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}\right)_0 2N_0 - \frac{A}{N_0} = 0; \quad \left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}\right)_0 = \frac{A}{2N_0^2}. \quad (138)$$

Следовательно,

$$r_0 = \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_0 = \frac{V_0^2}{N_0}; \quad \left( \frac{dr}{ds} \right)_0 = \frac{3}{2} A \frac{V_0^2}{N_0^2} \cos A_{1,2};$$

$$v_0 = 0; \quad \left( \frac{dv}{ds} \right)_0 = \frac{A}{2N_0^2} \sin A_{1,2};$$

$$t_0 = \left( \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_0 = \frac{1}{N_0}; \quad \left( \frac{dt}{ds} \right)_0 = \frac{A}{2N_0^2} \cos A_{1,2};$$

$$\left( \frac{dp}{ds} \right)_0 = \frac{V_0^2}{N_0} \cos A_{1,2};$$

$$\left( \frac{d^2 p}{ds^2} \right)_0 = \frac{3}{2} A \frac{V_0^2}{N_0^2} \cos^2 A_{1,2} + \frac{A}{2N_0^2} \sin A_{1,2};$$

$$\left( \frac{dq}{ds} \right)_0 = \frac{\sin A_{1,2}}{N_0};$$

$$\left( \frac{d^2 q}{ds^2} \right)_0 = \frac{A}{N_0^2} \sin A_{1,2} \cos A_{1,2}.$$

Теперь можем приступить к вычислению производных в рядах (119).  
Имеем:

$$\left( \frac{dz}{ds} \right)_0 = 0;$$

$$\left( \frac{d^2 z}{ds^2} \right)_0 = \frac{V_0^2}{N_0} \cos^2 A_{1,2} + \frac{1}{N_0} \sin^2 A_{1,2};$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^3 x}{ds^3} \right)_0 &= - \left( \frac{V_0^2}{N_0} \cos^2 A_{1,2} + \frac{1}{N_0} \sin^2 A_{1,2} \right) \frac{V_0^2}{N_0} \cos A_{1,2} = \\ &= - \frac{V_0^2}{N_0^2} \cos A_{1,2} (V_0^2 \cos^2 A_{1,2} + \sin^2 A_{1,2}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^3 y}{ds^3} \right)_0 &= - \left( \frac{V_0^2}{N_0} \cos^2 A_{1,2} + \frac{1}{N_0} \sin^2 A_{1,2} \right) \frac{1}{N_0} \sin A_{1,2} = \\ &= - \frac{1}{N_0^2} \sin A_{1,2} (V_0^2 \cos^2 A_{1,2} + \sin^2 A_{1,2}); \end{aligned}$$

$$\left( \frac{d^3 z}{ds^3} \right)_0 = \frac{3}{2} A \frac{V_0^2}{N_0^2} \cos^3 A_{1,2} + \frac{A}{2N_0^2} \sin^2 A_{1,2} \cos A_{1,2} + \frac{A}{N_0^2} \sin^2 A_{1,2} \cos A_{1,2};$$

$$\left( \frac{d^3 z}{ds^3} \right)_0 = \frac{3}{2} \frac{A}{N_0^2} \cos A_{1,2} (V_0^2 \cos^2 A_{1,2} + \sin^2 A_{1,2});$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^4 x}{ds^4} \right)_0 &= - \frac{3A V_0^2}{N_0^3} (V_0^2 \cos^2 A_{1,2} + \sin^2 A_{1,2}) \cos^2 A_{1,2} - \\ &- \left( \frac{3}{2} A \frac{V_0^2}{N_0^2} \cos^2 A_{1,2} + \frac{A}{2N_0^2} \sin^2 A_{1,2} \right) \left( \frac{V_0^2}{N_0} \cos^2 A_{1,2} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{N_0} \sin^2 A_{1,2} \right); \end{aligned}$$

$$\left(\frac{d^4x}{ds^4}\right)_0 = \frac{(V_0^2 \cos^2 A_{1.2} + \sin^2 A_{1.2})}{N_0^3} \left[ -\frac{9}{2} AV_0^2 \cos^2 A_{1.2} - \frac{A}{2} \sin^2 A_{1.2} \right];$$

$$\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right)_0 = -\frac{3 \sin A_{1.2}}{N_0^3} A \cos A_{1.2} (V_0^2 \cos^2 A_{1.2} + \sin^2 A_{1.2}) -$$

$$-\frac{A}{N_0^3} \sin A_{1.2} \cos A_{1.2} (V_0^2 \cos^2 A_{1.2} + \sin^2 A_{1.2});$$

$$\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right)_0 = -\frac{4A}{N_0^3} \sin A_{1.2} \cos A_{1.2} (V_0^2 \cos^2 A_{1.2} + \sin^2 A_{1.2}).$$

Так как

$$V_0^2 \cos^2 A_{1.2} + \sin^2 A_{1.2} = 1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2},$$

то формулы для  $\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0$ ,  $\left(\frac{d^4x}{ds^4}\right)_0$ ,  $\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0$ ,  $\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right)_0$  можно еще переписать

так

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 &= -\frac{V_0^2}{N_0^2} \cos A_{1.2} (1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2}) \\ \left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0 &= -\frac{1}{N_0^2} \sin A_{1.2} (1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2}) \\ \left(\frac{d^4x}{ds^4}\right)_0 &= \frac{\eta^2 \operatorname{tg} B_0}{N_0^3} (9V_0^2 \cos^2 A_{1.2} + \sin^2 A_{1.2}) (1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2}) \\ \left(\frac{d^4y}{ds^4}\right)_0 &= \frac{8\eta^2 \operatorname{tg} B_0}{N_0^3} \sin A_{1.2} \cos A_{1.2} (1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2}) \end{aligned} \right\} \quad (139)$$

Подстановка (139) в (119) дает

$$\left. \begin{aligned} x &= s \cos A_{1.2} - \frac{V_0^2 s^3}{6N_0^2} \cos A_{1.2} (1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2}) + \\ &+ \frac{s^4}{24N_0^3} \eta^2 \operatorname{tg} B_0 (9V_0^2 \cos^2 A_{1.2} + \sin^2 A_{1.2}) (1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2}) \\ y &= s \sin A_{1.2} - \frac{s^3}{6N_0^2} \sin A_{1.2} (1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2}) + \\ &+ \frac{s^4}{3N_0^3} \eta^2 \operatorname{tg} B_0 \sin A_{1.2} \cos A_{1.2} (1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2}) \end{aligned} \right\} \quad (140)$$

Перейдем теперь к иной системе координат: оставляя начало в точке  $A$  и ось  $z$  по нормали к эллипсоиду в  $A$ , ось  $x$ -ов направим по касательной в  $A$  к геодезической линии  $AB$ , а ось  $y$ -ков перпендикулярно к этой касательной и в касательной плоскости в  $A$  к эллипсоиду; при этом положительную ось  $x$  направим к северу от  $A$ , а положительную ось  $y$  — к востоку от  $A$ .

Формулы перехода от одной системы координат к другой будут следующими:

$$\begin{aligned} -y' &= x \sin A_{1.2} - y \cos A_{1.2}; \\ x' &= x \cos A_{1.2} + y \sin A_{1.2}. \end{aligned}$$



Уравнения (140) перепишутся так:

$$\begin{aligned}
 x' &= s \cos^2 A_{1.2} - \frac{V_0^2}{6} \frac{s^3}{N_0^2} \cos^2 A_{1.2} (1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2}) + \\
 &+ \frac{s^4}{24N_0^3} \eta^2 \operatorname{tg} B_0 (9V_0^2 \cos^2 A_{1.2} + \sin^2 A_{1.2}) (1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2}) \cos A_{1.2} + \\
 &+ s \sin^2 A_{1.2} - \frac{s^3}{6N_0^2} \sin^2 A_{1.2} (1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2}) + \\
 &+ \frac{s^4}{3N_0^3} \eta^2 \operatorname{tg} B_0 \sin^2 A_{1.2} \cos A_{1.2} (1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2}); \\
 x' &= s - \frac{s^3}{6N_0^2} (1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2}) + \\
 &+ \frac{3}{8} \frac{s^4}{N_0^3} \eta^2 \operatorname{tg} B_0 \cos A_{1.2} (1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2})^2; \\
 -y' &= s \sin A_{1.2} \cos A_{1.2} - \frac{V_0^2}{6} \frac{s^3}{N_0^2} \sin A_{1.2} \cos A_{1.2} (1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2}) + \\
 &+ \frac{s^4}{24N_0^3} \sin A_{1.2} \eta^2 \operatorname{tg} B_0 (9V_0^2 \cos^2 A_{1.2} + \sin^2 A_{1.2}) (1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2}) - \\
 &- s \sin A_{1.2} \cos A_{1.2} + \frac{s^3}{6N_0^2} \sin A_{1.2} \cos A_{1.2} (1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2}) - \\
 &- \frac{s^4}{3N_0^3} \eta^2 \operatorname{tg} B_0 \sin A_{1.2} \cos A_{1.2} (1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2}); \\
 y' &= \frac{\eta^2 s^3}{6N_0^2} \sin A_{1.2} \cos A_{1.2} (1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2}) - \\
 &- \frac{s^4}{24N_0^3} \eta^2 \operatorname{tg} B_0 (1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2}) \sin A_{1.2} (1 + 9\eta^2 \cos^2 A_{1.2}); \\
 y' &= \frac{\eta^2 s^3}{6N_0^2} \sin A_{1.2} (1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2}) \times \\
 &\times \left[ \cos A_{1.2} - \frac{s}{4N_0} \operatorname{tg} B_0 (1 + 9\eta^2 \cos^2 A_{1.2}) \right].
 \end{aligned} \tag{141}$$

Понятно, что в новой системе координат  $(z, x', y')$  отношение  $\frac{y'}{x'}$  и представляет собой тангенс угла  $\hat{z}$  в  $A$  между прямым нормальным сечением  $AaB$  и геодезической линией  $AB$ . Поэтому из (142) и (141) имеем

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \hat{z} = \hat{z} &= \frac{y'}{x'} = \frac{\eta^2 s^2}{6N^2} \sin A_{1.2} (1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2}) \times \\
 &\times \left[ \cos A_{1.2} - \frac{s}{4N_0} \operatorname{tg} B_0 (1 + 9\eta^2 \cos^2 A_{1.2}) \right] \times \\
 &\times \left[ 1 + \frac{s^2}{6N_0^2} (1 + \eta_0^2 \cos^2 A_{1.2})^2 \right].
 \end{aligned} \tag{143}$$

Эту формулу (143) следует упростить, имея в виду, что отброшенные члены в (119) будут давать величины порядка  $\gamma_1^2 \frac{s^5}{N^5}$ .

Именно пишем

$$\delta'' = \frac{\gamma_1^2 s^2}{6N_0^2} \rho'' \sin A_{1.2} \left[ \cos A_{1.2} - \frac{s}{4N_0} \operatorname{tg} B_0 + \frac{s^2}{6N_0^2} \cos A_{1.2} + \right. \\ \left. + \eta^2 \cos^3 A_{1.2} \right], \quad (144)$$

или

$$\delta'' = \frac{\eta^2 s^2}{6N_0^2} \rho'' \sin A_{1.2} \left( \cos A_{1.2} - \frac{s}{4N_0} \operatorname{tg} B_0 \right) \left( 1 + \frac{s^2}{6N_0^2} + \right. \\ \left. + \eta^2 \cos^2 A_{1.2} \right). \quad (145)$$

Эта формула имеет высокую точность; погрешность ее порядка  $\frac{\gamma_1^2 s^5}{N^5}$  и  $\gamma_1^4 \frac{s^3}{N^3}$ ; она может быть применена для расстояний  $s$  порядка 1000 км. Обычно применяют формулу

$$\delta'' = \frac{\gamma_1^2}{6} \frac{\sigma''^2}{\rho''} \sin A_{1.2} \left( \cos A_{1.2} - \frac{\sigma''}{4\rho''} \operatorname{tg} B_1 \right), \quad (146)$$

а при азимутах, не близких к  $90^\circ$ , в триангуляции пользуются формулой еще более простой

$$\delta'' = \frac{\gamma_1^2}{6} \frac{\sigma''^2}{\rho''} \sin A_{1.2} \cos A_{1.2}. \quad (147)$$

Метод приведенного здесь вывода известен в научной литературе; нами он только в известной степени приспособлен к задаче. Важно отметить, что этот метод наиболее просто приводит к определению  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , выраженных рядами (119), а при помощи уравнений для  $x$ ,  $y$ ,  $z$  мы можем затем решить целый ряд задач высшей геодезии, в цикле которых задача настоящего параграфа занимает скромное место.

Мы имеем формулу

$$A_{1.2} - \beta_{1.2} = \frac{e^2 \sigma''^2}{2\rho''} \sin A_{1.2} \cos^2 B_1 \left( \cos A_{1.2} - \frac{\sigma''}{2\rho''} \operatorname{tg} B_1 \right). \quad (98)$$

Называя через  $A_{1.2}^\circ$  азимут геодезической линии  $AB$ , напомним

$$A_{1.2} - A_{1.2}^\circ = \frac{e^2 \sigma''^2}{6\rho''} \sin A_{1.2} \cos^2 B_1 \left( \cos A_{1.2} - \frac{\sigma''}{4\rho''} \operatorname{tg} B_1 \right), \quad (148)$$

причем нечувствительно понизили точность формулы (146).

Вычитая из (98) формулу (148), получаем для угла между обратным нормальным сечением и геодезической линией

$$A_{1.2}^\circ - \beta_{1.2} = \frac{e^2 \sigma''^2}{3\rho''} \sin A_{1.2} \cos^2 B_1 \left( \cos A_{1.2} - \frac{5}{8} \frac{\sigma''}{\rho''} \operatorname{tg} B_1 \right). \quad (149)$$

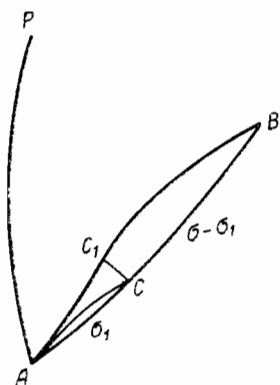
### § 19. Положение геодезической линии относительно взаимных нормальных сечений

Если на прямом нормальном сечении  $AB$  (черт. 26) назначим точку  $C$  в расстоянии от  $A$ , равном  $\sigma_1$ , то формула (148) в применении к геодезической линии  $AC$  даст

$$A_{1,2} - A_{1,c}^{\circ} = \frac{e^2 \sigma_1'^2}{6\rho''} \sin A_{1,2} \cos^2 B_1 \left( \cos A_{1,2} - \frac{\sigma_1''}{4\rho''} \operatorname{tg} B_1 \right),$$

причем через  $A_{1,c}^{\circ}$  назван азимут в  $A$  геодезической линии  $AC$ . Следовательно, угол  $f$  между геодезическими линиями  $AB$  и  $AC$  в точке  $A$  будет такой

$$f = \frac{e^2}{6} \sin A_{1,2} \cos A_{1,2} \cos^2 B_1 (\sigma^2 - \sigma_1^2) - \frac{e^2 \sin A_{1,2} \cos^2 B_1}{24} \operatorname{tg} B_1 (\sigma^3 - \sigma_1^3).$$



Черт. 26

Построим сечение  $CC_1$  ортогонально к  $ACB$ . Так как  $CC_1$  будет составлять около трети расхождения в  $C$  взаимных нормальных сечений, т. е. будет менее 0,1 м даже при  $s = \bar{AB} = 320$  км, то *кручение* кривых  $AC$  и  $AC_1$  можно считать *одинаковым* для обеих кривых, причем, очевидно, *кручение* или вторая кривизна этих геодезических линий вызывает смещение точки в направлении бинормали к кривой.

Вследствие этого  $CC_1$  можно рассчитать по формуле для плоских кривых, т. е.

$$CC_1 = N_1 f \sigma = \frac{N_1 e^2 \sin A_{1,2} \cos B_1}{6} \sigma_2 \sigma_1 \times$$

$$\times \left[ (\sigma + \sigma_1) \cos A_{1,2} \cos B_1 - \frac{\sin B_1}{4} (\sigma_1^2 + \sigma \sigma_1 + \sigma^2) \right]; \quad (150)$$

$$\sigma_2 = \sigma - \sigma_1.$$

Вычитая  $CC_1$  из (94), в котором  $\Theta$  заменим через  $\sigma_1$ , мы получим  $C_2 C_1$ , т. е. расстояние  $C_1$  от обратного нормального сечения между  $A$  и  $B$ . Именно

$$C_2 C_1 = \frac{N_1 e^2 \sin A_1 \cos B_1}{3} \sigma_2 \sigma_1 \left[ \left( \sigma - \frac{\sigma_1}{2} \right) \cos A_{1,2} \cos B_1 - \frac{\sin B_1}{8} (5\sigma^2 - \sigma \sigma_1 - \sigma_1^2) \right]. \quad (151)$$

При малом  $\sigma_1$  но при  $A_{1,2}$ , не близком к  $90^\circ$ , отрезки  $C_1 C$  и  $C_2 C_2$  можно представить в виде

$$\overline{CC_1} = \frac{N_1 e^2 \sin A_{1,2} \cos B_1}{6} \sigma^2 \sigma_1 \left[ \cos A_{1,2} \cos B_1 - \frac{1}{4} \sigma \sin B_1 \right];$$

$$\overline{C_2 C_1} = \frac{N_1 e^2 \sin A_{1,2} \cos B_1}{3} \sigma^2 \sigma_1 \left[ \cos A_{1,2} \cos B_1 - \frac{5}{8} \sigma \sin B_1 \right].$$

Следовательно,  $\overline{C_2 C_1} \approx 2 \overline{CC_1}$ .

При малом  $\sigma_2$

$$\overline{CC_1} = \frac{N_1 e^2 \sin A_{1,2} \cos B_1}{6} 2\sigma^2 \sigma_2 \left[ \cos A_{1,2} \cos B_1 - \frac{3}{8} \sigma \sin B_1 \right];$$

$$\overline{C_2 C_1} = \frac{N_1 e^2 \sin A_{1,2} \cos B_1}{6} \sigma^2 \sigma_2 \left[ \cos A_{1,2} \cos B_1 - \frac{3}{4} \sigma \sin B_1 \right].$$

Следовательно,  $\overline{C_2 C_1} \approx \frac{1}{2} \overline{CC_1}$ .

Таким образом, в общем случае кривая геодезическая в начале своего пути от  $A$  к  $B$  располагается ближе к *прямому* в  $A$  сечению, чем расхождение между взаимными нормальными сечениями в отношении 1:2, затем постепенно удаляется от прямого в  $A$  сечения, проходит на половине своего пути в равных расстояниях от того и другого из взаимных нормальных сечений, в дальнейшем течении располагается уже ближе к *обратному* нормальному сечению (прямому в  $B$ ) и в конце пути располагается так, что расстояние ее от *обратного* сечения менее в 2 раза, чем от *прямого* сечения. Черт. 27 представляет указанное типическое расположение геодезической линии и взаимных нормальных сечений.

Положим теперь

$$\cos A_{1,2} = \operatorname{tg} B_1 \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2}.$$

В этом случае точки  $A$  и  $B$  лежат на одной параллели, и взаимные нормальные сечения сливаются,

$$CC_1 = \frac{N_1 e^2 \sin A_{1,2} \cos B_1 \sin B_1}{24} \sigma_2 \sigma_1 (\sigma^2 + \sigma \sigma_1 - \sigma_1^2).$$

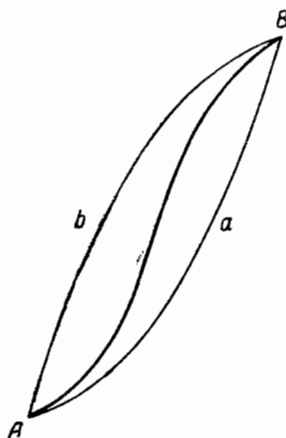
Так как  $\sigma^2 + \sigma \sigma_1 - \sigma_1^2 = \sigma^2 + \sigma_1 \sigma_2$ , то ясно, что  $CC_1 > 0$ , т. е. геодезическая линия идет севернее слившихся нормальных сечений.

Очевидно, существуют такие значения  $A_{1,2}$ , при которых геодезическая линия пересекает то или другое из взаимных нормальных сечений. Из (150) общее условие пересечения геодезической линией прямого в  $A$  сечения представляется так

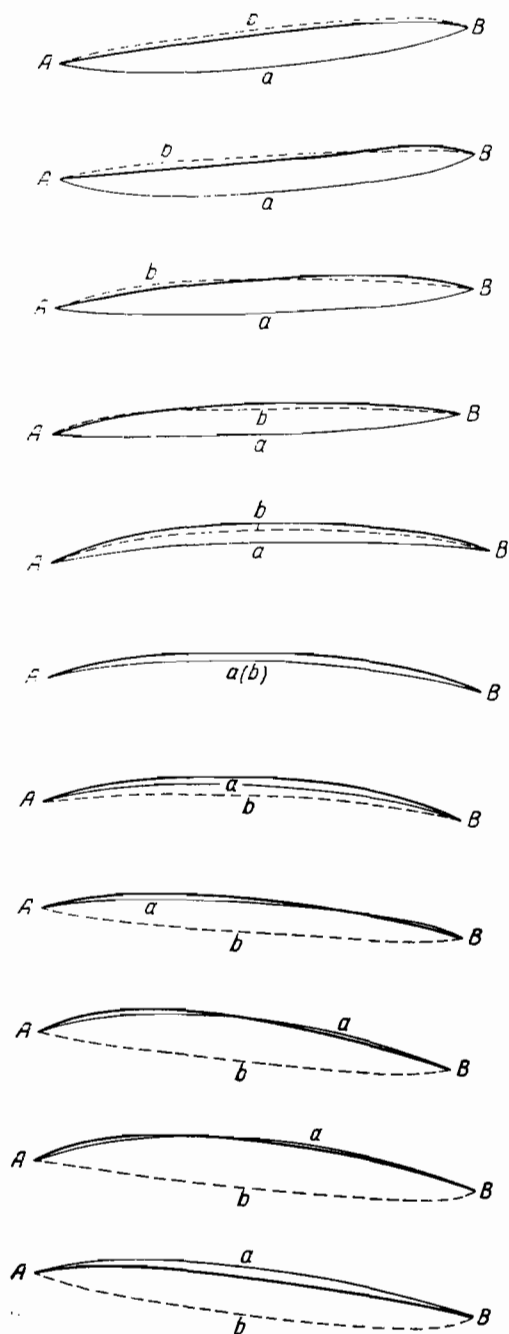
$$\cos A_{1,2} = \frac{\operatorname{tg} B_1}{4} \frac{\sigma_1^2 + \sigma \sigma_1 + \sigma^2}{\sigma + \sigma_1}. \quad (152)$$

При  $\sigma_1$  малом сравнительно с  $\sigma$ , имеем  $\cos A_{1,2} = \frac{\sigma \operatorname{tg} B_1}{4}$ . Следовательно, при  $A_{1,2} = 90^\circ - \frac{\sigma \operatorname{tg} B_1}{4}$  геодезическая линия *касается прямого сечения в  $A$* .

При  $\sigma_1 = \frac{\sigma}{4} \dots \cos A_{1,2} = \frac{21}{80} \sigma \operatorname{tg} B_1$ , т. е. при  $A_{1,2} = 90^\circ - \frac{21}{80} \sigma \operatorname{tg} B_1$ , геодезическая линия *пересекает прямое сечение  $AaB$  на  $1/4$  расстояния*



Черт. 27



Черт. 28. Обратное сечение показано пунктиром.

$$\cos A_{1,2} = \frac{3}{4} \sigma \operatorname{tg} B_1$$

Касание с обратным сечением в  $B$ .

$$\cos A_{1,2} = \frac{59}{80} \sigma \operatorname{tg} B_1$$

Пересечение с обратным сечением на  $1/4$  расстояния, ближе к  $B$ .

$$\cos A_{1,2} = \frac{17}{24} \sigma \operatorname{tg} B_1$$

Пересечение с обратным сечением на половине расстояния.

$$\cos A_{1,2} = \frac{75}{112} \sigma \operatorname{tg} B_1$$

Пересечение с обратным сечением на  $1/4$  расстояния, ближе к  $A$ .

$$\cos A_{1,2} = \frac{5}{8} \sigma \operatorname{tg} B_1$$

Касание в  $A$  с обратным сечением.

$$\cos A_{1,2} = \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \operatorname{tg} B$$

Слившиеся нормальные сечения.

$$\cos A_{1,2} = \frac{3}{8} \sigma \operatorname{tg} B_1$$

Касание в  $B$  с прямым сечением.

$$\cos A_{1,2} = \frac{37}{112} \sigma \operatorname{tg} B_1$$

Пересечение с прямым сечением на  $1/4$  расстояния, ближе к  $B$ .

$$\cos A_{1,2} = \frac{7}{24} \sigma \operatorname{tg} B_1$$

Пересечение с прямым сечением на половине расстояния.

$$\cos A_{1,2} = \frac{21}{80} \sigma \operatorname{tg} B_1$$

Пересечение с прямым сечением на  $1/4$  расстояния, ближе к  $A$ .

$$\cos A_{1,2} = \frac{1}{4} \sigma \operatorname{tg} B_1$$

Касание в  $A$  с прямым сечением.

между  $A$  и  $B$ . При  $A_{1,2} = 90^\circ - \frac{7}{24}\sigma \operatorname{tg} B_1$  происходит пересечение геодезической линией прямого нормального сечения на половине пути между  $A$  и  $B$ .

При  $A_{1,2} = 90^\circ - \frac{37}{112}\sigma \operatorname{tg} B_1$  пересечение прямого сечения приходится на  $\frac{3}{4}$  расстояния от  $A$  до  $B$ , ближе к  $B$ .

При  $\sigma_1 = \sigma$ , при  $A_{1,2} = 90^\circ - \frac{3}{8}\sigma \operatorname{tg} B_1$  геодезическая линия касается прямого сечения  $AaB$  в  $B$ .

Очевидно, все пересечения и касания геодезической линии с прямым нормальным сечением происходят при азимутах  $A_{1,2}$ , больших того, при котором точки  $A$  и  $B$  лежат на одной параллели, т. е. когда точка  $B$  лежит южнее  $A$  и когда, следовательно, прямое сечение  $AaB$  располагается севернее обратного сечения  $BbA$ .

Пересечения геодезической линией обратного нормального сечения определяются уравнением

$$\cos A_{1,2} = \frac{\operatorname{tg} B_1}{4} \frac{5\sigma^2 - \sigma\sigma_1 - \sigma_1^2}{\sigma + \sigma_2} = \frac{\operatorname{tg} B_1}{4} \frac{3\sigma^2 + 3\sigma\sigma_2 - \sigma_2^2}{\sigma + \sigma_1}. \quad (153)$$

Из (153) находим

при  $A_{1,2} = 90^\circ - \frac{3}{4}\sigma \operatorname{tg} B_1 \dots$  геодезическая линия касается в  $B$  обратного сечения  $AbB$ ;

при  $A_{1,2} = 90^\circ - \frac{59}{80}\sigma \operatorname{tg} B_1 \dots$  геодезическая линия пересекает на расстоянии  $\frac{\sigma}{4}$  от  $B$  обратное сечение  $AbB$ ;

при  $A_{1,2} = 90^\circ - \frac{17}{24}\sigma \operatorname{tg} B_1 \dots$  геодезическая линия пересекает на расстоянии  $\frac{\sigma}{2}$  от  $B$  обратное сечение  $AbB$ .

при  $A_{1,2} = 90^\circ - \frac{75}{112}\sigma \operatorname{tg} B_1 \dots$  геодезическая линия пересекает на расстоянии  $\frac{3}{4}\sigma$  от  $B$  и  $\frac{\sigma}{4}$  от  $A$  обратное сечение  $AbB$ .

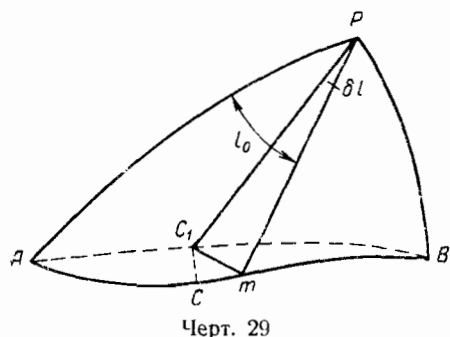
Наконец, при  $A_{1,2} = 90^\circ - \frac{5}{8}\sigma \operatorname{tg} B_1 \dots$  геодезическая линия касается обратного нормального сечения в  $A$ .

Все пересечения геодезической линией обратного нормального сечения и касания ее с ним происходят при азимутах  $A_{1,2}$ , меньших того, при котором  $A$  и  $B$  лежат на одной параллели, т. е. когда точка  $B$  лежит севернее  $A$  и прямое сечение располагается южнее обратного. Начиная с азимута  $A_{1,2} = 90^\circ - \sigma \operatorname{tg} B_1$  и кончая азимутом  $90^\circ + \sigma \operatorname{tg} B_1$ , геодезическая линия на всем своем течении располагается ближе к более северному из двух нормальных сечений. На черт. 28 изображено взаимное расположение нормальных сечений и кривой геодезической при  $A_{1,2}$ , близком к  $90^\circ$ .

## § 20. Сравнение длины нормального сечения и геодезической линии

Дифференциал  $ds$  длины любой кривой на эллипсоиде представляется таким образом

$$ds = \sqrt{M^2 + N^2 \cos^2 B \left( \frac{dl}{dB} \right)^2} dB. \quad (113)$$



Черт. 29

Условившись под  $l_0$  разумеать значение долготы для точки на кривой геодезической, будем обозначать через  $l_0 + \delta l$  значение долготы, соответствующее точке другой кривой, бесконечно близкой к геодезической кривой и пролегающей между A и B (широты конх суть  $B_1$  и  $B_2$ ).

На черт. 29  $AmB$  — кривая геодезическая;  $mC_1$  — параллель; долгота  $m$  равна  $l_0$ , долгота  $C_1$  равна  $l_0 + \delta l$ . Величина  $\delta l$  обусловлена изменением вида кривой. Называя

длину геодезической кривой через  $s_0$ , а длину кривой  $AC_1B$  через  $s$ , имеем

$$\begin{aligned} s_0 &= \int_{B_1}^{B_2} \left[ M^2 + N^2 \cos^2 B \left( \frac{dl_0}{dB} \right)^2 \right]^{1/2} dB; \\ s &= \int_{B_1}^{B_2} \left[ M^2 + N^2 \cos^2 B \left( \frac{d(l_0 + \delta l)}{dB} \right)^2 \right]^{1/2} dB; \\ s &= \int_{B_1}^{B_2} \left\{ \left[ M^2 + N^2 \cos^2 B \left( \frac{dl_0}{dB} \right)^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2N^2 \cos^2 B \frac{dl_0}{dB} \frac{d\delta l}{dB} + N^2 \cos^2 B \left( \frac{d\delta l}{dB} \right)^2 \right\}^{1/2} dB. \end{aligned}$$

Назовем

$$\left[ M^2 + N^2 \cos^2 B \left( \frac{dl_0}{dB} \right)^2 \right]^{1/2} = R_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} s_0 &= \int_{B_1}^{B_2} R_0 dB; \\ s &= \int_{B_1}^{B_2} R_0 \left\{ 1 + \frac{2N^2 \cos^2 B \frac{dl_0}{dB} \frac{d\delta l}{dB}}{R_0^2} + \frac{N^2 \cos^2 B \left( \frac{d\delta l}{dB} \right)^2}{R_0^2} \right\}^{1/2} dB. \end{aligned}$$

Применяя к подынтегральной функции разложение по биному Ньютона и ограничиваясь малыми величинами второго порядка, т. е. отбрасывая  $\delta \left( \frac{dl}{dB} \right)^3$ , получим

$$s = s_0 + \int_{B_1}^{B_2} \frac{N^2 \cos^2 B}{R_0} \frac{dl_0}{dB} \frac{d\delta l}{dB} dB + \int_{B_1}^{B_2} \frac{N^2 \cos^2 B}{2R_0^3} \left( \frac{d\delta l}{dB} \right)^2 dB -$$

$$- \int_{B_1}^{B_2} \frac{N^4 \cos^4 B}{2R_0^3} \left( \frac{dl}{dB} \right)^2 \left( \frac{d\delta l}{dB} \right)^2 dB;$$

$$s = s_0 + \int_{B_1}^{B_2} \frac{N^2 \cos^2 B}{R_0} \frac{dl_0}{dB} \frac{d\delta l}{dB} dB + \int_{B_1}^{B_2} \frac{N^2 \cos^2 B}{2R_0^3} \left( \frac{d\delta l}{dB} \right)^2 \times$$

$$\times \left[ R_0^2 - N^2 \cos^2 B \left( \frac{dl_0}{dB} \right)^2 \right] dB;$$

$$s = s_0 + \int_{B_1}^{B_2} \frac{N^2 \cos^2 B}{R_0} \frac{dl_0}{dB} \frac{d\delta l}{dB} dB + \int_{B_1}^{B_2} \frac{M^2 N^2 \cos^2 B}{2R_0^3} \left( \frac{d\delta l}{dB} \right)^2 dB.$$

Но для геодезической линии по (114)

$$\frac{N^2 \cos^2 B}{R_0} \frac{dl}{dB} = C,$$

а поэтому

$$s = s_0 + C \int_{B_1}^{B_2} \delta l + \int_{B_1}^{B_2} \frac{M^2 N^2 \cos^2 B}{2R_0^3} \left( \frac{d\delta l}{dB} \right)^2 dB.$$

Так как мы рассматриваем длины кривых, проходящих через заданные точки  $A$  и  $B$ , то при  $B = B_1$  и  $B = B_2$  величина  $\delta l = 0$ .

Таким образом

$$s = s_0 + \int_{B_1}^{B_2} \frac{M^2 N^2 \cos^2 B}{2R_0^3} \left( \frac{d\delta l}{dB} \right)^2 dB. \quad (154)$$

Будем понимать под  $s$  длину прямого нормального в  $A$  сечения. Обозначая  $s - s_0$  через  $Ds$ , пишем

$$Ds = \frac{1}{2} \int_{B_1}^{B_2} \frac{M^2 N^2 \cos^2 B}{2R_0^3} \left( \frac{d\delta l}{dB} \right)^2 dB.$$

С другой стороны, по (150), отбрасывая в нем члены с  $e^2 \sigma^4$ ,

$$\overline{CC_1} = \frac{N_1 e^2 \sin A_{1.2} \cos A_{1.2} \cos^2 B_1}{6} \sigma_1 (\sigma^2 - \sigma_1^2).$$



Изменение долготы  $\delta l$  равно  $\frac{\widetilde{CC_1} \sec A}{N \cos B}$ , где  $A$  и  $B$  — соответственно азимут и широта в  $C$  для геодезической линии. Далее

$$R_0 = \frac{ds}{dB} = \frac{MdB}{\cos A dB} = \frac{M}{\cos A}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} Ds &= \frac{1}{2} \int_{B_1}^{B_2} \frac{N^2}{M} \cos^2 B \cos^3 A \left( \frac{d\delta l}{dB} \right)^2 dB; \\ \delta l &= \frac{e^2 \sin A_{1.2} \sec A}{6} \frac{\cos^2 B_1 \cos A_{1.2}}{\cos B} \sigma_1 (\sigma^2 - \sigma_1^2) = \\ &= \frac{e^2}{6} \frac{\cos^2 B_1}{\cos B} \sin A_{1.2} \sigma_1 (\sigma^2 - \sigma_1^2); \\ \frac{d\delta l}{dB} &= \frac{d\delta l}{d\sigma_1} \frac{d\sigma_1}{dB} = \frac{e^2}{6} \frac{\cos^2 B_1}{\cos B} \sin A_{1.2} (\sigma^2 - 3\sigma_1^2) \frac{1}{\cos A_{1.2}} \cdot \frac{M}{N}; \\ &\quad \left( dB = d\sigma_1 \frac{N}{M} \cos A \right); \end{aligned}$$

$$Ds = \frac{Ne^4}{72} \int_0^\sigma \cos^4 B_1 \sin^2 A_{1.2} \cos^2 A_{1.2} (\sigma^4 - 6\sigma^2 \sigma_1^2 + 9\sigma_1^4) d\sigma_1;$$

причем пренебрегли в последнем уравнении изменениями азимута  $A$  при переходе от  $A$  к  $C_1$ , что даст ошибку порядка  $e^4 \sigma^6$ .

Наконец

$$\begin{aligned} Ds &= \frac{Ne^4}{288} \cos^4 B_1 \sin^2 2A_{1.2} \left| \left( \sigma^4 \sigma_1 - 2\sigma^2 \sigma_1^3 + \frac{9}{5} \sigma_1^5 \right) \right|_0^\sigma; \\ Ds &= \frac{ae^4}{360} \sin^2 2A_{1.2} \cos^4 B_1 \sigma^5. \end{aligned} \quad (155)$$

Разность  $Ds$  длин геодезической линии и кривой нормального сечения является величиной пренебрегаемой; при  $AB = 600$  км

$$Ds < 1:135\,000 \text{ м!}$$

Следовательно, во всех вопросах и при сколько угодно больших расстояниях можно принимать, что длина кривой нормального сечения не отличается от *кратчайшего расстояния*, считаемого по геодезической линии.

## § 21. «Приведенная» длина геодезической линии

Мы должны сперва обратиться вновь в ряды (119) и ввести члены с  $s^5$ . Для этого нам, очевидно, нужно будет в дополнение к проделанному в § 18 получить выражения  $\left( \frac{d^5 x}{ds^5} \right)_0$ ,  $\left( \frac{d^5 y}{ds^5} \right)_0$  и  $\left( \frac{d^5 z}{ds^5} \right)_0$ .

В дополнение к (122), (124) и (125) напишем

$$\begin{aligned} \frac{d^4 z}{ds^4} = & p \frac{d^4 x}{ds^4} + q \frac{d^4 y}{ds^4} + 3 \left( \frac{dp}{ds} \frac{d^3 x}{ds^3} + \frac{dq}{ds} \frac{d^3 y}{ds^3} \right) + 3 \left( \frac{d^2 p}{ds^2} \frac{d^2 x}{ds^2} + \right. \\ & \left. + \frac{d^2 q}{ds^2} \frac{d^2 y}{ds^2} \right) + 1 \left( \frac{d^3 p}{ds^3} \frac{dx}{ds} + \frac{d^3 q}{ds^3} \frac{dy}{ds} \right); \end{aligned} \quad (122')$$

$$\frac{d^5 x}{ds^5} = -p \frac{d^5 z}{ds^5} - 3 \frac{dp}{ds} \frac{d^4 x}{ds^4} - 3 \frac{d^2 p}{ds^2} \frac{d^3 x}{ds^3} - \frac{d^3 p}{ds^3} \frac{d^2 x}{ds^2}; \quad (124')$$

$$\frac{d^5 y}{ds^5} = -q \frac{d^5 z}{ds^5} - 3 \frac{dq}{ds} \frac{d^4 y}{ds^4} - 3 \frac{d^2 q}{ds^2} \frac{d^3 y}{ds^3} - \frac{d^3 q}{ds^3} \frac{d^2 y}{ds^2}. \quad (125')$$

Далее в дополнение к (126), (127), (128), (129), (130)

$$= r \frac{d^3 x}{ds^3} + v \frac{d^3 y}{ds^3} + 2 \left( \frac{dr}{ds} \frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{dv}{ds} \frac{d^2 y}{ds^2} \right) + \left( \frac{d^2 r}{ds^2} \frac{dx}{ds} + \frac{d^2 v}{ds^2} \frac{dy}{ds} \right); \quad (126')$$

$$= v \frac{d^3 x}{ds^3} + t \frac{d^3 y}{ds^3} + 2 \left( \frac{dv}{ds} \frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{dt}{ds} \frac{d^2 y}{ds^2} \right) + \left( \frac{d^2 v}{ds^2} \frac{dx}{ds} + \frac{d^2 t}{ds^2} \frac{dy}{ds} \right); \quad (127')$$

$$\begin{aligned} = & \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} + \\ & + \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} \left( \frac{dy}{ds} \right)^2; \end{aligned} \quad (128')$$

$$\begin{aligned} = & \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} + \\ & + \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} \left( \frac{dy}{ds} \right)^2; \end{aligned} \quad (129')$$

$$\begin{aligned} = & \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} + \\ & + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} \left( \frac{dy}{ds} \right)^2. \end{aligned} \quad (130')$$

Из (136), (137)

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_0 2N_0 &= \frac{A^2}{N_0^2} + \frac{2V_0^2}{N_0^2} (1 + \eta^2 \operatorname{tg}^2 B_0); \\ \left( \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_0 &= \frac{A^2}{2N_0^3} + \frac{V_0^2}{N_0^3} (1 + \eta^2 \operatorname{tg}^2 B); \end{aligned} \quad (136')$$

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} \right)_0 &= 0; \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = 0 \\ \left( \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} \right)_0 &= \frac{3(1 + \eta^2 \operatorname{tg}^2 B)}{N_0^3} \\ \left( \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} \right)_0 &= 3 \frac{A^2}{M_0 N_0^2} + 3 \frac{V_0^2 (1 + \eta^2 \operatorname{tg}^2 B_0)}{M_0 N_0^2} = \\ &= \frac{3V_0^2}{N_0^3} \{A^2 + V_0^2 (1 + \eta^2 \operatorname{tg}^2 B_0)\} \end{aligned} \right\}. \quad (137')$$

Теперь все собрано, чтобы вместе с ранее полученными коэффициентами в § 18 вычислить производные, стоящие в левых частях уравнений (126)'—(130)', а затем с ними —  $\left(\frac{d^4 z}{ds^4}\right)_0$  по (122)', и наконец вычислить  $\left(\frac{d^5 x}{ds^5}\right)_0$  и  $\left(\frac{d^5 y}{ds^5}\right)_0$  по (124)' и (125)', причем в последних двух уравнениях оставшаяся еще неизвестной  $\left(\frac{d^5 z}{ds^5}\right)_0$  выпадает, так как она входит с множителями  $p_0 = 0$  и  $q_0 = 0$ .

Мы имеем

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2 t}{ds^2}\right)_0 &= \left(\frac{A^2}{2N_0^3} + \frac{V_0^2}{N_0^3} C\right) \cos^2 A_{1.2} + \frac{3C}{N_0^3} \sin^2 A_{1.2}; \\ \left(\frac{d^2 v}{ds^2}\right)_0 &= \left(\frac{A^2}{N_0^3} + \frac{2V_0^2}{N_0^3} C\right) \sin A_{1.2} \cos A_{1.2}; \\ \left(\frac{d^2 r}{ds^2}\right)_0 &= \left[\frac{3V_0^2}{N_0^3} A^2 + V_0^2 (1 + \gamma^2 \operatorname{tg}^2 B_0)\right] \cos^2 A_{1.2} + \\ &\quad + \left[\frac{A^2}{2N_0^3} + \frac{V_0^2}{N_0^3} (1 + \gamma^2 \operatorname{tg}^2 B_0)\right] \sin^2 A_{1.2}; \\ \left(\frac{d^3 p}{ds^3}\right)_0 &= -\frac{V_0^4}{N_0^3} (V_0^2 \cos^2 A_{1.2} + \sin^2 A_{1.2}) \cos A_{1.2} + \frac{3V_0^2}{N_0^3} (A^2 + \\ &\quad + V_0^2 C) \cos^3 A_{1.2} + \left(\frac{A^2}{2N_0^3} + \frac{V_0^2}{N_0^3} C\right) \sin^2 A_{1.2} \cos A_{1.2} + \\ &\quad + \left(\frac{A^2}{N_0^3} + \frac{2V_0^2}{N_0^3} C\right) \sin^2 A_{1.2} \cos A_{1.2}; \\ \left(\frac{d^3 p}{ds^3}\right)_0 &= \frac{V_0^2 \cos^2 A_{1.2} + \sin^2 A_{1.2}}{N_0^3} V_0^2 (3C + V_0^2) \cos A_{1.2} + \\ &\quad + \frac{3}{2} \frac{A^2}{N_0^3} (2V_0^2 \cos^2 A_{1.2} + \sin^2 A_{1.2}) \cos A_{1.2}; \quad (138')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^3 q}{ds^3}\right)_0 &= -\frac{1}{N_0^3} (V_0^2 \cos^2 A_{1.2} + \sin^2 A_{1.2}) \sin A_{1.2} + \\ &\quad + \left(\frac{A^2}{N_0^3} + \frac{2V_0^2}{N_0^3} C\right) \sin A_{1.2} \cos^2 A_{1.2} + \\ &\quad + \left(\frac{A^2}{2N_0^3} + \frac{V_0^2}{N_0^3} C\right) \sin A_{1.2} \cos^2 A_{1.2} + \frac{3C}{N_0^3} \sin A_{1.2}; \\ \left(\frac{d^3 q}{ds^3}\right)_0 &= \frac{(V_0^2 \cos^2 A_{1.2} + \sin^2 A_{1.2})}{N_0^3} (3C - 1) \sin A_{1.2} + \\ &\quad + \frac{3}{2} \frac{A^2}{N_0^3} \sin A_{1.2} \cos^2 A_{1.2}; \quad (138'')\end{aligned}$$

$$\left(\frac{d^4 z}{ds^4}\right)_0 = \frac{3C}{N_0^3} (V_0^2 \cos^2 A_{1.2} + \sin^2 A_{1.2})^2 + 3 \frac{A^2}{N_0^3} (V_0^2 \cos^2 A_{1.2} + \sin^2 A_{1.2}) \cos^2 A_{1.2} - \\ - \frac{4(V_0^4 \cos^2 A_{1.2} + \sin^2 A_{1.2})}{N_0^3} (V_0^2 \cos^2 A_{1.2} + \sin^2 A_{1.2}).$$

Обозначив

$$V_0^2 \cos^2 A_{1.2} + \sin^2 A_{1.2} = 1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2} = \rho,$$

перепишем еще

$$\left(\frac{d^4 z}{ds^4}\right)_0 = \frac{\rho}{N_0^3} [3C\rho + 3A^2 \cos^2 A_{1.2} - 4(V_0^4 \cos^2 A_{1.2} + \sin^2 A_{1.2})]. \quad (139)$$

Далее

$$\frac{d^3 x}{ds^3} = \frac{\cos A_{1.2}}{N_0^4} \rho \left\{ -12\rho V_0^2 C + V_0^4 \rho + 12V_0^2 \cos^2 A_{1.2} + 12V_0^2 \sin^2 A_{1.2} - \right. \\ \left. - \frac{15}{4} A^2 (5V_0^2 \cos^2 A_{1.2} + \sin^2 A_{1.2}) \right\};$$

$$\frac{d^3 y}{ds^3} = \frac{\sin A_{1.2}}{N_0^4} \rho \left\{ -12\rho C + \rho + 12V_0^4 \cos^2 A_{1.2} + 12\sin^2 A_{1.2} - \right. \\ \left. - 15A^2 \cos^2 A_{1.2} \right\}.$$

Таким образом, вместе с результатами § 18 получим

$$x = s \cos A_{1.2} - \frac{V_0^2 s^3}{6N_0^2} \cos A_{1.2} (1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2}) + \\ + \frac{s^4}{24N_0^3} \eta^2 \operatorname{tg} B_0 (9V_0^2 \cos^2 A_{1.2} + \sin^2 A_{1.2}) (1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2}) + \\ + \frac{s^5}{120N_0^4} \cos A_{1.2} (1 + 2\eta^2 + 14\eta^2 \cos^2 A_{1.2} - 12\eta^2 \operatorname{tg}^2 B_0); \quad (156)$$

$$\left. \begin{aligned} y &= s \sin A_{1.2} - \frac{s^3}{6N_0^2} \sin A_{1.2} (1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2}) + \\ &+ \frac{s^4}{3N_0^3} \eta^2 \operatorname{tg} B_0 \sin A_{1.2} \cos A_{1.2} (1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2}) + \\ &+ \frac{s^5}{120N_0^4} \sin A_{1.2} (1 + 14\eta^2 \cos^2 A_{1.2} - 12\eta^2 \operatorname{tg}^2 B_0) \\ z &= \frac{s^2}{2N_0} (1 + \eta^2 \cos^2 A_{1.2}) - \frac{s^3}{2N_0^2} \eta^2 \operatorname{tg} B_0 \cos A_{1.2} (1 + \\ &+ \eta^2 \cos^2 A_{1.2}) - \frac{s^4}{24N_0^3} (1 + 6\eta^2 \cos^2 A_{1.2} - 3\eta^2 \operatorname{tg}^2 B_0) \end{aligned} \right\}. \quad (156')$$

В (156) в членах с  $s^5$  опущены множители с  $\eta^4$ ; таким образом, в выражениях для  $x$  и  $y$  мы пренебрегли членами порядка  $\frac{s^5}{N^4} \eta^4$ ; в выра-

жении для  $z$  также опущены в члене с  $s^5$  множители с  $\eta^4$ , т. е. здесь пренебрегли величинами порядка  $\frac{s^4}{N^3} \eta^4$ .

В общей теории поверхностей, данной знаменитым Гауссом, мы имеем следующие положения: представим себе, что прямоугольные прямолинейные координаты точки на поверхности заданы уравнениями

$$x = f_1(u, v); \quad y = f_2(u, v); \quad z = f_3(u, v),$$

в которых  $u$  и  $v$  суть криволинейные координаты на поверхности, т. е. параметры, определяющие два семейства кривых на поверхности

$$u = C_1; \quad v = C_2.$$

Элемент  $d\sigma$  длины некоторой кривой на поверхности представится так

$$d\sigma = \sqrt{E^2 du^2 + 2F du dv + G dv^2},$$

причем

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2;$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v};$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Возьмем теперь на поверхности так называемую систему геодезических полярных координат: в этой системе параметрические кривые  $v$  представляются геодезическими линиями, исходящими из некоторого жесткого пункта, а параметрические кривые  $u$  — кривыми,

которые везде ортогональны к упомянутым геодезическим линиям  $v$  и называются геодезическими окружностями. Так как наши кривые  $u$  и  $v$  пересекаются под прямым углом, то

$$F = 0.$$

Гаусс обозначил  $\sqrt{G} = m$ . Мы для нашего случая имеем поэтому

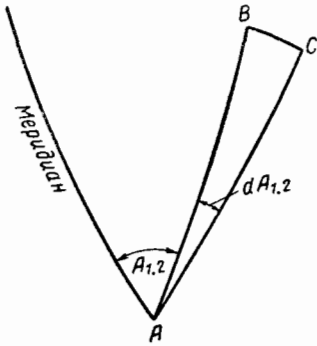
$$d\sigma = \sqrt{E du^2 + G dv^2} = \sqrt{E du^2 + m^2 dv^2}. \quad (157)$$

Пусть на черт. 30 геодезическая линия  $AB$  имеет длину  $s$  и азимут  $A_{1,2}$ ; если этот азимут изменяется на  $dA_{1,2}$ , а длина геодезической линии остается неизменной, то точка  $B$  перемещается в положение  $C$ , причем  $BC$  будет элементом геодезической окружности. Называя длину элемента  $BC$  через  $dp$ , мы напомним

$$dp = m dA_{1,2}, \quad (158)$$

причем отождествление  $m$ , стоящего в (158), с  $m$ , стоящим в (157), пока еще не установлено.

Если из точки  $A$ , изменяя непрерывно азимут  $A_{1,2}$ , будем проводить геодезические линии постоянной длины  $s$ , то концы этих линий дадут



Черт. 30

на эллипсоиде именно кривую, которая называется «*геодезической окружностью*»; не трудно видеть, что эта геодезическая окружность будет везде ортогональна к геодезическим линиям, проведенным под всевозможными азимутами из  $A$  и сохраняющими *постоянную* длину  $s$ . Очевидно, в принятой ранее системе координат  $u$  и  $v$ , которой соответствует уравнение (157), величина  $u$  соответствует длине  $s$  геодезической линии, проведенной из жесткой точки  $A$ , а величина  $v$  — азимуту  $A_{1.2}$ , и, конечно, тогда в (157)  $E=1$ . Если  $d\sigma$  в (157) именно совпадает с  $dp = BC$ , то  $du=0$  и (157) переписывается так

$$dp = m dv = m dA_{1.2},$$

т. е.  $m$ , стоящее в (158), тождественно с  $m$ , стоящим в (157). Величина  $m$  называется «*приведенной*» длиной геодезической линии. Следовательно,

$$m = \sqrt{G} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial A_{1.2}}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial A_{1.2}}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial A_{1.2}}\right)^2}. \quad (159)$$

Взяв частные производные от  $x, y, z$ , даваемые уравнениями (156), по азимуту  $A_{1.2}$ , мы и получим выражение для «*приведенной*» длины геодезической линии. Мы будем иметь

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial A_{1.2}}\right)^2 &= s^2 \sin^2 A_{1.2} \left\{ 1 - \frac{s^2}{3N_0^2} (1 + \eta^2 + 3\eta^2 \cos^2 A_{1.2} + 3\eta^4 \cos^2 A_{1.2}) + \right. \\ &\quad + \frac{s^2}{3N_0^3} \eta^2 \operatorname{tg} B_0 \cos A_{1.2} (4 + 5\eta^2 + 8\eta^2 \cos^2 A_{1.2}) + \\ &\quad \left. + \frac{s^4}{45N_0^4} (2 + 4\eta^2 + 39\eta^2 \cos^2 A_{1.2} - 9\eta^2 \operatorname{tg}^2 B_0) \right\}; \\ \left(\frac{\partial y}{\partial A_{1.2}}\right)^2 &= s^2 \cos^2 A_{1.2} \left\{ 1 - \frac{s^2}{3N_0^2} (1 - 2\eta^2 + 3\eta^2 \cos^2 A_{1.2}) + \right. \\ &\quad + \frac{s^3}{3N_0^3} \eta^2 \operatorname{tg} B_0 \cos A_{1.2} (2 - 2 \operatorname{tg}^2 A_{1.2} - 6\eta^2 + 8\eta^2 \cos^3 A_{1.2}) + \\ &\quad \left. + \frac{s^4}{45N_0^4} (2 - 26\eta^2 + 39\eta^2 \cos^2 A_{1.2} - 9\eta^2 \operatorname{tg}^2 B_0) \right\}; \\ \left(\frac{\partial z}{\partial A_{1.2}}\right)^2 &= s^2 \left\{ \frac{s^2}{3N_0^2} (3\eta^4 \sin^2 A_{1.2} \cos^2 A_{1.2}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{s^3}{3N_0^3} \eta^2 \operatorname{tg} B_0 \cos A_{1.2} (3\eta^2 \sin^2 A_{1.2}) \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} m^2 &= s^2 \left\{ 1 - \frac{s^2}{3N_0^2} (1 + \eta^2) + \frac{s^3}{3N_0^3} \eta^2 \operatorname{tg} B_0 \cos A_{1.2} (2 + 2\eta^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{s^4}{45N_0^4} (2 + 4\eta^2 + 9\eta^2 \cos^2 A_{1.2} - 9\eta^2 \operatorname{tg}^2 B_0) \right\}; \\ m &= s \left\{ 1 - \frac{s^2}{6N_0^2} (1 + \eta^2) + \frac{s^3}{3N_0^3} \eta^2 \operatorname{tg} B_0 \cos A_{1.2} (1 + \eta^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{s^4}{120N_0^4} (1 + 2\eta^2 + 12\eta^2 \cos^2 A_{1.2} - 12\eta^2 \operatorname{tg}^2 B_0) \right\}. \quad (160) \end{aligned}$$

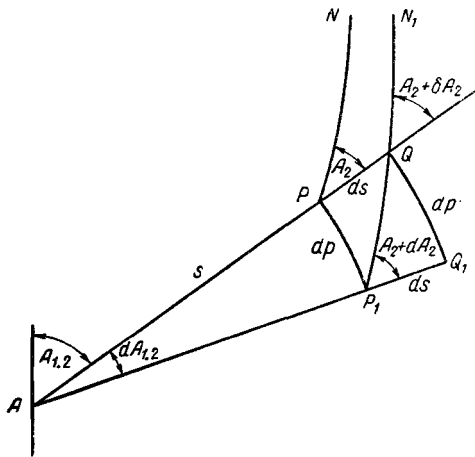
Уравнение (160) используется в ряде задач высшей геодезии. В уравнении (160) величины  $N, \eta, B$  отнесены к точке  $A$ , и азимут  $A_{1.2}$  — также к точке  $A$ . Если бы мы в этом же уравнении (160) величины  $N, \eta, B$

отнесли к точке  $B$  и азимут  $A_{1,2}$  заменили бы азимутом  $A_{2,1}$  в  $B$  на точку  $A$ , то в уравнении (158) перемещение  $dp$ , соответствующее тому же дифференциалу  $dA_{1,2}$ , должно было бы остаться тем же самым, что и при  $m$ , вычисленном с отнесенными к точке  $A$  величинами  $N, \eta, B$  и  $A_{1,2}$ . Другими словами, если по геодезической линии  $AB$  мы переменим роли точек  $A$  и  $B$ , то приведенная длина  $m$  этой геодезической линии должна остаться неизменной, т. е. величина  $m$  относится к геодезической линии  $AB$ , но для *обоих* ее концов  $m$  имеет одно и то же значение.

Это положение может быть также доказано сравнением двух выражений для  $m$ , вычисленных по (160) один раз с  $N, \eta, B$  для точки  $A$  с азимутом  $A_{1,2}$ , и другой раз — с  $N, \eta, B$  для точки  $B$  и с азимутом  $A_{2,1}$ . Однако такое сравнение мы делать не будем, считая его логически обоснованным.

## § 22. Дифференциальные формулы полярных геодезических координат. Определение величины $n$

В первой части этого параграфа мы будем по существу иметь дело с вопросом, относящимся к особой главе курса о дифференциальных формулах. Однако, чтобы получить заблаговременно нужную нам величину  $n$ , приходится несколько нарушить обычный порядок изложения. Под геодезическими полярными координатами понимаются, как уже указано в § 21, длина  $s$  геодезической линии, исходящей из жесткой точки  $A$ , и азимут ее  $A_{1,2}$  в этой точке  $A$  (в § 21 длина  $s$  обозначается через  $u$  и  $A_{1,2}$  — через  $v$ ). Пусть азимут  $A_{1,2}$  (черт. 31) геодезической линии  $AP$  получает изменение  $dA_{1,2}$ , длина же этой геодезической линии остается неизменной. Тогда  $P$  переместится в  $P_1$  по геодезической окружности, причем



Черт. 31

В первой части этого параграфа мы будем по существу иметь дело с вопросом, относящимся к особой главе курса о дифференциальных формулах. Однако, чтобы получить заблаговременно нужную нам величину  $n$ , приходится несколько нарушить обычный порядок изложения. Под геодезическими полярными координатами понимаются, как уже указано в § 21, длина  $s$  геодезической линии, исходящей из жесткой точки  $A$ , и азимут ее  $A_{1,2}$  в этой точке  $A$  (в § 21 длина  $s$  обозначается через  $u$  и  $A_{1,2}$  — через  $v$ ). Пусть азимут  $A_{1,2}$  (черт. 31) геодезической линии  $AP$  получает изменение  $dA_{1,2}$ , длина же этой геодезической линии остается неизменной. Тогда  $P$  переместится в  $P_1$  по геодезической окружности, причем

$$PP_1 = dp = m dA_{1,2}. \quad (161)$$

Назовем через  $A_2$  азимут в  $P$  продолжения геодезической линии  $AP$ , а через  $A_2 + dA_2$  — азимут в  $P_1$  продолжения геодезической линии  $AP_1$ . Если  $PN$  и  $P_1N_1$  — меридианные кривые в  $P$  и в  $P_1$ , то назовем через  $Q$  пересечение  $P_1N_1$  с продолжением линии  $AP$ , а азимут в  $Q$  этого продолжения — через  $A_2 + \delta A_2$ . Далее назовем отрезок  $PQ$  через  $ds$  и, наконец, проведем геодезическую окружность  $QQ_1$  через  $Q$ , отрезок которой  $QQ_1$  назовем через  $dp_1$ . Мы имеем

$$\left. \begin{aligned} dp_1 &= \left[ m + \left( \frac{dm}{ds} \right) ds \right] dA_{1,2} \\ \frac{dp_1}{ds} &= \frac{m}{ds} dA_{1,2} + \left( \frac{dm}{ds} \right) dA_{1,2} \end{aligned} \right\}. \quad (162)$$

Из элементарного треугольника  $P_1QQ_1$  напишем

$$\begin{aligned}\frac{dp_1}{ds} &= \frac{\sin(A_2 + dA_2)}{\sin(90^\circ - A_2 - \delta A_2)} = \frac{\sin(A_2 + dA_2)}{\cos(A_2 + \delta A_2)}; \\ \frac{dp_1}{ds} &= \frac{\sin A_2 + \cos A_2 \delta A_2}{\cos A_2 - \sin A_2 \delta A_2} = \frac{\operatorname{tg} A_2 + dA_2}{1 - \operatorname{tg} A_2 \delta A_2}; \\ \frac{dp_1}{ds} &= \operatorname{tg} A_2 + dA_2 + \operatorname{tg}^2 A_2 \delta A_2.\end{aligned}\quad (163)$$

Далее из треугольника  $PQP_1$

$$\frac{dp}{ds} = \operatorname{tg}(A_2 + \delta A_2) = \operatorname{tg} A_2 + \frac{\delta A_2}{\cos^2 A_2}$$

или на основании (161)

$$m \frac{dA_{1,2}}{ds} = \operatorname{tg} A_2 + \frac{\delta A_2}{\cos^2 A_2}.\quad (164)$$

Подставляя в (162) формулы (163) и (164), получим

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} A_2 + dA_2 + \operatorname{tg}^2 A_2 \delta A_2 &= \operatorname{tg} A_2 + \frac{\delta A_2}{\cos^2 A_2} + \left(\frac{dm}{ds}\right) dA_{1,2}; \\ dA_2 &= \left(\frac{dm}{ds}\right) dA_{1,2} + \delta A_2.\end{aligned}\quad (165)$$

С другой стороны, ясно, что

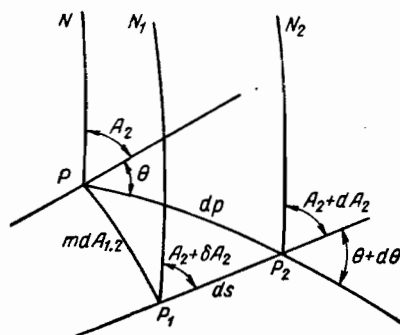
$$\delta A_2 = \frac{ds}{N_2} \sin A_2 \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{dp}{N_2} \cos A_2 \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{m}{N_2} \cos A_2 \operatorname{tg} \varphi_2 dA_{1,2},$$

понимая под  $\varphi_2$  широту  $P$ . Поэтому (165) переписывается так

$$dA_2 = \left[ \left(\frac{dm}{ds}\right) + \frac{m}{N_2} \cos A_2 \operatorname{tg} \varphi_2 \right] dA_{1,2}.\quad (166)$$

Это одна из нужных нам впоследствии дифференциальных формул. Нужно помнить, что  $dA_2$  обусловлено изменением только азимута  $A_{1,2}$ ,  $s$  остается при этом неизменным, а  $ds$ , входящее в  $\left(\frac{dm}{ds}\right)$ , имеет значение символа в производной  $\left(\frac{dm}{ds}\right)$ .

Представим себе теперь, что вместе с изменением  $A_{1,2}$  на  $dA_{1,2}$  изменяется независимо и  $s$  на  $ds$ . Вследствие перемены  $A_{1,2}$  конец геодезической линии  $P$  перемещается в  $P_1$ , причем  $PP_1 = mdA_{1,2}$  (черт. 32). Вследствие перемены длины линии  $AP$  на  $ds$ , точка  $P_1$  перемещается в  $P_2$ , т. е. вследствие перемены  $A_{1,2}$  и  $s$ , точка  $P$  займет положение  $P_2$ . Азимут в  $P$  продолжения геодезической линии  $AP$  назовем через  $A_2$ , азимут в  $P_2$  продолжения геодезической линии  $PP_2$  назовем через  $A_2 + dA_2$ ; длина элемента геодезической линии  $PP_2$  пусть будет  $dp$ , а



Черт. 32



углы этой линии  $PP_2$  в  $P$  и  $P_2$  с продолжениями линий  $AP$  и  $AP_2$ , назовем соответственно через  $\Theta$  и  $\Theta + d\Theta$ . Наконец, обозначим через  $A_2 + \delta A_2$  азимут в  $P_1$  продолжения линии  $AP_1$ . Мы имеем

$$dA_2 = \delta A_2 + \frac{ds}{N_2} \sin A_2 \operatorname{tg} \varphi_2,$$

понимая под  $\varphi_2$  широту точки  $P_1$  или  $P$ .

С другой стороны, на основании (166)

$$\delta A_2 = \left[ \left( \frac{dm}{ds} \right) + \frac{m}{N_2} \cos A_2 \operatorname{tg} \varphi_2 \right] dA_{1.2}$$

и, следовательно,

$$dA_2 = \left[ \left( \frac{dm}{ds} \right) + \frac{m}{N_2} \cos A_2 \operatorname{tg} \varphi_2 \right] dA_{1.2} + \frac{ds}{N_2} \sin A_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad (167)$$

причем, конечно,  $ds$  в символе  $\left( \frac{dm}{ds} \right)$  и  $ds$  в последнем слагаемом (167) имеют совершенно различные значения.

Далее имеем

$$ds = dp \cos \Theta; \quad md A_{1.2} = dp \sin \Theta;$$

$$dA_2 = \frac{1}{m} \left( \frac{dm}{ds} \right) \sin \Theta dp + \frac{\cos A_2 \operatorname{tg} \varphi_2 \sin \Theta dp}{N_2} + \frac{dp \cos \Theta}{N_2} \sin A_2 \operatorname{tg} \varphi_2;$$

$$dA_2 = \frac{1}{m} \left( \frac{dm}{ds} \right) \sin \Theta dp + \frac{1}{N_2} \sin (A_2 + \Theta) \operatorname{tg} \varphi_2 dp.$$

Из черт. 32

$$(A_2 + dA_2 + \Theta + d\Theta) - (A_2 + \Theta) = dA_2 + d\Theta = \frac{dp}{N_2} \sin (A_2 + \Theta) \operatorname{tg} \varphi_2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} d\Theta &= -\frac{1}{m} \left( \frac{dm}{ds} \right) \sin \Theta dp, \\ \frac{d\Theta}{dp} &= -\frac{1}{m} \left( \frac{dm}{ds} \right) \sin \Theta. \end{aligned} \quad (168)$$

Приведем далее аналитический вывод уравнения (168), который проще и изящнее только что изложенного.

Мы имеем формулу (157)

$$ds = \sqrt{E du^2 + G dv^2},$$

представляющую линейный элемент поверхности для случая, когда параметрические кривые  $u$  и  $v$  ортогональны.

Если все линии одной из систем

$$v = c_1,$$

$$u = c_2$$

являются геодезическими линиями на нашей поверхности, то коэффициенты  $E$  и  $G$  (это было показано Гауссом) будут функциями только одного параметра: если кривые

$$v = c_1$$

суть геодезические, то  $E$  и  $G$  будут функциями одного параметра  $u$ . (На поверхности эллипсоида вращения мы, например, можем за  $u$  принять приведенную широту, и тогда уравнение

$$u = c_2$$

определяет семейство параллелей; величину  $v$  можем приравнять долготе  $l$ , и тогда уравнение

$$v = c_1$$

представит собой семейство меридианов эллипсоида.)

Мы примем, что в (157)

$$v = c_1$$

даст семейство геодезических линий, и тогда  $E$  и  $G$  будем считать функциями только одного  $u$ .

Если назовем угол некоторой геодезической линии с параметрической линией  $v = c_1$  в некоторой точке, определяемой координатами  $u_1$  и  $v_1$ , через  $\Theta$ , то очевидно

$$d\sigma \cos \Theta = \sqrt{E} du,$$

$$d\sigma \sin \Theta = \sqrt{G} dv,$$

$$\frac{dv}{du} = \operatorname{tg} \Theta \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}.$$

$$\sigma = \int \sqrt{F du^2 + G dv^2} = \int \sqrt{E + G \left( \frac{dv}{du} \right)^2} du.$$

Полагая, что  $\sigma$  — длина геодезической линии, применим уравнение Лагранжа-Эйлера, данное под номером (112) в § 17. Мы имеем в данном случае

$$F = \sqrt{E + G \left( \frac{dv}{du} \right)^2},$$

$$\frac{dv}{du} \text{ соответствует } y',$$

и, как в § 17, напомним

$$\frac{\partial F}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial q} = C,$$

полагая, что  $q = \frac{dv}{du}$ .

Но

$$\frac{\partial F}{\partial q} = \frac{G \frac{dv}{du}}{\sqrt{E + G \left( \frac{dv}{du} \right)^2}} = C,$$

поэтому далее имеем

$$\frac{G \sqrt{\frac{F}{G}} \operatorname{tg} \Theta}{\sqrt{E + \frac{E}{G} G \operatorname{tg}^2 \Theta}} = \sqrt{G} \sin \Theta = C. \quad (169)$$

Из (169), дифференцируя его по  $\sigma$ , получим

$$\frac{d \sqrt{G}}{du} \frac{du}{d\sigma} \sin \Theta + \sqrt{G} \cos \Theta \frac{d\Theta}{d\sigma} = 0$$

или, так как  $\frac{du}{d\sigma} = \frac{\cos \Theta}{\sqrt{E}}$ , то имеем

$$\begin{aligned} \frac{d \sqrt{G}}{du} \frac{\sin \Theta \cos \Theta}{\sqrt{E}} + \sqrt{G} \cos \Theta \frac{d\Theta}{d\sigma} &= 0; \\ \frac{d \sqrt{G}}{du} \sin \Theta + \sqrt{EG} \frac{d\Theta}{d\sigma} &= 0; \\ \frac{d\Theta}{d\sigma} &= -\frac{1}{\sqrt{EG}} \sin \Theta \frac{d \sqrt{G}}{du}. \end{aligned} \quad (170)$$

Ранее было выведено уравнение (168). При этом одним семейством параметрических линий являлись геодезические линии, исходящие на поверхности из жесткой точки  $A$ , а вторым семейством являлись геодезические окружности этой точки  $A$ . Примем, что параметр  $v$  есть азимут  $A_{1,2}$  в  $A$  геодезической линии, исходящей из  $A$ ; параметр  $u$  есть длина  $s$  геодезической линии, исходящей из  $A$ . Величины  $s$  и  $A_{1,2}$  являются геодезическими полярными координатами конечной точки  $P$  геодезической линии  $AP$ .

В этом случае формула (157) переписется так

$$d\sigma^2 = ds^2 + m^2 dA_{1,2}^2, \quad (171)$$

причем под  $m$  понимается «приведенная» длина геодезической линии  $AP$ . Очевидно, для этого же случая  $E = 1$ ,  $G = m^2$ ,  $u = s$ , и мы получаем из (170)

$$\frac{d\Theta}{d\sigma} = -\frac{1}{m} \left( \frac{dm}{ds} \right) \sin \Theta. \quad (172)$$

При этом  $\Theta$  есть угол элемента  $d\sigma$  с продолжением геодезической линии  $AP$  (см. черт. 33), для которой  $v = A_{1,2}$ . Длина элемента  $d\sigma$  в геодезии, а соответственно и в § 22, называется через  $dp$ . Поэтому (172) напишется еще так

$$\frac{d\Theta}{dp} = -\frac{1}{m} \left( \frac{dm}{ds} \right) \sin \Theta. \quad (168)$$

Нужно отметить, что формула (166), используемая затем в § 70 (глава VIII — Дифференциальные формулы), может быть получена с помощью формулы (168), т. е. получив только что изложенным путем формулу (168), можно было бы подготовительные формулы к § 70 получить, используя формулу (168), т. е. применить порядок, обратный принятому в настоящем параграфе, причем все выкладки несколько сократились бы и упростились бы. Но первый вывод уравнения (168),



Величина  $\frac{dm}{dv}$  обозначается через  $n$ . Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} PP_1 &= n_p du \\ n &= \left( \frac{dm}{dv} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (174)$$

Формулы (174) имеют существенное значение в высшей геодезии; величина  $n_p$  в (174) относится к точке  $P$  геодезической линии  $PQ$ . Понятно, что использование  $n_p$  связано с применением прямоугольных координат на поверхности, в системе которых некоторая геодезическая линия играет роль оси абсцисс, а по геодезическим линиям, перпендикулярным к этой осевой геодезической линии, идет счет ординат. Но, конечно, мы можем под  $n$  понимать вообще производную  $\frac{dm}{ds}$  приведенной длины  $m$  геодезической линии  $AB$  по длине  $s$  этой геодезической линии, отнесенную к определенной конечной точке этой геодезической линии, т. е.  $n_A$  относится к  $A$  и к направлению геодезической линии с  $A$  на  $B$ , а  $n_B$  относится к  $B$  и к направлению геодезической линии с  $B$  на  $A$ .

Из (160) имеем

$$\begin{aligned} \left( \frac{dm}{ds} \right)_A = n_A &= 1 - \frac{s_{1,2}^2}{2N_1^2} (1 + \eta_1^2) + \frac{4}{3} \frac{s_{1,2}^3}{N_1^3} \eta_1^2 \operatorname{tg} B_1 \cos A_{1,2} (1 + \eta_1^2) + \\ &+ \frac{s_{1,2}^4}{24N_1^4} (1 + 2\eta_1^2 + 12\eta_1^2 \cos^2 A_{1,2} - 12\eta_1^2 \operatorname{tg}^2 B_1). \end{aligned} \quad (175)$$

Здесь  $s_{1,2}$  — длина геодезической линии  $AB$ ;  $\eta_1^2$ ,  $N_1$  — значение  $\eta^2$  и  $N$  в точке  $A$ ;  $B_1$  — широта  $A$ ;  $A_{1,2}$  — азимут с  $A$  на  $B$ .

В (174) под  $n_p$  понимается, очевидно,  $n_A$ , если  $s_{1,2}$  заменить ординатой  $y$  точки  $P$ , а величины  $\eta$ ,  $N$ ,  $B$  отнести к точке  $P$ , причем вместо  $A_{1,2}$  придется взять азимут в  $P$  геодезической линии  $PQ$ .

Если применить формулы (160) и (175) к шару радиуса  $R$ , то

$$\left. \begin{aligned} m &= s \left( 1 - \frac{s^2}{6R^2} + \frac{s^4}{120R^4} + \dots \right) = R \sin \frac{s}{R} \\ n &= 1 - \frac{s^2}{2R^2} + \frac{s^4}{24R^4} + \dots = \cos \frac{s}{R} \end{aligned} \right\}. \quad (176)$$

Если понимать под  $R$  средний радиус кривизны для средней широты на геодезической линии  $AB$ , то с высокой степенью точности выражение (160) для  $m$  может быть заменено первым из уравнений (176).

Найдем из (175) вторую производную  $\left( \frac{d^2m}{ds^2} \right)_A$ . Мы получим

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2m}{ds^2} \right)_A &= - \frac{s_{1,2}}{N_1^2} (1 + \eta_1^2) + 4 \frac{s_{1,2}^2}{N_1^3} \operatorname{tg} B_1 \cos A_{1,2} (1 + \eta_1^2) + \\ &+ \frac{s_{1,2}^3}{6N_1^4} (1 + 2\eta_1^2 \cos^2 A_{1,2} - 12\eta_1^2 \operatorname{tg}^2 B_1). \end{aligned} \quad (177)$$

Далее образуем произведение  $-\frac{1}{m} \left( \frac{d^2m}{ds^2} \right)_A$ ; мы будем иметь, после вычислений и преобразований, которые не приводим, с точностью до малых величин пятого порядка

$$-\frac{1}{m} \left( \frac{d^2m}{ds^2} \right)_A = \frac{1}{M_2 N_2} = \frac{1}{R_2^2} = K_B. \quad (178)$$

В уравнении (178):  $M_2$  и  $N_2$  — главные радиусы кривизны для второй конечной точки  $B$  геодезической линии  $AB$ ;  $R_2$  — средний радиус кривизны для той же точки  $B$ ;  $K_B$  — мера кривизны поверхности по Гауссу в точке  $B$ . Гауссова «мера кривизны» поверхности имеет следующее определение: 1) выделим на поверхности в точке  $A$  бесконечно малый контур с площадью  $d\sigma$ ; далее на некоторой вспомогательной сфере радиуса единицы построим изображение этого контура таким образом, что нормаль в любой точке  $T$  этого контура будет соответствовать на шаре радиус, параллельный ей, и пересечение такого радиуса со сферой даст изображение  $T'$  точки  $T$ ; 2) если полученное таким образом изображение контура поверхности на шаре имеет площадь  $d\Sigma$ , то мера кривизны  $K_A$  поверхности в точке  $A$  равна  $\frac{d\Sigma}{d\sigma}$ . Гаусс в своей «Общей теории

поверхности» доказывает, что  $K = \frac{1}{MN}$ , где  $M$  и  $N$  — радиусы кривизны главных нормальных сечений в рассматриваемой точке произвольной поверхности. Далее Гаусс доказывает, что если на любой поверхности взята система поверхностных координат, в которой кривые  $u = \text{const}$ , пересекаются под прямым углом с кривыми  $v = \text{const}$ , причем либо кривые  $u$ , либо кривые  $v$  являются геодезическими линиями, то

$$K_p = -\frac{1}{n_p} \left( \frac{d^2 n}{dv^2} \right)_p,$$

причем  $n_p$  и  $\left( \frac{d^2 n}{dv^2} \right)_p$  относятся к точке  $P$  (черт. 33) и к геодезической линии  $PQ$ , а под  $v$  понимается длина ординаты  $PQ$ . Обычно эта длина при применении поверхностных прямоугольных координат обозначается через  $q$ , длина же абсциссы точки  $P$  — через  $p$ . Поэтому, для точки  $P$  с координатами  $p$  и  $q$  имеем

$$K_p = -\frac{1}{n_p} \left( \frac{d^2 n}{dq^2} \right)_p = -\frac{1}{\left( \frac{dm_q}{dq} \right)_p} \left( \frac{d^2 n}{dq^2} \right)_p. \quad (179)$$

В заключение еще укажем, что если на поверхности из некоторой точки проведем под разными азимутами геодезические линии равной (постоянной) длины, то конечные пункты таких геодезических линий принадлежат геодезической окружности, которая пересекает эти геодезические линии *под прямым углом*. Далее, если из всех точек произвольной кривой на поверхности проведем ортогонально к этой кривой геодезические линии одной и той же длины, то линия, соединяющая концы таких геодезических линий, пересечет все эти линии под прямым углом, причем сама она может оказаться не принадлежащей к геодезическим линиям. Такая кривая носит название *геодезической параллели* по отношению, конечно, к той кривой, во всех точках которой были построены ортогонально к ней геодезические линии постоянной длины. В системе сфероидических прямоугольных координат кривая, соединяющая концы ординат постоянной длины (соответствующих, конечно, непрерывному возрастанию или убыванию абсциссы), является *геодезической параллелью* по отношению к осевому меридиану. Другими словами, в этой системе координат кривая

$$Y = C$$

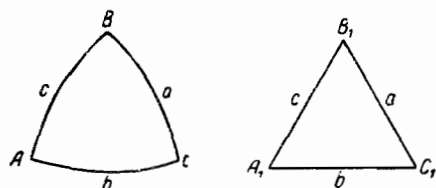
пересекает все геодезические линии, по которым откладываются ординаты, под прямым углом, и является *геодезической параллелью* осевому меридиану.

## Глава III

### РЕШЕНИЕ СФЕРОИДИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

#### § 23. Решение сферических треугольников по теореме Лежандра; поправочные члены к теореме Лежандра

В практической геодезии редко приходится иметь дело с треугольниками, стороны которых длиннее 100—120 км. Другими словами, геодезистам приходится вычислять сфероидические треугольники малого изгиба, при котором каждый отдельный треугольник разворачивается без заметных искажений на сфере некоторого надлежаще подобранного радиуса; таким образом, решение сфероидических треугольников сводится к решению им соответствующих сферических треугольников. Числовое же решение небольших сферических треугольников удобно вести, не применяя обычных формул сферической тригонометрии, а пользуясь либо теоремой Лежандра,



Черт. 34

либо способом так называемых аддитаментов.

Пусть имеем сферический треугольник  $ABC$  (черт. 34), длины сторон которого  $a$ ,  $b$ , и  $c$  выражены в частях радиуса шара; по сторонам  $a$ ,  $b$  и  $c$  построим плоский треугольник  $A_1B_1C_1$  и рассмотрим, насколько плоские углы  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  отличаются соответственно от сферических углов  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Называя через  $p$  полупериметр треугольника  $ABC$ , напомним

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin b \sin c}}; \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}};$$

$$\sin \frac{A_1}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}; \quad \cos \frac{A_1}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

Подставляя эти значения в формулу

$$\sin \frac{A-A_1}{2} = \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A_1}{2} - \cos \frac{A}{2} \sin \frac{A_1}{2}$$

и припоминая, что площадь  $P$  треугольника  $A_1B_1C_1$  равна

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

получим

$$\sin \frac{A - A_1}{2} = \frac{P}{bc \sqrt{\frac{\sin b}{b} \frac{\sin c}{c}}} \left\{ \sqrt{\frac{\sin(p-b) \sin(p-c)}{(p-b)(p-c)}} - \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{p(p-a)}} \right\}. \quad (180)$$

Если  $x$  — малая дуга, то

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots,$$

$$\sqrt{\frac{\sin x}{x}} = \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right)^{1/2} = 1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{1440} - \dots$$

Удерживая в (180) только члены четвертого и более низкого порядка, получим

$$\begin{aligned} \sin \frac{A - A_1}{2} &= \\ &= \frac{P}{bc} \frac{1}{\left(1 - \frac{b^2}{12}\right) \left(1 - \frac{c^2}{12}\right)} \left\{ \left[1 - \frac{(p-b)^2}{12} + \frac{(p-b)^4}{1440}\right] \left[1 - \frac{(p-c)^2}{12} + \frac{(p-c)^4}{1440}\right] - \right. \\ &\quad \left. - \left[1 - \frac{p^2}{12} + \frac{p^4}{1440}\right] \left[1 - \frac{(p-a)^2}{12} + \frac{(p-a)^4}{1440}\right] \right\}. \quad (181) \end{aligned}$$

[В (181) отношения  $\frac{\sin b}{b}$  и  $\frac{\sin c}{c}$  взяты лишь до величины второго порядка потому, что большая скобка, на которую умножается

$$\frac{P}{bc \sqrt{\frac{\sin b}{b} \frac{\sin c}{c}}},$$

содержит лишь величины второго и четвертого порядка.]

Из (181) имеем

$$\begin{aligned} \sin \frac{A - A_1}{2} &= \frac{P}{bc} \left(1 + \frac{b^2 + c^2}{12}\right) \left\{ \frac{p^2 - (p-b)^2 + (p-a)^2 - (p-c)^2}{12} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(p-b)^2(p-c)^2 - p^2(p-a)^2}{144} - \frac{p^4 - (p-b)^4 + (p-a)^4 - (p-c)^4}{1440} \right\}. \quad (182) \end{aligned}$$



Разлагая разности квадратов, получим

$$p^2 - (p-b)^2 + (p-a)^2 - (p-c)^2 = (2p-b)b + (2p-a-c)(c-a) = \\ = (2p-b)b + b(c-a) = b(2p+c-a-b) = 2bc; \quad (183)$$

$$(p-b)^2(p-c)^2 - p^2(p-a)^2 =$$

$$= [(p-b)(p-c) - p(p-a)][(p-b)(p-c) + p(p-a)] = \\ = (ap - bp - cp + bc)[2p^2 + bc - p(a+b+c)] = \frac{bc}{2}(a^2 - b^2 - c^2); \quad (184)$$

$$p^4 - (p-b)^4 + (p-a)^4 - (p-c)^4 =$$

$$= [p^2 + (p-b)^2][p^2 - (p-b)^2] + [(p-a)^2 + (p-c)^2][(p-a)^2 - (p-c)^2] = \\ = (2p^2 - 2pb + b^2)b(2p-b) + [(p-a)^2 + (p-c)^2]b(c-a) = \\ = [2p(p-b) + b^2]b(2p-b) + [2p^2 - 2p(a+c) + a^2 + c^2]b(c-a) = \\ = \left[ (a+b+c) \frac{a+c-b}{2} + b^2 \right] b(2p-b) + \\ + \left[ (a+b+c) \frac{b-a-c}{2} + a^2 + c^2 \right] b(c-a) = \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \right. \\ \left. + ac \right) b(c+a) + \left[ \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - ac \right] b(c-a) = b \left( 2 \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} c + \right. \\ \left. + a^2 c + a^2 c \right) = bc(3a^2 + b^2 + c^2). \quad (185)$$

Подставляя (183), (184) и (185) в (182), напишем

$$\sin \frac{A-A_1}{2} = P \left( 1 + \frac{b^2 + c^2}{12} \right) \left( \frac{1}{6} + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{288} - \frac{3a^2 + b^2 + c^2}{1440} \right); \\ \sin \frac{A-A_1}{2} = \frac{P}{6} \left( 1 + \frac{b^2 + c^2}{12} + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{48} - \frac{3a^2 + b^2 + c^2}{240} \right); \\ \sin \frac{A-A_1}{2} = \frac{P}{6} \left( 1 + \frac{a^2 + 7b^2 + 7c^2}{120} \right). \quad (186)$$

Полагая теперь  $a$ ,  $b$  и  $c$  выраженными в линейных единицах и принимая радиус сферы равным  $R$ , из (186) получим

$$\left. \begin{aligned} A - A_1 &= \frac{P\rho''}{3R^2} \left( 1 + \frac{a^2 + 7b^2 + 7c^2}{120R^2} \right) \\ B - B_1 &= \frac{P\rho''}{3R^2} \left( 1 + \frac{7a^2 + b^2 + 7c^2}{120R^2} \right) \\ C - C_1 &= \frac{P\rho''}{3R^2} \left( 1 + \frac{7a^2 + 7b^2 + c^2}{120R^2} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (187)$$

Отсюда, суммируя, находим

$$\varepsilon'' = \frac{P\rho''}{3R^2} \left( 3 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8R^2} \right),$$

понимая под  $\varepsilon''$  избыток суммы углов сферического треугольника над  $180^\circ$ . Далее

$$\varepsilon'' = \frac{P\rho''}{R^2} \left( 1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24R^2} \right). \quad (188)$$

Отсюда с прежней точностью

$$\frac{P\rho''}{3R^2} = \frac{\varepsilon''}{3} \left( 1 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24R^2} \right). \quad (189)$$

Вводя для краткости обозначение

$$m^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}, \quad (190)$$

получим теперь из (187)

$$A - A_1 = \frac{\varepsilon''}{3} \left( 1 + \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{60R^2} \right) = \frac{\varepsilon''}{3} + \frac{\varepsilon''}{60R^2} (m^2 - a^2)$$

и окончательно напишем

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A - \frac{\varepsilon''}{3} - \frac{\varepsilon''}{60R^2} (m^2 - a^2) \\ B_1 &= B - \frac{\varepsilon''}{3} - \frac{\varepsilon''}{60R^2} (m^2 - b^2) \\ C_1 &= C - \frac{\varepsilon''}{3} - \frac{\varepsilon''}{60R^2} (m^2 - c^2) \end{aligned} \right\}. \quad (191)$$

По исследованию, приведенному в «Практической геодезии» В. В. Витковского, наибольшее значение члена

$$K = \frac{\varepsilon''}{60R^2} (m^2 - a^2)$$

при постоянном  $m^2$  оказывается в треугольнике, в котором  $b$  равно  $c$ , а угол  $A = 26^\circ 54'$  или  $A = 108^\circ 41'$ . Это наибольшее значение выражается так

$$K_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{480} \left( \frac{m}{R} \right)^4 \rho''.$$

При  $m = 200$  км

$$K_{\max} = \frac{1''}{1150}. \quad (192)$$

При таком значении  $m$  стороны  $a$ ,  $b$  и  $c$  равны 110, 232 и 232 км или 258, 162 и 162 км.

Из (191) очевидно, что в *равносторонних* треугольниках влияние членов *четвертого* порядка на разность углов  $A$  и  $A_1$ ,  $B$  и  $B_1$ ,  $C$  и  $C_1$  просто равно нулю. Из (192) вытекает, с другой стороны, что при произвольной форме треугольника, если наибольшая сторона его не превышает 200 км в формуле (191) члены четвертого порядка могут быть отброшены при самых точных вычислениях.

Таким образом, мы приходим к выводу, что почти всегда в геодезии формулы (191) обращаются в следующие:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A - \frac{\varepsilon''}{3} \\ B_1 &= B - \frac{\varepsilon''}{3} \\ C_1 &= C - \frac{\varepsilon''}{3} \end{aligned} \right\}; \quad (193)$$

$$\varepsilon'' = \frac{bc \sin A_1}{2R^2} \rho'' \left( 1 + \frac{m^2}{8R^2} \right); \quad (194)$$

при этом (194) получена из (188).

Другими словами, имеем такой вывод: *если наибольшая сторона сферического треугольника не превышает 200 км, то при вычислении длин сторон такой треугольник решаем по теореме Лежандра, т. е. принимаем его за плоский, уменьшив предварительно каждый его угол на треть сферического избытка.*

Углы  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  носят название приведенных плоских.

Только в редких случаях, когда наибольшая сторона в треугольнике превышает 200 км и одновременно величина  $m$  для него более 200 км, может при соответственном уклонении формы треугольника от равносторонней возникнуть надобность пользоваться полными формулами (191). Но треугольники таких размеров, образованные триангуляционными пунктами, уже нельзя рассматривать сферическими. Другими словами, когда является необходимость вводить к теореме Лежандра поправочные члены вида

$$\frac{\varepsilon}{60R^2} (m^2 - a^2), \quad \frac{\varepsilon}{60R^2} (m^2 - b^2), \quad \frac{\varepsilon}{60R^2} (m^2 - c^2),$$

то тогда же приходится под  $A$ ,  $B$  и  $C$  понимать *сфероидические углы* и вводить в (191) еще иные поправочные члены, выражающие различие между углами сфероидического и сферического треугольников, имеющих соответственно равные стороны; совместное действие сферической и сфероидической поправки к теореме Лежандра рассмотрено в следующих параграфах.

В определении  $\varepsilon$  можно допустить ошибку до  $0'',0004$ .

Оценим в (194) числовое значение члена

$$\frac{bc \sin A_1}{2R^2} \rho'' \frac{m^2}{8R^2} = \varepsilon'' \frac{m^2}{8R^2}.$$

В равностороннем треугольнике, при  $a = b = c = 110$  км, этот член даст  $\frac{1}{900}''$ ; при этом  $\epsilon$  будет равно  $27''$ . Отсюда получают такой вывод: если  $\epsilon'' > 18''$ , то его вычисляют по формуле (194), если  $\epsilon'' < 18''$ , то можно применять упрощенную формулу

$$\epsilon'' = \frac{bc \sin A_1}{2R^2} \rho''. \quad (195)$$

Если в формулах (194) или (195) вместо  $A_1$  подставим  $A$ , то ошибка в  $\epsilon''$  будет очевидно такова

$$\Delta\epsilon'' = \epsilon'' \operatorname{ctg} A dA = \frac{\epsilon''^2 \operatorname{ctg} A}{3\rho''} = \frac{b^2 c^2}{24\rho''} \sin 2A.$$

Требуя, чтобы  $\Delta\epsilon''$  было не более  $0,0004$ , и полагая  $\operatorname{ctg} A = 1$ , получим, что  $\epsilon''$  должно быть менее  $16''$ . Следовательно, применяя теорему Лежандра без поправочных членов, все-таки, если  $\epsilon'' < 16''$  (т. е. стороны треугольника более  $80$ — $90$  км), надлежит вычисление  $\epsilon''$  вести так: взяв сумму измеренных углов в треугольнике, третью часть превышения этой суммы над  $180^\circ$  вычесть из угла  $A$  и, получив таким образом угол  $A'_1$ , вычислять

$$\epsilon'' = \frac{bc \sin A'_1 \rho''}{2R^2} \left(1 + \frac{m^2}{8R^2}\right).$$

Угол  $A'_1$  будет отличаться от  $A_1$  вследствие ошибок измеренных углов, что будет давать всегда менее  $1,5''$  в  $A'_1$ .

Надлежит помнить, что для равностороннего треугольника  $\epsilon''$  имеет такие значения:

около	$2''$	при сторонах в	$30$ км,
„	$8''$	„ „ „	$60$ км,
„	$27''$	„ „ „	$111$ км.

Поэтому при обычных размерах сторон треугольников первоклассной триангуляции, заключающихся в пределах  $30$ — $60$  км, вычисление  $\epsilon''$  совершается по формуле

$$\epsilon'' = \frac{bc \sin A}{2R^2} \rho''. \quad (195')$$

Обычно вычисление  $\epsilon''$  для треугольников триангуляции выполняется одновременно с предварительным определением сторон треугольников для вывода приведенных в измеренных углах. Однако, согласно инструкциям, еще в поле наблюдателя на пунктах триангуляции выводят первые грубые значения приведенных в углах, пользуясь при этом длинами сторон треугольников, вычисленными с углами, не приведенными к центрам знаков, или даже взятыми просто с чертежа триангуляции. Другими словами, когда в период камеральных работ приступают к вычислению формул (194) и (195), то уже располагают углами  $A$ , достаточно точными для определения  $\epsilon$ , и достаточно точными значениями сторон  $b$  и  $c$ , потому что ошибки в приведениях, рассчитанных первоначально еще в поле, не будут превышать  $\pm 0,3''$ .

## § 24. Решение сферических треугольников по способу аддитаментов

Из треугольника  $ABC$  (черт. 34), принимая в нем известными сферические углы  $A, B, C$  и длину стороны  $a$ , напомним

$$\sin \frac{b}{R} = \sin \frac{a}{R} \frac{\sin B}{\sin A},$$

где  $R$  — радиус сферы.

Мы имеем

$$\lg \sin \frac{b}{R} = \lg \frac{b}{R} + \lg \left( 1 - \frac{b^2}{6R^2} + \frac{b^4}{120R^4} \right);$$

$$\lg \sin \frac{b}{R} = \lg \frac{b}{R} + \mu \left( -\frac{b^2}{6R^2} + \frac{b^4}{120R^4} \right) - \frac{\mu}{2} \left( -\frac{b^2}{6R^2} + \dots \right)^2$$

(где  $\mu$  — модуль неперовых логарифмов);

$$\lg \sin \frac{b}{R} = \lg \frac{b}{R} - \frac{\mu b^2}{6R^2} - \frac{\mu}{180} \frac{b^4}{R^4}.$$

Применяя такое же разложение к  $\lg \sin \frac{a}{R}$ , получим

$$\lg \frac{b}{R} = \lg \frac{a}{R} + \lg \frac{\sin B}{\sin A} + \left( \frac{\mu b^2}{6R^2} + \frac{\mu}{180} \frac{b^4}{R^4} \right) - \left( \frac{\mu a^2}{6R^2} + \frac{\mu}{180} \frac{a^4}{R^4} \right).$$

При  $b = 200$  км, член  $\frac{\mu}{180} \frac{b^4}{R^4}$  даст единицы *десятого* логарифмического знака. Следовательно,

$$\begin{aligned} \lg \frac{b}{R} &= \lg \frac{a}{R} + \lg \frac{\sin B}{\sin A} + \frac{\mu b^2}{6R^2} - \frac{\mu a^2}{6R^2}; \\ \lg b &= \lg \left( a \frac{\sin B}{\sin A} \right) + \frac{\mu b^2}{6R^2} - \frac{\mu a^2}{6R^2}. \end{aligned} \quad (196)$$

Вводим теперь такие обозначения

$$\left. \begin{aligned} \lg b' &= \lg \left( a \frac{\sin B}{\sin A} \right) - \frac{\mu a^2}{6R^2} = \lg \left( a \frac{\sin B}{\sin A} \right) - A_a; \\ \frac{\mu b^2}{6R^2} &= A_b; \quad \frac{\mu a^2}{6R^2} = A_a. \end{aligned} \right\} \quad (197)$$

Величины  $\frac{\mu s^2}{6R^2} = A_s$  и называются *аддитаментами*; очевидно

$$A_s = \lg \frac{\frac{s}{R}}{\sin \frac{s}{R}}.$$

С принятыми обозначениями напомним теперь

$$\lg b = \lg b' + A_b. \quad (198)$$

Для цепи треугольников, изображенной на черт. 35, будем иметь

$$\lg b = \lg \left( a \frac{\sin B_1}{\sin A_1} \right) + A_b - A_a,$$

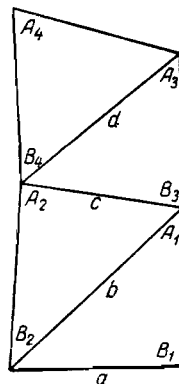
$$\lg c = \lg \left( b \frac{\sin B_2}{\sin A_2} \right) + A_c - A_b,$$

$$\lg c = \lg \left( a \frac{\sin B_1 \sin B_2}{\sin A_1 \sin A_2} \right) + A_c - A_a,$$

$$\lg d = \lg \left( c \frac{\sin B_3}{\sin A_3} \right) + A_d - A_c,$$

$$\lg d = \lg \left( a \frac{\sin B_1 \sin B_2 \sin B_3}{\sin A_1 \sin A_2 \sin A_3} \right) + A_d - A_a,$$

.....



Черт. 35

Если представить себе, что в логарифм исходной стороны триангуляции мы ввели поправку —  $A_a$ , т. е. вычислили  $\lg a' = \lg a - A_a$ , и с этим новым значением  $a'$  исходной стороны вычислили стороны триангуляции, рассматривая треугольники как плоские и не вводя никаких изменений в сферические углы этих треугольников, то, обозначая полученные при этом значения сторон через  $b'$ ,  $c'$ ,  $d'$ , ..., напишем

$$\left. \begin{aligned} \lg b &= \lg b' + A_b \\ \lg c &= \lg c' + A_c \\ \lg d &= \lg d' + A_d \\ &\dots \end{aligned} \right\}. \quad (199)$$

Таким образом, вычисление сторон триангуляции по способу аддитаментов заключается в следующем:

- 1) из логарифма исходной стороны вычитаем ее аддитамент;
- 2) с этим *редуцированным* значением логарифма исходной стороны вычисляем треугольники как плоские, не вводя никаких изменений в их сферические углы, и получаем  $\lg b'$ ,  $\lg c'$ ,  $\lg d'$ , ...;
- 3) эти логарифмы  $b'$ ,  $c'$ ,  $d'$ , ... исправляем каждый прибавлением соответственного аддитамента  $A_b$ ,  $A_c$ ,  $A_d$ , ...

Радиус шара  $R$  для каждого треугольника триангуляции будет иметь, строго рассуждая, свое особое значение: именно, он будет равен среднему радиусу кривизны для широты, средней в соответственном треугольнике. Изменение  $\Delta R$  этого радиуса с широтой выражается так

$$\frac{\Delta R}{R} = e^2 \sin 2B \Delta B.$$

Если бы треугольники цепи, изображенной на черт. 35, были равно-сторонними, то понятно, что величины  $(A_b - A_a)$ ,  $(A_c - A_b)$ ,  $(A_d - A_c)$ , взятые по каждому треугольнику, не зависели бы вовсе от влияния перемен радиуса  $R$ . Другими словами, изменяемость величины радиуса шара  $R$  влияет на вычисление сторон треугольников по указываемому формулами (199) способу аддитаментов лишь вследствие отступлений формы треугольников цепи от равносторонней.

Пусть цепь треугольников, изображенная на черт. 35, располагается меридионально. Примем, что в триангуляции I класса наибольшие отступления связующих углов от  $60^\circ$  не превышают  $\pm 15^\circ$ , так что если угол  $A_k$  около  $75^\circ$ , то угол  $B_k$  около  $45^\circ$ .

Если аддитамент  $A_s^k$  стороны  $s_k$  вычислим со значением  $R$ , соответствующим исходной стороне  $a$  триангуляции, то в этом аддитаменте мы сделаем ошибку, равную

$$\frac{\mu s^2}{6R^2} \frac{2\Delta R}{R} = A_s 2e^2 \sin 2B \Delta B,$$

причем  $\Delta B$  — разность широт стороны  $s_k$  и исходной (вернее, средних точек на этих сторонах). Наибольшая ошибка в *разности* аддитаментов стороны  $s_k$  и предшествующей по номеру связующей стороны  $s_{k-1}$ , принадлежащей тому же треугольнику, что и сторона  $s_k$ , будет равна

$$\begin{aligned} \Delta(A_s^k - A_s^{k-1}) &= 2e^2 \sin 2B \Delta B \frac{\mu}{6R^2} (s_k^2 - s_{k-1}^2) = \\ &= 2e^2 \sin 2B \Delta B \frac{\mu s^2}{6R^2} 0,85. \end{aligned}$$

Назовем через  $\Delta b$  разность широт, соответствующую половине стороны треугольника в нашем триангуляционном ряде и именно стороны, направленной по меридиану. Не трудно сообразить, что для первого треугольника цепи  $\Delta B = \Delta b$ ; для второго треугольника  $\Delta B = 2\Delta b$ ; для  $n$ -го треугольника  $\Delta B = n \Delta b$ .

Если бы все треугольники цепи имели связующие углы  $A$  равными  $75^\circ$ , а связующие углы  $B$  равными  $45^\circ$ , то непринятие в расчет изменений радиуса  $R$  при переходе от треугольника к треугольнику цепи дало бы в логарифме стороны  $A_n$  такую погрешность

$$2e^2 \frac{\mu s^2}{6R^2} 0,86 \sin 2B \frac{n(n+1)}{2} \Delta b = \frac{\mu s^3}{12R^3} 0,86 e^2 \sin 2B n(n+1).$$

Но в действительности предположенное нами отступление треугольников триангуляции I класса от равносторонней формы и (его характер) будет иметь место не более, как в 25% от всех треугольников; иначе происходило бы или очень быстрое убывание, или очень быстрое возрастание связующих сторон треугольников. Тогда

$$\Delta \lg A_n < \frac{\mu s^3}{24R^3} 0,86 e^2 \sin 2B \frac{7n+4}{8} n.$$

Полагая  $s = 32$  км;  $\frac{s}{R} = 1:200$  и требуя, чтобы  $\Delta \lg A_n$  было бы менее 0,000 000 004, мы отсюда находим

$$n \geq 18,$$

и, следовательно, длина цепи оказывается около 288 км или протяжение ее по широте около  $2^\circ 36'$ .

Следовательно, достаточно обширная триангуляция может быть вычислена при определении длин сторон треугольников по способу аддитаментов с одним значением радиуса  $R$ . При этом, конечно, следует составить таблицу аддитаментов  $A_s$  для соответствующей широты, в которой аргументом служит  $\lg s$ .

## § 25. Связь между геодезическими полярными и поверхностными прямоугольными координатами

На произвольной поверхности применим некоторую геодезическую линию (черт. 36)  $PP$  за ось абсцисс; начало координат возьмем на этой линии в  $A$ . Точка  $A$  соединяется с  $B$  геодезической линией, имеющей длину  $s$  и образующей в  $A$  угол  $A_{1,2}$  с положительным направлением оси  $PP$ . Положение точки  $B$  в принятой системе прямоугольных координат определяется так: через  $B$  проводим ортогонально к  $PP$  геодезическую линию  $BF$  и называем отрезок  $AF$  абсциссой  $p$  точки  $B$ , а отрезок  $BF$  — ординатой  $q$  той же точки. Назовем через  $\beta$  угол при  $B$  между геодезическими линиями  $BF$  и  $BA$ . Величина  $n$  в точке  $B$  для геодезической линии с  $B$  на  $F$  определяется, конечно, формулой (175) § 21, с заменой в ней  $s$  через  $q$ . Примем, что

$$n_B = 1 + fq^2 + gq^2 + hq^4 + \dots, (200)$$

причем по Гауссу  $f, g, h, \dots$  суть функции только абсциссы точки  $B$ . Это, конечно, вполне правильно; но в применении к геодезии, когда приходится для  $n$  пользоваться формулой (175), преобразования, приводящие к выражению коэффициентов  $f, g, h, \dots$  ряда (200) только в функции  $p$ , достаточно сложны, и оказывается более простым, не делая этих преобразований, дать коэффициентам  $g$  и  $h$  несколько иные значения, чем у Гаусса, но считать их функциями и  $p$ , и  $q$ . Пусть абсцисса  $p$  получает изменение  $FF' = dp$ , а угол  $A_{1,2}$  изменяется на  $dA$ . Тогда точка  $B$  переместится в положение  $B_1$ , причем  $F_1B_1$  — геодезическая линия, ортогональная в  $F_1$  к осевой кривой  $PP$ . Если  $BD$  ортогонально к  $BF$ , а  $BB_2$  — ортогонально к  $AB$ , то мы имеем

$$BD = n_B dp; \quad BB_0 = m dA.$$

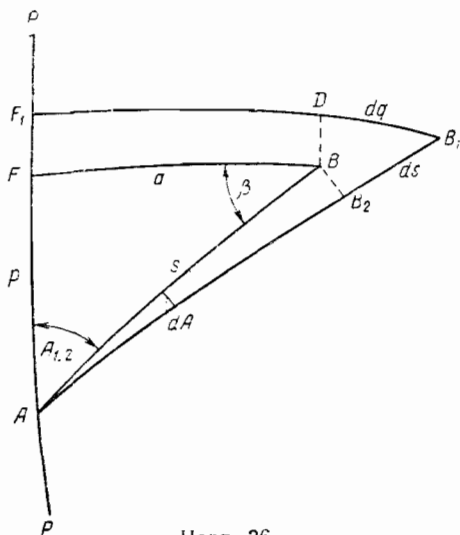
Из элементарного четырехугольника  $DBB_2B_1$  имеем

$$\overline{B_0}B_1 = ds = n_B dp \sin \beta + dq \cos \beta. \quad (201)$$

Понятно, что  $ds$  — дифференциал длины геодезической линии  $AB$ , соответствующий изменению прямоугольных координат  $p$  и  $q$  на  $dp$  и на  $dq$ . Из (201) напомним

$$\frac{\partial s}{\partial p} = n \sin \beta; \quad \frac{\partial s}{\partial q} = \cos \beta; \quad (202)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)^2 &= \sin^2 \beta; \\ \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)^2 + \left( \frac{\partial s}{\partial g} \right)^2 &= 1. \end{aligned} \quad (203)$$



Черт. 36



Но

$$\frac{\partial s}{\partial p} = \frac{1}{2s} \frac{\partial (s^2)}{\partial p}; \quad \frac{\partial s}{\partial q} = \frac{1}{2s} \frac{\partial (s^2)}{\partial q};$$

и поэтому

$$\frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial (s^2)}{\partial p} \right)^2 + \left( \frac{\partial (s^2)}{\partial q} \right)^2 = 4s^2. \quad (204)$$

Из уравнений (202) имеем

$$\begin{aligned} s \sin \beta &= \frac{1}{n} s \frac{\partial s}{\partial p}; & s \cos \beta &= s \frac{\partial s}{\partial q}; \\ s \sin \beta &= \frac{1}{n} \frac{1}{2} \frac{\partial (s^2)}{\partial p}; & s \cos \beta &= \frac{1}{2} \frac{\partial (s^2)}{\partial q}. \end{aligned} \quad (205)$$

Допустим, что мы имеем ряд, выражающий  $s^2$  через  $p$  и  $q$ , взятые в целых степенях. Тогда по (205) получим  $s \sin \beta$  и  $s \cos \beta$  в функции  $p$  и  $q$ ; после этого останется обратно по  $s \sin \beta$  и  $s \cos \beta$  получить  $p$  и  $q$ . Так как в первом приближении

$$s^2 = p^2 + q^2,$$

то напомним сперва

$$s^2 = p^2 + q^2 + Ap^2 q + Bp q^2 \quad (206)$$

и, удерживая в  $s^2$  лишь члены третьего порядка относительно  $p$  и  $q$ , будем далее иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial (s^2)}{\partial p} &= 2p + 2Apq + Bq^2 & \left( \frac{\partial (s^2)}{\partial p} \right)^2 &= 4p^2 + 8Ap^2q + 4Bpq^2; \\ \frac{\partial (s^2)}{\partial q} &= 2q + Ap^2 + 2Bq & \left( \frac{\partial (s^2)}{\partial q} \right)^2 &= 4q^2 + 4Ap^2q + 8Bpq^2. \end{aligned}$$

При принятой пока точности, в (204) величину  $n^2$  просто следует положить равной единице. Поэтому (204) напишется так

$$4p^2 + 4q^2 + 12Ap^2q + 12Bpq^2 = 4s^2. \quad (207)$$

Сравнение коэффициентов в (207) и (206) дает

$$A = 0; \quad B = 0.$$

Далее напишем

$$s^2 = p^2 + q^2 + Cpq^3 + Ip^3q + Fp^3q^2 \quad (208)$$

и будем вычислять  $s^2$ , удерживая величины четвертого порядка. Заметим, что члены  $ap^3$ ,  $bq^3$ ,  $cp^4$  и  $dq^4$  не могут входить в выражение для  $s^2$ : при  $p = 0$  имеем  $s^2 = q^2$  и при  $q = 0$  имеем  $s^2 = p^2$ .

Из (208)

$$\begin{aligned} \frac{\partial (s^2)}{\partial p} &= 2p + Cq^3 + 3Ip^2q + 2Fp^2q^2, \\ \frac{\partial (s^2)}{\partial q} &= 2q + 3Cpq^2 + Ip^3 + 2Fp^2q \end{aligned}$$

и с принятой теперь точностью

$$\left(\frac{\partial(s^2)}{\partial p}\right)^2 = 4p^2 + 4Cpq^3 + 12Ip^3q + 8Fp^2q^2;$$

$$\left(\frac{\partial(s^2)}{\partial q}\right)^2 = 4q^2 + 12Cpq^3 + 4Ip^3q + 8Fp^2q^2;$$

$$\frac{1}{n^2} = 1 - 2fq^2;$$

$$4s^2 = 4p^2 + 4q^2 + 16Cpq^3 + 16Ip^3q + 16Fp^2q^2 - 8fp^2q^2. \quad (209)$$

Сравнение (209) и (208) дает

$$C = 0; \quad I = 0; \quad F = \frac{2}{3}f.$$

Теперь удержим в  $s^2$  величины шестого порядка и напишем формулу

$$\begin{aligned} s^2 = & p^2 + q^2 + \frac{2}{3}fp^2q^2 + Epq^4 + Dpq^5 + Gp^2q^3 + Hp^2q^4 + Kp^3q^2 + \\ & + Lp^3q^3 + Mp^4q + Np^4q^2 + Tp^5q, \end{aligned} \quad (210)$$

в которую по приведенным выше соображениям не входят члены вида  $rp^5$ ,  $sq^5$ ,  $zq^6$ ,  $tp^6$ . При дальнейшем дифференцировании  $s^2$  по  $p$  и  $q$  нужно иметь в виду, что коэффициенты ряда (210) выразятся через  $f$ ,  $g$ ,  $h$ , ... ряда (200), т. е. окажутся функциями  $p$  по Гауссу, а в нашем подходе к определению  $g$  и  $h$  -- функциями и аргумента  $q$ .

Величину  $\frac{1}{n^2}$  теперь нужно будет представить в виде

$$\frac{1}{n^2} = 1 - 2fq^2 - 2gq^3 + (3f^2 - 2h)q^4. \quad (211)$$

Мы не будем приводить производных  $\frac{\partial(s^2)}{\partial p}$  и  $\frac{\partial(s^2)}{\partial q}$ , а приведем лишь выражение для  $4s^2$ , получаемое на основании уравнений (204) и (211). Именно

$$\begin{aligned} 4s^2 = & 4p^2 + 4q^2 + \frac{8}{3}fp^2q^2 - 8gp^2q^3 + \frac{8}{3}\frac{\partial f}{\partial p}p^3q^2 - \frac{80}{9}f^2p^2q^4 + \\ & + \frac{16}{9}f^2p^4q^2 + 4(3f^2 - 2h)p^2q^4 + 20Epq^4 + 24Dpq^5 + 20Gp^2q^3 + \\ & + 24Hp^2q^4 + 20Kp^3q^2 + 24Lp^3q^3 + 20Mp^4q + 24Np^4q^2 + \\ & + 24Tp^5q + 4\frac{\partial G}{\partial p}p^3q^3 + 4\frac{\partial K}{\partial p}p^4q^2 + 4\frac{\partial M}{\partial q}p^5q + \\ & + 4\frac{\partial G}{\partial q}p^2q^4 + 4\frac{\partial K}{\partial q}p^3q^3 + 4\frac{\partial M}{\partial q}p^4q^2. \end{aligned} \quad (212)$$

Сопоставление (212) и (210) даст

$$D=0; \quad E=0; \quad G=\frac{g}{2}; \quad H=-\frac{7}{45}f^2+\frac{2}{5}h-\frac{1}{5}\frac{\partial G}{\partial q};$$

$$H=-\frac{7}{45}f^2+\frac{2}{5}h-\frac{1}{10}\frac{\partial g}{\partial q};$$

$$K=-\frac{1}{6}\frac{\partial f}{\partial p}=-\frac{1}{6}f_i; \quad \left(f_i=\frac{\partial f}{\partial p}\right);$$

$$L=-\frac{1}{10}\frac{\partial g}{\partial p}+\frac{1}{30}\frac{\partial f_i}{\partial q}=-\frac{1}{10}g_1+\frac{1}{30}\frac{\partial f_i}{\partial q} \dots \left(g_1=\frac{\partial g}{\partial p}\right);$$

$$M=0; \quad T=0;$$

$$N=-\frac{4}{45}f^2+\frac{1}{30}\frac{\partial f_i}{\partial p}=-\frac{4}{45}f^2+\frac{1}{30}f_{ii} \dots \left(f_{ii}=\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\right).$$

Таким образом, в результате имеем

$$\begin{aligned} s^2 = p^2 + q^2 + \frac{2}{3}fp^2q^2 + \frac{g}{2}p^2q^3 + \left(-\frac{7}{45}f^2 + \frac{2}{5}h - \frac{1}{10}\frac{\partial g}{\partial q}\right)p^2q^4 - \\ - \frac{1}{6}f_i p^3q^2 + \left(\frac{1}{30}\frac{\partial f_i}{\partial q} - \frac{1}{10}g_1\right)p^3q^3 - \left(\frac{4}{45}f^2 - \frac{f_{ii}}{30}\right)p^4q^2. \end{aligned} \quad (213)$$

Все коэффициенты в (213) отнесены к точке  $B$  и в ней — к геодезической линии  $BF$ .

**Вывод**  $s \sin \beta$ ,  $s \cos \beta$ ,  $s \cos A_{1,2}$  и  $s \sin A_{1,2}$ . Формула (213) очень точна и выведена она для дальнейшего использования при получении очень точных формул прямоугольных сфероидических координат. В целях настоящей главы мы можем эту формулу несколько упростить. Формула (175) показывает, что на земном эллипсоиде

- 1)  $h = +\frac{1}{6}f^2 \dots$  с ошибкой только на величины порядка  $\eta^2$ ;
- 2)  $\frac{\partial g}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial f_i}{\partial q}$ ,  $g_1$ ,  $f_{ii} \dots$  величины порядка  $\eta^2$  (или еще более высокого).

Пренебрегая в  $s^2$  членами порядка  $\eta^2 s^6$ , мы напишем

$$\begin{aligned} s^2 = p^2 + q^2 + \frac{2}{3}fp^2q^2 + \frac{g}{2}p^2q^3 - \frac{1}{6}f_i p^3q^2 - \frac{4}{45}f^2 p^2q^4 - \\ - \frac{4}{45}f^2 p^4q^2. \end{aligned} \quad (214)$$

Из (205)

$$s \sin \beta = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \left( \frac{\partial (s^2)}{\partial p} \right); \quad s \cos \beta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial (s^2)}{\partial q} \right).$$

Далее

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(s^2)}{2\partial p} &= p + \frac{2}{3}fpq^2 + \frac{g}{2}pq^3 + \frac{1}{12}f,p^2q^2 - \frac{1}{12}f_{,,}p^3q^2 - \\ &\quad - \frac{4}{45}f^2pq^2(2p^2 + q^2) \\ \frac{\partial(s^2)}{2\partial q} &= q + \frac{2}{3}fp^2q + \frac{3}{4}gp^2q^2 - \frac{1}{6}f,p^3q - \frac{4}{45}f^2p^2q(p^2 + 2q^2) \\ n &= 1 + fq^2 + gq^3 + hq^4 \\ \frac{1}{n} &= 1 - fq^2 - gq^3 + (f^2 - h^2)q^4 \end{aligned} \right\} \quad (215)$$

Будем  $s \sin \beta$  и  $s \cos \beta$  вычислять, не удерживая в них величин порядка  $\eta^2 s^5$ , что уже обусловлено упрощениями при переходе от (213) к (214). Кроме того, назовем через  $f_0$  значение  $f$  для точки  $A$  (черт. 36) и примем

$$f = f_0 + f^0, p + f^0_{,,} \frac{p^2}{2},$$

причем, конечно,  $f^0 = \frac{\partial f}{\partial p}$  в точке  $A$  и  $f^0_{,,} = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}$  также в точке  $A$ . Теперь (215) перепишем так

$$\begin{aligned} \frac{\partial(s^2)}{2\partial p} &= p + \frac{2}{3}f_0pq^2 + \frac{g}{2}pq^3 + \frac{3}{4}f^0,p^2q^2 - \frac{4}{45}f_0^2pq^2(2p^2 + q^2); \\ \frac{\partial(s^2)}{2\partial q} &= q + \frac{2}{3}f_0p^2q + \frac{1}{2}f^0,p^3q + \frac{3}{4}gp^2q^2 - \frac{4}{45}f_0^2p^2q(p^2 + 2q^2); \\ \frac{1}{n} &= 1 - f_0q^2 - f^0,pq^2 - gq^3 + \frac{5}{6}f_0^2q^4. \end{aligned}$$

Далее

$$\left. \begin{aligned} s \sin \beta &= p + \frac{2}{3}f_0pq^2 + \frac{g}{2}pq^3 + \frac{3}{4}f^0,p^2q^2 - \frac{4}{45}f_0^2pq^2(2p^2 + q^2) - \\ &\quad - f_0pq^2 - gpq^3 - f^0,p^2q^2 - \frac{2}{3}f_0^2pq^4 + \frac{5}{6}f_0^2pq^4. \\ s \sin \beta &= p - \frac{1}{3}f_0pq^2 - \frac{1}{4}f^0,p^2q^2 - \frac{g}{2}pq^3 + \frac{f_0^2}{90}pq^2(7q^2 - 16p^2) \\ s \cos \beta &= q + \frac{2}{3}f_0p^2q + \frac{1}{2}f^0,p^3q + \frac{3}{4}gp^2q^2 - \frac{4}{45}f_0^2p^2q(p^2 + 2q^2) \end{aligned} \right\} \quad (216)$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial q} &= 2fq + 3gq^2 + \dots, \\ \frac{\partial^2 n}{\partial q^2} &= 2f + 6gq + \dots \end{aligned}$$

По (179)

$$K = -\frac{1}{n} \frac{\partial^2 n}{\partial q^2} = -2f - 6gq \dots \quad (217)$$

Применяя (217) к точкам  $A$ ,  $B$  и  $F$  черт. 36, напишем

$$\left. \begin{aligned} K_A &= -2f_0 \\ K_B &= -2f_0 - 2f_{01}p - 6gq \\ K_F &= -2f_0 - 2f_{01}p \end{aligned} \right\} \quad (218)$$

Формулы (218) ошибочны вообще на величины порядка  $\eta^2 q^3$ . С помощью их мы можем, конечно, преобразовать выражения (216), не похищая их точности. Именно, легко видеть, что

$$\left. \begin{aligned} s \sin \beta &= p + \frac{K_A + K_F + 2K_B}{24} p q^2 + \frac{K^2}{360} p q^2 (7q^2 - 16p^2) \\ s \cos \beta &= q - \frac{2K_A + 3K_F + 3K_B}{24} p^2 q - \frac{K^2}{45} p^2 q (p^2 + 2q^2) \end{aligned} \right\} \quad (219)$$

Под  $K$  в (219) понимается среднее из  $K_A$ ,  $K_B$  и  $K_F$ .

Переходя к выводу  $s \cos A_{1,2}$  и  $s \sin A_{1,2}$ , возьмем начало координат в точке  $B$  черт. 36 и построим черт. 37, на котором точка  $A$  перемещается в положение  $A_1$  вследствие, во-первых, перемещения  $F$  по продолжению  $BF$  на  $F_2F = -dq$ , и, во-вторых, вследствие изменения угла  $\beta$  на  $\Delta\beta$ . Кривая  $F_2A_1$  — геодезическая линия, ортогональная в  $F_2$  к кривой  $BF_2$ , которая теперь играет роль осевой кривой  $PP$  на черт. 36. Проведя  $AD_1$  перпендикулярно к  $F_2A_1$  и  $AA_2$  перпендикулярно к  $AB$ , будем иметь

$$\overline{AD_1} = -n_A dq, \quad \overline{AA_2} = m \Delta\beta,$$

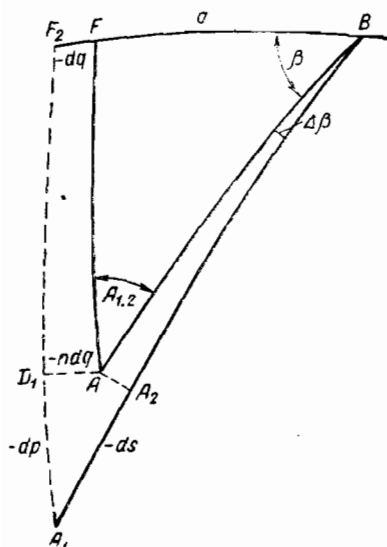
причем  $n_A$  относится к  $A$  и к геодезической линии  $AF$  — от  $A$  к  $F$ . Мы должны будем отрезок  $A_2A_1$  обозначить через  $-ds$ , так как счет расстояний  $s$  идет от  $A$  к  $B$ . Поэтому из элементарного четырехугольника  $A_1D_1AA_2$  получаем

$$ds = dp \cos A_{1,2} + n_A dq \sin A_{1,2}$$

и отсюда

$$s \cos A_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial (s^2)}{\partial p} \right),$$

$$s \sin A_{1,2} = \frac{1}{2} \frac{1}{n_A} \left( \frac{\partial (s^2)}{\partial q} \right).$$



Черт. 37

Мы уже отсюда и из сравнения черт. 36 и 37 видим, что при выводе  $s \cos A_{1,2}$  и  $s \sin A_{1,2}$ , по сравнению с выводом  $s \sin \beta_{1,2}$  и  $s \cos \beta_{1,2}$ , роль  $\beta$  играет  $A_{1,2}$ , роль  $p$  — величина  $q$ , роль  $q$  — величина  $p$ , роль точки  $B$  точка  $A$  и наоборот. Поэтому можем из (216) и (219) прямо написать

$$\left. \begin{aligned} s \sin A_{1.2} &= q + \frac{2K_A + K_F + K_B}{24} p^2 q + \frac{K^2}{360} p^2 q (7p^2 - 16q^2) \\ s \cos A_{1.2} &= p - \frac{3K_A + 3K_F + 2K_B}{24} pq^2 - \frac{K^2}{45} pq^2 (2p^2 + q^2) \end{aligned} \right\}. \quad (220)$$

Формулы (220) позволяют по данным прямоугольным на поверхности координатам  $p$  и  $q$  вычислить геодезические полярные координаты  $s$  и  $A_{1.2}$ . Нужно помнить, что осевая кривая  $PP$  (черт. 36) была взята совершенно произвольно, она лишь является некоторой геодезической линией на поверхности и, следовательно, вовсе не совпадает с меридианом; поэтому же угол  $A_{1.2}$  не является в  $A$  геодезическим азимутом линии  $AB$ ; он отличается, конечно, от этого азимута как раз на угол, который в  $A$  геодезическая линия  $PP$  образует с меридианной кривой этой точки.

Но нам в дальнейшем нужны будут формулы, обратные по их назначению формулам (220); именно, нам будут нужны уравнения, дающие  $p$  и  $q$  через  $s$  и  $A_{1.2}$ . В первом приближении из (220) мы имеем

$$\left. \begin{aligned} p &= s \cos A_{1.2} \\ q &= s \sin A_{1.2} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{с ошибкой на величи-} \\ \text{ны третьего порядка.} \end{array}$$

Далее, во втором приближении

$$\left. \begin{aligned} p &= s \cos A_{1.2} + \frac{3K_A + 3K_F + 2K_B}{24} s^3 \cos A_{1.2} \sin^2 A_{1.2} \\ q &= s \sin A_{1.2} - \frac{2K_A + K_F + K_B}{24} s^3 \cos^2 A_{1.2} \sin A_{1.2} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{с ошибкой на ве-} \\ \text{личины пятого по-} \\ \text{рядка.} \end{array}$$

Наконец

$$\left. \begin{aligned} p &= s \cos A_{1.2} + \frac{3K_A + 3K_F + 2K_B}{24} s^3 \cos A_{1.2} \sin^2 A_{1.2} + \\ &\quad + \frac{K^2}{15} pq^2 (2q^2 - p^2); \\ q &= s \sin A_{1.2} - \frac{2K_A + K_F + K_B}{24} s^3 \cos^2 A_{1.2} \sin A_{1.2} + \\ &\quad + \frac{K^2}{120} p^2 q (p^2 - 8q^2) \end{aligned} \right\}. \quad (221)$$

Кроме того, напомним еще из (219)

$$\left. \begin{aligned} p &= s \sin \beta - \frac{K_A + K_F + 2K_B}{24} s^3 \sin \beta \cos^2 \beta + \frac{K^2}{120} pq^2 (q^2 - 8p^2) \\ q &= s \cos \beta + \frac{2K_A + 3K_F + 3K_B}{8} s^3 \sin^2 \beta \cos \beta + \frac{K^2}{15} p^2 q (2p^2 - q^2) \end{aligned} \right\}. \quad (222)$$

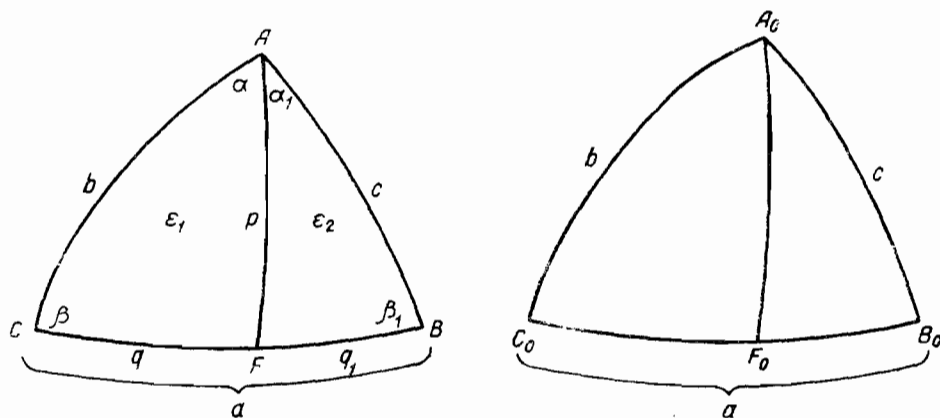
Уравнениями (219), (220), (221) и (222) поставленный вопрос о связи полярных и прямоугольных поверхностных координат решен вполне с точностью определения  $\frac{p}{R}$  и  $\frac{q}{R}$  до величин порядка  $\frac{s^5}{R^5}$  и с ошибкой в них на величины порядка  $\frac{s^6}{R^6}$ ,  $\eta^2 \frac{s^5}{R^5}$  . . .

### § 26. Решение сфероидического треугольника — определение его избытка

Треугольник  $ABC$  на черт. 38 образован геодезическими линиями: на сфере радиуса  $R$  построен треугольник  $A_0B_0C_0$ , стороны которого соответственно равны сторонам треугольника  $ABC$ ; радиус  $R$  определяется уравнением

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{R_A^2} + \frac{1}{R_B^2} + \frac{1}{R_C^2} \right).$$

Далее, через  $A$  проведена геодезическая линия  $AF$ , пересекающая линию  $BC$  под прямым углом в  $F$ . Назовем стороны треугольника  $ABC$  через  $a$ ,  $b$  и  $c$ , длину линии  $AF$  — через  $p$ , отрезки  $CF$  и  $FB$  — через



Черт. 38

$q$  и  $q_1$ , угол при  $A$  в треугольнике  $ACF$  через  $\alpha$ , и угол при  $A$  в треугольнике  $FAB$  — через  $\alpha_1$ ; углы при  $C$  и  $B$  в треугольнике  $ABC$  обозначим соответственно через  $\beta$  и  $\beta_1$ . На основании (219) и (220) имеем

$$\begin{aligned} b^2 \sin \alpha \sin \beta &= pq + \frac{K_A + K_F + 2K_C}{24} pq^3 + \frac{2K_A + K_F + K_C}{24} p^3q + \\ &+ \frac{K^2}{360} pq^3 (7q^2 - 16p^2) + \frac{K^2}{36} p^3q^3 + \frac{K^2}{360} p^3q (7p^2 - 16q^2) \\ b^2 \cos \alpha \cos \beta &= pq - \frac{3K_A + 3K_F + 2K_C}{24} pq^3 - \frac{2K_A + 3K_F + 3K_C}{24} p^3q - \\ &- \frac{K^2}{45} pq^3 (2p^2 + q^2) + \frac{K^2}{9} p^3q^3 - \frac{K^2}{45} p^3q (p^2 + 2q^2). \end{aligned}$$

Сфероидический избыток  $\epsilon_1$  треугольника  $CAF$  определяется так

$$\epsilon_1 = 90^\circ + \alpha + \beta - 180^\circ = \alpha + \beta - 90^\circ.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\sin \varepsilon_1 &= \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta; \\ b^2 \sin \varepsilon_1 &= \frac{pq}{2} \frac{K_A + K_F + K_C}{3} (p^2 + q^2) + \frac{K^2}{24} pq^5 - \frac{K^2}{12} p^3 q^3 + \frac{K^2}{24} p^5 q; \\ \sin \varepsilon_1 &= \frac{pq}{2} \frac{K_A + K_F + K_C}{3} \frac{p^2 + q^2}{b^2} + \frac{K^2}{24} \frac{(p^2 - q^2)^2 pq}{b^2}.\end{aligned}\quad (223)$$

Но нетрудно получить из (220)

$$b^2 = (p^2 + q^2) - \frac{1}{12} (K_A + 2K_F + K_C) p^2 q^2 - \frac{K^2}{45} p^2 q^2 (p^2 + q^2). \quad (224)$$

Или с тою же точностью

$$\frac{p^2 + q^2}{b^2} = 1 + \frac{K_A + 2K_F + K_C}{12} \frac{p^2 q^2}{b^2}.$$

Поэтому из (223)

$$\begin{aligned}\sin \varepsilon_1 &= \frac{pq}{2} \frac{K_A + K_F + K_C}{3} + \frac{p^3 q^3}{6} \frac{K^2}{b^2} + \frac{K^2}{24} \frac{(p^2 - q^2)^2}{b^2} pq; \\ \varepsilon_1 &= \frac{pq}{2} \frac{K_A + K_F + K_C}{3} + \frac{K^2}{24} pq (p^2 + q^2).\end{aligned}\quad (225)$$

Называя теперь через  $\varepsilon_2$  сфероидический избыток треугольника  $AFB$ , напомним

$$\varepsilon_2 = \frac{pq_1}{2} \frac{K_A + K_F + K_B}{3} + \frac{K^2}{24} pq_1 (p^2 + q_1^2). \quad (226)$$

Сложение (226) и (225) приводит к такому выражению для избытка  $\varepsilon$  треугольника  $ABC$

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{K_A}{6} p (q + q_1) + \frac{K_F}{6} p (q + q_1) + \frac{pq_1}{6} K_B + \frac{pq_1}{6} K_C + \\ &+ \frac{K^2}{24} p (p^2 q_1 + q^3 q_1 + p^2 q + q^3).\end{aligned}$$

Из формул (218) мы имеем право написать, в соответствии с черт. 38

$$K_F = K_C + \frac{q}{q + q_1} (K_B - K_C) \dots$$

с ошибкой на величины порядка  $q^2 q^3$ . Поэтому

$$\begin{aligned}(q + q_1) K_F &= K_C q_1 + K_B q; \\ \varepsilon &= \frac{ap}{2} \frac{K_A + K_B + K_C}{3} + \frac{K^2}{24} p (p^2 q_1 + q^3 q_1 + p^2 q + q^3);\end{aligned}\quad (227)$$

$$\varepsilon = \frac{ap}{2} \frac{K_A + K_B + K_C}{3} + \frac{K^2}{24} p (b^2 q + c^2 q_1). \quad (227')$$



По существу в (226) и в (225) величины  $K^2$  различны, но это различие поведет к ошибкам более высокого порядка малости, чем члены, удержанные в (226) и в (225). Поэтому при переходе к (227) можно этим различием пренебречь и принимать, что

$$K^2 = \left( \frac{K_A + K_B + K_C}{3} \right)^2.$$

### § 27. Решение сфероидического треугольника — сравнение соответственных углов сфероидического и сферического треугольников

Применяя формулы (219) и (220) к треугольникам  $ACF$  и  $ABF$  черт. 38, напишем

$$b \cos \alpha = p - \frac{3K_A + 3K_F + 2K_C}{8} \frac{pq^2}{3} - \frac{K^2}{45} pq^2 (q^2 + 2p^2);$$

$$c \cos \alpha_1 = p - \frac{3K_A + 3K_F + 2K_B}{8} \frac{pq_1^2}{3} - \frac{K^2}{45} pq_1^2 (q_1^2 + 2p^2);$$

$$b \sin \alpha = q + \frac{2K_A + K_F + K_C}{4} \frac{p^2 q}{6} - \frac{K^2}{360} p^2 q (16q^2 - 7p^2);$$

$$c \sin \alpha_1 = q_1 + \frac{2K_A + K_F + K_B}{4} \frac{p^2 q_1}{6} - \frac{K^2}{360} p^2 q_1 (16q_1^2 - 7p^2).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} bc \cos \alpha \cos \alpha_1 &= p^2 - \frac{3K_A + 3K_F + 2K_C}{8} \frac{p^2 q^2}{3} - \frac{3K_A + 3K_F + 2K_B}{8} \frac{p^2 q_1^2}{3} - \\ &\quad - \frac{K^2}{45} p^2 q^2 (q^2 + 2p^2) - \frac{K^2}{45} p^2 q_1^2 (q_1^2 + 2p^2) + \frac{64}{576} K^2 p^2 q^2 q_1^2; \\ bc \sin \alpha \sin \alpha_1 &= qq_1 + \frac{2K_A + K_F + K_C}{6} \frac{p^2 qq_1}{4} + \frac{2K_A + K_F + K_B}{8} \frac{p^2 qq_1}{4} - \\ &\quad - \frac{K^2}{360} p^2 qq_1 (16q^2 - 7p^2) - \frac{K^2}{360} p^2 qq_1 (16q_1^2 - 7p^2) + \\ &\quad + \frac{16}{576} K^2 p^4 qq_1. \end{aligned}$$

Так как угол  $A$  равен  $\alpha + \alpha_1$ , то, далее, имеем

$$\begin{aligned} bc \cos A &= p^2 - qq_1 - \frac{p^2 K_A}{24} (3q^2 + 3q_1^2 + 4qq_1) - \frac{p^2 K_C}{24} (2q^2 + qq_1) - \\ &\quad - \frac{p^2 K_F}{24} (3q^2 + 3q_1^2 + 2qq_1) - \frac{p^2 K_B}{24} (2q_1^2 + qq_1) - \\ &\quad - \frac{K^2}{360} p^2 (8q^4 + 8q_1^4 + 16p^2 q^2 + 16p^2 q_1^2 - 16q^3 q_1^3 - \\ &\quad - 16qq_1^3 - 40q^2 q_1^2 + 24p^2 qq_1). \end{aligned} \quad (228)$$

Погрешность уравнения (228) порядка  $\frac{s^7}{R^5}$  и  $\frac{\gamma^2 s^6}{R^4}$ . Вообразим, что мы построили на сфере радиуса  $R$  сферический треугольник, стороны которого равны сторонам  $a$ ,  $b$  и  $c$  треугольника  $ABC$  на сфероиде. Назовем углы этого треугольника через  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$ . Мы имеем

$$\cos \frac{a}{R} = \cos \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R} + \sin \frac{b}{R} \sin \frac{c}{R} \cos A_0$$

и, далее, разлагая в ряды Маклорена  $\cos \frac{a}{R}$ ,  $\cos \frac{b}{R}$ ,  $\cos \frac{c}{R}$ ,  $\sin \frac{c}{R}$  и  $\sin \frac{b}{R}$ , получим

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4} - \frac{a^6}{720R^6} = \\ & = \left(1 - \frac{b^2}{2R^2} + \frac{b^4}{24R^4} - \frac{b^6}{720R^6}\right) \left(1 - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{c^4}{24R^4} - \frac{c^6}{720R^6}\right) + \\ & + \frac{bc}{R^2} \left(1 - \frac{b^2}{6R^2} + \frac{b^4}{120R^4}\right) \left(1 - \frac{c^2}{6R^2} + \frac{c^4}{120R^4}\right) \cos A_0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \frac{bc \cos A_0}{R^2} \left(1 - \frac{b^2}{6R^2} - \frac{c^2}{6R^2} + \frac{b^4}{120R^4} + \frac{c^4}{120R^4} - \frac{b^2c^2}{36R^4}\right) = \\ & = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2R^2} - \frac{b^4 + c^4 - a^4}{24R^4} - \frac{b^2c^2}{4R^4} + \frac{b^4c^2 + b^2c^4}{48R^2} + \frac{b^6 + c^6 - a^6}{720R^6}; \\ & bc \cos A_0 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} - \frac{b^4 + c^4 - a^4}{24R^2} - \frac{b^2c^2}{4R^2} + \frac{b^6 + c^6 - a^6}{720R^4} - \\ & - \frac{b^2c^2(b^2 + c^2)}{48R^4} - \frac{b^2c^2}{72R^4}(b^2 + c^2 - a^2) + \frac{(b^2 + c^2)(b^2 + c^2 - a^2)}{12R^2} - \\ & - \frac{b^6 + b^2c^4 - b^2a^4}{144R^4} - \frac{b^4c^2 + c^6 - a^4c^2}{144R^4} - \frac{b^4(b^2 + c^2 - a^2)}{240R^4} - \\ & - \frac{c^4(b^2 + c^2 - a^2)}{240R^4} + \frac{(b^2 + c^2)^2(b^2 + c^2 - a^2)}{72R^4}. \quad (229) \end{aligned}$$

Используем теперь формулу (224)

$$\left. \begin{aligned} b^2 &= p^2 + q^2 - \frac{K_A + 2K_F + K_C}{12} p^2 q^2 - \frac{K^2}{45} p^2 q^2 (p^2 + q^2) \\ c^2 &= p^2 + q_1^2 - \frac{K_A + 2K_F + K_B}{12} p^2 q_1^2 - \frac{K^2}{45} p^2 q_1^2 (p^2 + q_1^2) \\ a^2 &= q^2 + 2q q_1 + q_1^2 \end{aligned} \right\}; \quad (230)$$

и, кроме того, вычислим следующие величины для подстановки их в члены 4-го порядка в (229)

$$\left. \begin{aligned} b^2 c^2 &= p^4 + p^2 q^2 + p^2 q_1^2 + q^2 q_1^2 - \frac{1}{3} p^4 q^2 K - \frac{2}{3} p^2 q^2 q_1^2 K - \\ &\quad - \frac{1}{3} p^4 q_1^2 K \\ b^2 + c^2 &= 2p^2 + q^2 + q_1^2 - \frac{1}{3} K p^2 q^2 - \frac{1}{3} K p^2 q_1^2 \\ b^4 + c^4 - a^4 &= 2p^4 - 6q^2 q_1^2 + 2p^2 q^2 + 2p^2 q_1^2 - 4q^3 q_1 - 4q q_1^3 - \\ &\quad - \frac{2}{3} p^4 q^2 K - \frac{2}{3} p^2 q^4 K - \frac{2}{3} p^4 q_1^2 K - \frac{2}{3} p^2 q_1^4 K \end{aligned} \right\} \quad (230')$$

Понятно, что при принятой точности формул (229) и (230) величины  $b^6$  и  $c^6$  должно в (229) принять просто равными  $(p^2 + q^2)^3$  и  $(p^2 + q_1^2)^3$ , а величины  $b^2 c^4$ ,  $b^4 c^2$  и т. д. просто равными  $(p^2 + q^2)(p^2 + q_1^2)^2$ ,  $(p^2 + q^2)^2(p^2 + q_1^2)$ , и т. д.

При использовании (230) и (230'), уравнение (229) представится в таком виде

$$\begin{aligned} bc \cos A_0 &= p^2 - q q_1 - \frac{K_A + 2K_F + K_C}{24} p^2 q^2 - \frac{K_A + 2K_F + K_B}{24} p^2 q_1^2 - \\ &- \frac{K^2}{90} (p^4 q^2 + p^2 q^4 + p^4 q_1^2 + p^2 q_1^4) - \frac{p^4 - 3q^2 q_1^2 + p^2 q^2 + p^2 q_1^2 - 2q^3 q_1 - 2q q_1^3}{12R^2} + \\ &+ \frac{p^4 q^2 + p^2 q^4 + p^4 q_1^2 + p^2 q_1^4}{36} \frac{K}{R^2} - \frac{p^4 + p^2 q^2 + p^2 q_1^2 + q^2 q_1^2}{4R^2} + \frac{p^4 q^2}{12} \frac{K}{R^2} + \\ &+ \frac{1}{6} p^2 q^2 q_1^2 \frac{K}{R^2} + \frac{1}{12} p^4 q_1^2 \frac{K}{R^2} + \frac{12p^4 + 6p^2 q^2 + 6p^2 q_1^2}{36R^2} - \frac{p^4 q^2 + p^4 q_1^2}{18} \frac{K}{R^2} - \\ &- \frac{p^6}{36R^4} - \frac{p^4 q^2 + p^4 q_1^2 + p^2 q^2 q_1^2}{36R^4} - \frac{12p^2 q q_1 + 6q^3 q_1 + 6q q_1^3 - K p^2 q q_1^3 - K p^2 q^3 q_1}{36R^2} + \\ &+ \frac{p^4 q q_1 + 2p^2 q^3 q_1 + 2p^2 q q_1^3 + q^3 q_1^3}{36R^4} - \frac{(2p^4 q^2 + p^2 q^4 + p^2 q^2 q_1^2) K}{36R^2} - \\ &- \frac{(2p^4 q_1^2 + p^2 q^2 q_1^2 + p^2 q_1^4) K}{36R^2} + \frac{20p^6 - 4p^4 q^2 - 4p^4 q_1^2 - 8p^2 q^4 - 8p^2 q_1^4 + 20p^2 q^2 q_1^2}{720R^4} - \\ &- \frac{68p^4 q q_1}{720R^4} - \frac{28p^2 q^3 q_1 + 28p^2 q q_1^3 + 20q^3 q_1^3}{720R^4}. \end{aligned} \quad (231)$$

Приняв  $\frac{1}{R} = \frac{K_A + K_B + K_C}{3}$ , мы можем в (231) в членах шестого порядка не различать  $K$  от  $\frac{1}{R^2}$ . Поэтому после приведения подобных членов мы (231) перепишем так

$$bc \cos A_0 = p^2 \dots qq_1 - \frac{K_A + 2K_F + K_C}{24} p^2 q^2 - \frac{K_A + 2K_F + K_B}{24} p^2 q_1^2 - \\ - \frac{p^2 q^2 + p^2 q_1^2 + 2p^2 qq_1}{6R^2} + \\ + \frac{-16p^4 q^2 - 16p^4 q_1^2 - 8p^2 q^4 - 8p^2 q_1^4 + 40p^2 q^2 q_1^2 - 24p^4 qq_1 + 16p^2 q^3 q_1 + 16p^2 qq_1^3}{360R^4}. \quad (232)$$

Сравнение (228) и (232) показывает, что в обоих уравнениях члены порядка  $\frac{s^6}{R^4}$  совпадают, что и должно было ожидать без проделывания длинного счета, представленного уравнениями (230'), (231) и отчасти (230). Таким образом,

$$bc (\cos A - \cos A_0) = -\frac{p^2 K_A}{24} (2q^2 + 2q_1^2 + 4qq_1) - \frac{p^2 K_C}{24} (q^2 + qq_1) - \\ - \frac{p^2 K_B}{24} (q_1^2 + qq_1) - \frac{p^2 K_F}{24} (q^2 + q_1^2 + 2qq_1) + \frac{1}{6} \frac{p^2 (q + q_1)^2}{R^2}.$$

Или

$$bc (\cos A - \cos A_0) = -\frac{p^2 (q + q_1)^2}{12} K_A - \frac{p^2 q (q + q_1)}{24} K_C - \frac{p^2 q_1 (q + q_1)}{24} K_B - \\ - \frac{p^2 K_F}{24} (q + q_1)^2 + \frac{1}{6} \frac{p^2 (q + q_1)^2}{R^2}; \\ bc (\cos A - \cos A_0) = -\frac{p^2 (q + q_1)}{24} \{2K_A (q + q_1) + K_C q + K_B q_1 + K_C q_1 + \\ + K_B q\} + \frac{p^2}{6} (q + q_1)^2 \frac{K_A + K_B + K_C}{3}; \\ bc (\cos A - \cos A_0) = -\frac{p^2 (q + q_1)^2}{24} \left( \frac{2}{3} K_A - \frac{1}{3} K_B - \frac{1}{3} K_C \right) = \\ = -\frac{p^2}{24} (q + q_1)^2 [K_A - K_m]; \quad (233)$$

понимая в (233) под  $K_m$  среднее  $\frac{K_A + K_B + K_C}{3}$ ; погрешность (233) порядка  $\frac{\eta^2 s^6}{R^4}, \frac{s^8}{R^6}$ .

Из (233) пишем

$$(A - A_0) bc \sin A = \frac{p^2}{24} (q + q_1)^2 (K_A - K_m).$$

Но на основании (220)

$$bc \sin \alpha \cos \alpha_1 = pq + \frac{K_m}{6} p^3 q - \frac{1}{3} K_m p q q_1^2;$$

$$bc \cos \alpha \sin \alpha_1 = p q_1 + \frac{K_m}{6} p^3 q_1 - \frac{1}{3} K_m p q^2 q_1;$$

$$bc \sin A = p (q + q_1) \left\{ 1 + \frac{K_m}{6} (p^2 - 2qq_1) \right\} \dots$$

с ошибкой на величины порядка  $\eta^2 \frac{s^5}{R^3}, \frac{s^6}{R^4}$ .

Отсюда

$$A - A_0 = \frac{p(q + q_1)}{24} (K_A - K_m). \quad (234)$$

Погрешность (234) выражается величинами порядка  $\frac{s^6}{R^6}$  и  $\frac{\eta^2 s^4}{R^4}$ .

На основании (227) мы напишем с той же точностью

$$\left. \begin{aligned} A - A_0 &= \frac{\varepsilon}{12} \frac{K_A - K_m}{K_m}; \\ B - B_0 &= \frac{\varepsilon}{12} \frac{K_B - K_m}{K_m}; \\ C - C_0 &= \frac{\varepsilon}{12} \frac{K_C - K_m}{K_m}; \end{aligned} \right\} K_m = \frac{K_A + K_B + K_C}{3}. \quad (235)$$

Формулы (235) имеют важное значение: они дают переход от углов сфероидического треугольника к соответственным углам треугольника сферического, имеющего одинаковые стороны со сторонами треугольника сфероидического; радиус сферы определяется при этом уравнением

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{R_A^2} + \frac{1}{R_B^2} + \frac{1}{R_C^2} \right). \quad (236)$$

Решение сферического треугольника с той же точностью дано формулами (191). Очевидно, в нашем сферическом треугольнике перпендикуляр  $A_0F_0$  из вершины  $A_0$  на сторону  $a$  (черт. 38) отличается от  $p$  на величину порядка  $\eta^2 \frac{s^3}{R^3} q$ . Другими словами,  $\varepsilon''$  для сферического треугольника  $A_0B_0C_0$  отличается от  $\varepsilon''$ , даваемого формулой (227), только на величины порядка  $\eta^2 \frac{s^5}{R^5}$ , нами неучитываемые в (235); мы можем поэтому соединить в одно формулы (191) и (235) и написать

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A - \frac{\varepsilon''}{3} - \frac{\varepsilon'' n}{60} (m^2 - a^2) - \frac{\varepsilon''}{12} \frac{n_A - n}{n} \\ B_1 &= B - \frac{\varepsilon''}{3} - \frac{\varepsilon'' n}{60} (m^2 - b^2) - \frac{\varepsilon''}{12} \frac{n_B - n}{n} \\ C_1 &= C - \frac{\varepsilon''}{3} - \frac{\varepsilon'' n}{60} (m^2 - c^2) - \frac{\varepsilon''}{12} \frac{n_C - n}{n} \end{aligned} \right\}. \quad (237)$$

В формулах (237)

$$\left. \begin{aligned} n_A &= \frac{1}{R_A^2}; \quad n_B = \frac{1}{R_B^2}; \quad n_C = \frac{1}{R_C^2} \\ n &= K_m = \frac{n_A + n_B + n_C}{3}; \quad m^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \\ \varepsilon'' &= \frac{ap}{2} \rho'' n + \frac{n^2}{24} \rho'' p (p^2 q_1 + q^3_1 + p^2 q + q^3) \end{aligned} \right\}. \quad (237')$$

$$\varepsilon'' = \frac{\Delta \rho''}{R^2} = \Delta \rho'' n. \quad (238)$$

$A_1, B_1, C_1$  суть углы плоского треугольника, имеющего со сфероидическим соответственно равные стороны;  $\Delta$  есть площадь сферического треугольника  $A_0B_0C_0$  (черт. 38). Формулами (237), (237'), (238) задача решения сфероидических треугольников сводится к решению плоского треугольника. При сторонах треугольника  $ABC$ , не превышающих 400 км, ошибочность формул (237) не превышает  $0'',0005$ . При сторонах треугольника, меньших 200 км, «сфероидическая поправка»  $\frac{\varepsilon''}{12} \frac{n_A - n}{n}$  меньше  $0'',0009$ ; как видели в § 23, при сторонах  $a, b, c$ , меньших 200 км, сферическая поправка к теореме Лежандра, т. е. величина  $\frac{m^2 - a^2}{60} \varepsilon'' n$ , не превосходит  $0'',0005$ .

Отсюда делаем вывод:

При сторонах сфероидических треугольников, меньших 150 км, решение их можно выполнять, как решение сферических треугольников по формулам (193) и (194), т. е. просто по теореме Лежандра без поправочных членов, помня лишь, что углы  $A, B, C$  образованы геодезическими линиями и что величина  $\frac{1}{R^2}$  должна быть вычислена, как  $\frac{1}{3} \left( \frac{1}{R_A^2} + \frac{1}{R_B^2} + \frac{1}{R_C^2} \right)$ , или выбрана из геодезических таблиц по аргументу широты для центра тяжести треугольника; переход от измеренных углов к углам между геодезическими линиями указан в следующем параграфе; понятно, что правила в отношении вычисления  $\varepsilon$ , указанные в § 23, должны быть соблюдены и при таком решении по теореме Лежандра, т. е. без учета поправочных к ней членов.

При сторонах треугольника  $ABC$ , больших 150 км, следует уже применять формулы (237), (237') и (238).

## § 28. Редукции измеренных углов в треугольниках триангуляции. Поправка азимута за высоту наблюдаемого предмета

Окончательно получаемые на некотором пункте триангуляции I класса наблюденные направления в действительности являются результатом некоторой вычислительной обработки непосредственно измеренных направлений, а именно: из непосредственно измеренных направлений приходится выводить средние значения, вводить их в уравнивание станции (вывод вероятнейших направлений при наблюдениях по способу Шрейбера) и после такого уравнивания, а иногда и до него—исправлять за приведения к центрам сигналов (центрировки и редукции). Так как отдельные отсчеты по горизонтальному кругу делаются с десятыми долями секунды, а средняя ошибка окончательно выводимого направления нередко не превышает  $\pm 0'',3$ , то и вывод средних значений непосредственно измеренных направлений, и уравнивательные вычисления на станции, и определение приведений—исполняются с удерживанием в них  $0'',01$ , так что и окончательные значения наблюденных и приведенных к центрам знаков направлений получаются с  $0'',01$ .

Удерживание в окончательных значениях наблюденных направлений  $0'',01$  соответствует общему правилу, чтобы ошибки вычислений сказывались только между следующим и последующим десятичным знаком по отношению к десятичному знаку, удержанному и обеспеченному при наблюдениях; кроме того, если бы мы, рассматривая окончательные значения наблюденных направлений как измеренные величины (на что



$BN_aaP$  или, что все равно, двуграннику  $b_1N_aaP$ . Очевидно, что азимут направления  $ab$  измеряется на эллипсоиде двугранником  $bN_aaP = A_u$ .

Следовательно,

$$A_u = A_{1.2} + \angle b_1 a N_a b.$$

Если  $O$  — центр эллипсоида, то на основании (68)

$$\overline{N_a O} = N_1 e^2 \sin B_1; \quad \overline{O N_b} = N_2 e^2 \sin B_2;$$

$$\overline{N_a N_b} = e^2 (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1).$$

Пренебрегая здесь членами порядка  $e^4 (B_2 - B_1)$ , напишем

$$\overline{N_a N_b} = N_2 e^2 (\sin B_2 - \sin B_1) = N_2 e^2 \frac{s}{M_1} \left( \cos A_{1.2} - \frac{s}{2N_1} \operatorname{tg} B_1 \right) \cos B_1.$$

Здесь  $s$  — длина дуги  $ab$ .

Опустив из  $N_a$  перпендикуляр  $N_a R$  на нормаль точки  $B$ , получим

$$\overline{N_a R} = \overline{N_a N_b} \cos B_2.$$

Отсюда угол  $N_b B N_a$ , равный  $x$ , определится так

$$x = \frac{\overline{R N_a}}{\overline{B R}} = \frac{e^2 s}{M_1} \cos B_1 \cos B_2 \left( \cos A_{1.2} - \frac{s}{2N_1} \operatorname{tg} B_1 \right).$$

а дуга  $bb_1$  вычислится так

$$bb_1 = H_2 e^2 \frac{s}{M_1} \cos B_2 \cos B_1 \left( \cos A_{1.2} - \frac{s}{2N_1} \operatorname{tg} B_1 \right).$$

Из треугольника  $bb_1a$ , решаемого, как плоский, пишем

$$\frac{(A_u - A_{1.2})''}{\sin (A_{1.2} - 180^\circ) \rho''} = \frac{bb_1}{s}.$$

Отсюда

$$(A_u - A_{1.2})'' = r''_{1.2} = \frac{H_2 \rho''}{M_1} e^2 \sin A_{1.2} \cos^2 B_1 \left( \cos A_{1.2} - \frac{s}{2N_1} \operatorname{tg} B_1 \right);$$

$$r''_{1.2} = \frac{H_2}{M_1} \eta_{1.2}^2 \rho'' \sin A_{1.2} \left( \cos A_{1.2} - \frac{s}{2N_1} \operatorname{tg} B_1 \right). \quad (240)$$

При  $H = 1000$  м и при  $B = 45^\circ$ , имеем:  $r''_{1.2} \leq 0'',05$ ;

„  $H = 200$  м „ „  $B = 52^\circ$ , „ „  $r''_{1.2} \leq 0'',008$ .

Как видно, рассматриваемая поправка вовсе не пренебрегаемая. Важно отметить, что по существу  $r''$  почти не зависит от расстояния между пунктами  $A$  и  $B$ . С другой стороны, нужно иметь в виду, что  $H_2$  — высота  $B$  над эллипсоидом, а не над уровнем океана. Обычно, вводя редукцию  $r''$  «за высоту», под  $H_2$  понимают высоту  $B$  над уровнем океана, что, конечно, совершенно неправильно. Как уже указывалось в § 2, при неудачном выборе референц-эллипсоида высота  $H_2$  при нулевой высоте точки  $B$  над уровнем океана может достигнуть в большой триангуляции значений в 200—300 м. Так как влияния  $r''$  будут при этом определению систематического характера, то ясно, что мы должны



при обработке большой триангуляции знать, хотя и грубо (до 20 м), высоты точек триангуляции над референц-эллипсоидом, а не над геоидом. Как определяются эти высоты, об этом будет сказано в одной из последних глав книги.

Далее, мы должны указать, что, кроме редукиций  $r'$  и  $r''$ , должно ввести еще редукицию  $r'''$  в измеренное направление за несовпадение нормали  $AN_a$  (черт. 39) с отвесной линией в  $A$ . Очевидно, эта поправка  $r'''$  аналогична поправке за наклон вертикальной оси теодолита. Вопрос вывода величины  $r'''$  будет изложен в одной из последних глав книги. Поправки  $r'$ ,  $r''$ , и  $r'''$  должны быть суммированы вместе по каждому направлению; каждая из них вычисляется до 0,001 секунды.

После получения  $(r' + r'' + r''')$  по каждому направлению может быть поставлен вопрос об округлении суммы этих величин до 0",01 секунды; это округление следует делать в каждом звене триангуляции I класса, используя схему этого звена так, чтобы избежать накопления округлений одного знака в *передаче азимутов*.

## Глава IV

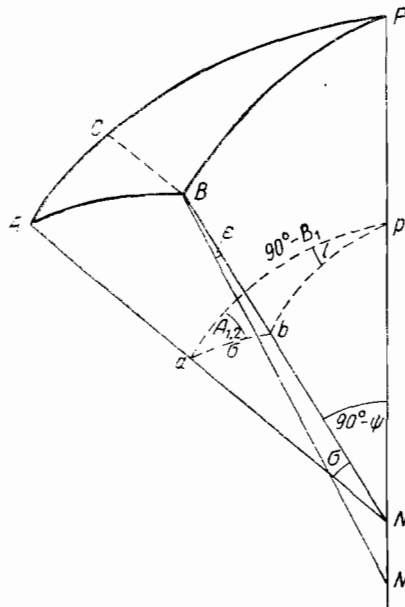
# ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ШИРОТ, ДОЛГОТ И АЗИМУТОВ (ПРЯМАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА). ОБРАТНАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

### § 29. Общие соображения

Разности геодезических широт двух пунктов  $A$  и  $B$  соответствует на референц-эллипсоиде некоторая дуга меридианного эллипсоида; разности геодезических долгот тех же пунктов соответствует некоторая дуга параллели, проходящая или через  $A$ , или через  $B$ . Системы меридианных эллипсов и окружностей параллелей эллипсоида могут быть приняты за систему криволинейных координат, в которой лишь нужно фиксировать геодезическую широту начала этих координат. Несомненно, в такой системе координат, как все равно в системе прямоугольных сфероидических координат, расстояния между параллелями геодезических пунктов и расстояния по параллелям между их меридианами должно вычислять с сантиметрами, т. е. ошибки вычислений должны сказываться в разностях геодезических широт и долгот пунктов, удаленных друг от друга на 30—60 км, только вообще 2—3 миллиметрами, и достигать сантиметра только для разности широт пунктов, удаленных друг от друга на несколько сот километров. Так как секунда широты примерно составляет 31 м, то, очевидно, поставленное только что требование равносильно требованию вычислять разности широт смежных в триангуляции геодезических пунктов с ошибкой, меньшей  $0'',0001$ , и даже с полным обеспечением по возможности  $0'',0001$  в этой разности широт. Тогда, после ряда передач геодезических широт по сторонам триангуляции, разность широт двух геодезических пунктов, удаленных друг от друга на 400—600 км, окажется искаженной ошибками вычислений на  $\pm 1$  см (в смысле средней ошибки). Конечно, сказанное относится и к точности вычислений разностей геодезических долгот, хотя здесь можно поступаться строгостью получения  $0'',0001$  в отдельной разности долгот. Ошибки измеренных углов в триангуляции I класса дают определение положения третьей вершины  $C$  треугольника относительно любой из двух других вершин  $A$  и  $B$  с средней ошибкой по каждой из координатных осей в  $\pm 0,08$ — $0,07$  м (при длине стороны треугольника в 30 км). Поэтому ошибки вычисления разностей широт и долгот по сторонам  $AC$  и  $BC$  должны быть менее  $0,007$  м, но чтобы устранить противоречие в сантиметрах при подходе к  $C$  от  $A$  и от  $B$ , надлежит потребовать, чтобы ошибки вычислений в разностях широт и долгот точек  $C$  и  $A$ , и точек  $C$  и  $B$ , не превышали бы  $0,002$  м. Это требование совпадает с ранее выдвинутыми. Очевидно, при выводе углов треугольников с сотыми

долями секунды (см. § 28), ошибки вычислений в азимутах не должны превышать  $0'',003$ , т. е. азимуты должно вычислять с  $0'',001$  секунды.

Прямая геодезическая задача формулируется так: в точке  $A$  даны ее широта  $B_1$ , долгота  $L_1$ , азимут  $A_{1,2}$  геодезической линии  $AB$  и длина  $s_{1,2}$  этой линии от  $A$  до  $B$ ; требуется определить: широту  $B_2$



Черт. 40

и долготу  $L_2$  точки  $B$  и обратный азимут  $A_{2,1}$  в  $B$  геодезической линии  $BA$ . Методы решения этой задачи могут быть достаточно различными. Прежде всего отметим так называемые *прямые* методы решения, для которых характерным является определение сразу самих искомых широты  $B_2$ , долготы  $L_2$  и азимута  $A_{2,1}$ . Примером прямого метода может служить следующее решение задачи. Пусть  $PO$  — малая ось эллипсоида;  $BN_2$  и  $AN_1$  (черт. 40) нормали в  $B$  и  $A$ ; угол  $BN_2P$  назовем через  $90^\circ - \psi$ ; угол  $N_2BN_1$  назовем через  $\varepsilon$  и угол  $AN_1B$  — попрежнему через  $\sigma$ . Угол  $\sigma$  мы можем с высокой степенью точности рассчитать по формуле (88); угол  $\varepsilon$  может быть рассчитан тем методом, который мы уже применяли в § 15, но, конечно, с большей точностью, чем это дано формулой (92) § 15. После получения  $\varepsilon$  образуем сферический треугольник  $abp$ , соответствующий трехграннику с ребрами  $N_1A$ ,  $N_1B$  и  $N_1P$ . Называя через  $l_{1,2}$  разность долгот точек  $B$  и  $A$ , через  $\alpha'_{2,1}$  — дополнение до  $180^\circ$  угла при  $b$  в треугольнике  $abp$ , напишем

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\alpha'_{2,1} + l_{1,2}}{2} &= \frac{\sin \frac{90^\circ - B_1 + \sigma}{2}}{\sin \frac{90^\circ - B_1 - \sigma}{2}} \operatorname{tg} \frac{A_{1,2}}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha'_{2,1} - l_{1,2}}{2} &= \frac{\cos \frac{90^\circ - B_1 + \sigma}{2}}{\cos \frac{90^\circ - B_1 - \sigma}{2}} \operatorname{tg} \frac{A_{1,2}}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{90^\circ - \psi}{2} &= \frac{\sin \frac{\alpha'_{2,1} - l_{1,2}}{2}}{\sin \frac{\alpha'_{2,1} + l_{1,2}}{2}} \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{B_1 - \sigma}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (241)$$

После определения по (241) величин  $\psi$ ,  $\alpha'_{2,1}$  и  $l_{1,2}$  остается получить  $B_2$  по формуле

$$B_2 = \psi + \varepsilon$$

и по формулам (152) и (153) перейти от  $A_{1,2}$  к  $A_{1,2}^c$  и от  $\alpha'_{2,1} \pm 180^\circ$  к  $A_{2,1}^c$ .

Не говоря о крайне громоздкой и неудобной формуле для вычисления  $z$ , если ошибку этой формулы иметь не более  $0'',00\,002$ , приходится указать, что в широтах около  $55^\circ$  ошибка в 0,6 единицы седьмого логарифмического знака в  $\lg \operatorname{tg} \frac{90^\circ - \varphi}{2}$ , которая появится при вычислении формулы для  $\operatorname{tg} \frac{90^\circ - \varphi}{2}$  семизначными логарифмами, поведет затем к ошибке в  $B_2$  в  $0'',012$ . Следовательно, необходимо вычисление формул (241) вести десятичными логарифмами, чтобы обеспечить необходимую точность в широте  $B_2$  и в разности широт  $B_2 - B_1$ . Отсюда уже видна практическая неприемлемость приведенного только что решения прямой геодезической задачи, одного из «прямых» методов. Вообще *прямые* методы решения этой задачи громоздки и потому, что здесь приходится иметь дело с эллиптическими функциями, и потому, что условие дать правильно  $0'',0001$  в разности широт (и долгот) неизбежно ведет к условию дать самые широты из *прямого* метода решения с  $0'',00001$ !

Очевидно, что более целесообразно в огромном большинстве случаев и непременно при передачах координат в триангуляции перейти к определению *малых разностей широт*  $B_2 - B_1$ , *разностей долгот*  $l_{1,2}$  и *разностей азимутов* ( $A_{2,1} - 180^\circ - A_{1,2}$ ), чтобы затем простым суммированием получать  $B_2$ ,  $L_2$  и  $A_{2,1}$ . Это соображение приводит к тому, что в большинстве случаев мы применяем не прямые, а *косвенные* приемы решения прямой геодезической задачи. Заметим, что при расстояниях в 30 км между  $A$  и  $B$  разность широт выражается величиной около  $1000''$ ; поэтому для вычисления *разностей широт, долгот и азимутов* до  $0'',0001$  по сторонам триангуляции I класса достаточно восьмизначных логарифмов, так как изменению разности широт величиной около  $1000''$  на  $0'',0001$  соответствует изменение ее логарифма на четыре единицы восьмого знака.

Один из *косвенных* приемов решения прямой геодезической задачи состоит в том, что на меридиане  $AP$  (черт. 40) намечают вспомогательную точку  $C$  так, чтобы геодезическая линия  $BC$  имела в  $C$  азимут, равный  $90^\circ$ . Решая малый треугольник  $ABC$  по теореме Лежандра, найдем с хорошей точностью длины дуг  $AC$  и  $BC$ . Разность широт  $B_0 - B_1$  точек  $C$  и  $A$  найдется затем легко применением формулы (56). Очевидно, разность широт  $B_2 - B_0$  будет малой величиной второго порядка, и поэтому определение ее не представит затруднений. Разности долгот и азимутов будут находиться путем перехода от  $C$  к  $B$ , который облегчается именно тем, что угол  $PCB$  при  $C$  — прямой, а точки  $B$  и  $C$  имеют очень малую разность широт. Другой косвенный метод заключается в разложении в ряды разностей широт, долгот и азимутов по степеням расстояния  $s$  между точками  $A$  и  $B$ . Этот метод уже в основном изложен в § 13. Далее, мы можем представить себе получение прямоугольных сфероидических координат  $X$  и  $Y$  (см. § 25) и дальнейший переход от этих  $X$  и  $Y$  к геодезическим координатам и азимутам. Наконец, следует упомянуть о методах, в которых по некоторому закону строят изображение эллипсоида на шаре. Другими словами, от  $B_1$ ,  $A_{1,2}$  и  $s_{1,2}$  переходят к соответствующим им на шаре: широте  $U_1$ , азимуту  $\alpha_{1,2}$  и расстоянию  $\sigma_{1,2}$ . По этим элементам на шаре определяют разности широт, долгот и азимутов, затем суммированием получают на шаре же  $U_2$ ,  $\lambda_{1,2}$  и  $\alpha_{2,1}$ , и, наконец, используя тот же закон изображения эллипсоида на шаре, выполняют обратный переход с шара на эллипсоид, т. е. переход от  $U_2$ ,  $\lambda_{1,2}$  и  $\alpha_{2,1}$  к  $B_2$ ,  $l_{1,2}$  и  $A_{2,1}$ . Разнообразие косвенных

способов решения геодезической задачи обуславливается или достижением различной степени точности в результатах, или различием применяемых методов вычислений. Чем большее расстояние  $s$  мы имеем в виду, тем с большей точностью мы должны получить результаты из решения прямой геодезической задачи. Те методы, которые очень хороши в этой задаче при расстояниях 30—40 км, оказываются в дальнейшем своем развитии, т. е. при применении их к расстояниям в 80—200—400 км, слишком громоздкими, и поэтому должны быть заменяемы при таких расстояниях уже иными методами. Но в рассматриваемой прямой геодезической задаче существенным моментом является приспособление формул к запросу возможно более простого проведения числовых вычислений по этим формулам. Метод введения, в качестве основных, *средних* аргументов, т. е. *средней* широты  $B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}$  и среднего азимута  $A_m = \frac{A_{1,2} + A_{2,1} - 180^\circ}{2}$ ; метод последовательных приближений; метод расчленения каждой формулы на две части: одну — главную, представляющуюся в виде члена, соответствующего решению задачи на шаре, и вторую — поправочную, дающую дополнение к первой за эллипсоидальность, и т. п., все эти методы, или, вернее, различные подходы к выполнению вычислительной задачи уже базируются на тот или иной вид формул для разностей широт, долгот и азимутов, т. е. вытекают из того или иного косвенного приема решения прямой геодезической задачи.

Необходимо иметь в виду, что требование возможно большей точности при выполнении вычислений геодезических координат и азимутов является очень существенным. Поэтому в решении прямой геодезической задачи получают место своеобразные математические приемы, комбинируемые иногда с геометрическими методами решения некоторых частей задачи и с удачными введениями некоторых вспомогательных величин, чтобы добиться упрощения сложных выражений. Общематематическое решение вопроса, простое по идее, приводит, между тем, к негодному решению с практической точки зрения.

### § 30. Решение геодезической задачи для расстояний, не превышающих 25 км

В настоящее время триангуляции II, III и IV классов в СССР вычисляются в проекции и в координатах Гаусса-Крюгера. Поэтому нет нужды давать решение прямой геодезической задачи для расстояний, отвечающих длинам сторон этих триангуляций. Однако в южных степных районах или в притундровых северных районах может оказаться целесообразным триангуляцию I класса вести с укороченными несколько сторонами треугольников, имеющими размеры не более 25 км. С другой стороны, возможны случаи обработки основных рядов II класса в геодезических координатах. Таким образом, поставленная в заголовке параграфа задача может, хотя и редко, иметь место. С другой стороны, при ее решении возможно проведение своеобразного геометрического метода, ознакомление с которым, мне кажется, является очень полезным для каждого геодезиста.

Пусть имеем (черт. 41) широту  $B_1$  точки  $A$ , ее долготу  $L_1$ , азимут  $A_{1,2}$  в  $A$  геодезической линии  $AB$  и длину  $s_{1,2}$  этой линии  $AB$ ; требуется определить широту  $B_2$  точки  $B$ , разность долгот  $l_{1,2}$  точек  $A$  и  $B$ , и обратный азимут  $A_{2,1}$  в точке  $B$  геодезической линии  $AB$ .

Построим вспомогательную точку  $C$  на меридиане  $AP$  так, чтобы геодезическая линия  $CB$  имела в  $C$  азимут, равный  $90^\circ$ . На основании выводов главы III мы можем для избытка  $\varepsilon$  треугольника  $ABC$  написать с высокой степенью точности

$$\varepsilon'' = \frac{s_{1,2}^2 \sin A_{1,2} \cos A_{1,2}}{2R^2} \rho''.$$

Сфероидические и сферические поправки к углам треугольника  $ABC$  будут выражаться в данном случае десятиллионными долями секунды. Поэтому имеем

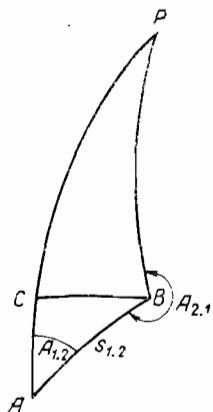
$$A_1 = A_{1,2} - \frac{\varepsilon}{3};$$

$$C_1 = 90^\circ - \frac{\varepsilon}{3};$$

$$B_1 = 90^\circ - A_{1,2} + \frac{2}{3}\varepsilon;$$

$$\overline{AC} = \frac{s_{1,2} \cos \left( A_{1,2} - \frac{2}{3}\varepsilon \right)}{\cos \frac{\varepsilon}{3}} = s_{1,2} \cos \left( A_{1,2} - \frac{2}{3}\varepsilon \right);$$

$$\overline{BC} = s_{1,2} \sin \left( A_{1,2} - \frac{\varepsilon}{3} \right).$$



Черт. 41

Обозначим широту точки  $C$  через  $B_0$ . Применяя формулу (57) § 8, напомним

$$B_0 = B_1 + b = B_1 + \frac{s_{1,2} \cos \left( A_{1,2} - \frac{2}{3}\varepsilon \right)}{M_m} \rho'', \quad (a)$$

понимая под  $M_m$  меридианный радиус для широты  $B_m = \frac{B_1 + B_0}{2}$ . Ошибочность формулы (a), равная  $\frac{e^2}{8} \frac{b''^3}{\rho''^3} \cos 2B_m$ , будет выражаться величиной, вообще меньшей  $0'',000005$ . Напишем далее

$$\frac{1}{M_m} = \frac{(1 - e^2 \sin^2 B_m)^{3/2}}{a(1 - e^2)} = \frac{1}{M_1} + \left( \frac{d\left(\frac{1}{M}\right)}{dB} \right) \frac{b}{2}; \quad (b)$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{M}\right)}{dB} = -\frac{3}{2} \frac{(1 - e^2 \sin^2 B)^{1/2}}{a(1 - e^2)} e^2 \sin 2B;$$

$$b = B_0 - B_1 = \frac{s_{1,2} \cos \left( A_{1,2} - \frac{2}{3}\varepsilon \right)}{M_1} \rho'' -$$

$$- \frac{3}{4} \frac{s_{1,2} \cos \left( A_{1,2} - \frac{2}{3}\varepsilon \right) (1 - e^2 \sin^2 B_1)^{1/2}}{a(1 - e^2)} e^2 \sin 2B_1 b''. \quad (c)$$

В последней формуле можем в члене с  $e^2$  величину  $b''$  заменить через  $\frac{s \cos \left( A_{1.2} - \frac{2}{3} \varepsilon \right)}{M_1} \rho''$ , делая погрешность, меньшую  $0'',000001$ .

Введем теперь принятые в геодезии обозначения

$$s_{1.2} \cos A_{1.2} = u; \quad s_{1.2} \sin A_{1.2} = v; \quad \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} = k.$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon'' &= \frac{uvk^4}{2a^2(1-e^2)} \rho''; \quad \overline{AC} = s_{1.2} \cos A_{1.2} + \frac{2}{3} \varepsilon \cdot s_{1.2} \sin A_{1.2} = \\ &= u \left( 1 + \frac{k^4 u^2}{3a^2(1-e^2)} \right) \\ \overline{BC} &= s_{1.2} \sin A_{1.2} - \frac{\varepsilon}{3} s_{1.2} \cos A_{1.2} = v \left( 1 - \frac{k^4 v^2}{6a^2(1-e^2)} \right) \end{aligned} \right\} \quad (242)$$

В формуле (b) отброшен член с  $\frac{d^2 \left( \frac{1}{M} \right)}{dB^2}$ , который, складываясь с ранее отброшенным в (a) членом  $\frac{e^2}{8} \cos 2B_m b^3$ , дает в  $b''$  влияние около  $0'',00002$ . Формулу (c) преобразовываем так

$$\begin{aligned} b'' &= \frac{s_{1.2} \cos \left( A_{1.2} - \frac{2}{3} \varepsilon \right)}{M_1} \rho'' \left\{ 1 - \frac{3 s_{1.2} \cos \left( A_{1.2} - \frac{2}{3} \varepsilon \right)}{4 a (1 - e^2)} e^2 \sin 2B_1 \right\}; \\ b'' &= (1)_1 u \left( 1 + \frac{k^4 v^2}{3a^2(1-e^2)} \right) \left( 1 - \frac{3}{4} \frac{uk}{a(1-e^2)} e^2 \sin 2B_1 \right); \\ b'' &= (1)_1 u \left\{ 1 - \frac{3}{4} \frac{e^2 ku}{a(1-e^2)} \sin 2B_1 + \frac{v^2 k^4}{3a^2(1-e^2)} \right\}; \end{aligned} \quad (243)$$

$$B_0 = B_1 + b'',$$

Теперь вычислим еще величину  $c$

$$c = \frac{\overline{BC}}{N_0} \rho'' = (2)_0 v \left( 1 - \frac{u^2 k^4}{6a^2(1-e^2)} \right), \quad (244)$$

причем под  $N_0$  понимается радиус  $N$  в точке  $C$ .

Так как  $\overline{BC}$  всегда менее 25 км, то на основании формулы (148) разность азимутов прямого в  $C$  нормального сечения на  $B$  и геодезической линии  $CB$  вообще выразится миллионными долями секунды. Поэтому, принимая теперь геодезическую кривую  $CB$  за прямое в  $C$  нормальное сечение на  $B$ , построим в  $C$  нормаль  $CN_c$  (черт. 42), причем  $N_c$  находится на малой оси  $PO$  эллипсоида. Угол  $CN_c B$  будет, конечно, равен  $c$ , определяемому по (244). Назовем угол между плоскостью  $CBN_c$  и плоскостью меридиана  $BPN_c$  через  $90^\circ - t$ , а угол  $BN_c D$  — через  $\eta$ , причем  $\overline{CD}$  есть параллель точки  $C$ . Построим сферические треугольники  $bcr$  и  $cdr$  (черт. 43), соответствующие трехгранникам с вершиной в  $N_c$  и с ребрами:  $N_c C$ ,  $N_c B$ ,  $N_c P$ ;  $N_c C$ ,  $N_c D$ ,  $N_c P$ . Угол нормальной плоскости  $DCN_c$  с плоскостью  $PCN_c$  назовем через  $90^\circ - \theta$ , так что угол

при  $C$  в треугольнике  $dcB$  будет  $\Theta$ . Из треугольника  $cpb$ , прямоугольного при  $c$ , имеем

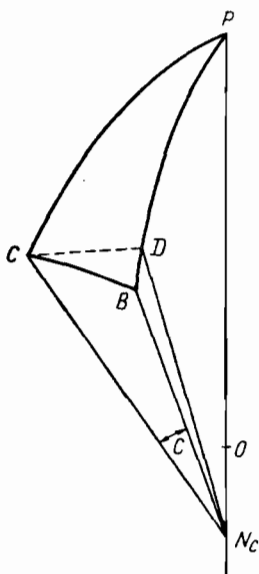
$$\left. \begin{aligned} \cos B_0 &= \operatorname{ctg} l_{1.2} \operatorname{tg} c \\ \operatorname{tg} l_{1.2} &= \operatorname{tg} c \sec B_0 \\ \operatorname{tg} t &= \sin c \operatorname{tg} B_0 \end{aligned} \right\}. \quad (245)$$

Вводя обозначения

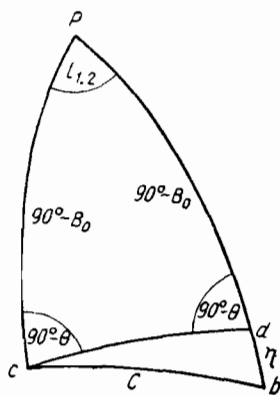
$$\left. \begin{aligned} \lambda &= c \sec B_0 \\ \tau &= c \operatorname{tg} B_0 \end{aligned} \right\}, \quad (246)$$

причем

$$c^2 + \tau^2 = \lambda^2,$$



Черт. 42



Черт. 43

напишем из (245)

$$\begin{aligned} l_{1.2} + \frac{l_{1.2}^3}{3} &= c \left( 1 + \frac{c^2}{3} \right) \sec B_0 = \lambda \left( 1 + \frac{c^2}{3} \right), \\ l_{1.2} &= \lambda \left( 1 + \frac{c^2}{3} - \frac{l_{1.2}^2}{3} \right); \end{aligned} \quad (247)$$

$$\begin{aligned} l \left( 1 + \frac{t^2}{3} \right) &= c \left( 1 - \frac{c^2}{6} \right) \operatorname{tg} B_0 = \tau \left( 1 - \frac{c^2}{6} \right), \\ t &= \tau \left( 1 - \frac{c^2}{6} - \frac{t^2}{3} \right). \end{aligned} \quad (248)$$



В (247) и (248) можно в правых их частях, в скобках,  $l_{1,2}^2$  и  $t^2$  заменить через  $\lambda$  и  $\tau$ , внося этой заменой ошибку лишь на величины пятого порядка. Поэтому имеем

$$l_{1,2} = \lambda \left( 1 + \frac{c^2 - l^2}{3} \right) = \lambda \left( 1 - \frac{\tau^2}{3} \right); \quad (249)$$

$$t = \tau \left( 1 - \frac{\lambda^2}{6} - \frac{\tau^2}{6} \right). \quad (250)$$

Погрешности формул (249) и (250) получаются лишь в миллионных долях секунды. Из сферического треугольника  $cdp$  имеем

$$\operatorname{tg} \Theta = \operatorname{tg} \frac{l_{1,2}}{2} \sin B_0.$$

Из сферического треугольника  $cdb$

$$\sin \eta = \sin c \frac{\sin \Theta}{\sin(90^\circ + \Theta)} = \sin c \operatorname{tg} \Theta = \sin c \operatorname{tg} \frac{l_{1,2}}{2} \sin B_0;$$

$$\eta = c \frac{l_{1,2}}{2} \sin B_0. \quad (251)$$

Нетрудно видеть, что в (251) пренебрегли такими членами

$$\frac{c l_{1,2} \sin B_0}{12} \left( \frac{l_{1,2}^2}{2} - c^2 \right),$$

что дает в  $\eta$  погрешность около  $0'',00001$ .

Далее пишем

$$\eta = \frac{c \lambda}{2} \sin B_0 = \frac{c \tau}{2}$$

с добавочной погрешностью  $\frac{c \lambda \tau^2}{6} \sin B_0$ . Общая погрешность в  $\eta$  достигает  $0'',00003$  в широте  $60^\circ$ , заметно убывая с убыванием широты. Рассматривая теперь сперва дугу  $BD$  (черт. 42), как дугу нормального сечения, мы напишем

$$\widehat{BD} = N_0 \frac{\eta''}{\rho''}.$$

Рассматривая затем ту же дугу  $BD$ , как дугу меридиана, будем иметь

$$\widehat{BD} = M_0 \frac{(B_0 - B_2)''}{\rho''},$$

причем при написании последнего уравнения радиус меридианной кривой для середины дуги  $BD$  считался не отличающимся от радиуса  $M_0$  для начала этой дуги в точке  $D$ ; вследствие малости дуги  $BD$ , это ведет к совершенно ничтожной ошибке в  $B_0 - B_2$ . Очевидно,

$$d = (B_0 - B_2)'' = \frac{N_0}{M_0} \eta'' = \frac{N_0}{2 M_0 \rho''} c'' \tau''. \quad (252)$$

При  $s = 35$  км рассчитанная выше погрешность формулы (252) может достичь  $0'',00012$ , т. е. для обычных размеров сторон триангуляции I класса формула (252) недостаточно точна.

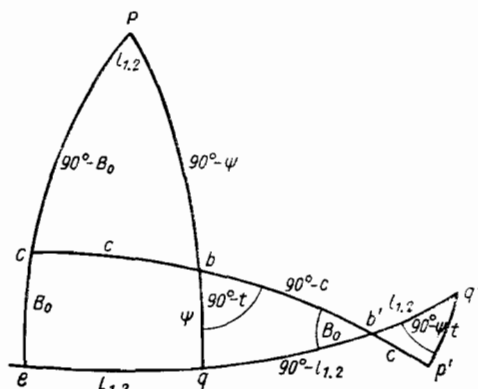
Сечение  $CB$ , изображенное на черт. 42, будет, конечно, *обратным* нормальным сечением в  $B$ . На основании формулы (149), мы получим, что разность азимутов в  $B$  этого обратного сечения и геодезической линии  $BC$  будет равна  $\frac{c^2 c^2}{16} \sin 2B_0$ , что будет вообще менее  $0'',000005$ . Поэтому мы можем принять, что  $270^\circ + t$  будет равно азимуту геодезической линии  $BC$  в  $B$ . Имея же в виду, что угол при  $B$  в треугольнике  $ABC$  (черт 41) равен  $90^\circ - A_{1,2} + \varepsilon$ , получим

$$A_{2,1} = A_{1,2} + 180^\circ + t - \varepsilon. \quad (253)$$

Формулами (242) (для  $\varepsilon$ ), (243), (244), (249), (250), (252) и (253) поставленный вопрос решается.

Простым упрощением формул для расстояний от 30 до 120 км, которые будут выведены в последующих параграфах, мы могли бы получить формулы (242), (243), (244), (249)—(253), но там будет применен метод аналитический. В настоящем же параграфе мы продемонстрировали применение метода геометрического, который дает ясное представление о всех величинах, входящих в решение прямой геодезической задачи.

Применим еще несколько иной путь получения  $l_{1,2}$  и  $t$ . На черт. 44 треугольник  $cbr$  тот же самый, что и на черт. 43, причем сторона  $br$  обозначена через  $90^\circ - \psi$ . Вообразим, что меридианные дуги  $PC$  и  $PB$  черт. 42 мы продолжили до экватора, и точки  $e$  и  $q$  (черт. 44) соответствуют именно точкам экватора, лежащим на меридианах  $PC$  и  $PB$ . Конечно, дуга  $eq$  равна  $l_{1,2}$ , дуга  $ec$  равна  $B_0$  и дуга  $bq$  — равна  $\psi$ . Продолжим дуги  $cb$  и  $eq$ ; в их пересечении получим точку  $b'$ , которая будет полюсом дуги  $ecr$ . В треугольнике  $bqb'$  поэтому имеем: угол при  $b'$  равен  $B_0$ , угол при  $b$  равен  $90^\circ - t$ , сторона  $bb'$  равна  $90^\circ - c$ , и сторона  $ql$  равна  $90^\circ - l_{1,2}$ . Продолжим еще далее дуги  $bb'$  и  $qb'$  и отложим на этих продолжениях  $b'p' = c$  и  $b'q' = l_{1,2}$ . В построенном таким образом треугольнике  $b'q'p'$  точка  $q'$  будет полюсом для меридиана  $qbr$ , а тогда точка  $b$  явится полюсом дуги  $q'p'$  и, следовательно, угол при  $q'$  будет равен  $90^\circ - \psi$ , угол при  $p'$  будет  $90^\circ$ , и сторона  $q'p'$  равна  $t$ . Избыток треугольника  $b'q'p'$  будет равен  $90^\circ - \psi + B_0 + 90^\circ - 180^\circ = B_0 - \psi = \eta$ . Применяя теорему Лежандра к решению малого треугольника  $b'q'p'$ , имеем



Черт. 44

$$l_{1,2} = \frac{c \sin \left( 90^\circ - \frac{\eta}{3} \right)}{\sin \left( 90^\circ - \psi - \frac{\eta}{3} \right)} = \frac{c}{\cos \left( \psi + \frac{\eta}{3} \right)};$$

$$t = l_{1,2} \sin \left( B_0 - \frac{1}{3} \eta \right).$$

Не различая далее  $\eta$  от  $d = B_0 - B_2$ , напомним

$$l_{1.2} = \frac{c}{\cos \left( B_2 + \frac{2}{3} d \right)}; \quad t = l_{1.2} \cdot \sin \left( B_2 + \frac{2}{3} d \right). \quad (254)$$

Сделаем теперь сводку полученных формул

$$\text{I. } \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} = k; \quad (1) = \frac{\rho''}{M}; \quad (2) = \frac{\rho''}{N}; \quad (3) = \frac{N}{2M\rho''};$$

$$(4) = 10^7 \cdot \frac{3}{4} \frac{\mu e^2 k}{a(1 - e^2)} \sin 2B;$$

$$s_{1.2} \cos A_{1.2} = u; \quad s_{1.2} \sin A_{1.2} = v; \quad \frac{10^7 \mu}{3 \rho''^2} = \gamma;$$

$$(5) = \frac{10^7 \mu k^4}{3 a^2 (1 - e^2)};$$

$$b'' = (1)_1 u \left\{ 1 - \frac{3}{4} \frac{e^2 k u}{a(1 - e^2)} \sin 2B_1 + \frac{v^2 k^4}{3 a^2 (1 - e^2)} \right\};$$

$$(1)_1 u = \beta;$$

$$\lg b'' = \lg \beta - (4)_1 u + (5) v^2;$$

$$B_0 = B_1 + b;$$

$$c'' = (2)_0 v \left( 1 - \frac{k^4 u^2}{6 a^2 (1 - e^2)} \right);$$

$$(2)_0 v = \gamma;$$

$$\lg c = \lg \gamma - \frac{1}{2} (5) u^2;$$

$$\lambda'' = c'' \sec B_0; \quad \tau'' = c'' \operatorname{tg} B_0;$$

$$\lg l_{1.2} = \lg \lambda - \nu \tau^2 = \lg \lambda - 2 \sigma(\tau);$$

$$\lg t = \lg \tau - \frac{\nu}{2} \lambda^2 - \frac{\nu}{2} \tau^2 = \lg \tau - \tau(\tau) - \sigma(\lambda);$$

$$d'' = (3)_0 c'' \tau''; \quad \varepsilon = \frac{b'' c''}{2 \rho''};$$

$$B_2 = B_0 - d = B_1 + b - d;$$

$$L_2 = L_1 + l_{1.2};$$

$$A_{2.1} = A_{1.2} + 180^\circ + t - \varepsilon.$$

$$\text{II. } \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} = k; \quad (1) = \frac{\rho''}{M}; \quad (2) = \frac{\rho''}{N}; \quad (3) = \frac{N}{2M\rho''};$$

$$(4) = \frac{3}{4} \frac{10^7 \mu e^2 k}{a(1 - e^2)} \sin 2B_1;$$

$$\varepsilon'' = \frac{s_{1.2}^2 \sin A_{1.2} \cos A_{1.2}}{2 R^2} \rho'';$$

$$u_1 = s_{1,2} \cos \left( A_{1,2} - \frac{2}{3} \varepsilon \right); \quad v_1 = s_{1,2} \sin \left( A_{1,2} - \frac{\varepsilon}{3} \right);$$

$$b'' = (1)_1 u_1 \left( 1 - \frac{3}{4} \frac{e^2 k}{a(1-e^2)} u \cdot \sin 2B_1 \right);$$

$$(1)_1 u_1 = \beta_1;$$

$$\lg b'' = \lg \beta - (4) u_1;$$

$$B_0 = B_1 + b;$$

$$c'' = (2)_0 v_1;$$

$$d'' = (3)_0 c^2 \operatorname{tg} B_0;$$

$$B_2 = B_1 + b - d;$$

$$l_{1,2} = \frac{c}{\cos \left( B_2 + \frac{d}{3} \right)}; \quad L_2 = L_1 + l_{1,2};$$

$$t'' = c'' \sin \left( B_2 + \frac{2}{3} d \right); \quad A_{2,1} = A_{1,2} + 180^\circ + t - \varepsilon.$$

Представляется, что формулы II проще для вычисления, чем формулы I. Хотя поправочные члены типа (5)  $x^2$  и  $\sigma(x)$  легко извлекаются из вспомогательных таблиц, но все-таки применение формул I сопряжено с большей хлопотливостью, чем формул II. Впрочем, это может быть оспариваемо; здесь большую роль играют навыки в пользовании теми или иными формулами и приемами вычислений.

### § 31. Выражение разностей широт, долгот и азимутов в виде рядов, расположенных по возрастающим степеням расстояния $s$

Этот вопрос мы уже начали изложением в § 13. Здесь снова обращаемся к формулам (69), обоснование которых уже дано в начале § 13

$$\left. \begin{aligned} B_2 - B_1 &= \left( \frac{dB}{ds} \right)_0 s + \left( \frac{d^2 B}{ds^2} \right)_0 \frac{s^2}{2!} + \left( \frac{d^3 B}{ds^3} \right)_0 \frac{s^3}{3!} + \\ &\quad + \left( \frac{d^4 B}{ds^4} \right)_0 \frac{s^4}{4!} + \left( \frac{d^5 B}{ds^5} \right)_0 \frac{s^5}{5!} \\ L_2 - L_1 &= \left( \frac{dL}{ds} \right)_0 s + \left( \frac{d^2 L}{ds^2} \right)_0 \frac{s^2}{2!} + \left( \frac{d^3 L}{ds^3} \right)_0 \frac{s^3}{3!} + \\ &\quad + \left( \frac{d^4 L}{ds^4} \right)_0 \frac{s^4}{4!} + \left( \frac{d^5 L}{ds^5} \right)_0 \frac{s^5}{5!} \\ A_{2,1} - 180^\circ - A_{1,2} &= \left( \frac{dA}{ds} \right)_0 s + \left( \frac{d^2 A}{ds^2} \right)_0 \frac{s^2}{2!} + \left( \frac{d^3 A}{ds^3} \right)_0 \frac{s^3}{3!} + \\ &\quad + \left( \frac{d^4 A}{ds^4} \right)_0 \frac{s^4}{4!} + \left( \frac{d^5 A}{ds^5} \right)_0 \frac{s^5}{5!} \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

В настоящем параграфе мы имеем целью получить  $B_2 - B_1$ ,  $L_2 - L_1$ ,  $A_{2,1} - 180^\circ - A_{1,2}$  с членами, содержащими  $s^5$ . Первые производные

были уже получены в § 13, очевидно, теперь дело сводится к получению всех последующих производных, кончая пятыми.

Мы имеем

$$\frac{dB}{ds} = \frac{\cos A}{M}; \quad \frac{dl}{ds} = \frac{\sin A}{N \cos B}; \quad \frac{dA}{ds} = \frac{\sin A}{N} \operatorname{tg} B,$$

или

$$\frac{dB}{ds} = \frac{\cos AV^3}{c}; \quad \frac{dl}{ds} = \frac{\sin AV}{c \cos B}; \quad \frac{dA}{ds} = \frac{dl}{ds} \sin B. \quad (a_1)$$

Отсюда

$$\frac{d^2 B}{ds^2} = - \frac{\sin^2 A \operatorname{tg} B}{c^2} V^4 - \frac{3 \cos AV^2}{c} \frac{dV}{dB} \frac{dB}{ds},$$

$$\frac{d^2 B}{ds^2} = - \frac{V^4}{c^2} (\sin^2 A + 3 \eta^2 \cos^2 A) \operatorname{tg} B; \quad (b)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 l}{ds^2} = \frac{1}{c} \left\{ \frac{\cos A \sin AV^3}{c \cos B} \operatorname{tg} B - \frac{\eta^2 V^2 \cos A \sin A}{c \cos B} \operatorname{tg} B + \right. \\ \left. + \frac{\sin A \cos A \operatorname{tg} B}{c \cos B} V^4 \right\}, \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 l}{ds^2} = \frac{\sec B \operatorname{tg} B}{c^2} \sin A \cos A V^2; \quad ($$

$$\frac{d(\eta^n)}{dB} = - n \eta^n \operatorname{tg} B,$$

$$\frac{d^2 A}{ds^2} = \frac{d^2 l}{ds^2} \sin B + \frac{dl}{ds} \frac{\cos B \cos A}{c} V^3,$$

$$\frac{d^2 A}{ds^2} = \frac{2 \operatorname{tg}^2 B \sin A \cos A}{c^2} V^2 + \frac{\sin A \cos A}{c^2} V^4;$$

$$\frac{d^2 A}{ds^2} = \frac{V^2}{c^2} \sin A \cos A (1 + 2 \operatorname{tg}^2 B + \eta^2); \quad ($$

$$\frac{d^3 B}{ds^3} = (\sin^2 A + 3 \eta^2 \cos^2 A) \frac{V^3}{c} \cos A \left[ \frac{4 V^2}{c^2} \eta^2 \cos A \operatorname{tg}^2 B - \frac{V^4}{c^2} (1 + \operatorname{tg}^2 B) \right.$$

$$\left. - \frac{V^5}{c^3} \operatorname{tg}^2 A \sin A (2 \sin A \cos A - 6 \eta^2 \sin A \cos A) + \right.$$

$$\left. + \frac{6 V^7}{c^3} \operatorname{tg}^2 B \eta^2 \cos^2 A; \right.$$

$$\frac{d^3 B}{ds^3} = - \frac{V^5}{c^3} \cos A \{ \sin^2 A [V^2 + 3 t^2 (1 - 3 \eta^2)] + 3 \cos^2 A \eta^2 [V^2 -$$

$$- t^2 (1 + 5 \eta^2)] \};$$

$$t = \operatorname{tg} B;$$

$$\frac{d^3 l}{ds^3} = \frac{2}{c^3} V^3 \cos A \{ \sec B (1 + 2 t^2) \sin A \cos A V^2 - 2 \eta^2 \sec B t^2 \sin A \cos A \} + \\ + 2 \sec B t^2 \cos 2 A \sin A \frac{V^3}{c^3};$$

$$\frac{d^3 l}{ds^3} = \frac{2 V^3}{c^3} \sec B \sin A [\cos^2 A (V^2 + 3 t^2) - \sin^2 A t^2]; \quad (1_3)$$

$$\frac{d^3 A}{ds^3} = - \frac{2 V^3}{c^3} \eta^2 t \sin A \cos^2 A (1 + \eta^2 + 2 t^2) + \frac{V^5}{c^3} \sin A \cos^2 A \times \\ \times [-2 \eta^2 t + 4 t (1 + t^2)] + \frac{V^3}{c^3} (\cos^2 A - \sin^2 A) t \sin A (1 + \eta^2 + 2 t^2); \\ \frac{d^3 A}{ds^3} = \frac{V^3}{c^3} \sin A t \{ \cos^2 A [V^2 (5 - 4 \eta^2) + 6 t^2] - \sin^2 A (V^2 + 2 t^2) \}; \quad (a_3)$$

$$\frac{d^4 B}{ds^4} = \frac{V^6}{c^4} \{ t \sin^4 A (1 + 3 t^2 + \eta^2 - 9 \eta^2 t^2) - 2 t \sin^2 A \cos^2 A (4 - 13 \eta^2 - 17 \eta^4) - \\ - 6 t^3 (2 - 3 \eta^2 + 15 \eta^4) \sin^2 A \cos^2 A + \\ + 3 \eta^2 t [4 + 23 \eta^2 + 19 \eta^4 - 5 \eta^2 t^2 (3 + 7 \eta^2)] \cos^4 A \};$$

$$\frac{d^4 B}{ds^4} = \frac{V^6}{c^4} \{ t \sin^4 A [V^2 + 3 t^2 (1 - 3 \eta^2)] - 2 t \sin^2 A \cos^2 A [V^2 (4 - 17 \eta^2) + \\ + 3 t^2 (2 - 3 \eta^2 + 15 \eta^4)] + 3 \eta^2 t \cos^4 A [V^2 (4 + 19 \eta^2) - 5 \eta^2 t^2 (3 + 7 \eta^2)] \}; \quad (b_4)$$

$$\frac{d^4 l}{ds^4} = \frac{8 V^4}{c^4} t \sec B \{ \cos^3 A \sin A [V^2 (2 - \eta^2) + 3 t^2] - \\ - \sin^3 A \cos A (V^2 + 3 t^2) \}; \quad (1_4)$$

$$\frac{d^4 A}{ds^4} = \frac{V^4}{c^4} \{ \sin A \cos^3 A [V^4 (5 - 4 \eta^2) + 4 V^2 t^2 (7 - 5 \eta^2 + 6 \eta^4) + 24 t^4] - \\ - \cos A \sin^3 A [V^4 + 4 V^2 t^2 (5 - 3 \eta^2) + 24 t^4] \}; \quad (a_4)$$

$$\frac{d^5 B}{ds^5} = \frac{V^7}{c^5} \{ 3 \eta^2 \cos^5 A [V^4 (4 + 19 \eta^2) - 2 V^2 t^2 (2 + 69 \eta^2 + 157 \eta^4) + \\ + 15 \eta^2 t^2 (1 + 14 \eta^2 + 21 \eta^4)] - 2 \cos^3 A \sin^2 A [V^2 (4 - 17 \eta^2) + \\ + 6 V^2 t^2 (5 - 8 \eta^2 + 67 \eta^4) + 15 t^4 (2 - 3 \eta^2 - 35 \eta^6)] + \\ + \cos A \sin^4 A [V^4 + 6 V^2 t^2 (5 - 17 \eta^2) + 45 t^4 (1 - 2 \eta^2 + 5 \eta^4)] \}; \quad (b_5)$$

$$\frac{d^5 l}{ds^5} = \frac{8 V^5}{c^5} \sec B \{ \cos^4 A \sin A [V^4 (2 - \eta^2) + 3 V^2 t^2 (5 - 3 \eta^2 + 2 \eta^4) + 15 t^4] - \\ - \cos^2 A \sin^3 A [V^4 + V^2 t^2 (20 - 7 \eta^2) + 30 t^4] + \sin^5 A t^2 (V^2 + 3 t^2) \}; \quad (1_5)$$

$$\frac{d^5 A}{ds^5} = \frac{V^5}{c^5} t \{ \cos^4 A \sin A [V^4 (61 - 76 \eta^2 + 88 \eta^4) + 12 V^2 t^2 (15 - 11 \eta^2 + 8 \eta^4 - \\ - 16 \eta^6) + 120 t^2] - 2 \cos^2 A \sin^3 A [V^4 (29 - 22 \eta^2) + 4 V^2 t^2 (35 - 22 \eta^2 + \\ + 18 \eta^4) + 120 t^4] + \sin^5 A [V^4 + 4 V^2 t^2 (5 - 3 \eta^2) + 24 t^4] \}. \quad (a_5)$$

Как увидим в следующих параграфах, при передаче координат на расстояния порядка 600—800 км, должно удерживать члены порядка  $\eta^2 s^5$  и  $\eta^4 s^4$ . Поэтому пренебрежение в четвертых производных слагаемыми с  $\eta^4$ , как это делалось многими авторами, не является допустимым, а также не является допустимым пренебрежение в пятых производных не только слагаемыми с  $\eta^2$ , но и с  $\eta^4$  («сферическое» представление пятых производных). Но, конечно, в приведенных формулах члены с  $\eta^6$  являются излишними.

Теперь, пользуясь полученными выражениями, подставим их в ряды (69), предварительно введя обозначения

$$\frac{V_1 \rho''}{c} s \sin A_{1,2} = v_1; \quad \frac{V_1 \rho''}{c} s \cos A_{1,2} = u_1, \quad (255)$$

мы получим

$$\begin{aligned} \frac{B_2 - B_1}{V_1^2} = & u_1 - \frac{1}{2\rho''} v_1^2 t_1 - \frac{3}{2\rho''} \eta_1^2 t_1 u_1^2 - \frac{v_1^2 u_1}{6\rho''^2} (1 + 3t_1^2 + \eta_1^2 - 9\eta_1^2 t_1^2) - \\ & - \frac{u_1^3 \eta_1^2}{2\rho''^2} (1 + \eta_1^2 - t_1^2 - 5\eta_1^2 t_1^2) + \frac{v_1^4}{24\rho''^3} t_1 (V_1^2 + 3t_1^2 (1 - 3\eta_1^2)) - \\ & - \frac{v_1^2 u_1^2 t_1}{12\rho''^3} [(4 - 17\eta_1^2) V_1^2 + 3t_1^2 (2 - 3\eta_1^2 + 15\eta_1^4)] + \\ & + \frac{\eta_1^2 t_1}{8\rho''^3} u_1^4 [(V_1^2 (4 + 19\eta_1^2) - 5\eta_1^2 t_1^2 (3 + 7\eta_1^2)] + \\ & + \frac{\eta_1^2 u_1^5}{40\rho''^4} [V_1^4 (4 + 19\eta_1^2) - 4V_1^2 t_1^2] - \\ & - \frac{u_1^3 v_1^2}{60\rho''^4} [V_1^2 (4 - 17\eta_1^2) + 6V_1^2 t_1^2 (5 - 8\eta_1^2) + 15t_1^4 (2 - 3\eta_1^2)] + \\ & + \frac{u_1 v_1^4}{120\rho''^4} [V_1^4 + 6V_1^2 t_1^2 (5 - 17\eta_1^2) + 45t_1^4 (1 - 2\eta_1^2)]; \quad (256) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_{1,2} \cos B_1 = & v_1 + \frac{u_1 v_1 t_1}{\rho''} - \frac{v_1^3 t_1^2}{3\rho''^2} + \frac{u_1^2 v_1}{3\rho''^2} (1 + \eta_1^2 + 3t_1^2) + \\ & + \frac{u_1^3 v_1}{3} t_1 [V_1^2 (2 - \eta_1^2) + 3t_1^2] - \frac{u_1 v_1^3}{3} (V_1^2 + 3t_1^2) + \\ & + \frac{u_1^4 v_1}{15\rho''^4} [V_1^4 (2 - \eta_1^2) + 3V_1^2 t_1^2 (5 - 3\eta_1^2) + 15t_1^4] - \\ & - \frac{u_1^2 v_1^3}{15\rho''^4} [V_1^4 + V_1^2 t_1^2 (20 - 7\eta_1^2) + 30t_1^4] + \\ & + \frac{v_1^5 t_1^2}{15\rho''^4} (V_1^2 + 3t_1^2); \quad (257) \end{aligned}$$

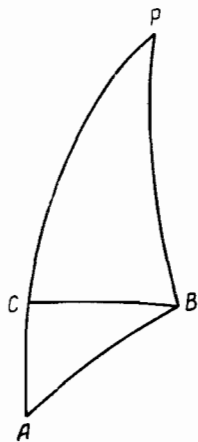
$$\begin{aligned}
& A_{2,1} - A_{1,2} \pm 180^\circ = \\
& = v_1 t_1 + \frac{v_1 u_1}{2\rho''} (1 + 2t_1^2 + \eta_1^2) + \frac{u_1^2 v_1}{6\rho''^2} t_1 [V_1^2 (5 - 4\eta_1^2) + 6t_1^2] - \\
& - \frac{v_1^3 t_1}{6\rho''^2} (V_1^2 + 2t_1^2) + \frac{u_1^2 v_1}{24\rho''^3} [V_1^4 (5 - 4\eta_1^2) + 4V_1^2 t_1^2 (7 - 5\eta_1^2 + 6\eta_1^4) + 24t_1^4] - \\
& - \frac{u_1 v_1^3}{24\rho''^3} [V_1^4 + 4V_1^2 t_1^2 (5 - 3\eta_1^2) + 24t_1^4] + \\
& + \frac{u_1^4 v_1 t_1}{120\rho''^4} [V_1^4 (61 - 76\eta_1^2) + 12V_1^2 t_1^2 (15 - 11\eta_1^2) + 120t_1^4] - \\
& - \frac{u_1^2 v_1^3 t_1}{60\rho''^4} [V_1^4 (29 - 22\eta_1^2) + 4V_1^2 t_1^2 (35 - 22\eta_1^2) + 120t_1^4] + \\
& + \frac{v_1^5 t_1}{120\rho''^4} [V_1^4 + 4V_1^2 t_1^2 (5 - 3\eta_1^2) + 24t_1^4]. \quad (258)
\end{aligned}$$

Полученные формулы (256), (257) и (258) не имеют никакого производственно-геодезического значения; конечно, никто не станет по ним выполнять вычислений в производстве. Мы имеем здесь яркую иллюстрацию того, что чисто математический подход к задачам геодезии еще вовсе не гарантирует успеха. Полученные в этом параграфе формулы послужат нам для вывода при помощи их формул, имеющих действительно производственное значение при вычислениях геодезических координат и азимутов; кроме того, эти формулы могут быть использованы для получения так называемых дифференциальных формул.

### § 32. Вывод формул Шрейбера для вычисления геодезических широт, долгот и азимутов в триангуляции I класса

Мы берем расстояние между точками  $A$  и  $B$  от 30 до 120 км; в соответствующих этим расстояниям формулах должны быть удержаны члены четвертого порядка, т. е. порядка  $\frac{s^4}{R^4}$ . Предполагая соединение точек  $A$  и  $B$  геодезической линией, найдем на меридиане  $AP$  (черт. 45) вспомогательную точку  $C$ , в которой геодезическая линия  $CB$  имеет азимут, равный  $90^\circ$ . Прежде всего перейдем от  $A$  к  $C$ , используя формулу (256), в которой придется положить:  $v_1 = 0$ ;  $u_1 = \frac{s}{N_1} \rho'' \cos \left( A_{1,2} - \frac{2}{3} \varepsilon \right)$ . В самом деле, в § 30 было уже дано решение сфероидического треугольника  $ABC$  для  $s \leq 25$  км. При  $s = 120$  км формула (237) дает такие поправочные члены к теореме Лежандра:

наибольшая сферическая	поправка равна	$0'',00008$ ;
наибольшая сфероидическая	„ „	$0'',0003$ .



Черт. 45



Другими словами, как и в § 30, мы можем при получении  $AC$  и  $BC$  решать треугольник  $ABC$  просто по теореме Лежандра

$$AC = s \cos \left( A_{1.2} - \frac{2}{3} \varepsilon \right),$$

$$BC = s \sin \left( A_{1.2} - \frac{\varepsilon}{3} \right).$$

Понятно, что при переходе от  $A$  к  $C$ , в рядах (69) роль  $s$  играет длина дуги  $AC$ , причем  $v_1 = 0$ . Таким образом, из (256) получаем

$$\begin{aligned} B_0 - B_1 = s \rho'' \cos \left( A_{1.2} - \frac{2}{3} \varepsilon \right) \frac{V_1^3}{c} - \frac{3}{2} \rho'' \eta_1^2 t_1 \frac{V_1^4}{c^2} s^2 \cos^2 \left( A_{1.2} - \frac{2}{3} \varepsilon \right) - \\ - \frac{V_1^5 \rho''}{2 c^3} \eta_1^2 (1 + \eta_1^2 - t_1^2 - 5 \eta_1^2 t_1^2) s^3 \cos^3 \left( A_{1.2} - \frac{2}{3} \varepsilon \right) + \\ + \frac{V_1^6 \rho''}{8 c^4} \eta_1^2 t_1 [V_1^2 (4 + 19 \eta_1^2) - 5 \eta_1^2 t_1^2 (3 + 7 \eta_1^2)] s^4 \cos^4 \left( A_{1.2} - \frac{2}{3} \varepsilon \right); \end{aligned}$$

$$t_1 = \operatorname{tg} B_1.$$

Далее вводим обозначения, как и в § 30

$$\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} = k; \quad s \cos A_{1.2} = u; \quad s \sin A_{1.2} = v;$$

$$\varepsilon = \frac{uv k^4}{2 a^2 (1 - e^2)} \rho'';$$

$$s \cos \left( A_{1.2} - \frac{2}{3} \varepsilon \right) = u \left( 1 + \frac{k^4 v^2}{3 a^2 (1 - e^2)} \right);$$

$$s \sin \left( A_{1.2} - \frac{\varepsilon}{3} \right) = v \left( 1 - \frac{k^4 u^2}{6 a^2 (1 - e^2)} \right);$$

$$\frac{V_1^3}{c} = \frac{1}{M_1}.$$

Теперь пишем

$$\begin{aligned} B_0 - B_1 = \frac{\rho''}{M_1} u \left( 1 + \frac{k^4 v^2}{3 a^2 (1 - e^2)} \right) - \frac{3}{2} \rho'' \eta_1^2 t_1 \frac{u^2}{M_1 N_1} \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{k^4 v^2}{a^2 (1 - e^2)} \right) - \\ - \frac{\rho''}{2 M_1} \frac{\eta_1^2}{N_1} u^3 (1 - t_1^2), \end{aligned}$$

причем отброшенный член с  $\frac{s^4 \cos^2 A_{1.2}}{8 c^4} V_1^6 \eta_1^2 t_1 [V_1^2 (4 + 19 \eta_1^2)]$  даст погрешность при  $s = 120$  км, меньшую  $0'',00001$ , а при  $s = 80$  км — меньшую  $0'',000001$ . Член

$$- \frac{3}{2} \rho'' \frac{\eta_1^2 t_1}{M_1 N_1} \frac{2}{3} \frac{k^4 u^2 v^2}{a^2 (1 - e^2)},$$

при  $s = 120$  км, дает менее  $0'',00002$ , кроме того, влияние его противоположно по знаку влиянию члена  $\frac{s^4 \cos^2 A_{1.2}}{8 c^4} V_1^6 \eta_1^2 t_1 [V_1^2 (4 + 19 \eta_1^2) + \dots]$  а вместе оба эти члена будут давать менее  $0'',00001$  даже при  $s = 120$  км

Таким образом,

$$(B_0 - B_1)'' = b'' = \frac{\rho''}{M_1} u \left[ 1 - \frac{3}{4} \frac{e^2 k}{a(1-e^2)} \sin 2B_1 u + \frac{k^4 v^2}{3a^2(1-e^2)} - \frac{e^2 \cos 2B_1}{2a^2} u^2 \right]. \quad (259)$$

Получив  $(B_0 - B_1)$ , переходим теперь от  $C$  к  $B$  по геодезической линии  $CB$ , для которой в формулах (256), (257) и (258) величина

$u_1 = 0$ , а  $v_1 = \frac{\rho''}{N_0} v \left( 1 - \frac{k^4 u^2}{6a^2(1-e^2)} \right)$ . Мы имеем с условленной точностью

$$\begin{aligned} B_2 - B_0)'' &= -\frac{\rho'' v^2 t_0}{2M_0 N_0} \left( 1 - \frac{k^4 u^2}{6a^2(1-e^2)} \right)^2 + \\ &+ \frac{v^4 \rho'' t_0}{24 N_0^3 M_0} [1 + \eta_0^2 + 3t_0^2(1 - 3\eta_0^2)] \left( 1 - \frac{k^4 u^2}{6a^2(1-e^2)} \right)^4; \\ (B_0 - B_2)'' &= d'' = \frac{\rho''}{2M_0 N_0} v^2 t_0 \left( 1 - \frac{k^4 u^2}{6a^2(1-e^2)} \right)^2 \times \\ &\times \left\{ 1 - \frac{v^2}{12N_0^2} (1 + 3t_0^2 + \eta_0^2 - 9\eta_0^2 t_0^2) \left( 1 - \frac{k^4 u^2}{6a^2(1-e^2)} \right)^2 \right\}. \quad (260) \end{aligned}$$

Формула (260) подлежит еще дальнейшим преобразованиям.

Обращаемся к получению  $l_{1,2}$ , т. е. к использованию (257) при  $u_1 = 0$  и  $v_1 = \frac{\rho''}{N_0} v \left( 1 - \frac{k^4 u^2}{6a^2(1-e^2)} \right)$ . Мы получаем

$$\begin{aligned} l_{1,2} \cos B_0 &= \frac{\rho''}{N_0} v \left( 1 - \frac{k^4 u^2}{6a^2(1-e^2)} \right) - \frac{\rho'' v^3 t_0^2}{3N_0^3} \left( 1 - \frac{k^4 u^2}{6a^2(1-e^2)} \right)^3 + \\ &+ \frac{\rho''}{15N_0^5} v^5 t_0^2 (1 + 3t_0^2) \left( 1 - \frac{k^4 u^2}{6a^2(1-e^2)} \right)^5. \end{aligned}$$

В последнем уравнении удержаны члены 5-го порядка, так как в северных широтах значительное числовое значение  $l^2$  и  $\sec B$  может обусловить значение этих членов в 0'',002.

Вводим теперь обозначения

$$\begin{aligned} c'' &= \frac{\rho'' v}{N_0} \left( 1 - \frac{k^4 u^2}{6a^2(1-e^2)} \right) = (2)_0 v \left( 1 - \frac{k^4 u^2}{6a^2(1-e^2)} \right); \\ \lambda &= c \sec B_0; \quad \tau = c \operatorname{tg} B_0; \quad \lambda^2 - \tau^2 = c^2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} l_{1,2} &= \lambda \left[ 1 - \frac{\tau^2}{3\rho''^2} + \frac{c^4 t_0^2}{15\rho''^4} (1 + 3t_0^2) \right]; \\ l_{1,2} &= \lambda \left[ 1 - \frac{\tau^2}{3\rho''^2} + \frac{1}{15\rho''^4} (2c^4 + 5\lambda^2 \tau^2 - 2\lambda^4) \right]. \quad (261) \end{aligned}$$

Преобразование члена  $\frac{c^4 t_0^2}{15\rho''^4} (1 + 3t_0^2)$ , приводящее к более его сложному выражению, имеет в виду упрощения при получении в последующем выражении для  $\lg l_{1,2}$ .

Выполним теперь преобразование уравнения (260) для  $(B_0 - B_1)$

$$\begin{aligned} d'' &= \frac{N_0}{2 M_0 \rho''} c'' \tau'' \left\{ 1 - \frac{c''^2}{12 \rho''^2} (1 + 3 t_0^2) - \frac{(\eta_0^2 - 9 \eta_0^2 t_0^2)}{12 \rho''^2} c''^2 \right\}; \\ d'' &= \frac{N_0}{2 M_0 \rho''} c'' \tau'' \left\{ 1 - \frac{\lambda''^2}{12 \rho''^2} - \frac{\tau''^2}{6 \rho''^2} - \frac{\lambda''^2 (\eta_0^2 - 9 \eta_0^2 t_0^2)}{12 \rho''^2} + \frac{\tau''^2 (\eta_0^2 - 9 \eta_0^2 t_0^2)}{12 \rho''^2} \right\}; \\ d'' &= \frac{N_0}{2 M_0 \rho''} c'' \tau'' \left\{ 1 - \frac{\tau''^2}{6 \rho''^2} - \frac{\lambda''^2}{12 \rho''^2} - \frac{e^2 (1 - 10 \sin^2 B_0)}{12 (1 - e^2) \rho''^2} \lambda''^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^2 (1 - 10 \sin^2 B_0)}{12 (1 - e^2) \rho''^2} \tau''^2 \right\}; \\ d'' &= \frac{N_0}{2 M_0 \rho''} c^2 \tau'' \left\{ 1 - \frac{\tau''^2}{6 (1 - e^2) \rho''^2} - \frac{\lambda''^2}{12 (1 - e^2) \rho''^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^2 \tau''^2}{12 (1 - e^2) \rho''^2} (13 - 10 \sin^2 B_0) \right\}. \quad (262) \end{aligned}$$

Вычисляем теперь, применяя формулу (258), обратный азимут в  $B$  геодезической линии  $BC$ . Мы имеем

$$\begin{aligned} A_{BC} &= 270^\circ + c'' t_0 - \frac{c^3 t_0}{6 \rho''^2} (1 + \eta_0^2 + 2 t_0^2); \\ A_{BC} &= 270^\circ + \tau'' \left[ 1 - \frac{c''^2 + 2 \tau''^2}{6 \rho''^2} - \frac{e^2 c''^2 \cos^2 B_0}{6 (1 - e^2) \rho''^2} \right]; \\ A_{BC} &= 270^\circ + \tau'' \left[ 1 - \frac{\lambda''^2 + \tau''^2}{6 (1 - e^2) \rho''^2} + \frac{e^2 \tau''^2}{6 (1 - e^2) \rho''^2} (3 - \sin^2 B_0) \right]. \quad (263) \end{aligned}$$

Обратный азимут  $A_{2,1}$ , конечно, получится так

$$\begin{aligned} A_{2,1} &= A_{1,2} + 180^\circ - \varepsilon + t; \\ t &= \tau'' \left[ 1 - \frac{\lambda''^2 + \tau''^2}{6 (1 - e^2) \rho''^2} + \frac{e^2 \tau''^2}{6 (1 - e^2) \rho''^2} (3 - \sin^2 B_0) \right]; \quad (264) \end{aligned}$$

$$\varepsilon'' = \frac{s^2 \cos \left( A_{1,2} - \frac{2}{3} \varepsilon \right) \sin \left( A_{1,2} - \frac{\varepsilon}{3} \right)}{2 R^2} \rho''; \quad (227)$$

$$\varepsilon'' = \frac{b'' c''}{2 \rho''}. \quad (265)$$

Формулы (259), (261), (262), (264) и (265) решают поставленный вопрос. Как видим, введение вспомогательной точки  $C$  привело от неприменимых практически формул (256), (257) и (258) к формулам, вполне обеспечивающим сравнительную простоту вычислений при высокой точности результатов. Сделаем теперь сводку формул Шрейбсера и присущих им обозначений

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}; \quad u = s \cos A_{1,2}; \quad v = s \sin A_{1,2}; \\ (1) &= \frac{\rho''}{M}; \quad (2) = \frac{\rho''}{N}; \quad (3) = \frac{N}{2 M \rho''}; \quad (4) = \frac{3}{4} 10^7 \mu \frac{e^2 k}{a (1 - e^2)} \sin 2B; \end{aligned}$$

$$(5) = \frac{10^7 \mu k^4}{3 a^2 (1-e^2)}; \quad (6) = -\frac{10^7 \mu e^2}{2 a^2} \cos 2B; \quad (7) = \mu_1 e^2 (3 - \sin^2 B_0);$$

$$B_0 - B_1 = b; \quad B_0 - B_2 = d;$$

$$(8) = \frac{1}{2} \mu_1 e^2 (13 - 10 \sin^2 B); \quad \nu = \frac{10^7 \mu}{3 \rho''^2}; \quad \nu_1 = \frac{10^7 \mu}{15 \rho''^4}; \quad \nu_2 = \frac{10^7 \mu \cdot 7}{90 \rho''^4};$$

$$\mu_1 = \frac{10^7 \mu}{6 (1-e^2) \rho''^2}; \quad (\mu - \text{модуль неперовых логарифмов})$$

$$(1)_1 u = \beta; \quad (2)_0 v = \gamma; \quad \lambda = c \sec B_0; \quad \tau = c \operatorname{tg} B_0;$$

$$\lambda^2 - \tau^2 = c^2; \quad (3)_0 c'' \tau'' = \delta'';$$

$$b'' = (1)_1 u \left[ 1 - \frac{3}{4} \frac{e^2 k_1}{a (1-e^2)} \sin 2B_1 u + \frac{k^4 v^2}{3 a^2 (1-e^2)} - \frac{e^2 \cos 2B_1}{2 a^2} u^2 \right]; \quad (259)$$

$$\lg b'' = \lg \beta + (4)_1 u + (5)_1 v^2 - (6)_1 u^2; \quad (266)$$

$$c = (2)_0 v \left( 1 - \frac{k^4 u^2}{6 a^2 (1-e^2)} \right) = \gamma \left( 1 - \frac{k^4 u^2}{6 a^2 (1-e^2)} \right);$$

$$\lg c'' = \lg \gamma - \frac{1}{2} (5) u^2;$$

$$\underline{B_0 = B_1 + b};$$

$$\underline{\lambda'' = c'' \sec B_0; \quad \tau'' = c'' \operatorname{tg} B_0};$$

$$l_{1,2} = \lambda'' \left[ 1 - \frac{\tau''^2}{3 \rho''^2} + \frac{1}{15 \rho''^4} (2 c''^4 + 5 \lambda''^2 \tau''^2 - 2 \lambda''^4) \right]; \quad (261)$$

$$\lg l_{1,2} = \lg \lambda'' - \nu \tau''^2 + \frac{\mu}{15} \lambda''^2 \tau''^2 + \frac{7}{90} \mu \tau''^4;$$

$$\underline{\lg l_{1,2} = \lg \lambda'' - \nu \tau''^2 + \nu_1 \lambda''^2 \tau''^2 + \nu_2 \tau''^4}; \quad (267)$$

$$d'' = (3)_0 c'' \tau'' \left\{ 1 - \frac{\tau''^2}{6 (1-e^2) \rho''^2} - \frac{\lambda''^2}{12 (1-e^2) \rho''^2} + \right. \\ \left. + \frac{e^2}{12 (1-e^2) \rho''^2} (13 - 10 \sin^2 B_0) \tau''^2 \right\}; \quad (262)$$

$$\lg d'' = \lg \delta'' - \mu_1 \tau''^2 - \frac{1}{2} \mu_1 \lambda''^2 + (8)_0 \tau''^2; \quad (268)$$

$$t'' = \tau'' \left[ 1 - \frac{\lambda''^2 + \tau''^2}{6 (1-e^2) \rho''^2} + \frac{e^2 \tau''^2}{6 (1-e^2) \rho''^2} (3 - \sin^2 B_0) \right]; \quad (264)$$

$$\underline{\lg t'' = \lg \tau'' - \mu_1 (\tau''^2 + \lambda''^2) + (7)_0 \tau''^2}; \quad (269)$$

$$\underline{\varepsilon'' = \frac{b'' c''}{2 \rho''}};$$

$$\underline{B_2 = B_0 - d = B_1 + b - d};$$

$$\underline{L_2 = L_1 + L_{1,2}};$$

$$\underline{A_{2,1} = A_{1,2} \pm 180^\circ + t - \varepsilon.}$$

Подчеркнуты те формулы, которые именно и вычисляются. Укажем теперь, что в формулах (266), (267), (268) и (269) подлежат отбрасыванию

$$(6) u^2, \text{ когда } \lg u < 4.55 \dots s < 35 \text{ км};$$

$$(7) \tau^2, \text{ „ } \lg \tau < 3.26 \dots s < 56 \operatorname{cosec} A_{1,2} \text{ км};$$

$$(8) \tau^2, \text{ „ } \lg \tau < 3.52 \dots s < 103 \operatorname{cosec} A_{1,2} \text{ км};$$

$$\nu_1 \lambda^2 \tau^2 + \nu_2 \tau^4, \text{ „ } \lg \lambda < 3.60 \dots s < 103 \operatorname{cosec} A_{1,2} \cos B \text{ км}.$$

Таким образом, при длинах сторон триангуляции, меньших 35 км, формулы (266), (267), (268) и (269) преобразовываются в более простые

$$\left. \begin{aligned} \lg b'' &= \lg (1)_1 u - (4)_1 u + (5) v^2 \\ \lg l''_{1,2} &= \lg \lambda'' - \frac{\nu \tau''^2}{3} = \lg \lambda'' - 2 \sigma(\tau'') \dots (\text{до } 70\text{-й параллели}) \\ \lg d'' &= \lg \delta'' - \frac{\nu \tau''^2}{2} - \frac{1}{4} \nu \lambda''^2 = \lg \delta'' - \sigma(\tau'') - \frac{1}{2} \sigma(\lambda'') \\ \lg t'' &= \lg \tau'' - \frac{\nu \tau''^2}{2} - \frac{\nu \lambda''^2}{2} = \lg \tau'' - \sigma(\tau'') - \sigma(\lambda'') \\ B_0 &= B_1 + b; \quad B_2 = B_0 - d; \quad A_{2,1} = A_{1,2} \pm 180^\circ + t - \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (270)$$

Эти формулы применялись при вычислениях в первоклассной триангуляции СССР. К формулам (270), конечно, присоединяются:

$$k = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}; \quad u = s \cos A_{1,2}; \quad v = s \sin A_{1,2};$$

$$c'' = (2)_0 v \left( 1 - \frac{k^4 u^2}{6 a^2 (1 - e^2)} \right);$$

$$\lg c'' = \lg (2)_0 v - \frac{1}{2} (5) u^2; \quad \lambda'' = c^2 \sec B_0; \quad \tau'' = c \operatorname{tg} B_0;$$

$$(3)_0 = \frac{N_0}{2 M_0 \rho''}; \quad \varepsilon'' = \frac{b'' c''}{2 \rho''}; \quad \nu = \frac{10^7 \mu}{3 \rho''^2}; \quad \sigma(x'') = \frac{10^7 \mu}{6 \rho''^2} x''^2;$$

$$B_0 = B_1 + b.$$

Следует иметь в виду, что упрощенность формулы (270) для  $l_{1,2}$ , по сравнению с формулой (267), будет сказываться в широтах южнее  $60^\circ$  только при расстояниях, больших 55 км; упрощенность формулы для  $d$ , по сравнению с формулой (268), будет сказываться только при  $s > 60$  км; наконец, упрощенность формулы (270) для  $t$  сказывается только с расстояний в 90 км. Отсюда, конечно, получается такой вывод: так как в первоклассной триангуляции СССР средняя длина стороны треугольника около 32—33 км и, следовательно, не так редко встречаются случаи, когда  $s > 35$ —40 км, то формулы (270) следует считать подлежащими применению при вычислениях в нашей триангуляции I класса, если только для  $b$  принять полную формулу

$$\lg b'' = \lg (1)_1 u - (4)_1 u + (5) v^2 - (6)_1 u^2.$$

Только в редких случаях, когда  $s > 55$  км, надлежит применять для  $l_{1,2}$  и  $d$  формулы (267) и (268).

### § 33. Формулы «с средней широтой и средним азимутом» для вычисления геодезических широт, долгот и азимутов

Прежде всего напомним применение среднего аргумента в ряде Тейлора. Мы имеем

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + \frac{h^4}{24} f^{IV}(x) + \\ + \frac{h^5}{120} f^V(x) + \dots,$$

причем производные ряда вычисляются при начальном значении аргумента  $x$ .

Далее можем написать

$$f'(x) = f'\left(x + \frac{h}{2}\right) - \frac{h}{2} f''(x) - \frac{h^2}{8} f'''(x) - \frac{h^3}{48} f^{IV}(x) - \frac{h^4}{120} f^V(x) + \dots;$$

$$f(x+h) = f(x) + hf'\left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{h^2}{24} f'''(x) + \frac{h^4}{48} f^{IV}(x) + \frac{11h^5}{1920} f^V(x) + \dots;$$

$$f''' \left( x + \frac{h}{2} \right) = f'''(x) + \frac{h}{2} f^{IV}(x) + \frac{h^2}{8} f^V(x) + \dots;$$

$$f(x+h) = f(x) + hf' \left( x + \frac{h}{2} \right) + \frac{h^3}{24} f''' \left( x + \frac{h}{2} \right) + \\ + \frac{h^5}{1920} f^V \left( x + \frac{h}{2} \right) + \dots$$

Другими словами, если в ряде Тейлора мы производные будем вычислять не при начальном значении аргумента  $x$ , а при среднем его значении  $x + \frac{h}{2}$ , то все члены с четными степенями  $h$  в ряде исчезнут, а члены с нечетными степенями  $h$  войдут с заметно уменьшенными (в 4, в 16 и т. д. раз) коэффициентами, что обуславливает значительно большую сходимость ряда. Имея в виду эти выгоды введения «средних» аргументов в ряд Тейлора, напомним теперь такие ряды

$$\left. \begin{aligned} B_2 - B_1 &= s \left( \frac{dB}{ds} \right)_{\frac{s}{2}} + \frac{s^3}{24} \left( \frac{d^3B}{ds^3} \right)_{\frac{s}{2}} + \frac{s^5}{1920} \left( \frac{d^5B}{ds^5} \right)_{\frac{s}{2}} \\ L_2 - L_1 &= s \left( \frac{dL}{ds} \right)_{\frac{s}{2}} + \frac{s^3}{24} \left( \frac{d^3L}{ds^3} \right)_{\frac{s}{2}} + \frac{s^5}{1920} \left( \frac{d^5L}{ds^5} \right)_{\frac{s}{2}} \\ A_{2,1} - A_{1,2} \pm 180^\circ &= s \left( \frac{dA}{ds} \right)_{\frac{s}{2}} + \frac{s^3}{24} \left( \frac{d^3A}{ds^3} \right)_{\frac{s}{2}} + \frac{s^5}{1920} \left( \frac{d^5A}{ds^5} \right)_{\frac{s}{2}} \end{aligned} \right\}. \quad (271)$$

В рядах (271) нижний значок  $\frac{s}{2}$  показывает, что производные вычисляются для средней точки на геодезической кривой  $AB$ .

Назовем теперь

$$B_m = \varphi_m = \frac{B_2 + B_1}{2}, \quad A_m = \frac{A_{1,2} + A_{2,1} \pm 180^\circ}{2},$$

широту же в точке  $M$ , лежащей на расстоянии  $\frac{s}{2}$  от  $A$  и от  $B$ , — через  $\varphi_0$ , азимут геодезической линии в той же точке — через  $A_0$  (по направлению на  $B$ ). Конечно,  $\varphi_0$  близко к  $\varphi_m$ , и  $A_0$  близко к  $A_m$ . Прилагая ряды (69) к геодезической линии  $MA$ , для которой точка  $M$  является начальной, мы напишем

$$B_1 - \varphi_0 = -\frac{s}{2} \left( \frac{dB}{ds} \right)_{\frac{s}{2}} + \frac{s^2}{8} \left( \frac{d^2B}{ds^2} \right)_{\frac{s}{2}} - \frac{s^3}{48} \left( \frac{d^3B}{ds^3} \right)_{\frac{s}{2}} + \dots,$$

$$B_2 - \varphi_0 = \frac{s}{2} \left( \frac{dB}{ds} \right)_{\frac{s}{2}} + \frac{s^2}{8} \left( \frac{d^2B}{ds^2} \right)_{\frac{s}{2}} + \frac{s^3}{48} \left( \frac{d^3B}{ds^3} \right)_{\frac{s}{2}} + \dots,$$

полагая, что в  $\left( \frac{dB}{ds} \right)$ ,  $\left( \frac{d^2B}{ds^2} \right)$  и  $\left( \frac{d^3B}{ds^3} \right)$  азимут в  $M$  берется в направлении с  $M$  на  $B$ .

Отсюда

$$\varphi_m - \varphi_0 = \frac{s^2}{8} \left( \frac{d^2B}{ds^2} \right)_{\frac{s}{2}} + \frac{s^4}{384} \left( \frac{d^4B}{ds^4} \right)_{\frac{s}{2}} + \dots \quad (272)$$

Точно так же получим

$$A_m - A_0 = \frac{s^2}{8} \left( \frac{d^2A}{ds^2} \right)_{\frac{s}{2}} + \frac{s^4}{384} \left( \frac{d^4A}{ds^4} \right)_{\frac{s}{2}} + \dots \quad (273)$$

Из формул (256) и (258) легко получаем

$$\begin{aligned} \varphi_m &= B_1 + \frac{u_1}{2} V_1^2 - \frac{v_1^2}{4 \rho''} v_1^2 t_1 - \frac{3}{4} \frac{V_1^2}{\rho''} \eta_1^2 t_1 u_1^2 - \\ &- \frac{v_1^2 u_1 V_1^2}{12 \rho''^2} (1 + 3 t_1^2 + \eta_1^2 - 9 \eta_1^2 t_1^2) - \frac{u_1^3 \eta_1^2 V_1^2}{4 \rho''^2} (1 + \eta_1^2 - t_1^2 - 5 \eta_1^2 t_1^2); \\ \varphi_0 &= B_1 + \frac{u_1}{2} V_1^2 - \frac{V_1^2}{8 \rho''} v_1^2 t_1 - \frac{3}{8} \frac{V_1^2}{\rho''} \eta_1^2 t_1 u_1^2 - \\ &- \frac{v_1^2 u_1 V_1^2}{48 \rho''^2} V_1^2 (1 + 3 t_1^2 + \eta_1^2 - 9 \eta_1^2 t_1^2) - \frac{u_1^3 \eta_1^2 V_1^2}{16 \rho''^2} (1 + \eta_1^2 - t_1^2 - 5 \eta_1^2 t_1^2); \\ \varphi_0 - \varphi_m &= \frac{V_1^2}{8 \rho''} v_1^2 t_1 + \frac{3}{8} \frac{V_1^2}{\rho''} \eta_1^2 t_1 u_1^2 + \frac{v_1^2 u_1}{16 \rho''^2} V_1^2 (1 + \eta_1^2 + 3 t_1^2 - 9 \eta_1^2 t_1^2) + \\ &+ \frac{3}{16} \frac{\eta_1^2 V_1^2}{\rho''^2} (1 + \eta_1^2 - t_1^2 - 5 \eta_1^2 t_1^2) u_1^3; \end{aligned} \quad (274)$$

$$\begin{aligned} A_m \pm 180^\circ &= A_{1,2} + \frac{v_1 t_1}{2} + \frac{v_1 u_1}{4 \rho''} (1 + 2 t_1^2 + \eta_1^2) + \\ &+ \frac{u_1^2 v_1 t_1}{12 \rho''^2} [V_1^2 (5 - 4 \eta_1^2) + 6 t_1^2] - \frac{v_1^3 t_1}{12 \rho''^2} (V_1^2 + 2 t_1^2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_0 \pm 180^\circ &= A_{1.2} + \frac{\nu_1 t_2}{2} + \frac{\nu_1 u_1}{8 \rho''} (1 + 2 t_1^2 + \eta_1^2) + \\
&+ \frac{u_1^2 \nu_1 t_1}{48 \rho''^2} [V_1^2 (5 - 4 \eta_1^2) + 6 t_1^2] - \frac{\nu_1^3 t_1}{48 \rho''^2} (V_1^2 + 2 t_1^2); \\
A_0 - A_m &= -\frac{\nu_1 u_1}{8 \rho''} (1 + 2 t_1^2 + \eta_1^2) - \frac{u_1^2 \nu_1 t_1}{16 \rho''^2} [V_1^2 (5 - 4 \eta_1^2) + 6 t_1^2] + \\
&+ \frac{\nu_1^3 t_1}{16 \rho''^2} (V_1^2 + 2 t_1^2). \quad (275)
\end{aligned}$$

Из (274) и (275) следует, что  $(A_0 - A_m)$  и  $(\varphi_0 - \varphi_m)$  суть малые величины 2-го порядка. Так как

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^2 B}{ds^2}\right)_{\frac{s}{2}} &= \left(\frac{d^2 B}{ds^2}\right)_m + \frac{\partial \left(\frac{d^2 B}{ds^2}\right)}{\partial B} (\varphi_0 - \varphi_m) + \frac{\partial \left(\frac{d^2 B}{ds^2}\right)}{\partial A} (A_0 - A_m) + \dots, \\
\left(\frac{d^2 A}{ds^2}\right)_{\frac{s}{2}} &= \left(\frac{d^2 A}{ds^2}\right)_m + \frac{\partial \left(\frac{d^2 A}{ds^2}\right)}{\partial B} (\varphi_0 - \varphi_m) + \frac{\partial \left(\frac{d^2 A}{ds^2}\right)}{\partial A} (A_0 - A_m) + \dots;
\end{aligned}$$

то мы заключаем, что с ошибкой лишь на величины четвертого порядка имеют место равенства

$$\begin{aligned}
\varphi_m - \varphi_0 &= \frac{s^2}{8} \left(\frac{d^2 B}{ds^2}\right)_m, \\
A_m - A_0 &= \frac{s^2}{8} \left(\frac{d^2 A}{ds^2}\right)_m.
\end{aligned}$$

Далее напишем

$$\left(\frac{dB}{ds}\right)_{\frac{s}{2}} = \left(\frac{dB}{ds}\right)_m + \frac{\partial \left(\frac{dB}{ds}\right)}{\partial B} (\varphi_0 - \varphi_m) + \frac{\partial \left(\frac{dB}{ds}\right)}{\partial A} (A_0 - A_m)$$

(с ошибкой на величины 4-го порядка).

Используя же формулы производных, данные в § 31, получим

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dB}{ds}\right)_{\frac{s}{2}} &= \left(\frac{dB}{ds}\right)_m + \frac{3}{8} \frac{V_m}{c} \eta_m^2 t_m \cos A_m s^2 \left(\frac{d^2 B}{ds^2}\right)_m + \\
&+ \frac{V_m^3}{8c} \sin A_m s^2 \left(\frac{d^2 A}{ds^2}\right)_m; \\
\left(\frac{dB}{ds}\right)_{\frac{s}{2}} &= \frac{V_m^3}{c} \cos A_m - \frac{3}{8} \frac{V_m^5}{c^3} \eta_m^2 t_m^2 (\sin^2 A_m + 3 \eta_m^2 \cos^2 A_m) \cos A_m s^2 + \\
&+ \frac{V_m^5}{8c^3} \sin^2 A_m \cos A_m (1 + 2 t_m^2 + \eta_m^2) s^2.
\end{aligned}$$



Так как  $\left(\frac{d^3 B}{ds^3}\right)_{\frac{s}{2}}$  отличается от  $\left(\frac{d^3 B}{ds^3}\right)_m$ , очевидно, на величину второго порядка, то, отбрасывая в (271) величины пятого порядка, можем принять

$$\left(\frac{d^3 B}{ds^3}\right)_{\frac{s}{2}} = \left(\frac{d^3 B}{ds^3}\right)_m.$$

Теперь, пренебрегая малыми величинами пятого порядка, можем первую формулу из (271) написать так

$$\begin{aligned} B^2 - B_1 = \frac{V_m^2 \rho''}{N_m} s \cos A_m \left\{ 1 - \frac{3}{8} \frac{s^2}{N_m^2} \eta_m^2 t_m^2 (\sin^2 A_m + 3 \eta_m^2 \cos^2 A_m) + \right. \\ + \frac{s^2 \sin^2 A_m}{8 N_m^2} (1 + 2 t_m^2 + \eta_m^2) - \\ - \frac{s^2}{24 N_m^2} \sin^2 A_m (1 + 3 t_m^2 + \eta_m^2 - 9 \eta_m^2 t_m^2) - \\ - \frac{s^2}{24 N_m^2} \cos^2 A_m (3 \eta_m^2 - 3 \eta_m^2 t_m^2 + 3 \eta_m^4 - \\ \left. - 15 \eta_m^4 t_m^2) \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2 - B_1 = (1)_m s \cos A_m \left\{ 1 + \frac{s^2}{24 N_m^2} [\sin^2 A_m (2 + 3 t_m^2 + 2 \eta_m^2) + \right. \\ \left. + 3 \eta_m^2 \cos^2 A_m (t_m^2 - 1 - \eta_m^2 - 4 \eta_m^2 t_m^2)] \right\}. \quad (276) \end{aligned}$$

Формула (276) еще не окончательная — мы будем ее преобразовывать. Совершенно аналогично с прежним мы пишем

$$\begin{aligned} \left(\frac{dl}{ds}\right)_{\frac{s}{2}} &= \left(\frac{dl}{ds}\right)_m + \frac{\partial \left(\frac{dl}{ds}\right)}{\partial B} (\varphi_0 - \varphi_m) + \frac{\partial \left(\frac{dl}{ds}\right)}{\partial A} (A_0 - A_m); \\ \left(\frac{dl}{ds}\right)_{\frac{s}{2}} &= \left(\frac{dl}{ds}\right)_m + \left(\frac{\eta_m^2 t_m}{c V_m} \sec B_m \sin A_m - \frac{V_m}{c} t_m \sec B_m \sin A_m\right) \frac{s^2}{8} \left(\frac{d^2 B}{ds^2}\right)_m - \\ &\quad - \frac{V_m}{8 c} \sec B_m \cos A_m s^2 \left(\frac{d^2 A}{ds^2}\right)_m; \\ \left(\frac{dl}{ds}\right)_{\frac{s}{2}} &= \left(\frac{dl}{ds}\right)_m + \left\{ \frac{V_m^3}{c^3} t_m^2 \sin^3 A_m + 3 \eta_m^2 t_m^2 \sin A_m \cos^2 A_m \frac{V_m^3}{c^3} \right\} \frac{s^2}{8} \sec B_m - \\ &\quad - \frac{V_m^3}{c^3} \sin A_m \cos^2 A_m (1 + 2 t_m^2 + \eta_m^2) \frac{s^2}{8} \sec B_m; \\ l_{1.2} &= (2)_m s \sec B_m \sin A_m \left\{ 1 + \frac{s^2}{24 N_m^2} [\sin^2 A_m t_m^2 - \right. \\ &\quad \left. - \cos^2 A_m (1 + \eta_m^2 - 9 \eta_m^2 t_m^2)] \right\}. \quad (277) \end{aligned}$$

Формула (277) также подлежит еще дальнейшим преобразованиям. Для азимута напишем аналогично

$$\begin{aligned} \left(\frac{dA}{ds}\right)_{\frac{s}{2}} &= \left(\frac{dA}{ds}\right)_m + \frac{\partial \left(\frac{dA}{ds}\right)}{\partial B} (\varphi_0 - \varphi_m) + \frac{\partial \left(\frac{dA}{ds}\right)}{\partial A} (A_0 - A_m); \\ \left(\frac{dA}{ds}\right)_{\frac{s}{2}} &= \left(\frac{dA}{ds}\right)_m - \left( \frac{V_m}{c} (1+t_m^2) \sin A_m - \frac{\eta_m^2 t_m}{c V_m} \operatorname{tg} B_m \sin A_m \right) \left(\frac{d^2 B}{ds^2}\right)_m \frac{s^2}{8} - \\ &\quad - \frac{V_m}{c} t_m \cos A_m \left(\frac{d^2 A}{ds^2}\right)_m \frac{s^2}{8}; \\ \left(\frac{dA}{ds}\right)_{\frac{s}{2}} &= \frac{V_m}{c} t_m \sin A_m + \frac{V_m^5}{c^3} t_m (1+t_m^2) \sin^3 A_m \frac{s^2}{8} - \\ &\quad - \eta_m^2 t_m^3 \sin^3 A_m \frac{V_m^3}{c^3} \frac{s^2}{8} + \\ &\quad + \frac{3}{8} \frac{V_m^5}{c^3} t_m (1+t_m^2) \eta_m^2 \sin A_m \cos^2 A_m s^2 - \\ &\quad - \frac{3}{8} \eta_m^4 \frac{V_m^3}{c^3} \sin A_m \cos^2 A_m t_m^3 s^2 - \\ &\quad - \frac{V_m^3}{c^3} \sin A_m \cos^2 A_m t_m (1+2t_m^2 + \eta_m^2) \frac{s^2}{8}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{2,1} &= A_{1,2} \pm 180^\circ + \\ &\quad + (2)_m s \sin A_m t_m \left\{ 1 + \frac{s^2}{24 N_m^2} [2 \cos^2 A_m + \cos^2 A_m (7 \eta_m^2 + \right. \\ &\quad \left. + 9 \eta_m^2 t_m^2 + 5 \eta_m^4) + \sin^2 A_m (2 + t_m^2 + 2 \eta_m^2)] \right\}. \end{aligned} \quad (278)$$

При преобразовании формул (276), (277) и (278), обеспечивающих возможно более удобное их вычисление, имеем в виду, что с ошибкой лишь на величины пятого порядка

$$\begin{aligned} l &= \frac{s}{N_m} \sin A_m \sec B_m; \\ b &= \frac{s}{M_m} \cos A_m; \quad t = \frac{s}{N_m} \sin A_m \operatorname{tg} B_m. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= B_1 + (1)_m s \cos A_m \left\{ 1 + \frac{l''^2_{1,2} \cos^2 B}{24 \rho''^2} (2 + 3 t_m^2 + 2 \eta_m^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{b''^2 \eta_m^2}{8 \rho''^2} \frac{(t_m^2 - 1 - \eta_m^2 - 4 \eta_m^2 t_m^2)}{V_m^4} \right\} \\ L_2 &= L_1 + (2)_m s \sin A_m \sec B_m \left\{ 1 + \frac{l''^2_{1,2} \sin^2 B_m}{24 \rho''^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{b''^2}{24 V_m^4 \rho''^2} (1 + \eta_m^2 - 9 \eta_m^2 t_m^2) \right\} \\ A_{2,1} &= A_{1,2} \pm 180^\circ + (2)_m s \sin A_m \operatorname{tg} B_m \left\{ 1 + \frac{b''^2}{24 V_m^4 \rho''^2} (2 + 7 \eta_m^2 + \right. \\ &\quad \left. + 9 \eta_m^2 t_m^2 + 5 \eta_m^4) + \frac{l''^2_{1,2} \cos^2 B_m}{24 \rho''^2} (2 + t_m^2 + 2 \eta_m^2) \right\} \end{aligned} \right\}. \quad (279)$$

Формулы (279) и являются окончательными; только что выполненное преобразование формул (276), (277) и (278) сопровождалось добавочными ошибками на величины пятого порядка, и, следовательно, несколько понизило первоначальную их точность. Так как формулы Шрейбера также ошибочны только на величины пятого порядка, то возникает вопрос: имеют ли эти формулы (279) какие-нибудь преимущества в отношении точности их, по сравнению с формулами Шрейбера? Приходится иметь в виду, что при применении «средних» аргументов коэффициенты при слагаемых пятого порядка будут в несколько раз менее, чем при применении начальных аргументов, поэтому а priori уже можно заключить, что точность формул (279) более точности формул Шрейбера.

Подсчеты показывают, что в широтах, меньших  $57^\circ$ , и при  $s < 160$  км, ошибка в долготе меньше  $0'',0001$ ; при тех же условиях ошибка в широте менее  $0'',00007$ . Так как в прямой передаче координат на расстояние в 200 км можно допустить ошибку в  $0'',0002$  в широте и в  $0'',0003$  в долготу, то предельное расстояние для применения формул (279) определяется именно в 200 км. Если удерживать в координатах только тысячные доли секунды, то тогда формулы (279) могут быть применены до расстояний в 225 км. Таким образом, выясняется, что выведенные формулы с средней широтой и с средним азимутом могут иметь *надлежащее применение при расстояниях  $s$ , лежащих в пределах от 120 до 225 км*. Формулы эти точнее формул Шрейбера, так как в широтах, меньших  $56^\circ$ , при  $s = 120$  км дают в широте ошибку, меньшую  $0'',00001$ , и в долготу — меньшую  $0'',00002$ .

Прежде чем говорить о применении этих формул (279), нужно сказать, что точка на геодезической линии  $AB$ , имеющая среднюю широту  $\varphi_m$ , не совпадает с точкой, в которой азимут кривой равен

$$A_m = \frac{A_{1,2} + A_{2,1} \pm 180^\circ}{2}.$$

Это ведет только к тому, что мы дифференцируем

$$\frac{dB}{ds}, \quad \frac{dl}{ds} \quad \text{и} \quad \frac{dA}{ds}$$

по  $B$  и  $A$ , как по независимым переменным.

Введем теперь обозначения

$$\begin{aligned} (3) &= \frac{\mu 10^7}{24 \rho'^2}; & (4) &= \frac{\mu 10^7}{24 \rho'^2} \frac{1 + \eta^2 - 9 \eta^2 t^2}{V^4}; \\ (5) &= \frac{\mu 10^7}{24 \rho'^2} (2 + 3 t^2 + 2 \eta^2); & (6) &= \frac{\mu 10^7}{8 \rho'^2} \eta^2 \frac{t^2 - 1 - \eta^2 - 4 \eta^2 t^2}{V^4}; \\ (7) &= \frac{\mu}{12 \rho'^2} V^2; & (8) &= \frac{\mu}{24 \rho'^2} \frac{3 + 8 \eta^2 + 5 \eta^4}{V^4} \end{aligned}$$

( $\mu$  — модуль неперовых логарифмов);

$$\tau'' = l''_{1,2} \sin B_m.$$

С этими обозначениями будем иметь

$$b'' = (1)_m s \cos A_m \left[ 1 + \frac{(5)_m}{\mu} l''_{1,2} \cos^2 B_m + \frac{(6)_m}{\mu} b''^2 \right];$$

$$l''_{1.2} = (2)_m s \sin A_m \sec B_m \left[ 1 + \frac{(3)}{\mu} l''_{1.2} \sin^2 B_m - \frac{(4)_m}{\mu} b''^2 \right];$$

$$t'' = (2)_m s \sin A_m \operatorname{tg} B_m \left[ 1 + \frac{(7)_m}{\mu} l''_{1.2} \cos^2 B_m + \frac{(8)_m (4)_m}{\mu} b''^2 + \frac{(3)_m}{\mu} l''_{1.2} \sin^2 B_m \right];$$

$$t = A_{2.1} - A_{1.2} \pm 180^\circ = l \sin B_m \left[ 1 + \frac{(7)}{\mu} l'' \cos^2 B_m + \frac{(8)}{\mu} b''^2 \right];$$

$$\lg b'' = \lg [(1)_m s \cos A_m] + (5)_m l''_{1.2} \cos^2 B_m + (6)_m b''^2$$

$$\lg l''_{1.2} = \lg [(2)_m s \sin A_m \sec B_m] + (3) \tau''^2 - (4) b''^2$$

$$\lg t'' = \lg [(2)_m s \sin A_m \operatorname{tg} B_m] + (7)_m l''_{1.2} \cos^2 B_m + (8)_m b''^2 + \Delta \lg l''_{1.2}; \quad (280)$$

$$\lg t'' = \lg [l''_{1.2} \sin B_m] + (7)_m l''_{1.2} \cos^2 B_m + (8)_m b''^2$$

$$B_2 = B_1 + b;$$

$$L_2 = L_1 + l_{1.2}; \quad A_{2.1} = A_{1.2} \pm 180^\circ + t.$$

Существенным неудобством формул (279) и (280) является то, что вычисление по ним должно выполняться постепенными приближениями.

Допустим, что мы с карты взяли широту и долготу точки  $B$  с ошибкой в той и в другой в  $2''$ . Средняя широта  $B_m^\circ$  будет тогда получена с ошибкой около  $1''$ . Образовав  $L_2 - L_1 = l_{1.2}$ , вычислим  $t_0 = l_{1.2} \sin B_m^\circ$  и выведем

$$A_m^\circ = A_{1.2} + \frac{l_{1.2} \sin B_m}{2}$$

с ошибкой около  $2''$ , учитывая и влияние отброшенных поправочных членов в  $t$ .

Вычислим теперь с  $B_m^\circ$  и  $A_m^\circ$  главные члены:  $(1)_m s \cos A_m^\circ$  и  $(2)_m s \sin A_m^\circ \operatorname{tg} B_m^\circ$ , которые определяются при вычислениях их шестизначными логарифмами при  $s = 200$  км в широте  $60^\circ$ , с ошибкой, меньшей соответственно  $0'',06$  и  $0'',18$ . С теми же  $B_m^\circ$  и  $A_m^\circ$  вычисляем четырехзначными логарифмами поправочные члены формул для  $b''$  и  $t''$ , которые получаем с полной точностью до сотых долей секунды. Теперь выводим

$$B'_m = B_1 + \frac{b'}{2}; \quad A'_m = A_{1.2} + \frac{t'}{2},$$

которые будут максимально ошибочны соответственно на  $0'',03$  и  $0'',09$ . После этого первого вычисления  $B_m$  и  $A_m$  окончательно выводим поправочные члены (с пятизначными логарифмами), вновь вычисляем, уже восьмизначными логарифмами,  $b$  и  $t$ , и вновь выводим

$$B''_m = B_1 + \frac{b''}{2}; \quad A''_m = A_{1.2} + \frac{t''}{2}.$$

С этими последними величинами, не перевычисляя поправочных членов, вычисляем еще раз и окончательно  $b$ ,  $t$  и, кроме того,  $l_{1.2}$ .

Если имеется в распоряжении только карта в масштабе  $1:200\,000$ , то по ней вряд ли удастся взять широту и долготу с ошибкой, меньшей  $4''$ . Тогда ошибки в  $B'_m$  и  $A'_m$  будут соответственно меньше  $0'',06$  и  $0'',15$ ;  $B''_m$  и  $A''_m$  будут ошибочны все-таки только в тысячных долях

секунды ( $0'',002-0'',003$ ); после вычисления  $b$  и  $t$  с этими  $B''_m$  и  $A''_m$  придется может быть вывести  $B'''_m = B_1 + \frac{b'''}{2}$  и  $A'''_m = A_{1,2} + \frac{t'''}{2}$  и затем с  $B'''_m$  и  $A'''_m$  еще раз и окончательно вычислять  $b$ ,  $t$  и  $l_{1,2}$ , причем необходимость вывода  $B'''_m$  и  $A'''_m$  выясняется сравнением их с  $B''_m$  и  $A''_m$  и установлением могущих быть перемен в восьмом знаке логарифмов  $\cos A_m$ ,  $\sin A_m$  и  $\operatorname{tg} B_m$ .

Уместно еще отметить, что формулы (279) в несколько ином виде были выведены еще Гауссом на основании применения им его же теории конформного отображения эллипсоида на шаре. Мы дадим изложение гауссова метода в особой главе.

### § 34. Формулы «с средней широтой и средним азимутом» для расстояний, не превышающих 40 км. Формулы Гаусса для вычислений в триангуляции I класса

Члены с  $\eta^2$  в коэффициентах (5) и (6) влияют на величину  $b''$  в широтах более южных, чем  $60^\circ$ , при  $s < 40$  км вообще менее чем на  $0'',00003$ ; члены с  $\eta^2$  в (4) при тех же условиях влияют на  $l_{1,2}$  менее чем на  $0'',00006$ . Поэтому прежде всего от (280) переходим к формулам, в которых отброшены величины порядка  $\frac{\eta^2 s^3}{R^3}$

$$\begin{aligned} b'' &= (1)_m s \cos A_m \left[ 1 + \frac{l''^2_{1,2} \cos^2 B_m}{24 \rho''^2} (2 + 3 \operatorname{tg}^2 B_m) \right]; \\ l''_{1,2} &= (2)_m s \sin A_m \sec B_m \left[ 1 + \frac{l''^2_{1,2} \sin^2 B_m}{24 \rho''^2} - \frac{b''^2}{24 \rho''^2} \right]; \\ t'' &= (2)_m s \sin A_m \operatorname{tg} B_m \left[ 1 + \frac{l''^2_{1,2} \cos^2 B_m}{12 \rho''^2} + \frac{b''^2}{12 \rho''^2} + \frac{l''^2_{1,2} \sin^2 B_m}{24 \rho''^2} \right]. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\left. \begin{aligned} b'' &= (1)_m s \cos A_m \left[ 1 + \frac{l''^2_{1,2}}{12 \rho''^2} + \frac{t''^2}{24 \rho''^2} \right] \\ l'' &= (2)_m s \sin A_m \sec B_m \left[ 1 - \frac{b''^2}{24 \rho''^2} + \frac{t''^2}{24 \rho''^2} \right] \\ t'' &= (2)_m s \sin A_m \operatorname{tg} B_m \left[ 1 + \frac{b''^2}{12 \rho''^2} - \frac{l''^2}{24 \rho''^2} + \frac{l''^2_{1,2}}{12 \rho''^2} \right] \end{aligned} \right\}. \quad (281)$$

Эти формулы (281) носят название гауссовых формул; они применялись в России до начала 90-х годов при обработке тогдашних триангуляций I класса, и только примерно с 1904—1906 гг. были заменены несколько упрощенными формулами (270).

Обозначим, как это было сделано в (270),

$$\frac{\eta^2 10^7}{6 \rho''^2} x^2 = \sigma(x).$$

Тогда (281) перепишем так

$$\left. \begin{aligned} \lg b'' &= \lg [(1)_m s \cos A_m] + \frac{\sigma(l''_{1,2})}{2} + \frac{\sigma(t'')}{4} \\ \lg l''_{1,2} &= \lg [(2)_m s \sin A_m \sec B_m] - \frac{\sigma(b'')}{4} + \frac{\sigma(t'')}{4} \\ \lg t'' &= \lg [(2)_m s \sin A_m \operatorname{tg} B_m] + \frac{\sigma(b'')}{2} - \frac{\sigma(t'')}{4} + \frac{\sigma(l''_{1,2})}{2} \end{aligned} \right\}. \quad (282)$$

Формулы (282) Гаусса должны вычисляться, применяя путь постепенных приближений; это их слабая сторона, которая и вынудила к переходу от них к формулам Шрейбера в геодезическом производстве. Но компактность и простота, конечно, составляют существенное достоинство этих формул. Поэтому следует их не отбрасывать, а сообразить простой прием получения возможно лучше в первом приближении величин  $B_m$  и  $A_m$ . Представляется целесообразным поступить так:

1) вычислить пятизначными логарифмами и с сотыми долями секунды:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= (1)_1 s \cos A_{1.2}; & B'_0 &= B_1 + \beta; & \gamma &= (2)_0 s \sin A_{1.2} \\ B^0_m &= B_1 + \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma^2}{4 \rho''} \operatorname{tg} B'_0 \left( \lg \frac{1}{4 \rho''} = 4.08351 - 10 \right) \\ A^0_m &= A_{1.2} + \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} B'_0 - \frac{\beta \gamma}{4 \rho''} \left( \frac{1}{4 \rho''} = 0.000001212 \right) \end{aligned} \right\}; \quad (283)$$

ошибочность  $B^0_m$  и  $A^0_m$  не превышает  $0'',03$ ;

2) с  $t_0 = \gamma \operatorname{tg} B'_0$ ,  $b_0 = \beta$  и  $l^0_{1.2} = \gamma \sec B'_0$  выбрать из таблиц поправочные члены формул (282);

3) вычислить с полным числом знаков  $b'$  и  $t'$  по полным формулам (282) и получить затем  $B'_m = B_1 + \frac{b'}{2}$  и  $A'_m = A_{1.2} + \frac{t'}{2}$  с ошибкой уже менее  $0'',0001$  в  $B'_m$  и  $0'',0005$  в  $A'_m$ ;

4) повторить вычисление  $b$  и  $t$  и вычислить  $l_{1.2}$  с  $B'_m$  и  $A'_m$ , чем дело и заканчивается, причем поправочные члены остаются теми самыми, как они определены были в действии по п. 2, величины  $(1)_m$  и  $(2)_m$  остаются теми же самыми, как они были выбраны в действии п. 3, и исправлению подлежат лишь в восьмом знаке логарифма  $\lg \cos A_m$ ,  $\lg \sin A_m$ ,  $\lg \sec B_m$  и  $\lg \operatorname{tg} B_m$ , причем не все из этих логарифмов в действии по п. 4 придется поправлять.

Нужно сказать, что в широтах, меньших  $55^\circ$ , при  $s < 40$  км в действии по п. 3 величина  $b'$  получится с ошибкой, вряд ли большей  $0'',0001$  и  $t'$  — с ошибкой, вряд ли большей  $0'',0005$ ; поэтому при этих условиях нет нужды выполнять вычислительные действия, значащиеся в п. 4, кроме вычисления с  $B''_m$  и  $A''_m$  разности долгот  $l_{1.2}$ .

Вычисления формул (283) являются добавочными действиями, вызываемыми методом постепенных приближений, но эти действия очень не сложны. Всех строк при вычислении по формулам Шрейбера имеется 54; при применении же только что указанного порядка вычисления по формулам Гаусса в схеме будет 52 строки, если не выполнять действий, указанных в п. 4. Отсюда я позволяю себе сделать заключение, что при наличии таблиц для  $\frac{\gamma^2}{4 \rho''} \operatorname{tg} B$  и при хорошем навыке, скорость вычислений по формулам Гаусса в обычных условиях ( $s$  — около 30—35 км,  $B_m$  — около  $55^\circ$ ) будет не меньше скорости вычислений по формулам Шрейбера (270), но компактность гауссовых формул, конечно, делает вычислительный труд более приятным и менее утомительным.

### § 35. Формулы Крюгера

Мы имеем формулы Шрейбера, которые наиболее просто решают прямую геодезическую задачу для расстояний до 120 км и тем самым собственно обслуживают все запросы вычисления широт, долгот и азимутов при передаче этих величин на расстояния порядка длин сторон триангуляции I класса. Далее мы имеем формулы с средней широтой и

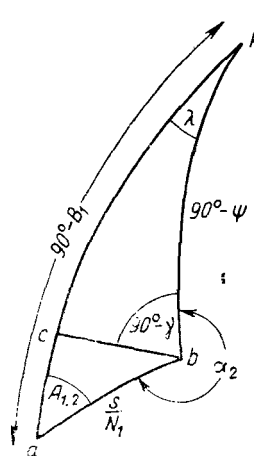
средним азимутом, которые предназначаются для расстояний от 100 до 200 км и могут обслуживать научные задачи геодезии, а также задачу уравнивания большой астрономо-геодезической сети, когда триангуляционное звено может быть заменяемо геодезической линией, соединяющей конечные лапласовы точки звена и имеющей длину 200—250 км. Однако решение по этим формулам со средней широтой и средним азимутом при расстояниях более 100 км громоздко из-за необходимости применять путь постепенных приближений; только для расстояний, меньших 40 км, эта громоздкость может быть признана не имеющей места.

В 1919 году Крюгер дал особое решение прямой геодезической задачи, которое пригодно для расстояний до 160 км. Решение основано на некотором первоначальном переходе на сферу, на которой задача сперва и решается; затем выполняется переход от этой сферы на эллипсоид, причем в этой последней стадии остроумный подбор широтного аргумента приводит к ряду упрощений.

Переходим к выводу формул. Попреежнему обозначаем:

данные для точки  $A$  широту и долготу — через  $B_1$  и  $L_1$ ,  
 искомые „ „  $B$  „ „ „ „  $B_2$  и  $L_2$ ,  
 данный азимут в  $A$  геодезической линии  $AB$  — через  $A_{1,2}$ ,  
 искомый „ „  $B$  „ „ „ „  $A_{2,1}$ ,  
 длину геодезической линии  $AB$  — через  $s$ .

Представим себе, что (черт. 46) на сфере радиуса  $N_1 = \frac{a}{1 - e^2 \sin^2 B_1} =$



$\rho = \frac{V_1}{c}$  мы построим сферический полярный треугольник  $abp$ , причем: точка  $a$  имеет на сфере широту  $B_1$ , дуга большого круга  $ab$  имеет в  $a$  азимут  $A_{1,2}$ , а длина этой дуги  $ab$  равна  $s$ . Назовем разность долгот точек  $a$  и  $b$  через  $\lambda$ , сферическую широту  $b$  через  $\psi$  и обратный азимут дуги  $ba$  в  $b$  через  $\alpha_2$ . Очевидно, если в формуле (256) мы положим  $\eta_2^2 = 0^*$ , то из нее вместо  $B_2 \dots B_1$  получим  $\psi - B_1$ , т. е.

$$\begin{aligned} \psi - B_1 = & u_1 - \frac{v_1^2 t}{2\rho''} - \frac{v_1^2 u_1}{6\rho''^2} (1 + 3t_1^2) + \\ & + \frac{v_1^4}{24\rho''^3} t_1 (1 + 3t_1^2) - \frac{v_1^2 u_1^2}{12\rho''^3} (4 + 6t_1^2) t_1 + \\ & + \text{члены пятого порядка.} \end{aligned} \quad (284)$$

Вычитая из (256) равенство (284) и сейчас же умножая результат на  $V_1^2$ , получим

$$\begin{aligned} (B_2 - B_1) - V_1^2 (\psi - B_1) = & -V_1^2 \eta_1^2 \left\{ \frac{3}{2\rho''} t_1 u_1^2 + \frac{v_1^2 u_1}{6\rho''^2} (1 - 9t_1^2) + \right. \\ & \left. + \frac{u_1^3}{2\rho''^2} (1 - t_1^2) \right\}, \end{aligned} \quad (285)$$

\* При этом будем, как следствие, иметь, что  $V^2 = 1$ .

причем в (285) отброшены члены порядка  $u_1^3 \gamma_1^4$ ,  $\gamma_1^2 v_1^4$ , . . . , т. е. члены пятого порядка и более малые. Поступая аналогичным образом и с тою же точностью, из (257) и (258) напишем

$$(l_{1,2} - \lambda) \cos B_1 = \frac{v_1 u_1^2}{3 \rho''^2} \gamma_1^2; \quad (286)$$

$$A_{2,1} - A_{1,2} - (\alpha_2 - A_{1,2}) = \frac{v_1 u_1}{2 \rho''} \gamma_1^2 - \frac{v_1^3}{6 \rho''^2} t_1 \gamma_1^2 + \frac{v_1 u_1^2}{6 \rho''^2} t_1 \gamma_1^2. \quad (287)$$

Формула (285) подлжит искусственному преобразованию, способствующему упрощению вычислений. Заменяя  $V_1^2$  через  $1 + \gamma_1^2$ , получаем

$$B_2 - \psi - \gamma_1^2 (\psi - B_1) = \\ = - (1 + \gamma_1^2) \gamma_1^2 \left\{ \frac{3}{2 \rho''} t_1 u_1^2 + \frac{v_1^2 u_1}{6 \rho''^2} (1 - 9 t_1^2) + \frac{u_1^3}{2 \rho''^2} (1 - t_1^2) \right\}. \quad (288)$$

Обозначая

$$\psi - B_1 = \Delta \psi,$$

представим в виде ряда  $\cos^2 \left( B_1 + \frac{3}{4} \Delta \psi \right)$ . Имеем

$$\frac{d(\cos^2 B)}{dB} = -2 \cos^2 B \operatorname{tg} B; \quad \frac{d^2(\cos^2 B)}{dB^2} = 2(\sin^2 B - \cos^2 B); \\ \cos^2 \left( B_1 + \frac{3}{4} \Delta \psi \right) = \cos^2 B_1 \left\{ 1 - \frac{3}{2 \rho''} t_1 \Delta \psi - \frac{9}{16 \rho''^2} (1 - t_1^2) \Delta \psi^2 + \dots \right\};$$

или

$$e'^2 \cos^2 \left( B_1 + \frac{3}{4} \Delta \psi \right) \Delta \psi = \\ = \gamma_1^2 \left\{ \Delta \psi - \frac{3}{2 \rho''} t_1 \Delta \psi^2 - \frac{9}{16 \rho''^2} (1 - t_1^2) \Delta \psi^3 + \dots \right\}. \quad (289)$$

Но  $\Delta \psi = \psi - B_1$  представлено правой частью (285), причем для подстановки в члены с  $\Delta \psi^2$  и  $\Delta \psi^3$  правой части (289) достаточно взять

$$\Delta \psi = u_1 - \frac{v_1^2 t_1}{2 \rho''}.$$

Поэтому (289) переписываем так

$$e'^2 \cos^2 \left( B_1 + \frac{3}{4} \Delta \psi \right) \Delta \psi = \\ = \gamma_1^2 \left\{ \Delta \psi - \frac{3}{2 \rho''} t_1 u_1^2 + \frac{3}{2 \rho''^2} t_1^2 u_1 v_1^2 - \frac{9}{16 \rho''^2} (1 - t_1^2) u_1^3 + \dots \right\}.$$

Возвращаясь к (288), напишем

$$B_2 - \psi - \gamma_1^2 \Delta \psi = - \gamma_1^2 \left\{ \frac{3}{2 \rho''} t_1 u_1^2 + \frac{v_1^2 u_1}{6 \rho''^2} (1 - 9 t_1^2) + \right. \\ \left. + \frac{u_1^3}{2 \rho''^2} (1 - t_1^2) + \frac{3}{2 \rho''} t_1 \gamma_1^2 u_1^2 \right\}; \\ B_2 - \psi = e'^2 \Delta \psi \cos^2 \left( B_1 + \frac{3}{4} \Delta \psi \right) - \frac{3}{2 \rho''} \gamma_1^4 t_1 u_1^2 - \\ - \frac{\gamma_1^2 u_1 v_1^2}{6 \rho''^2} + \frac{\gamma_1^2 u_1^3}{16 \rho''^2} (1 - t_1^2). \quad (290)$$



Ход решения задачи заключается в следующем:

1) вычисляем величины  $u_1$  и  $v_1$

$$v_1 = \frac{s \sin A_{1,2} \rho''}{N_1} = \frac{V_1 \rho''}{c} s \sin A_{1,2}.$$

$$u_1 = \frac{s \cos A_{1,2} \rho''}{N_1} = \frac{V_1 \rho''}{c} s \cos A_{1,2};$$

2) решаем сферический треугольник  $abp$  (черт. 46) особым методом, который будет сейчас изложен, и получаем:  $\psi - B_1 = \Delta\psi$ ,  $\lambda$  и  $\alpha_2 - A_{1,2}$ ;

3) по формуле (290) переходим от  $\psi$  к  $B_2$ , а по формулам (286) и (287) переходим от  $\lambda$  к  $l_{1,2}$  и от  $\alpha_2$  к  $A_{2,1}$ .

Обратимся теперь к решению треугольника  $abp$ .

Имеем

$$\left. \begin{aligned} \lg \operatorname{tg} x'' &= \lg \frac{x''}{\rho''} + \frac{\mu x''^2}{3 \rho''^2} = \lg \frac{x''}{\rho''} + \tau_x \\ \lg \sin x'' &= \lg \frac{x''}{\rho''} - \frac{1}{2} \tau_x \end{aligned} \right\}. \quad (291)$$

Здесь  $\tau_x$  — аддитамент  $\lg \operatorname{tg} x$ ; формулы (291) ошибочны на величины пятого порядка.

Возьмем теперь на дуге  $ap$  вспомогательную точку  $c$  так, чтобы треугольник  $acb$  был прямоугольным при  $c$ ; назовем на шаре радиуса единица

$$\widehat{ac} = x; \quad \widehat{bc} = y; \quad \widehat{ab} = \frac{s \rho''}{N_1} = \sigma.$$

Имеем далее

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \operatorname{tg} \sigma \cos A_{1,2}; \\ \lg x &= \lg (\sigma \cos A_{1,2}) + \tau_\sigma - \tau_x = \lg u_1 + \tau_\sigma - \tau_x. \end{aligned} \quad (292)$$

Из треугольников  $abc$  и  $cbp$ , с обозначением в последнем угла при  $b$  через  $90^\circ - \gamma$ , найдем

$$\begin{aligned} \sin y &= \sin \sigma \sin A_{1,2}; \\ \operatorname{tg} \gamma &= \operatorname{tg} (B_1 + x) \sin y = \operatorname{tg} (B_1 + x) \sin \sigma \sin A_{1,2}; \\ \lg \gamma &= \lg (\sigma \sin A_{1,2} \operatorname{tg} (B_1 + x)) - \frac{1}{2} \tau_\sigma - \tau_\gamma; \\ \lg \gamma &= \lg (v_1 \operatorname{tg} (B_1 + x)) - \frac{1}{2} \tau_\sigma - \tau_\gamma; \\ \operatorname{tg} \lambda &= \frac{\operatorname{tg} y}{\cos (B_1 + x)}; \\ \lg \lambda &= \lg \left( \frac{\sin y}{\cos (B_1 + x)} \right) - \tau_\lambda + \frac{3}{2} \tau_y; \\ \lg \lambda &= \lg \left( \frac{y_1}{\cos (B_1 + x)} \right) - \frac{1}{2} \tau_\sigma - \tau_\lambda + \frac{3}{2} \tau_y. \end{aligned} \quad (293)$$

Приближенно имеем

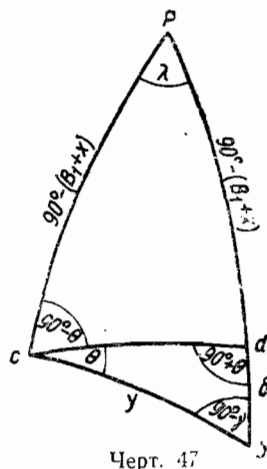
$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= \sigma^2 + \dots; \\ \lambda^2 &= \frac{y^2}{\cos^2(B_1 + x)} = y^2 + y^2 \operatorname{tg}^2(B_1 + x); \\ \gamma^2 &= y^2 \operatorname{tg}^2(B_1 + x).\end{aligned}$$

Следовательно, для приближенных расчетов

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= y^2 + \gamma^2; \\ \lambda^2 &= \sigma^2 - x^2 + \gamma^2; \\ \frac{\mu \lambda^2}{3} &= \frac{\mu \sigma^2}{3} - \frac{\mu x^2}{3} + \frac{\mu \gamma^2}{3}; \\ \tau_y &= \tau_\sigma - \tau_x; \\ \tau_\lambda &= \tau_\sigma - \tau_x + \tau_\gamma; \\ -\tau_\lambda + \frac{3}{2} \tau_y &= +\frac{\tau_\sigma}{2} - \frac{\tau_x}{2} - \tau_\gamma.\end{aligned}\quad (294)$$

Вследствие этого

$$\lg \lambda = \lg \frac{v_1}{\cos(B_1 + x)} - \frac{\tau_x}{2} - \tau_\gamma. \quad (295)$$



Изобразив теперь отдельно на черт. 47 треугольник  $cpb$ , возьмем на дуге  $pb$  точку  $d$  с широтой  $B_1 + x$ , равной сферической широте точки  $c$ , и соединим  $c$  и  $d$  дугой большого круга. Разность широт точек  $d$  и  $b$  назовем через  $\delta$ , а угол при  $c$  в треугольнике  $cpd$  — через  $(90^\circ - \Theta)$ .

Имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \Theta &= \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} \sin(B_1 + x); \\ \sin \delta &= \sin y \operatorname{tg} \Theta = \sin y \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} \sin(B_1 + x); \\ \sin \delta &= \sin \sigma \sin A_{1.2} \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} \sin(B_1 + x); \\ \lg \delta &= \lg v_1 + \lg \left( \frac{\lambda}{2} \sin(B_1 + x) \right) - \frac{1}{2} \tau_\sigma + \tau_{\lambda}^*. \quad (296)\end{aligned}$$

С другой стороны из треугольника  $cpb$

$$\sin \gamma = \sin \lambda \sin(B_1 + x).$$

Следовательно,

$$\lg \frac{\gamma}{2} = \lg \left( \frac{\lambda}{2} \sin(B_1 + x) \right) + \frac{1}{2} \tau_\gamma - \frac{1}{2} \tau_\lambda.$$

\* Аддитамент  $\lg \sin \delta$  отброшен, как величина шестого порядка.

Теперь (296) перепишется так

$$\lg \delta = \lg \frac{v_1 \gamma}{2 \rho''} - \frac{1}{2} \tau_{\sigma} + \frac{1}{4} \tau_{\lambda} - \frac{1}{2} \tau_{\gamma} + \frac{1}{2} \tau_{\lambda},$$

$$\lg \delta = \lg \frac{v_1 \gamma}{2 \rho''} - \frac{1}{2} \tau_{\sigma} - \frac{1}{2} \tau_{\gamma} + \frac{3}{4} \tau_{\lambda},$$

а при помощи (294)

$$\lg \delta = \lg \frac{v_1 \gamma}{2 \rho''} + \frac{1}{4} \tau_{\sigma} + \frac{1}{4} \tau_{\gamma} - \frac{3}{4} \tau_{\lambda}. \quad (297)$$

Для избытка  $\varepsilon$  треугольника (черт. 46) имеем, называя через  $\beta$  угол при  $b$  в треугольнике  $acb$

$$\cos \sigma = 1 - 2 \sin^2 \frac{\sigma}{2} = \operatorname{ctg} A_{1.2} \operatorname{ctg} \beta;$$

$$\cos A_{1.2} \cos \beta = \sin A_{1.2} \sin \beta - 2 \sin A_{1.2} \sin \beta \sin^2 \frac{\sigma}{2};$$

$$\cos (A_{1.2} + \beta) = -\sin \varepsilon = -2 \sin A_{1.2} \sin \beta \sin^2 \frac{\sigma}{2};$$

$$\sin \varepsilon = 2 \sin A_{1.2} \frac{\sin x}{\sin \sigma} \sin^2 \frac{\sigma}{2};$$

$$\sin \varepsilon = \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \sin x \sin A_{1.2};$$

$$\lg \varepsilon = \lg \frac{v_1 x}{2 \rho''} + \frac{1}{4} \tau_{\sigma} - \frac{1}{2} \tau_x \quad (298)$$

и наконец

$$\alpha_2 = A_{1.2} \pm 180^\circ + \gamma - \varepsilon. \quad (299)$$

Приведем теперь общую сводку формул, полученных в § 35

$$\left. \begin{aligned} (2)_1 s &= \sigma; \quad \sigma \sin A_{1.2} = v_1; \quad \sigma \cos A_{1.2} = u_1 \\ \tau_{\sigma} &= \frac{\mu}{3 \rho''^2} \sigma^2 \\ \tau_x &= \frac{\mu}{3 \rho''^2} x^2 \\ \lg x &= \lg u_1 + \tau_{\sigma} - \tau_x \\ \lg \varepsilon &= \lg \frac{v_1 x}{2 \rho''} + \frac{1}{4} \tau_{\sigma} - \frac{1}{2} \tau_x \\ \lg \gamma &= \lg (v_1 \operatorname{tg} (B_1 + x)) - \frac{1}{2} \tau_{\sigma} - \tau_{\gamma} \\ \lg \lambda &= \lg (v_1 \sec (B_1 + x)) - \frac{1}{2} \tau_x - \tau_{\gamma} \\ \lg \delta &= \lg \frac{v_1 \gamma}{2 \rho''} + \frac{1}{4} \tau_{\sigma} + \frac{1}{4} \tau_{\gamma} - \frac{3}{4} \tau_x \end{aligned} \right\}, \quad (300)$$

$$\left. \begin{aligned}
 x - \delta &= \Delta \psi \\
 \psi &= B_1 + x - \delta; \quad \alpha_2 = A_{1.2} + \gamma - \varepsilon; \\
 B_2 &= \psi + e'^2 \Delta \psi \cos^2 \left( B_1 + \frac{3}{4} \Delta \psi \right) - \frac{3}{2 \rho''} \eta_1^4 t_1 u_1^2 - \\
 &\quad - \frac{\eta_1^2 u_1 v_1^2}{6 \rho''^2} + \frac{\eta_1^2 u_1^3}{16 \rho''^2} (1 - t_1^2) \\
 l_{1.2} &= \lambda + \frac{v_1 u_1^2}{3 \rho''^2} \eta_1^2 \sec B_1 = \lambda + \frac{v_1 u_1^2}{3 \rho''^2} e'^2 \cos B_1 \\
 A_{2.1} &= A_{1.2} \pm 180^\circ + \gamma - \varepsilon + \frac{\eta_1^2 v_1 u_1}{2 \rho''} - \frac{\eta_1^2 v_1^3 t_1}{6 \rho''^2} + \frac{\eta_1^2 v_1 u_1^2}{6 \rho''^2} t_1 \\
 t_1 &= \operatorname{tg} B_1; \quad \eta_1^2 = e'^2 \cos^2 B_1
 \end{aligned} \right\} \quad (301)$$

Выведенные формулы обеспечивают  $0'',0001$  в широтах и долготах для расстояний  $s$  до  $160\text{--}170$  км (при восьмизначном, конечно, вычислении). Если расстояние  $s$  более  $160\text{--}170$  км, то при решении сферического треугольника к аддитаментам  $\tau_x, \tau_\sigma, \tau_\gamma, \tau_y$  прибавляют поправки за счет членов пятого порядка в разложении  $\lg \operatorname{tg}$  и  $\lg \sin$ , а в формулах для  $B_2, l_{1.2}$  и  $\alpha_2$  вводят отброшенные члены  $\eta^4 u^3, \eta^2 u^4, \dots$ . Точность формул по учете в них членов пятого порядка и членов порядка  $\eta^2 u^4, \eta^4 u^3, \dots$  заметно повышается; в широтах южнее  $57^\circ$  погрешность этих формул по нашим подсчетам даст в  $B_2$  и в  $l_{1.2}$  при  $s \leq 200$  км ошибку только в несколько сотых долей секунды, а при  $s$  в  $300$  км — ошибку около  $0'',0003\text{--}0'',0004$ . Мы не приводим этих «расширенных» формул; они, конечно, дают вполне достаточную точность при прямой передаче координат и азимутов на расстояние, меньшее  $300$  км в широтах южнее  $57^\circ$ , так как по существу в этой задаче с погрешностью в  $0'',0003$  в  $B_2$  или  $l_{1.2}$  можно вполне помириться.

Для обычных расстояний в триангуляции представляется целесообразным сохранить применение формул Шрейбера, формулы же (301) следует применять в случаях переноса координат и азимутов на расстояния от  $120$  до  $300$  км, так как по ним вычисление будет требовать вообще менее труда, чем по формулам с средней широтой и средним азимутом при тех же расстояниях, а по точности применение последних формул ограничивается расстоянием несколько меньшим  $200$  км.

### § 36. Формулы прямоугольных сфероидических координат для расстояний до $800$ км

В дальнейшем мы имеем в виду привести особые формулы, обеспечивающие решение прямой геодезической задачи при величине расстояния до  $800$  км. Вывод этих формул основывается, однако, на выводе прямоугольных сфероидических координат  $X$  и  $Y$  для частного случая, а именно, когда точка  $A$  находится на оси абсцисс;  $X$  и  $Y$  должны быть выражены через длину  $s$  геодезической линии  $AB$  и азимут  $A_{1.2}$  этой линии в точке  $A$ . Эти формулы для  $X$  и  $Y$  мы уже получали в § 25 [см. формулы (221)] для  $p$  и  $q$ , но с погрешностью на величины порядка  $\frac{s^5}{R^5}$  и  $\frac{\eta^2 s^5}{R^4}$ . Точность этих формул (221) в поставленной задаче недостаточна, поэтому вывод  $X$  и  $Y$  придется продельывать заново.

Применяя метод § 25, мы теперь будем использовать формулу (213) для  $s^2$ , как отправную, и следующую точную формулу (175) для  $n$

$$n = 1 - \frac{s^2}{2N^2}(1 + \eta^2) + \frac{4}{3} \frac{s^3}{N^3} \eta^2 \operatorname{tg} B \cos A (1 + \eta^2) + \frac{s^4}{24N^4}(1 + 2\eta^2 + 12\eta^2 \cos^2 A - 12\eta^2 \operatorname{tg}^2 B); \quad (175)$$

$$s^2 = p^2 + q^2 + \frac{2}{3} f p^2 q^2 + \frac{g}{2} p^2 q^3 + \left( -\frac{7}{45} f^2 + \frac{2}{5} h - \frac{1}{10} \frac{\partial g}{\partial q} \right) p^2 q^4 - \frac{1}{6} f_i p^3 q^2 + \left( \frac{1}{30} \frac{\partial f_i}{\partial q} - \frac{1}{10} g_1 \right) p^3 q^3 - \left( \frac{4}{45} f^2 - \frac{f_{ii}}{30} \right) p^4 q^2; \quad (213)$$

$$g_1 = \frac{\partial g}{\partial p}; \quad f_i = \frac{\partial f}{\partial p}; \quad f_{ii} = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}.$$

Черт. 48 и последующие выводы относятся уже не к произвольной поверхности, а к эллипсоиду вращения, причем  $AF$  — меридианная эллипс точки  $A$ ; геодезическая линия  $BF$ , перпендикулярная в  $F$  к меридианной кривой точки  $A$ , является ординатной кривой.

Роль  $q$  играет  $Y$ , измеряемый отрезком  $BF$  ординатной кривой; роль  $p$  играет  $X$  — абсцисса, откладываемая по меридианной кривой от  $A$  до  $F$ . Геодезическая линия  $AB$  имеет длину  $s$  и азимут  $A_{1,2}$  в точке  $A$ .

Пусть угол  $\beta$  (черт. 48) получает изменение  $\Delta\beta$ , а  $Y$  получает изменение на  $dq$ ; пусть меридиан  $AF$  тогда заменяется геодезической линией  $F_1A_1$ , перпендикулярной в  $F_1$  к геодезической линии  $BF_1$ . Точка  $A$  перемещается вследствие этих изменений ординаты  $Y$  и угла  $\beta$  в положение  $A_1$ . Проведем  $AD_1$  ортогонально к  $F_1A_1$  и  $AA_2$  — ортогонально к  $BA_1$ . Из четырехугольника  $A_1D_1AA_2$  пишем

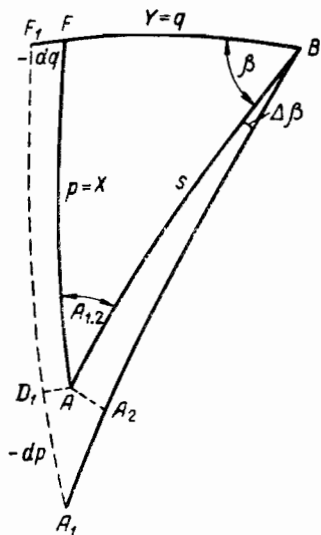
$$ds = dp \cos A_{1,2} + n_1 dq \sin A_{1,2}. \quad (302)$$

причем  $ds$  равно  $A_2A_1$ ,  $dp$  — есть изменение абсциссы точки  $A$ , а  $n_1$  относится к точке  $A$  и к геодезической линии  $AF$ . Поэтому, называя широту  $A$  через  $B_1$  и имея в виду, что азимут с  $A$  на  $F$  равен нулю, напишем из (175)

$$n_1 = 1 - \frac{p^2}{2N_1^2}(1 + \eta_1^2) + \frac{4}{3} \frac{p^3}{N_1^3} \eta_1^2 \operatorname{tg} B_1 (1 + \eta_1^2) + \frac{p^4}{24N_1^4}(1 + 14\eta_1^2 - 12\eta_1^2 \operatorname{tg}^2 B_1). \quad (303)$$

Из (302) имеем

$$\left. \begin{aligned} s \cos A_{1,2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(s^2)}{\partial p} \right) \\ s \sin A_{1,2} &= \frac{1}{2} \frac{1}{n_1} \left( \frac{\partial(s^2)}{\partial q} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (304)$$



Черт. 48

Из (213) получаем

$$s \cos A_{1,2} = p + \frac{2}{3} fpq^2 + \frac{g}{2} pq^2 + \left( -\frac{7}{45} f^2 - \frac{1}{10} \frac{\partial g}{\partial q} + \frac{2}{5} h \right) pq^4 - \\ - \frac{1}{4} f_1 p^2 q^2 + \left( \frac{1}{20} \frac{\partial f_1}{\partial q} - \frac{3}{20} \frac{\partial g}{\partial p} \right) p^2 q^3 + \left( -\frac{8}{45} f^2 + \frac{1}{15} f_{11} \right) p^3 q^2, \quad (305)$$

причем в уравнении (305) коэффициенты  $f, g, h, f_1, f_{11}, \frac{\partial g}{\partial q}, \frac{\partial g}{\partial p}, \frac{\partial f_1}{\partial q}$  отнесены к точке  $B$ , как это указано при выводе формулы (213). Напомним из § 25, что в согласии с Гауссом было принято при выводе (213), что величина  $n$  представляется рядом

$$n = 1 + fs^2 + gs^3 + hs^4 + \dots \quad (n)$$

Займемся определением коэффициентов в (305). Называя коэффициенты в (175) при  $s^2, s^3, s^4$  соответственно через  $(f), (g)$  и  $(h)$ , напишем

$$\left. \begin{aligned} (f) &= -\frac{(1 + \eta_1^2)}{2N_2^2} = -\frac{1}{2} \frac{(1 + \eta_2^2)^2}{c^2} \\ (f_1) &= \frac{\partial f}{\partial p} = \frac{2(1 + \eta_2^2) \eta_2^2 t_2}{c^3}, \text{ причем } \frac{\partial B}{\partial p} = \frac{1}{M} = \frac{(1 + \eta_2^2)^{\frac{3}{2}}}{c} \\ (f_{11}) &= \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = \frac{2\eta_2^2 (1 + \eta_2^2)^3}{c^4} (1 + \eta_2^2 - t_2^2 - 6\eta_2^2 t_2^2) \\ (g) &= \frac{4}{3} \frac{\eta_2^2 t_2}{c^3} (1 + \eta_2^2)^{\frac{5}{2}} \cos A_{BF} \\ (h) &= \frac{1}{24} \frac{(1 + \eta_2^2)^2}{c^4} (1 + 2\eta_2^2 + 12\eta_2^2 \cos^2 A_{BF} - 12\eta_2^2 t_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (306)$$

В этих формулах через  $t_2$  обозначен  $\operatorname{tg} B_2$ , понимая под  $B_2$  широту точки  $B$ ; нижние значки «2» показывают, что величины относятся к точке  $B$ ; величина  $c = \frac{a^2}{b}$ . Приближенно мы имеем

$$A_{BF} = 270^\circ + \frac{q}{N_f} \operatorname{tg} B_f; \quad \cos A_{BF} = \frac{q}{N_f} \operatorname{tg} B_f.$$

Под  $B_f$  понимается широта точки  $F$ . Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} (g) &= \frac{4}{3} \frac{\eta_2^2 t_2}{c^2} (1 + \eta_2^2)^{\frac{5}{2}} \frac{q}{N_f} \operatorname{tg} B_f \\ (h) &= \frac{1}{24} \frac{(1 + \eta_2^2)}{c^4} (1 + 2\eta_2^2 - 12\eta_2^2 t_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (307)$$

Далее

$$(f) = -\frac{1}{2} \frac{(1 + \eta_1^2)}{c^2} + \frac{2(1 + \eta_1^2)}{c^2} \eta_1^2 t_1 (B_2 - B_1) + \\ + \frac{\eta_1^2}{c^2} (1 + \eta_1^2 - t_1^2 - 3\eta_1^2 t_1^2) (B_2 - B_1)^2, \quad (308)$$

причем  $\eta_1$  и  $t_1$  относятся к точке  $A$ . Мы имели при выводе формул Шрейбера

$$B_2 - B_1 = \frac{p}{c} (1 + \eta_1^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} \frac{p^2}{c^2} \eta_1^2 t_1 (1 + \eta_1^2)^2 - \frac{1}{2} \frac{q^2 t_1}{c^2} (1 + \eta_1^2)^2. \quad (309)$$

Подставляя (309) в (308), будем иметь

$$(f) = -\frac{1}{2} \frac{(1 + \eta_1^2)^2}{c^2} + \frac{2(1 + \eta_1^2)^{\frac{5}{2}}}{c^3} \eta_1^2 t_1 p - \frac{3 \eta_1^4 t_1^2}{c^4} (1 + \eta_1^2)^3 p^2 - \\ - \frac{(1 + \eta_1^2)^3}{c^4} \eta_1^2 t_1^2 q^2 + \frac{\eta_1^2}{c^4} (1 - \eta_1^2 - t_1^2 - 3 \eta_1^2 t_1^2) (1 + \eta_1^2)^3 p^2. \quad (310)$$

В § 25 мы, в согласии с Гауссом, считали  $f$  только функцией  $p$ , чего не делали в противоположность Гауссу по отношению к коэффициентам  $g$  и  $h$ ; очевидно, что мы должны в (213) и (305) считать  $f$  равным  $(f)$  по (309), но с отнесением члена с  $q^2$  в состав коэффициента  $h$  в ряде  $(n)$ , т. е. для перехода от  $(f)$  к  $f$  нужно в (310) не считать члена  $-\frac{(1 + \eta_1^2)^3}{c^4} \eta_1^2 t_1^2 q^2$ , который включается в состав члена  $h q^4$ . Перепишем теперь (305), на основе уравнения  $f = f_0 + f_1 p + f_{11} p^2$ , так

$$s \cos A_{1,2} = p + \frac{2}{3} f_0 p q^2 + \frac{g}{2} p q^3 + \left( -\frac{7}{45} f_0^2 + \frac{2}{5} h - \frac{1}{10} \frac{\partial g}{\partial q} \right) p q^4 + \\ + \frac{5}{12} f_1^0 p^2 q^2 + \left( \frac{1}{20} \frac{\partial f_1}{\partial q} - \frac{3}{20} \frac{\partial g}{\partial p} \right) p^2 q^3 - \left( \frac{8}{45} f_0^2 + \frac{3}{20} f_{11}^0 \right) p^3 q^2. \quad (311)$$

В (311) все коэффициенты со значком «0» отнесены к точке  $A$ ; остальные — к точке  $B$ . Вводя средний радиус кривизны  $R_1$  в точке  $A$ , равный  $\frac{1 + \eta_1^2}{c}$ , и пользуясь (310) и (306), мы напишем

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{R_1^2} = -\frac{1}{2} \frac{(1 + \eta_1^2)^2}{c^2} \\ f_1^0 &= \frac{2(1 + \eta_1^2)^{\frac{5}{2}}}{c^3} \eta_1^2 t_1 = \frac{2 \eta_1^2 t_1}{R_1^3 (1 + \eta_1^2)^{\frac{1}{2}}} \\ f_{11}^0 &= \frac{2 \eta_1^2 (1 + \eta_1^2)^3}{c^4} (1 + \eta_1^2 - t_1^2 - 6 \eta_1^2 t_1^2) = \\ &= \frac{2 \eta_1^2 (1 + \eta_1^2 - t_1^2 - 6 \eta_1^2 t_1^2)}{R_1^4 (1 + \eta_1^2)} \end{aligned} \right\}. \quad (312)$$

Далее

$$g = \frac{4}{3} \frac{\eta_1^2 t_1}{c^3} (1 + \eta_1^2)^{\frac{5}{2}} q \frac{(1 + \eta_1^2)^{\frac{1}{2}}}{c} \operatorname{tg} B_2, \\ g = \frac{4}{3} \frac{\eta_1^2 t_1^2}{R_1^4} \frac{q}{(1 + \eta_1^2)}, \quad (313)$$

потому что учет перехода от  $B_2$  к  $B_1$  в этом коэффициенте дает в (311) пренебрегаемое влияние. Далее, на основании ранее сделанных соображений:

$$h = (h) - \frac{(1 + \eta_1^2)^3}{3} \eta_1^2 t_1^2 = \frac{1}{24} \frac{(1 + \eta_1^2)^2}{c^4} (1 + 2 \eta_1^2 - 12 \eta_1^2 t_1^2) - \\ - \frac{(1 + \eta_1^2)^3 \eta_1^2 t_1^2}{c^4};$$

$$h = \frac{1}{R_1^4} \left[ \frac{1}{24} \frac{1 + 2 \eta_1^2 - 12 \eta_1^2 t_1^2}{(1 + \eta_1^2)^2} - \frac{\eta_1^2 t_1^2}{(1 + \eta_1^2)} \right].$$

В  $(h)$  переход от  $B_2$  к  $B_1$  не нужен, так как это дает в (311) пренебрегаемые члены порядка  $p^2 q^4$ . Окончательно для  $h$  напишем

$$h = \frac{1}{R_1^4} \left\{ \frac{1}{24} - \frac{(\eta_1^4 + 12 \eta_1^2 t_1^2)}{24 (1 + \eta_1^2)^2} - \frac{\eta_1^2 t_1^2}{(1 + \eta_1^2)} \right\}. \quad (314)$$

Наконец

$$\frac{\partial g}{\partial q} = \frac{4}{3} \frac{\eta_1^2 t_1^2}{R_1^4 (1 + \eta_1^2)}.$$

Производная  $\frac{\partial g}{\partial p}$  дает в (311) член порядка  $\eta^2 p^2 q^4$ , т. е. пренебрегаемый. Далее

$$\frac{\partial f_1}{\partial q} = \frac{2}{c^2} \frac{d}{dB} [(1 + \eta^2)^{\frac{5}{2}} \eta^2 t] \frac{\partial B}{\partial q},$$

причем  $B = B_f - \frac{q^2}{2R_1^2} \operatorname{tg} B_f$ ; другими словами, в  $\frac{\partial f_1}{\partial q}$  входит множителем  $q$ , а тогда член с  $\frac{\partial f_1}{\partial q}$  в (311) даст величину порядка  $\eta^2 p^2 q^4$ , т. е. также пренебрегаемую. Подставив найденные коэффициенты в (311), мы могли бы написать окончательные выражения для  $s \cos A_{1,2}$  и для  $s \sin A_{1,2}$ , но нам нужно получить не эти величины, а через них  $p = X$  и  $q = Y$ . Обозначим

$$s \cos A_{1,2} = u,$$

$$s \sin A_{1,2} = v.$$

Мы не будем делать точный вывод  $q = Y$ , а следовательно, и вывод  $v$ . Но из (216) с заменой  $\beta$  через  $A_{1,2}$  и  $p$  через  $q$  (что мы уже делали в § 24) напишем

$$s \sin A_{1,2} = v = q - \frac{1}{3} f_0 p^2 q.$$

Отсюда и из (311) с ошибкой лишь на величины 4-го порядка

$$\left. \begin{aligned} p &= u - \frac{2}{3} f_0 p q^2 = u - \frac{2}{3} f_0 u v^2, \\ q &= v + \frac{1}{3} f_0 p^2 q = v + \frac{1}{3} f_0 u^2 v. \end{aligned} \right\}. \quad (315)$$



Выражениями (315) можно вполне пользоваться для замены в (311) во всех членах, кроме первого, величин  $p$  и  $q$  величинами  $u$  и  $v$ . Тогда получаем из (311)

$$p = X = u - \frac{2}{3} f_0 u v^2 - \frac{5}{12} f_1^0 u^2 v^2 - \frac{g}{2} u v^3 - \left( \frac{4}{15} f_0^2 + \frac{3}{20} f_{11} \right) u^3 v^2 + \\ + \left( \frac{3}{5} f_0^2 - \frac{2}{5} h + \frac{1}{10} \frac{\partial g}{\partial q} \right) u v^4. \quad (316)$$

Остается подставить: по (312)  $f_1^0$ ,  $f_{11}^0$  по (313) —  $g$ , по (314) —  $h$  и  $\frac{\partial g}{\partial q}$ . Мы получим

$$X = u + \frac{1}{3} \frac{u v^2}{R_1^2} - \frac{u^3 v^2 - 2 u v^4}{15 R_1^4} - \frac{5}{6} \frac{\eta_1^2 t_1}{V_1} \frac{u^2 v^2}{R_1^3} + \\ + \frac{3}{10} \frac{\eta_1^2}{V_1^2} [-V_1^2 + t_1^2 (1 + 6 \eta_1^2)] \frac{u^3 v^2}{R_1^4} - \frac{2}{3} \frac{\eta_1^2 t_1^2}{V_1^2} \frac{u v^4}{R_1^4} + \\ + \left[ \frac{1}{60} \frac{\eta_1^4 + 12 \eta_1^2 t_1^2}{(1 + \eta_1^2)^2} + \frac{2}{3} \frac{\eta_1^2 t_1^2}{1 + \eta_1^2} + \frac{2}{15} \frac{\eta_1^2 t_1^2}{(1 + \eta_1^2)^2} \right] \frac{u v^4}{R_1^4} \quad (V^2 = 1 + \eta^2)$$

и окончательно

$$X = u + \frac{u v^2}{R_1^2} - \frac{u^3 v^2 - 2 u v^4}{15 R_1^4} - \frac{5}{6} \frac{\eta_1^2 t_1}{V_1} \frac{u^2 v^2}{R_1^3} + \\ + \frac{3}{10} \frac{\eta_1^2}{V_1^2} [-V_1^2 + t_1^2 (1 + 6 \eta_1^2)] \frac{u^3 v^2}{R_1^4} + \frac{1}{15} \frac{\eta_1^2 t_1^2}{V_1^2} \frac{u v^4}{R_1^4} + \\ + \frac{\eta_1^4 - 12 \eta_1^2 t_1^2}{60} \frac{u v^4}{R_1^4}. \quad (317)$$

Последний член в правой части (317) может быть отброшен: при  $s = 800$  км он дает в  $X$  всего около 0,001 м в широте  $60^\circ$ .

Так как метод вывода ординаты  $Y$  повторяет все вышеизложенное, то мы его не приводим, а просто выписываем окончательную формулу, данную Крюгером в 1920 г.

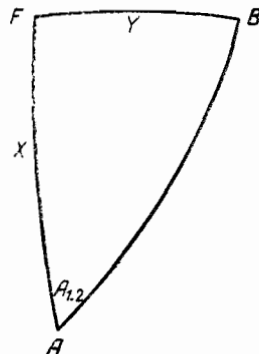
$$Y = v - \frac{1}{6} \frac{v u^2}{R_1^2} + \frac{u^4 v - 8 u^2 v^3}{120 R_1^4} + \frac{1}{3} \frac{\eta_1^2 t_1}{V_1} \frac{u^3 v}{R_1^3} - \\ - \frac{1}{10} \frac{\eta_1^2}{V_1^2} [-V_1^2 + t_1^2 (1 + 6 \eta_1^2)] \frac{u^4 v}{R_1^4} - \frac{1}{30} \frac{\eta_1^2 t_1^2}{V_1^2} \frac{u^2 v^3}{R_1^4}. \quad (318)$$

### § 37. Формулы Крюгера для переноса геодезических широт, долгот и азимутов на значительное расстояние

При выводе этих формул используем прямоугольные сфероидические координаты  $X$  и  $Y$  (черт. 49), причем начало координат взято в  $A$ , а осью абсцисс служит меридианная кривая  $AF$ . Точка  $F$  играет роль вспомогательной точки  $C$  при выводе формул Шрейбера.

Переходя сперва от  $A$  к  $F$ , используем формулы § 31 для первой — пятой производных  $B$  по  $s$ , полагая в этих формулах  $A = 0^\circ$ . Мы имеем

$$B_f - B_1 = \frac{X \rho''}{M_1} - \frac{3}{4} \frac{e'^2 \sin 2 B_1}{M_1 N_1} \rho'' X^2 - \\ - \frac{\eta_1^2 [1 + \eta_1^2 - t_1^2 (1 + 5 \eta_1^2)] \rho''}{2 M_1 N_1^2} X^3 + \\ + \frac{1}{8} \eta_1^2 t_1^2 [V_1^2 (4 + 19 \eta_1^2) - 5 \eta_1^2 t_1^2 (3 + \\ + 7 \eta_1^2)] \frac{X^4 \rho''}{M_1 N_1^3} + \frac{\eta_1^2}{40} \{V_1^4 (4 + 19 \eta_1^2) - 2 V_1^2 t_1^2 (2 + \\ + 69 \eta_1^2 + 157 \eta_1^4) + 15 \eta_1^2 t_1^4 (1 + \\ + 14 \eta_1^2 + 21 \eta_1^4)\} \frac{X^5}{M_1 N_1^4} \rho''.$$



Черт. 49

Отбрасывая члены порядка  $\eta^4 \frac{X^4}{R^4}$ ,  $\eta^4 \frac{X^5}{R^4}$ , получим

$$B_f - B_1 = \frac{X \rho''}{M_1} \left\{ 1 - \frac{3}{4} e'^2 \sin 2 B_1 \frac{X}{N_1} - \frac{\eta_1^2}{2 N_1^2} [1 + \eta_1^2 - t_1^2 (1 + 5 \eta_1^2)] X^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{8} \eta_1^2 t_1^2 (4 + 23 \eta_1^2 - 15 \eta_1^2 t_1^2) \frac{X^3}{N_1^3} + \frac{\eta_1^2}{10} (1 - t_1^2) \frac{X^4}{N_1^4} \right\}; \quad (319)$$

$$\lg (B_f - B_1)'' = \lg \frac{X \rho''}{M_1} - \frac{3}{4} e'^2 \sin 2 B_1 \frac{X}{N_1} \times \\ \times \left\{ 1 - \left[ \frac{1}{3} - \frac{e'^2}{12} (9 - 26 \cos^2 B_1) \right] \frac{X^2}{N_1^2} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} e'^2 \frac{X^2}{N_1^2} \left\{ -\cos 2 B_1 \left( 1 - \frac{1}{5} \frac{X^2}{N_1^2} \right) + e'^2 \frac{\cos 2 B_1}{4} (11 - 15 \cos^2 B_1) \right\}. \quad (320)$$

Используя те же формулы § 31 для производных  $\frac{dB}{ds}$ , при  $s = Y$  и  $A = 90^\circ$ , перейдем от  $F$  к  $B$  в отношении широты и получим

$$B_2 - B_f = -\frac{V_f^4 t_f}{2 c^2} Y^2 + \frac{V_f^6}{c^4} t_f (1 + \eta_f^2 + 3 t_f^2 - 9 \eta_f^2 t_f^2) \frac{Y^4}{24} - \\ - \frac{V_f^2 Y^6 t_f}{720 N_f^6} (1 + 30 t_f^2 + 45 t_f^4);$$

$$B_2 - B_f = \frac{V_f^2 Y^2 \rho''}{N_f^2} \left[ -\frac{t_f}{2} + \frac{Y^2 t_f}{24 N_f^2} (V_f^2 + 3 t_f^2 - 9 \eta_f^2 t_f^2 - \right. \\ \left. - \frac{Y^4 t_f}{720 N_f^4} (1 + 30 t_f^2 + 45 t_f^4) \right]^*. \quad (d)$$

Полагая  $\frac{Y \rho''}{N_f} = \sigma$  и опуская член с  $\frac{Y^6}{N^6}$  при  $Y < 240$  км, в средних широтах имеем

$$B_2 - B_f = -\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\rho''} t_f V_f^2 \left[ 1 - \frac{\sigma^2}{12 \rho'^2} (V_f^2 + 3 t_f^2 (1 - 3 \eta_f^2)) \right]. \quad (321)$$

\* Член с  $Y^6$  в формуле (d) мы считаем нужным удержать, несмотря на то, что он исчезает при дальнейшем преобразовании этой формулы.

Применяя формулы § 31 для производных  $\frac{dl}{ds}$ , при  $s = Y$  и  $A = 90^\circ$ , напомним

$$l_{1.2} = \frac{Y}{N_f} \sec B_f - \frac{1}{3} \frac{Y^3}{N_f^3} \sec B_f t_f^2 + \frac{1}{15} \frac{Y^5}{N_f^5} \sec B_f t_f^2 (V_f^2 + 3 t_f^2); \quad (I)$$

$$l''_{1.2} \cos B_f = \sigma \left[ 1 - \frac{t_f^2 \sigma^2}{3 \rho''^2} + \frac{t_f^2 \sigma^4}{15 \rho''^4} (V_f^2 + 3 t_f^2) \right]. \quad (322)$$

Далее пишем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} l_{1.2} &= l_{1.2} + \frac{l_{1.2}^3}{3} + \frac{2}{15} l_{1.2}^5 = \sigma \sec B_f \left[ 1 - \frac{t_f^2 \sigma^2}{3 \rho''^2} + \frac{\sigma^4 t_f^2}{15 \rho''^4} (V_f^2 + 3 t_f^2) \right] + \\ &+ \frac{\sigma^3 \sec^3 B_f}{3 \rho''^2} \left( 1 - \frac{t_f^2 \sigma^2}{\rho''^2} \right) + \frac{2}{15} \frac{\sigma^5}{\rho''^4} \sec s B_f; \\ \operatorname{tg} l_{1.2} &= \sigma \sec B_f \left[ 1 + \frac{\sigma^2}{3 \rho''^2} + \frac{1}{15} (2 + \eta_f^2 t_f^2) \frac{\sigma^4}{\rho''^4} \right]. \end{aligned}$$

Но мы имеем

$$\sigma = \operatorname{tg} \sigma \left( 1 - \frac{\sigma^2}{3} - \frac{\sigma^4}{45} \right)$$

и тогда

$$\operatorname{tg} l_{1.2} = \operatorname{tg} \sigma \sec B_f \left( 1 + \frac{\eta_f^2 t_f^2}{15} \frac{\sigma^4}{\rho''^4} \right). \quad (323)$$

Называя азимут линии  $BF$  в  $B$  через  $270^\circ + c$ , мы получим, применяя формулы  $(a_1)$ ,  $(a_2)$ ,  $(a_3)$ ,  $(a_4)$  и  $(a_5)$  § 31 при  $A = 90^\circ$  и  $s = Y$

$$\begin{aligned} c &= \sigma \operatorname{tg} B_f - \frac{\sigma^3}{6 \rho''^3} \operatorname{tg} B_f (V_f^2 + 2 t_f^2) + \\ &+ \frac{\sigma^5}{120 \rho''^5} \operatorname{tg} B_f [V_f^4 + 4 V_f^2 t_f^2 (5 - 3 \eta_f^2) + 24 t_f^4]; \\ c'' &= \sigma t_f \left\{ 1 - \frac{1}{6} (V_f^2 + 2 t_f^2) \frac{\sigma^2}{\rho''^2} + \frac{\sigma^4}{120 \rho''^4} [V_f^4 + 4 V_f^2 t_f^2 (5 - 3 \eta_f^2) + 24 t_f^4] \right\}. \quad (323') \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что

$$\sigma = \sin \sigma \left( 1 + \frac{\sigma^2}{6} + \frac{7}{360} \sigma^4 \right),$$

напишем еще

$$\begin{aligned} c &= \sin \sigma t_f \left\{ 1 - \frac{\eta_f^2 \sigma^2}{6 \rho''^2} - \frac{1}{3} t_f^2 \frac{\sigma^2}{\rho''^2} - \frac{1}{36} \frac{\sigma^4}{\rho''^4} (V_f^2 + 2 t_f^2) + \right. \\ &+ \left. \frac{\sigma^4}{120 \rho''^4} [V_f^4 + 4 V_f^2 t_f^2 (5 - 3 \eta_f^2) + 24 t_f^4] + \frac{7}{360} \frac{\sigma^4}{\rho''^4} \right\}; \\ \operatorname{tg} c &= c + \frac{c^3}{3} + \frac{2}{15} c^5; \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} c = \sin \sigma \operatorname{tg} B_f \left[ 1 - \frac{\eta_f^2 \sigma^2}{6 \rho''^2} - \frac{\eta_f^2}{360} (4 - 3 \eta_f^2 + 36 V_f^2 t_f^2) \frac{\sigma^4}{\rho''^4} \right]; \quad (324)$$

$$\sigma = \frac{Y \rho''}{N_f}; \quad t_f = \operatorname{tg} B_f;$$

причем при получении (324) опущены переходные преобразования. Формула (321) преобразуется следующим образом. Мы имеем

$$\operatorname{tg} \frac{l_{1.2}}{2} + \frac{\sin l_{1.2}}{1 + \cos l_{1.2}} = \frac{\operatorname{tg} l_{1.2}}{1 + \sec l_{1.2}} = \frac{\operatorname{tg} l_{1.2}}{1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 l_{1.2}}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{l_{1.2}}{2} = \frac{c \sec B_f \left(1 + \frac{\sigma^2}{3} + \frac{2}{15} \sigma^4\right)}{1 + (1 + \sigma^2 \sec^2 B_f)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sigma \sec B_f \left(1 + \frac{\sigma^2}{3} + \frac{2}{15} \sigma^4\right)}{2 + \frac{\sigma^2}{2} \sec^2 B_f - \frac{\sigma^4}{8} \sec^4 B_f}.$$

Поэтому далее имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{l_{1.2}}{2} &= \frac{\sigma \sec B_f}{2} \left(1 + \frac{\sigma^2}{3}\right) \left(1 - \frac{\sigma^2}{4} (1 + t^2)\right) = \\ &= \frac{\sigma \sec B_f}{2} \left[1 + \frac{\sigma^2}{12} (1 - 3 t_f^2)\right] + \text{члены 5-го порядка,} \\ (a) \dots V_f^2 \sin B_f \operatorname{tg} \frac{l_{1.2}}{2} \sin \sigma &= \frac{1}{2} V_f^2 t_f \sigma^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{12} (1 + 3 t_f^2)\right) + \\ &\quad \text{члены 6-го порядка.} \end{aligned}$$

Из (321) имеем

$$\begin{aligned} (b) \dots \sin(B_f - B_2) &= \frac{V_f^2}{2} \sigma^2 t_f \left[1 - \frac{\sigma^2}{12} (V_f^2 + 3 t_f^2 (1 - 3 \eta_f^2))\right] + \\ &\quad + \text{члены 6-го порядка,} \end{aligned}$$

что преобразуется теперь так

$$\begin{aligned} \sin(B_f - B_2) &= V_f^2 \sin B_f \operatorname{tg} \frac{l_{1.2}}{2} \sin \sigma \times \\ &\times \left[1 - \frac{\sigma^2}{12 \rho'^2} (V_f^2 + 3 t_f^2 (1 - 3 \eta_f^2))\right] \left[1 + \frac{\sigma^2}{12} (1 + 3 t_f^2)\right]; \\ \sin(B_f - B_2) &= V_f^2 \sin B_f \operatorname{tg} \frac{l_{1.2}}{2} \sin \sigma \left[1 - \frac{\eta_f^2 \sigma^2}{12 \rho'^2} (1 - 9 t_f^2)\right]. \quad (325) \end{aligned}$$

Важно отметить, что члены 6-го порядка в (a) и (b) совпадают, и поэтому погрешность (325) не шестого порядка, а порядка  $\eta^2 \sigma^6$ , что делает эту формулу высокоточной. Конечно, формулы (323), (324) и (325) просты для вычисления. Однако формула (320) остается «тяжелой». Но представляется, что здесь имеется отличный выход из положения, так как мы теперь располагаем в таблицах для вычисления координат Гаусса-Крюгера величинами  $B$  или  $X$ , представляющими дугу меридиана от экватора до текущей широты, даваемой в таблицах через минутный интервал. Придется поступать так: по широте  $B_1$  точки  $A$  найти при помощи этих таблиц соответствующее значение  $X_1$ ; затем, взяв сумму  $X_1 + X = X_f$ , находить при помощи тех же таблиц, но обратным интерполированием, широту  $B_f$ , соответствующую  $X_f$ . Ошибки интерполирования (прямого при определении  $X_1$  и обратного — при определении  $B_f$ ) вместе с ошибками таблиц, не составят 0,003 м, т. е.  $B_f$  определится с ошибкой, вообще не превышающей 0",0001, независимо от величины расстояния  $AF$ . Этот расчет  $B_f$  по таблицам для вычисления координат Гаусса-Крюгера очень прост и во всяком случае составит труд, по крайней мере в пять раз меньший, чем расчет  $(B_f - B_1)$  по формуле (320).

К сожалению, в рассматриваемых формулах Крюгера становится тяжелым вопрос *о передаче азимута*. Величина  $c$  по формуле (324) определяется сравнительно легко. Эта величина  $c$ , конечно, играет роль прежней величины  $t$  в формуле  $A_{2,1} = A_{1,2} \pm 180^\circ + t - \varepsilon$ . Мы величину  $t$  заменяем через  $c$ , чтобы избежать путаницы в обозначениях, так как через  $t$  обозначается в формулах (320), (323) и (324) тангенс широты. Так как  $A_{2,1} = A_{1,2} \pm 180^\circ + c - \varepsilon$ , то вопрос остановился на формуле для  $\varepsilon$ .

Здесь можно идти таким путем: пользуясь формулой (258) § 31, напишем выражение для  $(A_{2,1} \pm 180^\circ - A_{1,2})$  в функции величин  $u$  и  $v$

$$u = s \cos A_{1,2} = u_1 N_1,$$

$$v = s \sin A_{1,2} = v_1 N_1.$$

Конечно, мы имеем

$$\varepsilon = c - (A_{2,1} \pm 180^\circ - A_{1,2}), \quad (326)$$

но так как  $c$  выражено по формуле (323') в функции широты  $B_f$ , то придется сделать преобразование этой формулы, вводя вместо  $B_f$  широту  $B_1$ . Получается очень сложный вывод, которого мы не будем приводить. Мы не будем также приводить преобразований и счета правой части формулы (326), а ограничимся просто приведением окончательной формулы для  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} \varepsilon'' = \frac{uv \rho''}{2R_1^2} \left\{ 1 - \frac{u^2 - 5v^2}{12R_1^2} - \frac{8}{3} \eta_1^2 t_1 \frac{u}{N_1} + \frac{1}{3} \eta_1^2 t_1^2 \frac{v^2}{N_1^2} - \right. \\ \left. - \eta_1^2 [V_1^2 - t_1^2 (1 + 6\eta_1^2)] \frac{u^2}{N_1^2} + \frac{22}{15} \eta_1^2 t_1 \frac{u^3}{N_1^3} - \frac{113}{45} \eta_1^2 t_1 \frac{uv^2}{N_1^3} \right\}. \quad (327) \end{aligned}$$

Конечно, эта формула для  $\varepsilon$  имеет значение лишь для теории решения больших сферических треугольников: она значительно более точна, чем формула (225) для  $\varepsilon$ , данная в § 26. Однако при решении прямой геодезической задачи с принятием верхнего предела расстояния  $s$  в 800 км, эта формула (327) излишне громоздка и практически приходится воздержаться от ее применения.

Если мы уже определили  $B_2$  и  $l_{1,2}$ , то можем теперь по  $B_1$ ,  $B_2$  и  $l_{1,2}$  решать *обратную* геодезическую задачу, т. е. определить  $A_{1,2}$ ,  $A_{2,1}$  и  $s$ . Однако нам нужно определить только  $A_{2,1}$ , и это, конечно, будет только частью обратной геодезической задачи. Не приводя вывода, мы дадим результат решения по выводу  $A_{2,1}$ , когда  $B_2$ ,  $B_1$  и  $l_{1,2}$  уже известны

$$\lg \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A'_{2,1} - A_{1,2}) = \lg \left[ \frac{\sin \frac{1}{2} (B_2 + B_1)}{\cos \frac{1}{2} (B_2 - B_1)} \right] \operatorname{tg} \frac{l_{1,2}}{2} + \frac{\mu}{12} \frac{\eta_m^2}{N_m^2} (s^2 + \eta_m^2 u^2), \quad (328)$$

$$A_{2,1} = A'_{1,2} \pm 180^\circ,$$

причем в (328) величины  $\eta_m^2$  и  $N_m^2$  выбираются по аргументу  $B_m \frac{B_1 + B_2}{2}$ .

При  $s \leq 800$  км влияние члена  $\frac{\eta_m^4}{12} \frac{u^2}{N_m^2}$  будет на  $(A_{2,1} - A_{1,2})$  менее 0",0003. Поэтому можно еще написать так

$$\lg \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A_{2,1} - A_{1,2}) = \lg \left[ \frac{\sin \frac{1}{2} (B_2 + B_1)}{\cos \frac{1}{2} (B_2 - B_1)} \right] \operatorname{tg} \frac{l_{1,2}}{2} + \frac{\mu}{12} \frac{\eta_m^2}{N_m^2} \frac{s^2}{N_m^2}. \quad (329)$$

Приходится отметить, что формулы (320) и (323) при значительных  $s$ , порядка 500—800 км, нужно вычислять уже десятизначными логарифмами, хотя верным достаточно иметь девятый знак. Формулу (329) нужно вычислять также с десятичными логарифмами, обеспечивая верность в девятом знаке. При применении этой формулы для разности  $A_{2.1} - A_{1.2}$  отпадает вовсе вычисление  $c$  по формуле (324); при применении формулы

$$A_{2.1} \pm 180^\circ - A_{1.2} = c - \varepsilon$$

величину  $c$  придется рассчитывать все равно с обеспечением в  $\lg c$  девятого знака (или в  $c$  — четвертого десятичного знака), хотя  $\varepsilon$  достаточно вычислять по семизначным логарифмам. Таким образом, ясно, что все преимущества на стороне применения формулы (329).

### § 38. Общая сводка формул для переноса геодезических координат и азимута на расстояние до 600—800 км

Сложные формулы (317) и (318) для  $X$  и  $Y$  должны быть, конечно, по возможности упрощены. Крюгер пользуется рядами

$$\begin{aligned} \left( \operatorname{tg} s \frac{\rho''}{R_1} \right) \cos A_{1.2} &= \frac{u}{R_1} + \frac{u(u^2 + v^2)}{3R_1^2} + \frac{2u(u^2 + v^2)^2}{15R_1^4}, \\ \left( \sin s \frac{\rho''}{R_1} \right) \sin A_{1.2} &= \frac{v}{R_1} - \frac{v(u^2 + v^2)}{6R_1^2} + \frac{v(u^2 + v^2)^2}{120R_1^4}, \end{aligned}$$

и получает тогда преобразованные формулы (317) и (318) в таком виде

$$\left. \begin{aligned} \lg \operatorname{tg} \frac{X}{R_1} \rho'' &= \lg \left( \operatorname{tg} \frac{s}{R_1} \rho'' \right) + \lg \cos A_{1.2} - \sigma_1 \\ \lg \sin \frac{Y}{R_1} \rho'' &= \lg \left( \sin \frac{s}{R_1} \rho'' \right) + \lg \sin A_{1.2} - \sigma_2 \\ \sigma_1 &= \frac{\mu \rho'^2}{60} \left( \frac{v}{R_1} \right)^2 \left[ 25 \sin 2B_1 \frac{u}{N_1} + 18 \cos 2B_1 \left( \frac{u}{N_1} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 4 \sin^2 B_1 \left( \frac{v}{N_1} \right)^2 \right] \\ \sigma_2 &= \frac{\mu \rho'^2}{60} \left( \frac{u}{R_1} \right)^2 \left[ -10 \sin 2B_1 \frac{u}{N_1} - 6 \cos 2B_1 \left( \frac{u}{N_1} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin^2 B_1 \left( \frac{v}{N_1} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\}. \quad (330)$$

По этим формулам (330), как наиболее простым для вычисления, и следует определить  $X$  и  $Y$ .

Далее применяют или (320) для определения  $B_f - B_1$ , или, что представляется более целесообразным, определяют  $B_f - B_1$  по таблицам для вычисления координат Гаусса-Крюгера, ограничиваясь в решении  $0'',0001$ , а не  $0'',00001$ .

Затем следует вычисление формул

$$\lg l_{1,2} = \lg \sigma \sec B_f \left[ 1 + \frac{\eta_f^2 t_f^2 \sigma^4}{15 \rho''^4} \right]; \quad (323)$$

$$\sigma = (2)_f Y;$$

$$\sin(B_f - B_2) = V_f^2 \sin B_f \operatorname{tg} \frac{l_{1,2}}{2} \sin \sigma \left[ 1 - \frac{\eta_f^2 \sigma^2}{12 \rho''^2} (1 - 9 t_f^2) \right]; \quad (325)$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{A_{2,1} \pm 180^\circ - A_{1,2}}{2} = \lg \left[ \frac{\sin \frac{B_2 + B_1}{2}}{\cos \frac{B_2 - B_1}{2}} \operatorname{tg} \frac{l_{1,2}}{2} \right] + \frac{\mu \eta_m^2 s^2}{12 N_m^2}; \quad (329)$$

$$\eta_m \text{ и } N_m \text{ выбирают по аргументу } B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}.$$

Целесообразным представляется поставить вопрос о приспособлении этих формул к расстояниям 120—300 км, чтобы получить может быть решение более выгодное, чем по формулам, данным в § 36.

Нужно отметить, что формулы этого параграфа позволяют дать выражения  $X$  и  $Y$  и сближения меридианов  $s$  через геодезические координаты. Эта задача важна в вопросах применения в геодезии сфероидических координат  $X$  и  $Y$ ; она будет представлена в одной из следующих глав.

### § 39. Бесселево изображение эллипсоида на шаре

В дальнейшем мы переходим к решению прямой геодезической задачи при расстоянии  $s$  в 1000—2000 км. Здесь приходится пользоваться приведенной широтой  $u$  и в основу положить следующий план решения задачи: сперва находим изображение нужных нам элементов эллипсоида на шаре по закону, предложенному Бesselем; совершив переход с эллипсоида на шар, на этом шаре решаем прямую геодезическую задачу; обратный переход от найденных элементов на шаре к соответствующим им элементам на эллипсоиде составляет последнюю стадию решения задачи. Займемся поэтому прежде всего изображением по Бesselю эллипсоида на шаре.

В этом изображении Бесселя: 1) точка эллипсоида  $A$  изображается на шаре точкой  $A_1$  (черт. 50), для которой сферическая широта равна приведенной широте  $u_1$  точки  $A$ ; 2) геодезическая линия эллипсоида изображается дугой большого круга, пересекающего меридианы шара под азимутами, равными азимутам геодезической линии в соответственных точках. Если на эллипсоиде даны для точек  $A$  и  $B$  приведенные их широты  $u_1$  и  $u_2$ , дана долгота точки  $A$  и дан азимут  $A_{1,2}$  геодезической линии  $AB$  в точке  $A$ , то этих данных вполне достаточно для определения положения точек  $A$  и  $B$  на эллипсоиде: в самом деле,  $u_2$  определяет параллель точки  $B$ , в пересечении которой с заданной геодезической линией, вполне определенной ее началом в  $A$  и начальным азимутом  $A_{1,2}$ , построится и точка  $B$ .

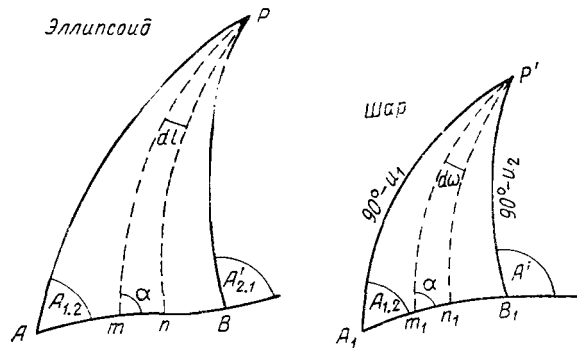
Пусть полюс  $P$  эллипсоида (черт. 50) изобразится на шаре точкой  $P'$ ; точка  $A$  — точкой  $A_1$  шара, имеющей «полярное» расстояние  $90^\circ - u_1$  (или сферическую широту  $u_1$ ). Проведя из  $A_1$  дугу большого круга под азимутом  $A_{1,2}$ , в пересечении параллели шара, имеющей полярное расстояние  $90^\circ - u_2$ , с этой дугой большого круга, получим вполне определенную точку  $B_1$ . Но будет ли  $B_1$  бесселевым изображе-

нием  $B$ ? Называя азимут геодезической линии в  $B$  через  $A'_{2,1}$ , а азимут дуги большого круга  $A_1B_1$  в  $B_1$  через  $A'$ , напишем:

$\cos u_1 \sin A_{1,2} = \cos u_2 \sin A'_{2,1}$  . . . на основании (109);  
 $\cos u_1 \sin A_{1,2} = \cos u_2 \sin A'$  . . . из сферического треугольника  $A_1P'B_1$ .

Отсюда  $A' = A'_{2,1}$ , т. е.  $B_1$  есть бесселево изображение  $B$ .

Назовем: через  $ds$  — бесконечно малый элемент  $mn$  геодезической линии; через  $d\sigma$  — соответствующий ему элемент  $m_1n_1$  в бесселевом изображении на шаре; через  $\alpha$  — азимут этого элемента; через  $B$  — геодезическую широту точки  $m$ ; через  $u$  — приведенную широту  $m$ ; через  $du$  — разность приведенных широт точек  $m$  и  $n$ ; через  $dl$  — разность долгот точек  $m$



Черт. 50

и  $n$ ; через  $d\omega$  разность на шаре долгот точек  $m_1$  и  $n_1$ .

Принимая радиус шара за единицу, будем иметь

$$du = d\sigma \cos \alpha; \quad (331)$$

$$d\omega \cos u = d\sigma \sin \alpha; \quad (332)$$

$$M dB = ds \cos \alpha; \quad (333)$$

$$N \cos B dl = ds \sin \alpha. \quad (334)$$

Деля (331) на (333), имеем

$$\frac{du}{dB} = M \frac{d\sigma}{ds}.$$

Но из (18) находим

$$\sin u = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin B}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}},$$

$$\cos B = \frac{\sqrt{1-e^2} \cos u}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}}.$$

Отсюда

$$\cos u du = \sqrt{1-e^2} \left[ \frac{\cos B}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}} + \frac{e^2 \sin^2 B \cos B}{(1-e^2 \sin^2 B)^{\frac{3}{2}}} \right] dB;$$

$$\frac{du}{dB} = \frac{\sqrt{1-e^2} \cos B}{\cos u (1-e^2 \sin^2 B)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 B)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}};$$

$$\frac{du}{dB} = \frac{M}{a} \frac{1}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}}.$$

Поэтому

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}}$$



или

$$ds = a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} d\sigma. \quad (335)$$

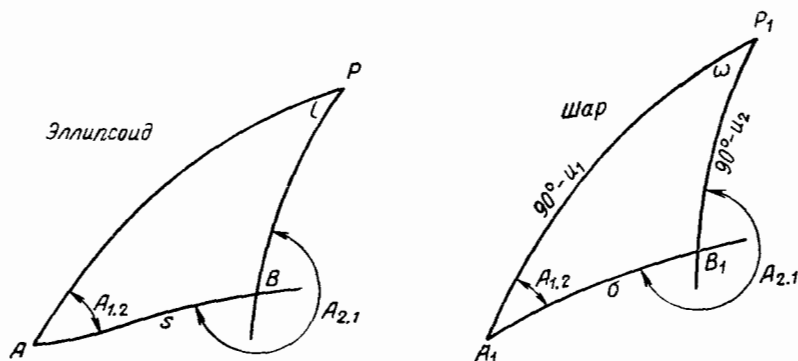
Деля же (334) на (332), имеем

$$\begin{aligned} \frac{N \cos B}{\cos u} \cdot \frac{dl}{d\omega} &= \frac{ds}{d\sigma}; \\ N \cos B dl &= a \cos u \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} d\omega; \\ dl &= \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} d\omega; \end{aligned} \quad (336)$$

Формулы (335) и (336) необходимы при перенесении геодезических координат и азимутов на значительные расстояния, пользуясь бесселевым изображением.

#### § 40. Метод Бесселя решения прямой геодезической задачи при значительных расстояниях между геодезическими точками

Попрежнему обозначаем данные: геодезическую широту точки  $A$  через  $B_1$ , геодезическую долготу точки  $A$  через  $L_1$ , азимут в  $A$  геодезической линии  $AB$  через  $A_{1,2}$ , расстояние между  $A$  и  $B$  через  $s$ . Искомыми являются: геодезическая широта  $B_2$  точки  $B$ , разность долгот  $l_{1,2}$  точек  $B$  и  $A$ , обратный азимут  $A_{2,1}$  в точке  $B$  геодезической линии  $BA$ .

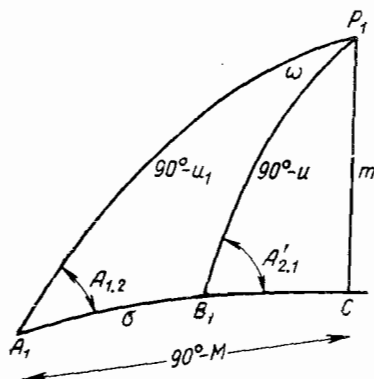


Черт. 51

Мы строим, как указано в § 39, бесселево изображение треугольника  $ABP$  на шаре радиуса единица и получаем сферический треугольник  $A_1P_1B_1$  (черт. 51), в котором сторона  $A_1P_1$  равна  $90^\circ - u_1$ , сторона  $B_1P_1$  равна  $90^\circ - u_2$ , причем  $u_1$  и  $u_2$  — приведенные широты точек  $A$  и  $B$ ; угол при  $P_1$  в треугольнике  $A_1P_1B_1$  называем через  $\omega$ , угол при  $A_1$  в том же треугольнике будет равен  $A_{1,2}$ , угол при  $B_1$  будет равен  $360^\circ - A_{2,1}$ ; длину стороны  $A_1B_1$  называем через  $\sigma$ .

Проведем (черт. 52) дугу большого круга  $P_1C$  перпендикулярно к продолжению дуги  $A_1B_1$ ; назовем:  $\overline{P_1C}$  через  $m$ ,  $\overline{A_1C}$  — через  $90^\circ - M$ ; угол  $P_1B_1C$  через  $A'_{2,1}$ , причем, очевидно, что  $A'_{2,1} = A_{2,1} - 180^\circ$ . Из треугольника  $A_1P_1C$  имеем

$$\operatorname{tg} M = \frac{\operatorname{tg} u_1}{\cos A_{1,2}}; \quad (337)$$



Черт. 52

$$\sin m = \sin A_{1.2} \cos u_1; \quad (338)$$

$$\cos m = \frac{\sin u_1}{\sin M} = \frac{\cos u_1 \cos A_{1.2}}{\cos M}. \quad (338')$$

По этим уравнениям (337) и (338) определяем  $m$  и  $M$ . Принимая пока точку  $B_1$  за текущую и обозначая поэтому ее широту на шаре просто через  $u$ , из треугольника  $B_1P_1C$  получаем

$$\sin u = \cos m \sin (M + \sigma),$$

$$\sin^2 u = \cos^2 m \sin^2 (M + \sigma),$$

$$\cos^2 u = 1 - \cos^2 m \sin^2 (M + \sigma).$$

Теперь (335) напишется так

$$ds = a \sqrt{1 - e^2 + e^2 \cos^2 m \sin^2 (M + \sigma)} d\sigma.$$

$$ds = a \sqrt{1 - e^2} \sqrt{1 + \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2 m \sin^2 (M + \sigma)} d\sigma.$$

Так как

$$a \sqrt{1 - e^2} = b = \text{малой полуоси эллипсоида},$$

то

$$ds = b \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 m \sin^2 (M + \sigma)} d\sigma$$

или, полагая

$$e'^2 \cos^2 m = k^2, \quad (339)$$

напишем

$$ds = b \sqrt{1 + k^2 \sin^2 (M + \sigma)} d\sigma;$$

$$\sqrt{1 + k^2 \sin^2 (M + \sigma)} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 (M + \sigma) - \frac{1}{8} k^4 \sin^4 (M + \sigma);$$

$$\sin^2 (M + \sigma) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(M + \sigma);$$

$$\sin^4 (M + \sigma) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2(M + \sigma) + \frac{1}{8} \cos 4(M + \sigma).$$

Теперь из (335) получаем далее

$$\sqrt{1 + k^2 \sin^2 (M + \sigma)} = \left(1 + \frac{1}{4} k^2 - \frac{3}{64} k^4\right) +$$

$$+ \left(-\frac{1}{4} k^2 + \frac{1}{16} k^4\right) \cos 2(M + \sigma) - \frac{k^4}{64} \cos 4(M + \sigma);$$

$$s = b \int_0^\sigma \left(1 + \frac{1}{4} k^2 - \frac{3}{64} k^4\right) d\sigma + b \left(-\frac{1}{4} k^2 + \frac{1}{16} k^4\right) \int_0^\sigma \cos 2(M + \sigma) d\sigma -$$

$$- \frac{b}{64} k \int_0^\sigma \cos 4(M + \sigma) d\sigma;$$

$$s = b \left\{ \left(1 + \frac{k^2}{4} - \frac{3}{64} k^4\right) \sigma - \left(\frac{k^2}{4} - \frac{k^4}{16}\right) \sin \sigma \cos (2M + \sigma) - \right. \\ \left. - \frac{k^4}{128} \sin 2\sigma \cos (4M + 2\sigma) \right\}.$$

Обозначая

$$\left. \begin{aligned} A &= 1 + \frac{k^2}{4} - \frac{3}{64} k^4, \\ B &= \frac{k^2}{4} - \frac{k^4}{16}, \\ C &= \frac{k^4}{128} \end{aligned} \right\}, \quad (340)$$

представим искомую зависимость между  $s$  и  $\sigma$  в таком виде

$$s = Ab\sigma - Bb \sin \sigma \cos(2M + \sigma) - Cb \sin 2\sigma \cos(4M + 2\sigma). \quad (341)$$

Обратно из (341) получаем

$$\sigma'' = \alpha \frac{s}{b} + \beta \sin \sigma \cos(2M + \sigma) + \gamma \sin 2\sigma \cos(4M + 2\sigma), \quad (342)$$

причем

$$\alpha = \frac{\rho''}{A}; \quad \beta = \frac{B\rho''}{A}; \quad \gamma = \frac{C\rho''}{A} \quad (343)$$

Для интегрирования уравнения (336) имеем прежде всего

$$\cos u d\omega = d\sigma \sin \alpha,$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin m}{\cos u},$$

$$d\omega = \frac{\sin m}{\cos^2 u} d\sigma,$$

причем под  $\alpha$  понимается азимут элемента дуги большого круга, имеющего на шаре широту  $u$ .

Далее из (336)

$$dl = \left( 1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 u - \frac{e^4}{8} \cos^4 u - \dots \right) d\omega,$$

$$l_{1,2} = \omega - \frac{e^2}{2} \int_0^\sigma \left( \cos^2 u + \frac{e^2}{4} \cos^4 u \right) \frac{\sin m}{\cos^2 u} d\sigma,$$

$$l_{1,2} = \omega - \frac{e^2 \sin m}{2} \int_0^\sigma \left( 1 + \frac{e^2}{4} \cos^2 u \right) d\sigma,$$

$$l_{1,2} = \omega - \frac{e^2 \sin m}{2} \int_0^\sigma \left[ 1 + \frac{e^2}{4} - \frac{e^2}{4} \cos^2 m \sin^2(M + \sigma) \right] d\sigma,$$

$$l_{1,2} = \omega - \frac{e^2 \sin m}{2} \int_0^\sigma \left[ 1 + \frac{e^2}{4} - \frac{e^2}{8} \cos^2 m + \frac{e^2}{8} \cos^2 m \cos 2(M + \sigma) \right] d\sigma,$$

$$l_{1,2} = \omega - \frac{e^2 \sin m}{2} \sigma \left( 1 + \frac{e^2}{4} - \frac{e^2}{8} \cos^2 m \right) - \frac{e^4 \sin m \cos^2 m}{16} \sin \sigma \cos(2M + \sigma),$$

$$l''_{1,2} = \omega'' - \sin m [\alpha_1 \sigma'' + \beta_1 \sin \sigma \cos(2M + \sigma)], \quad (344)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \left( \frac{1}{2} + \frac{e^2}{8} - \frac{e^2}{16} \cos^2 m \right) e^2 \\ \beta_1 &= \frac{\cos^2 m \rho''}{16} e^4 \end{aligned} \right\}. \quad (345)$$

Формула (344) у Бесселя имеет такой вид

$$l_{1,2} = \omega - \frac{e^2 \sin m}{\sqrt[3]{1 - \frac{3}{4} e^2}} [\alpha' \sigma + \beta' \sin \sigma \cos (2M + \sigma) + \dots]. \quad (346)$$

Было бы очень не трудно в предыдущих выводах зависимости между  $s$  и  $\sigma$  и между  $l$  и  $\omega$  сохранить член с  $e^6$ .

Тогда получили бы

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \alpha \frac{s}{b} + \beta \sin \sigma \cos (2M + \sigma) + \gamma \sin 2\sigma \cos (4M + 2\sigma) + \\ &\quad + \delta \sin 3\sigma \cos (6M + 3\sigma) \\ \alpha &= \frac{\rho''}{A}; \quad A = 1 + \frac{k^2}{4} - \frac{3}{64} k^4 + \frac{5}{256} k^6 \\ \beta &= \frac{B \rho''}{A}; \quad B = \frac{k^2}{4} - \frac{1}{16} k^4 + \frac{15}{512} k^6 \\ \gamma &= \frac{C \rho''}{A}; \quad C = \frac{k^4}{128} - \frac{3}{512} k^6 \\ \delta &= \frac{D \rho''}{A}; \quad D = \frac{k^6}{1536} \\ l''_{1,2} &= \omega'' - \sin m [\alpha_1 \sigma'' + \beta_1 \sin \sigma \cos (2M + \sigma) + \\ &\quad + \gamma_1 \sin 2\sigma \cos (4M + 2\sigma)] \\ \alpha_1 &= \frac{e^2}{2} \left( 1 + \frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8} \right) - \frac{e^4 \cos^2 m}{16} (1 + e^2) \\ \beta_1 &= \frac{e^4 \rho''}{16} \cos^2 m (1 + e^2) - \frac{e^6 \rho''}{32} \cos^4 m \\ \gamma_1 &= \frac{e^6 \cos^4 m \rho''}{256} \end{aligned} \right\}. \quad (347)$$

Формулами (347) пользуются крайне редко при передаче координат на тысячи километров, с применением при этом десятизначных логарифмов.

Вычисление  $\sigma$  по  $s$  на основании (342) ведется последовательными приближениями, таким образом

$$\sigma_0 = \alpha \frac{s}{b};$$

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \beta \sin \sigma_0 \cos (2M + \sigma_0),$$

$$\sigma_2 = \sigma_0 + \beta \sin \sigma_1 \cos (2M + \sigma_1) + \gamma \sin 2\sigma_1 \cos (4M + 2\sigma_1),$$

$$\sigma_3 = \sigma_0 + \beta \sin \sigma_2 \cos (2M + \sigma_2) + \gamma \sin 2\sigma_2 \cos (4M + 2\sigma_2).$$

Когда  $\sigma$  найдено, то решение треугольника  $A_1P_1B_1$  по двум сторонам и углу между ними выполняется по формулам Непера

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A'_{2.1} + \omega}{2} &= \frac{\sin \frac{90^\circ - u_1 + \sigma}{2}}{\sin \frac{90^\circ - u_1 - \sigma}{2}} \operatorname{tg} \frac{A_{1.2}}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{A'_{2.1} - \omega}{2} &= \frac{\cos \frac{90^\circ - u_1 + \sigma}{2}}{\cos \frac{90^\circ - u_1 - \sigma}{2}} \operatorname{tg} \frac{A_{1.2}}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{90^\circ - u_2}{2} &= \operatorname{tg} \frac{90^\circ - u_1 + \sigma}{2} \frac{\sin \frac{A'_{2.1} - \omega}{2}}{\sin \frac{A'_{2.1} + \omega}{2}} = \\ &= \operatorname{tg} \frac{90^\circ - u_1 - \sigma}{2} \frac{\cos \frac{A'_{2.1} - \omega}{2}}{\cos \frac{A'_{2.1} + \omega}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (348)$$

Здесь  $A'_{2.1} = A_{1.2} - 180^\circ$ .

Но можно еще применить и такие формулы

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} A'_{2.1} &= \frac{\cos M}{\cos (M + \sigma)} \operatorname{tg} A_{1.2} = \frac{\operatorname{tg} m}{\cos (M + \sigma)} \\ \operatorname{tg} u_2 &= \operatorname{tg} (M + \sigma) \cos A'_{2.1}; \\ \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} &= \frac{\sin \frac{1}{2} (u_2 - u_1)}{\sin \frac{1}{2} (u_2 + u_1)} \operatorname{tg} \frac{A_{1.2} + A'_{2.1}}{2} = \frac{\cos \frac{1}{2} (u_2 - u_1)}{\cos \frac{1}{2} (u_2 + u_1)} \operatorname{tg} \frac{A'_{2.1} - A_{1.2}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (349)$$

Применение в данном случае *прямого*, а не косвенного решения сферического треугольника не находится в противоречии с теми соображениями о преимуществах *косвенного* решения сферического треугольника, которые были выдвинуты в § 29. В самом деле, там шла речь о переносе координат по стороне триангуляции, здесь же мы говорим о передаче геодезических координат и азимутов на значительное расстояние — во всяком случае большее 600 км, при котором для вычислений придется применить десятизначные логарифмы. Применение при решении треугольника по формулам Непера логарифмированных с большим числом знаков обеспечит, конечно, соответствующую точность в величинах  $A_{2.1}$ ,  $u_2$  и  $\omega$ . С другой стороны, если при отдельных передачах по сторонам триангуляции мы естественно стараемся сохранить десятипятитысячные доли секунды в разностях широт и долгот каждого двух смежных триангуляционных пунктов, то при решении той же задачи сразу для большого расстояния  $s$  мы в праве допустить погрешность в несколько десятипятитысячных долей секунды в разности широт и долгот двух очень отдаленных пунктов.

#### § 41. Некоторые дополнительные замечания по поводу применения метода Бесселя

В 1831—1834 гг. Бесселем было выполнено градусное измерение между Трущем и Мемелем (Клайпеда). Особенностью измерения является то, что дуга Трущи—Мемель имеет «косвенное» направление относительно меридиана; на концах дуги были определены астрономически

ческие широты и астрономические азимуты. Задача состояла в том, чтобы после точного перенесения геодезическим путем астрономической широты и азимута в Трунце по геодезической линии Трунц — Мемель сравнить полученные геодезическую широту и геодезический азимут в Мемеле с таковыми же астрономически определенными там же величинами и отсюда вывести поправки полюсов  $a$  и сжатия референц-эллипсоида, принятого при геодезической передаче с Трунца на Мемель широты и азимута. С целью решения этой задачи Бессель и разработал свой метод, изложенный в § 40. Из уравнения

$$\frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = a \cos u$$

мы напишем

$$\cos u = \frac{\cos B}{V \sqrt{1 - e^2}} = \frac{\cos B \sqrt{1 + e'^2}}{V}. \quad (350)$$

Если имеем геодезическую линию  $AB$ , вдоль которой проложена триангуляционная цепь, то мы можем считать, что астрономический азимут, определенный в  $A$  для некоторой стороны триангуляции, может быть передан на направление геодезической линии  $AB$  в  $A$  без знания размеров и сжатия земного эллипсоида — это будет доказано в главе о градусных измерениях; то же самое относится к точке  $B$ . Получив такие азимуты, можем написать

$$\cos u_1 \sin A_{1,2} = \cos u_2 \sin A'_{2,1}. \quad (351)$$

Но (351) в соединении с (350) дает

$$q^2 = \left( \frac{\cos B_2 \sin A'_{2,1}}{\cos B_1 \sin A_{1,2}} \right)^2 = \frac{V_2^2}{V_1^2} = \frac{1 + e'^2 \cos^2 B_2}{1 + e'^2 \cos^2 B_1}.$$

Отсюда

$$e'^2 = \frac{1 - q^2}{q^2 \cos^2 B_1 - \cos^2 B_2}. \quad (352)$$

Если мы, как уже указано выше, выполним перенос непосредственно наблюдаемых астрономических азимутов в  $A$  и в  $B$  на направление геодезической линии  $AB$  в тех же точках, то эти азимуты  $A_{1,2}$  и  $A'_{2,1}$  должно считать астрономическими, так как при выводе их мы не зависим от размеров, сжатия и ориентировки референц-эллипсоида (они отнесены к геоиду).

Подставляя в выражение для  $q$  именно такие азимуты и астрономические широты, а в знаменателе (352) вместо  $B_2$  и  $B_1$  также астрономические широты точек  $B$  и  $A$ , мы по (352) и определим сжатие эллипсоида, соответствующего геоиду на участке его, представленном нашим градусным измерением.

После получения по (352) значения  $e'^2$  можем, конечно, легко получить  $e^2$  и приступить к выводу из нашего градусного измерения полюсов эллипсоида. Именно, используя астрономические широты  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  точек  $A$  и  $B$ , вычисляем им соответствующие приведенные широты по формулам

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} u_1 &= \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} \varphi_1 \\ \operatorname{tg} u_2 &= \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} \varphi_2 \end{aligned} \right\} \quad (353)$$

с использованием именно того значения  $e^2$ , которое определится уравнением (352). Далее применяем формулы (337) и (338) и по ним определяем  $M$  и  $m$ , причем полагаем в этих формулах, что  $A_{1,2}$  — астрономи-

ческий азимут в  $A$  геодезической линии  $AB$ , полученный переносом при помощи триангуляции между  $A$  и  $B$  непосредственно наблюдаемого в  $A$  азимута некоторой стороны триангуляции на направление в  $A$  геодезической линии  $AB$ .

Теперь вычисляем  $k^2 = e'^2 \cos^2 m$  и затем коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  по (343). Имея в виду вывести полюсь  $b$  из уравнения (342), мы должны в нем  $s$  взять из триангуляции, а  $\sigma$  вывести, как длину дуги большого круга, имеющей рассчитанные по (353) конечные широты на шаре  $u_1$  и  $u_2$  и конечные азимуты  $A_{1,2}$  и  $A'_{2,1}$ . Из (276) имеем

$$u_2 - u_1 = \sigma \cos \alpha_m \left\{ 1 + \frac{\sigma^2 \sin^2 \alpha_m}{24 \rho'^2} (2 + 3 t_m^2) \right\}, \quad (354)$$

причем

$$\alpha_m = \frac{A_{1,2} + A'_{2,1}}{2}; \quad t_m = \operatorname{tg} \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}.$$

Из (354) получаем

$$\sigma = \frac{u_2 - u_1}{\cos \alpha_m} \left\{ 1 - \frac{(u_2 - u_1)^2}{24 \rho'^2} \operatorname{tg}^2 \alpha_m (2 + 3 t_m^2) \right\}. \quad (355)$$

При расстоянии  $s$  около 700 км,  $\sigma$  определится по (355), из-за отбрасывания членов 5-го порядка, с ошибкой, меньшей  $0''{,}05$ , что будет вести к вполне допустимой относительной ошибке в  $\sigma$ , а в последующем в  $b$ , — около 1 : 450 000. Наконец, из (342) лишем

$$b = \frac{\alpha s}{\sigma - \beta \sin \sigma \cos (2M + \sigma) - \gamma \sin 2\sigma \cos (4M + 2\sigma)}.$$

Отсюда видно, что для самого Бесселя было важно применить его теорию не к прямому решению геодезической задачи, а к выводу расстояния  $\sigma$  по определенным на основе (353) широтам и по астрономическим азимутам, и к связи  $\sigma$  с расстоянием  $s$ , определяемым независимо от размеров Земли по базисам и углам треугольников триангуляции, проложенной между  $A$  и  $B$ . (Бессель выполнял вывод  $b$  и предшествующий ему вывод  $\sigma$  иначе, чем это сделано нами в этом параграфе). При  $B_2 = B_1$  мы получим в (352) неопределенное выражение; при  $B_2 - B_1 = 0$  или при  $A_{1,2} = A'_{2,1} = 0$  величина  $q$  становится неопределенной. Поэтому, очевидно, изложенный *бесселев прием определения  $e'^2$  и  $b$  применим при азимуте дуги  $AB$  от 35 до 55°.*

#### § 42. Обратная геодезическая задача для расстояний $s$ , меньших 40 км

В этой задаче считаются данными геодезические широты и долготы точек  $A$  и  $B$  (т. е.  $B_1$ ,  $L_1$ ,  $B_2$  и  $L_2$ ); подлежат определению: расстояние  $s$  между  $A$  и  $B$  по геодезической линии  $AB$ , и азимуты этой геодезической линии:  $A_{1,2}$  в  $A$  и  $A_{2,1}$  в  $B$ .

При расстояниях, меньших 40 км, всего лучше применить формулы Гаусса, т. е. формулы (282).

Прежде всего вычисляем:  $b = B_2 - B_1$ ;  $l_{1,2} = L_2 - L_1$ ;  $B_m = \frac{B_2 + B_1}{2}$  и  $t_0 = l_{1,2} \sin B_m$  (полным числом знаков).

Назовем в (282)

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(l_{1,2})}{2} + \frac{\sigma(t)}{4} &= \Delta \lg b, \\ - \frac{\sigma(b)}{4} + \frac{\sigma(t)}{4} &= \Delta \lg l_{1,2}. \end{aligned}$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} t &= l_{1.2} \sin B_m \left( 1 + \frac{b^2}{24 \rho''^2} - \frac{t^2}{24 \rho''^2} \right) \left( 1 + \frac{b^2}{12 \rho''^2} - \frac{t^2}{24 \rho''^2} + \frac{l_{1.2}^2}{12 \rho''^2} \right); \\ t &= l_{1.2} \sin B_m \left( 1 + \frac{3}{24} \frac{b''^2}{\rho''^2} - \frac{1}{12} \frac{t''^2}{\rho''^2} + \frac{l_{1.2}''^2}{12 \rho''^2} \right); \\ \lg t &= \lg l_{1.2} \sin B_m + \frac{3}{4} \sigma(b'') - \frac{1}{2} \sigma(t'') + \frac{1}{2} \sigma = (l''_{1.2}); \\ &\frac{3}{4} \sigma(b'') - \frac{1}{2} \sigma(t'') + \frac{1}{2} \sigma(l''_{1.2}) \Delta \lg t. \end{aligned}$$

Выберем по таблицам значения  $\Delta \lg b$ ,  $\Delta \lg l$  и  $\Delta \lg t$ . Теперь имеем

$$\left. \begin{aligned} \lg(1)_m s \cos A_m &= \lg b - \Delta \lg b = \lg b_0 \\ \lg(2)_m s \sin A_m \sec B_m &= \lg l_{1.2} - \Delta \lg l = \lg l_0 \\ \lg t &= \lg l_{1.2} + \lg \sin B_m + \Delta \lg t \end{aligned} \right\}. \quad (356)$$

Вычислив по (356)  $\lg b_0$ ,  $\lg l_0$  и  $\lg t$ , далее получаем

$$\left. \begin{aligned} \lg \lg A_m &= \lg l_0 + \lg \cos B_m - \lg b_0 + \lg(1)_m - \lg(2)_m \\ \lg s &= \lg b_0 - \lg(1)_m - \lg \cos A_m = \lg l_0 - \lg(2)_m - \\ &\quad - \lg \sin A_m + \lg \cos B_m \\ A_{1.2} &= A_m - \frac{t}{2}; \quad A_{2.1} = A_m \pm 180^\circ + \frac{t}{2} \end{aligned} \right\}. \quad (357)$$

На вывод азимутов  $A_{1.2}$  и  $A_{2.1}$  будут влиять ошибки вычислений, ошибки данных  $B_1$ ,  $L_1$ ,  $B_2$ ,  $L_2$ , включая сюда и ошибки формул (282).

Не трудно видеть, что ошибки в  $(B_2 - B_1)$  и  $(L_2 - L_1)$  приведут к таким погрешностям:

$$\begin{aligned} \Delta A_m &= \cos^2 A_m \left[ \frac{\Delta l}{b} \cos B_m + \frac{l \sin B_m}{2b} \Delta b - \frac{l \cos B_m}{b} \frac{\Delta b}{b} \right]; \\ \frac{\Delta t}{2} &= \frac{\Delta l}{2} \sin B_m + l \cos B_m \frac{\Delta b}{4}; \\ \Delta A_{1.2} &= \frac{\Delta l}{2} \left( \frac{\sin 2 A_m}{l} - \sin B_m \right) + \left[ \frac{\lg B_m \sin 2 A_m}{4} - l \cos B_m \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{s^2} \right) \right] \Delta b; \\ \sigma &= \frac{s}{N}. \end{aligned}$$

Или, удерживая лишь главную часть влияния

$$\Delta A_{1.2} = \frac{\sin 2 A_m}{2l} \Delta l - \frac{\sin A_m}{s} \Delta b. \quad (358)$$

Отсюда заключаем, что ошибки формул Гаусса (см. § 34) могут приводить к искажению азимута, выведенного из обратной геодезической задачи, до  $0'',006$  при  $s = 40$  км. Формула (358), конечно, не годится для соображения ошибки в  $A_{1.2}$ , обусловленной ошибками вычислений по формулам (357) и (356); эти ошибки вычислений при восьмизначном логарифмировании дадут не более  $0'',002$  в  $A_{1.2}$ , возрастая, конечно, в десять раз при семизначном логарифмировании. Так как ошибки  $b$  и  $l_{1.2}$ , обусловленные семизначным вычислением прямой геодезической



задачи, достигают  $0'',0003$ , т. е. в десять раз больше ошибки в  $b$ , обусловленной ошибками формул, и в пять раз больше ошибки в  $l_{1,2}$ , обусловленной той же причиной, то это влияние может дать в  $A_{1,2}$  погрешность в  $0'',05$ . Таким образом, при восьмизначном вычислении все-таки искажение  $A_{1,2}$  или  $A_{2,1}$  может достичь  $0'',008$ ; при семизначном вычислении это искажение может достичь  $0'',04—0'',05$ . Отсюда ясно, что вычисление семизначными логарифмами  $b$  и  $l_{1,2}$  в триангуляции I класса не допустимо, и обратную задачу нужно решать также восьмизначными логарифмами.

#### § 43. Обратная геодезическая задача для расстояний $s$ до 200 км

Здесь следует применить формулы с средней широтой и с средним азимутом, т. е. формулы (280).

Получив  $b = B_2 - B_1$ ,  $l_{1,2} = L_2 - L_1$ ,  $B_m = \frac{B_2 + B_1}{2}$ , далее вычисляют:

$t_0 = \tau = l_{1,2} \sin B_m$  . . . с полным числом знаков;

$$\left. \begin{aligned} \Delta \lg b &= (5)_m l_{1,2}^2 \cos^2 B_m + (6)_m b^2 \\ \Delta \lg l_{1,2} &= (3)_m \tau^2 - (4)_m b^2 \\ \Delta \lg t &= (7)_m l_{1,2}^2 \cos^2 B_m + (8)_m b^2 \end{aligned} \right\} \text{с пятизначными логарифмами}$$

После этого вычисляем

$$\lg (1)_m s \cos A_m = \lg b_0 = \lg b - \Delta \lg b,$$

$$\lg (2)_m s \sin A_m \sec B_m = \lg l_0 = \lg l_{1,2} - \Delta \lg l_{1,2},$$

и далее

$$\left. \begin{aligned} \lg t &= \lg l_{1,2} + \lg \sin B_m + \Delta \lg t, \\ \lg \tg A_m &= \lg l_0 + \lg \cos B_m - \lg b_0 + \lg (1)_m - \lg (2)_m, \\ \lg s &= \lg b_0 - \lg (1)_m - \lg \cos A_m = \lg l_0 - \lg (2)_m - \\ &\quad - \lg \sin A_m + \cos B_m, \\ A_{1,2} &= A_m - \frac{t}{2}; \quad A_{2,1} = A_m \pm 180^\circ + \frac{t}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (359)$$

Ошибки формул (280) дадут при  $s = 200$  км погрешность в  $A_{1,2}$ , меньшую  $0'',0024$ ; ошибки величин  $b$  и  $l_{1,2}$ , обусловленные ошибками в процессе их вычисления по формулам (271), дадут влияние в  $A_{1,2}$ , вообще меньшее  $0'',0012$ ; ошибки вычислений по формулам (359) дадут не более  $0'',002$ . Итак,  $A_{1,2}$  или  $A_{2,1}$  определяются с ошибкой, которая может достичь  $0'',003$ , что является достаточным для всех целей.

В 1918 г. Крюгер дал решение обратной геодезической задачи, которое мы приводим вслед за этим, без вывода формул

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= l_{1,2} \sin B_m \sec \frac{b}{2} \\ \beta &= \frac{M_m}{\rho''} b'' \cos \frac{l_{1,2}}{2} \\ \lambda &= \frac{N_m}{\rho''} l_{1,2} \cos B_m \left( \sec \frac{b}{2} \cos \frac{l_{1,2}}{2} \right)^{\frac{1}{5}} \end{aligned} \right\}; \quad (360)$$

$$\left. \begin{aligned} \lg(A_{2,1} \pm 180^\circ - A_{1,2}) &= \lg \gamma + [1]\lambda^2 - [4]\beta^2 \\ \lg s \sin A_m &= \lg \lambda + [2]\lambda^2 - [5]\beta^2 \\ \lg s \cos A_m &= \lg \beta + [3]\lambda^2 + [6]\beta^2 \end{aligned} \right\}; \quad (361)$$

$$[1] = \frac{\mu}{12} \frac{1}{M_m N_m}; \quad [2] = \frac{\mu}{24} \frac{1}{N_m^2}; \quad [3] = \frac{\mu}{24} \frac{1 - 2\eta_m^2}{N_m^2};$$

$$[4] = \frac{\mu}{12} \frac{\eta_m^2}{M_m N_m}; \quad [5] = \frac{\mu}{24} (1 + \eta_m^2 + 9t_m^2);$$

$$[6] = \frac{\mu \eta_m^2}{8 N_m^2} (1 + \eta_m^2 - t_m^2 + 4\eta_m^2 t_m^2);$$

$$B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}; \quad A_m = \frac{A_{1,2} + A_{2,1} \pm 180^\circ}{2}; \quad t_m = \operatorname{tg} B_m.$$

К этим формулам даны еще члены пятого порядка

$$\left. \begin{aligned} \text{для } \lg s \sin A_m: & \frac{\mu}{2880} \left( \frac{s}{N} \right)^4 \{ 4 + (10 + 30 t_m^2) \sin^2 A_m - \\ & - (29 + 38 t_m^2 + 4 t_m^4) \sin^4 A_m \} \\ \text{для } \lg s \cos A_m: & - \frac{\mu}{2880} \left( \frac{s}{N} \right)^4 \{ (18 + 30 t_m^2) \sin^2 A_m - \\ & - (29 + 30 t_m^2) \sin^4 A_m \} \\ \text{для } \lg(A_{2,1} - A_{1,2} \pm 180^\circ): & - \frac{\mu}{1440} \left( \frac{s}{N} \right)^4 \times \\ & \times \{ (10 + 30 t_m^2) \sin^2 A_m - (27 + 34 t_m^2) \sin^4 A_m \} \end{aligned} \right\}. \quad (361')$$

Формулы (360) и (361) могут быть рекомендуемы, как дающие более точное решение обратной геодезической задачи при расстояниях порядка 200 км, чем формулы (359), хотя решение по последним является более простым; формулы (360), (361) вместе с (361') позволяют выполнить достаточно точное решение обратной геодезической задачи при расстояниях и до 300 км.

#### § 44. Общее заключение по поводу формул для решения прямой и обратной геодезической задачи

Наиболее отвечающими решению прямой задачи при расстояниях, меньших 120 км, следует признать формулы Шрейбера. При этом следует в широтах, больших  $55^\circ$ , в формулы Шрейбера внести следующие изменения. В моей статье «Геометрический метод вывода формул Шрейбера» показано, что с высокой степенью точности

$$\operatorname{tg} l_{1,2} = \operatorname{tg} c \sec B_0,$$

$$\operatorname{tg} t = \sin c \operatorname{tg} B_0 - \frac{e'^2}{6} c^2 \cos^2 B_0 t_0 \dots (t_0 = \sin c \operatorname{tg} B_0),$$

$$\sin d = \frac{N_0}{M_0} \sin c \sin B_0 \operatorname{tg} \frac{l_{1,2}}{2} \left[ 1 + \frac{e'^2}{12 \rho'^2} (9 - 10 \cos^2 B_0) c^2 \right].$$

В широтах, больших  $55^\circ$ , вместо вычисления  $l_{1,2}$  по формуле (267),  $t$  — по формуле (269) и  $d$  — по формуле (268), применяются формулы

$$\lg \operatorname{tg} l_{1,2} = \lg (\operatorname{tg} c \sec B_0),$$

$$\lg \operatorname{tg} t = \lg (\sin c \operatorname{tg} B_0) - \frac{\mu e'^2}{6 \rho''^2} (c^2 \cos^2 B_0),$$

$$\begin{aligned} \lg \sin d = \lg \sin (B_0 - B_2) = \lg \frac{N_0}{M_c} + \lg \left( \sin c \sin B_0 \operatorname{tg} \frac{l_{1,2}}{2} \right) + \\ + \frac{\mu e'^2}{12 \rho''^2} (9 - 10 \cos^2 B_0) c^2. \end{aligned}$$

Этим будет достигнута полная точность формул Шрейбера и в северных широтах, больших  $55^\circ$ .

При расстояниях от 120 до 200 км нам представляется все-таки в условиях основных геодезических работ более целесообразным в прямой задаче применение формул (280) «с средней широтой и средним азимутом», чем формул (300), (301) и (302). Дело в том, что до передачи геодезических координат и азимутов по геодезической линии, соединяющей конечные лапласовы пункты  $A$  и  $B$  звена триангуляции I класса, обычно по сторонам треугольников этого звена до его уравнивания выполняют перенос геодезических координат и азимутов по формулам Шрейбера и, следовательно, геодезическая широта и долгота пункта  $B$  определяются из этих вычислений с ошибками всего в несколько десятых долей секунды из-за использования еще неуровненных углов треугольника звена, и главным образом из-за неокончательно еще установленной широты и долготы точки  $A$ . После уравнивания звена следует вывод, всего лучше по так называемым «полярным координатам» (см. главу об обработке астрономо-геодезической сети), длины  $s$  геодезической линии и углов  $\beta$ , образуемых ею в  $A$  и  $B$  соответственно с предыдущей и последующей геодезическими линиями сети. После этого следует общее уравнивание астрономо-геодезической сети и вывод окончательных значений: длин  $s$  геодезических линий, упомянутых уже углов  $\beta$ , астрономических азимутов и астрономических долгот в лапласовых пунктах. Теперь остается последняя стадия — вывод геодезических координат и азимутов для лапласовых пунктов астрономо-геодезической сети, решая прямую геодезическую задачу. Очевидно, здесь будем иметь окончательные значения  $B_1$ ,  $L_1$  и  $A_{1,2}$ , полученные путем передачи от предыдущих нашему звеньев;  $B_2$  и  $L_2$  — с ошибками в несколько десятых долей секунды, как вычисленные до уравнивания звена и всей сети. Поэтому  $B_m^0$  (§ 33) будем иметь с ошибкой всего в одну-две десятых секунды; геодезический азимут  $A_{2,1}$ , в качестве лапласова азимута, можем получить в этот момент на основании данных по указанному выше вычислению полярных координат после уравнивания звена и по геодезической долготе, полученной до уравнивания звена, с ошибкой не более  $0'',5-0'',8$ . Таким образом,  $A_m^0$  будет ошибочно на  $0'',3-0'',4$ . Очевидно, довольно проделывать только два раза вычисление формул (280), чтобы решить задачу: это будет проще вычислений по формулам Крюгера, так как целый ряд величин во втором вычислении совершенно не изменится.

Формулы (300) и (301) поэтому следует применять только в редких случаях, когда при  $s$ , большем 120 км и меньшем 200 км, широту  $B_2$  и

долготу  $L_2$  определяем в первом приближении грубее, чем до одной секунды; также надлежит применять их при  $200 < s < 250$  км. Другими словами, мы не имеем оснований для рекомендации сколько-нибудь широкого применения этих формул Крюгера. Для расстояний от 250–300 км до 800 км следует применять формулы, данные в § 37 и 38.

Конечно, с расстояний в 800 и до нескольких тысяч километров применяется метод Бесселя решения прямой задачи, который должно признать наилучшим для таких расстояний.

Обратную задачу всего лучше решать по формулам Гаусса (356) и (357) при  $s < 40$  км и по формулам (359) при  $s < 200$  км. Формулы (360) и (361) дают, конечно, более точный результат, чем формулы (359); но с ошибкой в  $0'',003$  в азимуте, мне представляется, можно помириться и при  $s = 200$  км, так как это вызовет сдвиг конца линии  $AB$  всего на  $0,003$  м; совершенно излишне стремиться к вычислению азимутов строго до  $0'',0001$ . Только при расстояниях около 300 км следует применять формулы Крюгера для обратной задачи.

---

## Глава V

# СФЕРИЧЕСКИЕ И СФЕРОИДИЧЕСКИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

### § 45. Сферические прямоугольные координаты Зольднера

Эти координаты с переходом в СССР и в других государствах на систему координат Гаусса-Крюгера утратили свое практическое значение. Они имеют теперь историческое значение и, кроме того, представляют некоторый интерес с методической стороны. Поэтому сведения об этих координатах будут даны в кратких чертах.

а. Прямая задача в сферических координатах Зольднера. Пусть точка  $O$  на нашей сфере является началом координат; меридиан этой точки  $POP_1$  примем за ось  $x$ -ов. Проведя из произвольной точки (черт. 53) большой круг  $AA_0$ , перпендикулярный к осевому меридиану  $POP_1$ , будем понимать: под ординатой  $y_1$  точки  $A$  длину дуги  $AA_0$ ; под абсциссой  $x_1$  точки  $A$  длину дуги  $OA_0$ . Положительными будем считать абсциссы к северу от  $O$ , а ординаты  $y$  будем считать положительными к востоку от меридиана  $POP_1$ .

Если отложим на дуге ординаты  $BB_0$  дугу  $B_0B_1 = AA_0 = y_1$ , то дуга  $B_1B$  представит разность  $\Delta y$  ординат точек  $A$  и  $B$ , расстояние между которыми назовем через  $s$ ; очевидно, дуга меридиана  $A_0B_0$  будет равна разности абсцисс точек  $A$  и  $B$ , которую обозначим через  $\Delta x$ . Проведем далее в  $A$  и  $B$  большие круги  $AC$  и  $BC_1$ , перпендикулярные соответственно к дугам ординат  $AA_0$  и  $BB_0$ . Угол между кругом  $AC$  и дугой  $AB$ , отсчитываемый в  $A$  от  $AC$  по ходу часовой стрелки от севера через восток и т. д., будем называть дирекционным углом  $T_{1-2}^s$  для направления  $AB$ ; угол в  $B$  между кругом  $BC_1$  и дугой  $BA$ , считаемый также от  $BC_1$  по ходу часовой стрелки от севера через восток, будет, очевидно, дирекционным углом направления  $BA$  в  $B$ ; этот угол обозначаем через  $T_{2-1}^s$ . Дальше будем всегда считать, что ординаты меньше 80 км, а  $s < 30$  км. Радиус шара назовем через  $R$ ; точки  $A$  и  $B_1$  соединим дугой большого круга; длину дуги  $AB_1$  назовем через  $z$ .

Пусть на черт. 53 точка  $Q$  есть полюс круга  $POP_1$ ; продолжения кругов  $A_0A$  и  $B_0B$  пересекутся, конечно, в  $Q$ ; в треугольнике  $B_1QA$  угол при  $Q$  равен  $\frac{\Delta x}{R}$ . Назовем сферический избыток трапеции  $A_0AB_1B_0$  (черт. 54) через  $\epsilon'$ ; всегда  $\epsilon' < 12''$ ; сферический избыток треугольника  $BAB_1$  назовем через  $\epsilon$ , причем  $\epsilon < 1''$ ,3. Конечно, угол  $B_0B_1A$  равен  $90^\circ + \frac{\epsilon'}{2}$  и так же угол  $A_0AB_1$  равен  $90^\circ + \frac{\epsilon'}{2}$ . Так как углы при  $A$  и  $B_1$  в треугольнике  $AQB_1$  равны между собой (каждый равен  $90^\circ - \frac{\epsilon'}{2}$ ), то,



Избыток  $\varepsilon$  треугольника  $ABB_1$  вычислится так

$$\varepsilon'' = -\frac{sz \sin \left( T_{1,2}^s - \frac{\varepsilon'}{2} \right)}{2R^2} \rho''. \quad (365)$$

Так как приведенные по теореме Лежандра углы в треугольнике  $ABB_1$  будут\*

$$\text{при } A \dots T_{1,2}^s - \frac{\varepsilon'}{2} - \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\text{„ } B_1 \dots 90^\circ - \frac{\varepsilon'}{2} - \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\text{„ } B \dots 90^\circ - T_{1,2}^s + \varepsilon' + \frac{2}{3} \varepsilon,$$

то имеем

$$\Delta y = \frac{s \sin \left( T_{1,2}^s - \frac{\varepsilon'}{2} - \frac{\varepsilon}{3} \right)}{\cos \left( \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon}{3} \right)},$$

$$z = \frac{s \cos \left( T_{1,2}^s - \varepsilon' - \frac{2\varepsilon}{3} \right)}{\cos \left( \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon}{3} \right)}.$$

Здесь  $\cos \left( \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon}{3} \right)$  должно принять равным единице.

Поэтому

$$\left. \begin{aligned} \Delta y &= s \sin \left( T_{1,2}^s - \frac{\varepsilon'}{2} - \frac{\varepsilon}{3} \right) \\ z &= s \cos \left( T_{1,2}^s - \varepsilon' - \frac{2}{3} \varepsilon \right) \end{aligned} \right\}. \quad (366)$$

С ошибками лишь в сотых долях секунды можем теперь (365) переписать так

$$\varepsilon'' = \frac{s^2 \sin T_{1,2}^s \cos T_{1,2}^s}{2R^2} \rho''.$$

Избыток  $\varepsilon'$  получится как сумма избытков треугольников  $B_0B_1A$  и  $B_0A_0A$ , т. е.

$$\varepsilon' = \frac{y_1 z}{2R^2} \rho'' + \frac{y_1 \Delta x}{2R^2} \rho'' = \frac{y_1 z \rho''}{2R^2} \left( 1 + 1 + \frac{y_1^2}{2R^2} \right)^{**}.$$

С ошибкой, меньшей  $0'',001$

$$\varepsilon' = \frac{y_1 s \cos T_{1,2}^s}{R^2} \rho''.$$

\* Надлежит иметь в виду, что  $\varepsilon'$  и  $\varepsilon$  величины алгебраические, лишь по величине равные сферическим избыткам соответственных фигур.

\*\* Здесь опущен множитель  $\left( 1 + \frac{1}{8} \frac{m^2}{R^2} \right) = \left( 1 + \frac{2y^2 + 2z^2}{24R^2} \right)$ .

Наконец

$$T_{2,1}^s = 360^\circ - 90^\circ - (90^\circ - T_{1,2}^s \mp \varepsilon' \mp \varepsilon),$$

$$T_{2,1}^s = 180^\circ + T_{1,2}^s - \varepsilon' - \varepsilon.$$

Таким образом, считая данными  $y_1$ ,  $s$  и  $T_{1,2}^s$ , прямую задачу переноса прямоугольных сферических координат решаем по формулам

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon'' &= \frac{s^2 \sin T_{1,2}^s \cos T_{1,2}^s}{2R^2} \rho'' \\ \varepsilon' &= \frac{y_1 s \cos T_{1,2}^s}{R^2} \rho'' \\ y_2 &= y_1 + s \sin \left( T_{1,2}^s - \frac{\varepsilon'}{2} - \frac{\varepsilon}{3} \right) \\ x_2 &= x_1 + s \cos \left( T_{1,2}^s - \varepsilon' - \frac{2}{3} \varepsilon \right) \left( 1 + \frac{y_1^2}{2R^2} \right) \\ \lg(x_2 - x_1) &= \lg s \cos \left( T_{1,2}^s - \varepsilon' - \frac{2}{3} \varepsilon \right) + \frac{10^7 \mu y_1^2}{2R^2} \\ T_{2,1}^s &= T_{1,2}^s \pm 180^\circ - \varepsilon' - \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (367)$$

или

Формулы (367) представляются наиболее удобными для вычислений; применявшиеся в практике формулы имеют другой вид, чем выведенные формулы (367). Для получения этих формул введем обозначения

$$s \sin T_{1,2}^s = v, \quad s \cos T_{1,2}^s = u,$$

и сделаем в (367) разложения  $\sin \left( T_{1,2}^s - \frac{\varepsilon'}{2} - \frac{\varepsilon}{3} \right)$  и  $\cos \left( T_{1,2}^s - \varepsilon' - \frac{2}{3} \varepsilon \right)$  в ряды Тейлора

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + s \sin T_{1,2}^s + s \cos T_{1,2}^s \left( -\frac{\varepsilon'}{2} - \frac{\varepsilon}{3} \right); \\ y_2 &= y_1 + v - \frac{u^2 y_1}{2R^2} - \frac{u^2 v}{6R^2}; \end{aligned} \quad (368)$$

$$x_2 = x_1 + \left( s \cos T_{1,2}^s + \varepsilon' s \sin T_{1,2}^s + \frac{2}{3} \varepsilon s \sin T_{1,2}^s \right) \left( 1 + \frac{y_1^2}{2R^2} \right);$$

$$x_2 = x_1 + u + \frac{u y_1^2}{2R^2} + \frac{u v y_1}{R^2} + \frac{u v^2}{3R^2};$$

$$x_2 = x_1 + u + \frac{u y_1^2}{2R^2} + \frac{u v^2}{2R^2} - \frac{u v^2}{R^2} + \frac{u v^2}{3R^2};$$

$$x_2 = x_1 + u + \frac{u y_1^2}{2R^2} - \frac{u v^2}{6R^2}; \quad (369)$$

$$T_{2,1}^s = T_{1,2}^s \pm 180^\circ - \frac{u y_1}{R^2} \rho'' - \frac{u v}{2R} \rho''. \quad (370)$$

Формулы (368), (369) и (370) суть именно те, которые обычно употребляют при вычислениях сферических координат Зольднера; при этом, проводя через  $A, B, \dots$  малые круги, параллельные осевому меридиану  $POP_1$ , углы  $T^s$  считают от этих малых кругов. Так как большой круг  $AC$  (черт. 53), перпендикулярный в  $A$  к ординате  $AA_0$ , имеет общую



касательную в  $A$  с малым кругом, параллельным меридиану  $POP_1$ , то очевидно, что, вводя эти малые круги, следует под  $T^s$  понимать угол между касательными к соответствующему малому кругу и к дуге большого круга, соединяющей геодезические точки.

**б. Обратная задача в координатах Зольднера.** Если даны координаты  $x_1, y_1, x_2, y_2$  для точек  $A$  и  $B$ , а требуется определить  $s, T_{1,2}^s$  и  $T_{2,1}^s$ , то, называя

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= \Delta y, \\ x_2 - x_1 &= \Delta x, \end{aligned}$$

имеем

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon' &= \frac{y_1 \Delta x}{R^2} \rho'' \\ \varepsilon &= \frac{\Delta x \Delta y}{2 R^2} \rho'' \end{aligned} \right\}. \quad (371)$$

Далее из (367)

$$\Delta x = s \cos \left[ T_{1,2}^s - \frac{\varepsilon'}{2} - \frac{\varepsilon}{3} - \left( \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon}{3} \right) \right] \left[ 1 + \frac{y_1^2}{2 R^2} \right];$$

$$\Delta x = s \cos \left( T_{1,2}^s - \frac{\varepsilon'}{2} - \frac{\varepsilon}{3} \right) \left[ 1 + \frac{\left( \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon}{3} \right) \sin \left( T_{1,2}^s - \frac{\varepsilon'}{2} - \frac{\varepsilon}{3} \right)}{\cos \left( T_{1,2}^s - \frac{\varepsilon'}{2} - \frac{\varepsilon}{3} \right)} \right] \left[ 1 + \frac{y_1^2}{2 R^2} \right].$$

На основании (366), (367) и (371)

$$\begin{aligned} \sin \left( T_{1,2}^s - \frac{\varepsilon'}{2} - \frac{\varepsilon}{3} \right) &= \frac{\Delta y}{s}; \\ \varepsilon' &= \frac{y_1 z}{R^2} = \frac{y_1 s}{R^2} \cos \left( T_{1,2}^s - \varepsilon' - \frac{2}{3} \varepsilon \right); \\ \varepsilon &= \frac{s^2 \sin \left( T_{1,2}^s - \frac{\varepsilon'}{2} - \frac{\varepsilon}{3} \right) \cos \left( T_{1,2}^s - \frac{\varepsilon'}{2} - \frac{\varepsilon}{3} \right)}{2 R^2}. \end{aligned}$$

Поэтому получаем

$$\Delta x = s \cos \left( T_{1,2}^s - \frac{\varepsilon'}{2} - \frac{\varepsilon}{3} \right) \left( 1 + \frac{y_1 \Delta y}{2 R^2} + \frac{\Delta y^2}{6 R^2} + \frac{y_1^2}{2 R^2} \right). \quad (372)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} s \cos \left( T_{1,2}^s - \frac{\varepsilon'}{2} - \frac{\varepsilon}{3} \right) &= A, \\ s \sin \left( T_{1,2}^s - \frac{\varepsilon'}{2} - \frac{\varepsilon}{3} \right) &= B. \end{aligned}$$

Из (367) и (372) имеем

$$\begin{aligned} \lg B &= \lg \Delta y, \\ \lg A &= \lg \Delta x - \frac{10^7 \mu}{8 R^2} (y_1 + y_2)^2 - \frac{10^7 \mu \Delta y^2}{24 R^2}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем общую сводку для решения задачи

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\Delta x \Delta y}{2R^2} \varphi'' \\ \varepsilon' &= \frac{y_1 \Delta x}{R^2} \varphi'' \\ \lg B &= \lg \Delta y \\ \lg A &= \lg \Delta x - \frac{10^7 \mu}{8R^2} (y_1 + y_2)^2 - \frac{10^7 \mu \Delta y^2}{24R^2} \\ \operatorname{tg} T_{1.2}^s - \frac{\varepsilon'}{2} - \frac{\varepsilon}{3} &= \frac{B}{A} \\ s &= \frac{A}{\cos \left( T_{1.2}^s - \frac{\varepsilon'}{2} - \frac{\varepsilon}{3} \right)} = \frac{B}{\sin \left( T_{1.2}^s - \frac{\varepsilon'}{2} - \frac{\varepsilon}{3} \right)} \\ T_{2.1}^s &= T_{1.2}^s \pm 180^\circ - \varepsilon' - \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (373)$$

В прежней практике решение вели по иным формулам, вывод которых из (368), (369) и (370) приводится вслед за этим.

Не различая в поправочных членах (368), (369) и (370)  $\Delta x$  от  $u$  и  $\Delta y$  от  $v$ , получим

$$\begin{aligned} \Delta y &= s \sin T_{1.2}^s - \frac{\Delta x^2 y_1}{2R^2} - \frac{\Delta x^2 \Delta y}{6R^2}, \\ \Delta x &= s \cos T_{1.2}^s + \frac{\Delta x y_2^2}{2R^2} - \frac{\Delta x \Delta y^2}{6R^2}. \end{aligned}$$

Обозначая

$$\left. \begin{aligned} \delta y &= \frac{\Delta x^2 y_1}{2R^2} + \frac{\Delta x^2 \Delta y}{6R^2} \\ \delta x &= -\frac{\Delta x y_2^2}{2R^2} - \frac{\Delta x \Delta y^2}{6R^2} \end{aligned} \right\}, \quad (374)$$

пишем

$$\left. \begin{aligned} s \sin T_{1.2}^s &= \Delta y + \delta y \\ s \cos T_{1.2}^s &= \Delta x + \delta x \\ \operatorname{tg} T_{1.2}^s &= \frac{\Delta y + \delta y}{\Delta x + \delta x} \\ s &= \frac{\Delta y + \delta y}{\sin T_{1.2}^s} = \frac{\Delta x + \delta x}{\cos T_{1.2}^s} \\ T_{2.1}^s &= T_{1.2}^s \pm 180^\circ - \frac{y_1 \Delta x}{R^2} \varphi'' - \frac{\Delta x \Delta y}{2R^2} \varphi'' \end{aligned} \right\} \quad (375)$$

**в. Использование прямоугольных сферических координат как плоских; искажение расстояний и направлений.** Представим себе, что на плоскости мы изобразили осевой меридиан  $POP_1$  (черт. 53) прямой линией  $P'O'P'_1$  (черт. 55); условимся далее большие круги  $QA_0, QB_0, \dots$  (черт. 53) изображать прямыми, перпендикулярными к прямой  $P'O'P'_1$  и отстоящими друг от друга на расстояния, равные разностям абсцисс

тех точек  $A, B \dots$ , через которые проходят эти круги  $QA_0, QB_0, \dots$ ; наконец, условимся малый круг сферы, параллельный осевому меридиану  $POP_1$ , изображать прямой линией, параллельной прямой  $P'O'P_1$ , и отстоящей от нее на расстояние, равное ординате  $y$  этого малого круга на сфере. Очевидно, при таком построении каждая точка  $M'$  на плоскости имеет координаты (отнесенные к началу в  $O'$  и к оси  $X$ -ов, направленной по прямой  $P'O'P_1$ ), равные сферическим прямоугольным координатам той точки  $M$  сферы, изображением которой  $M'$  является. Назовем расстояние между  $A'$  и  $B'$  на плоскости через  $s_0$ ; имеем

$$s_0 = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}.$$

Посмотрим теперь, какова будет разность  $s_0 - s$ , понимая под  $s$  попрежнему длину дуги  $AB$  на сфере (черт. 53). Будем при этом полагать  $s$  малой величиной и при нахождении  $s_0 - s$  не задаваться точностью вывода.

Если из  $A'$  (черт. 55) мы проведем прямую параллельно оси  $X$ -ов и на ней отложим, на основании (364), отрезок

$$A'B'' = z = (x_2 - x_1) \left(1 - \frac{y_1^2}{2R^2}\right),$$

Черт. 55

то при малом  $s$  точка  $B''$  будет изображением точки  $B_1$  черт. 53, неискаженным в своем положении относительно  $A'$ , тогда как в принятой проекции точку  $B_1$  изобразит  $B'_1$ . Проведя из  $B''$  линию параллельно оси  $Y$ -ов и отложив  $B''B$ , равное  $y_2 - y_1$ , мы приддем к точке  $B$ , которая является изображением точки  $B$  сферы, неискаженным в своем положении относительно  $A'$ , тогда как в принятой проекции точку  $B$  сферы изображает, конечно, точка  $B'$ . Таким образом, можем принять, что

$$A'B = s.$$

Конечно,  $B'B$  параллельно оси  $X$ -ов и в треугольнике  $A'B'B$  угол при  $B'$  равен  $T_{1,2}^s$  (дирекционному углу дуги  $AB$  в  $A$ ). Вследствие малости угла  $B'A'B$  разность  $s_0 - s$  будет равна проекции  $B'B$  на  $A'B'$ . Поэтому

$$s_0 - s = \left[ (x_2 - x_1) - (x_2 - x_1) \left(1 - \frac{y_1^2}{2R^2}\right) \right] \cos T_{1,2}^s$$

$$s_0 - s = \frac{(x_2 - x_1)y_1^2}{2R^2} \cos T_{1,2}^s,$$

$$s_0 - s = s_0 \cos^2 T_{1,2}^s \frac{y_1^2}{2R^2}, \quad (376)$$

$$v = \frac{s_0 - s}{s_0} = \frac{y_1^2}{2R^2} \cos^2 T_{1,2}^s. \quad (377)$$

Формула (377) дает, конечно, *относительное* линейное искажение  $\nu$ ; оно в данной точке будет наибольшим для направления по оси  $X$ -ов и именно

$$\nu_{\max} = \frac{y^2}{2R^2}.$$

При  $y = 100$  км  $\nu_{\max} = 1 : 8100$ ; при  $y = 50$  км  $\nu_{\max} = 1 : 32\,000$ . Более точный вывод дал бы

$$\nu = \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6R^2} = \cos^2 T_{1.2}^s. \quad (378)$$

Назовем через  $T_0$  плоский азимут прямой  $A'B'$ ; конечно,

$$\operatorname{tg} T_0 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Угол  $B'A'B$  может быть принят равным  $T_{1.2}^s - T_0$  или искажению дирекционного угла  $T_{1.2}^s$ . Из этого же треугольника  $B'BA'$  напомним

$$\frac{\sin(T_{1.2}^s - T_0)}{\sin T_0} = \frac{B'B}{s} = \frac{(x_2 - x_1)y_1^2}{2R^2 s}.$$

Отсюда

$$T_{1.2}^s - T_0 = \frac{y_1^2 \cos T_0 \sin T_0}{2R^2} \rho'' = \frac{y_1^2 \sin 2T_0}{4R^2} \rho''. \quad (379)$$

Эта формула неточная. Более точную формулу можно получить из (375)

$$\operatorname{tg} T_{1.2}^s = \frac{\Delta y + \delta y}{\Delta x + \delta x} = \Delta y \left(1 + \frac{\delta y}{\Delta y}\right) \frac{1}{\Delta x} \left(1 + \frac{\delta x}{\Delta x}\right)^{-1};$$

$$\operatorname{tg} T_{1.2}^s = \operatorname{tg} T_0 \left(1 + \frac{\delta y}{\Delta y} - \frac{\delta x}{\Delta x}\right).$$

Подставляя в последнее уравнение  $\delta y$  и  $\delta x$  по (374) и делая ряд преобразований, получим

$$T_{1.2}^s - T_0 = \frac{s_0 \cos T_0 y_1}{2R^2} \rho'' + \frac{y_1^2 \sin 2T_0 \rho''}{4R^2}. \quad (380)$$

Но при достаточно большом  $y$  по сравнению с  $s$ , в (380) влияние первого члена правой части ничтожно по сравнению с влиянием второго члена с  $y^2$ .

Изменение на плоскости угла между двумя дугами больших кругов, имеющих дирекционные азимуты  $T_{1.2}^s$  и  $T_{1.3}^s$  и исходящих из точки с ординатой  $y$ , вычислится так

$$\omega = \frac{y^2 \rho''}{4R^2} (\sin 2T_{1.2}^s - \sin 2T_{1.3}^s),$$

$$\omega = \frac{y^2 \rho''}{4R^2} 2 \sin A \cos(T_{1.2}^s + T_{1.3}^s) = \frac{y^2 \rho''}{2R^2} \sin A \cos(T_{1.2}^s + T_{1.3}^s), \quad (381)$$

причем под  $A$  понимается величина самого угла. Очевидно, наиболее искажается прямой угол при  $T_{1.2}^s + T_{1.3}^s = 0$  или при  $T_{1.2}^s + T_{1.3}^s = 180^\circ$ . При  $y = 100$  км наибольшее  $\omega = 25''$ , а при  $y = 50$  км наибольшее  $\omega = 6''$ .

### § 46. Значение и применение прямоугольных сферических координат Зольднера

В главе VII будет дано применение в геодезии гауссовой теории конформного отображения эллипсоида на шаре. Там будет доказано следующее: 1) если на эллипсоиде имеем зону, ограниченную двумя параллелями с разностью их широт в  $2^\circ.5$  и простирающуюся бесконечно по долготе, то при переносе по закону Гауссова конформного изображения такой зоны на сферу, радиус которой равен среднему радиусу кривизны для средней параллели зоны, наибольшее линейное искажение (конечно, оно придется на краях зоны) будет менее  $1 : 44\,000\,000$ ; следовательно, удерживая в вычислениях расстояний сантиметр, мы могли бы при протяжении такой зоны в 400 км с востока на запад вовсе не учитывать линейных искажений конформного отображения при переносе расстояний с эллипсоида на шар; 2) геодезическая линия эллипсоида изобразится на шаре некоторой сложной кривой, имеющей на шаре в любой своей точке, в силу конформности изображения, азимут в точности равный азимуту на эллипсоиде в соответствующей точке; но заменяя на шаре кривые, изображающие геодезические линии эллипсоида, большими кругами, соединяющими конечные точки геодезических линий, мы получим поправку азимута при переходе от изображения геодезической линии к соответствующей дуге большого круга, которая на краях зоны составит максимум  $0''.004$  при длине геодезической линии в 80 км. Отсюда вытекает следующее положение: если на эллипсоиде имеем район, ограниченный с севера и юга параллелями, разность широт которых не превышает  $2^\circ.5$  (280 км), а с востока и запада — меридианами с расстоянием между ними по средней параллели около 160 км (разность долгот этих меридианов в широте  $45^\circ$  около двух градусов), то мы можем поверхность эллипсоида заменить поверхностью шара радиуса, равного среднему радиусу кривизны эллипсоида под средней широтой нашего района — с тем, чтобы, во-первых, все треугольники триангуляции на эллипсоиде в пределах района считать расположенными на таком шаре без внесения каких-либо изменений в углы и длины сторон этих треугольников, и в азимуты геодезических линий, представляющих на эллипсоиде стороны треугольников, но с заменой при этом этих геодезических линий просто большими кругами сферы; во-вторых, всякую геодезическую линию эллипсоида в пределах района рассматривать, как дугу большого круга, имеющую ту же длину и те же азимуты в конечных точках, что и соответствующая геодезическая линия. Очевидно, если мы возьмем ось абсцисс по центральному меридиану района, а начало координат — в пересечении этого меридиана с средней параллелью района, то в пределах района сфероидические прямоугольные координаты  $X$  и  $Y$  обращаются в сферические прямоугольные координаты Зольднера и вычисление их может выполняться по формулам (367) или (368) — (370).

Представим себе теперь, что мы переходим от шара на плоскость, т. е., другими словами, мы вводим некоторую проекцию или некоторое условное изображение шара на плоскости. При пользовании координатами Зольднера обычно применяли именно проекцию Зольднера (Кассини), сущность которой уже дана в § 45, п. «в», а именно: большие круги сферы, перпендикулярные к осевому меридиану, изображаются прямыми, перпендикулярными к оси  $X$  на плоскости, расстояние между которыми равно разности абсцисс соответствующих больших кругов:

малые круги сферы, параллельные осевому меридиану (или лежащие в плоскостях, параллельных плоскости осевого меридиана), изображаются прямыми, параллельными оси  $X$  на плоскости и имеющими ординаты, равные ординатам соответствующих малых кругов на сфере. Другими словами, если через  $x'$  и  $y'$  назовем координаты точки  $M'$  на плоскости, соответствующей в проекции точке  $M$  шара с координатами Зольднера  $x$  и  $y$ , то

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \end{aligned} \right\}. \quad (382)$$

Проекция Зольднера-Кассини — это простая поперечная цилиндрическая проекция; цилиндр касается шара по осевому меридиану, круги  $QB_0, QA_0, \dots$  (черт. 53) изображаются образующими цилиндра, приходящими в плоскости этих кругов; малые круги, параллельные осевому меридиану, изображаются по разворачивании цилиндра прямыми, перпендикулярными к образующим цилиндра, причем ордината точки шара откладывается по той образующей цилиндра, на которой эта точка приходится.

Мы можем уравнивание триангуляции нашего района выполнить, если угодно, на шаре, затем вычислить по формулам (367) координаты  $x$  и  $y$  для всех пунктов триангуляции и, пользуясь соотношениями (382), считать, что этим самым мы и перенесли все точки триангуляции с шара на плоскость. Можно, конечно, избрать иной путь: применяя формулу (378), мы отнесем длины базисов триангуляции на плоскость в проекции Зольднера, причем входящие в эту формулу  $y_1, y_2$  и  $T_{1,2}^s$  можем знать грубо-приближенно; далее, применяя формулу (380), получим по каждому направлению в триангуляции редукцию его  $T_0 - T_{1,2}^s$  при переходе с эллипсоида на плоскость, причем при обработке триангуляции I класса эту формулу (380) придется уточнить и ввести в нее добавочные члены. После редукции базисов и измеренных направлений на плоскость (в проекции Зольднера), далее будет следовать уравнивание триангуляции на плоскости, образованной уже из прямоугольных треугольников; конечно, это будет проще, чем уравнивание триангуляции на сфере. Теперь вычисляем стороны плоских треугольников и, имея координаты  $x_a$  и  $y_a$  исходной точки  $A$  триангуляции и дирекционный угол в ней для исходной стороны той же сети, приступаем к вычислению по правилам низшей геодезии дирекционных углов и прямоугольных координат  $x$  и  $y$ .

Задача установления исходных координат  $x_a$  и  $y_a$  точки  $A$  и исходного дирекционного угла в ней представляется в таком виде. Осевой меридиан будет задан некоторой долготой  $L_0$ , округленной, например, до градуса или полуградуса; начало координат  $O$  будет на этом меридиане задано широтой  $\varphi_0$ , также округленной. Для точки  $A$  мы имеем геодезическую широту и долготу  $B_a$  и  $L_a$  и геодезический азимут  $A_{ab}$  в ней на точку  $B$  триангуляции; поэтому поставленная задача нахождения  $x_a$  и  $y_a$  для точки  $A$  и дирекционного угла в ней является задачей перехода от геодезических координат  $B_a$  и  $L_a$  и азимута  $A_{ab}$  к соответствующим им прямоугольным сфероидическим координатам  $X_a$  и  $Y_a$  и дирекционному углу  $T_{ab}^s$ . Эта задача — обратная той, которую мы уже решали в § 37 главы IV; она будет изложена в § 47.

В части I Руководства по высшей геодезии были уже даны формулы для редукций направлений и расстояний при переходе на плоскость в конформной проекции Гаусса. Конечно, эти формулы несколько проще, чем формулы тех же редукций в проекции Зольднера, но это составило

бы несущественное преимущество проекции Гаусса перед проекцией Зольднера в вопросе переноса *основной триангуляции на плоскость*. Если мы обратимся теперь к полигонометрии, к вставке уединенных тригонометрических точек и к съёмочным теодолитным ходам, то отмечаем следующее.

1. При вставке уединенных тригонометрических точек падает вообще, при применении проекции съёмки, редуцировать сперва измеренные направления на плоскость, а затем уже на плоскости решать задачу прямой, обратной или комбинированной засечки. Эти редукции при  $y = 80$  км и при  $s = 5$  км выражаются вообще десятыми долями секунды в проекции Гаусса, и поэтому при  $y < 80$  км могут быть даже просто пренебрегаемы или учитываемы по небольшой и самой простенькой табличке. В проекции Зольднера эти же редукции достигнут при  $y = 80$  км значения в  $8''$ , и конечно их учет нужно делать по полной формуле (380), но обычно здесь предпочитали иной путь, путь решения задачи на сфере: установив приближенные координаты  $x_0$  и  $y_0$  определяемой точки, далее по формулам (374) и (375) рассчитывали  $T_{a_0}^s, T_{b_0}^s, T_{c_0}^s, \dots$ , т. е. значения дирекционных углов (на сфере) для направлений с опорных точек  $A, B, C$  на точку с координатами  $x_0$  и  $y_0$  при прямой засечке; при обратной засечке — рассчитывали  $T_{0a}^s, T_{0b}^s, T_{0c}^s, \dots$ ; далее следовало, конечно, составление уравнений погрешностей вида

$$\frac{\cos T_0^s \rho''}{s} \Delta y - \frac{\sin T_0^s \rho''}{s} \Delta x + (T_0^s - T^s) = \delta T,$$

где  $T^s$  — «наблюдаемое» значение дирекционного угла

2. При обработке ходов полигонометрии в проекции Зольднера углы этих ходов должно редуцировать по полной формуле (380), причем эти редукции могут быть очень заметными даже при небольших размерах сторон полигонометрического хода, потому что главный член  $\frac{y^2 \sin 2\tau \rho''}{4R^2}$  в формуле (380) не зависит от длины стороны полигонометрического хода, а только от направления ее и положения относительного осевого меридиана, между тем, в проекции Гаусса-Крюгера при  $s < 1$  км и при  $y < 80$  км представляется возможным в полигонометрии II и III класса редукции углов считать просто пренебрегаемыми и вводить вместо них редуцию просто в направление замыкающей диагонали хода. Редукции длин сторон полигонометрического хода должно выполнять по формуле (378), и, конечно, здесь дело обстоит опять-таки заметно сложнее, чем в проекции Гаусса-Крюгера.

3. Особенно резко выступают неудобства проекции Зольднера при обработке съёмочных ходов: в проекции Гаусса здесь не нужно редуцировать углов хода, а длины сторон хода редуцируют по формуле

$$d - s = \frac{y_m^2}{2R^2} s,$$

в которой  $y_m$  сохраняет одно и то же значение для всего хода и даже для ряда ходов. В проекции Зольднера придется применить упрощенную формулу (378)

$$v = \frac{y_m^2}{2R^2} \cos^2 T,$$

по выполнять отдельное вычисление масштабного коэффициента по каждой линии съёмочного хода, так как линейный масштаб в проекции

Зольднера зависит не только от значения  $y^2$ , но и от  $\cos^2 T$ , т. е. от направления линии хода. Правда, при  $y < 50$  км можно в проекции Зольднера, как и в проекции Гаусса, пренебрегать редукциями расстояний в съёмочных ходах, но, конечно, речь идет ведь не об ограничении района применения проекции ординатой всего в 50 км.

Введение в геодезию координат Зольднера имеет в виду, конечно, переход от эллипсоида (через шар) на плоскость и обработку опорных сетей и теодолитных съёмочных ходов на плоскости в проекции Зольднера с проведением и самих съёмок в той же проекции. Как выполняется этот переход на плоскость, нами выяснено выше с достаточной полнотой; конечно, детальные съёмочные (топографические) действия остаются теми же самыми — применяется ли какая-нибудь проекция или не применяется: укладка материалов съёмки в сеть опорных точек и ходов, построенных в избранной проекции, приводит к построению материалов съёмки также в этой проекции.

Мы видели, что переход на плоскость в проекции Зольднера происходит заметно более осложненно, чем в проекции Гаусса. С другой стороны, мы должны ограничиваться сравнительно малым районом при применении сферических координат Зольднера и проекции Зольднера. Расширение района, обслуживаемого координатами и проекцией Зольднера, приводит непременно прежде всего к необходимости не просто заменять эллипсоид сферой, а при переходе от эллипсоида на сферу, приняв тот или другой, целесообразно выбранный закон изображения эллипсоида на шаре, учитывать различие расстояний и направлений на эллипсоиде и на сфере; далее, самые формулы (367) или (368), (369), (370), а также формулы (373) или (374) и (375), (378) и (380) подлежат существенному уточнению, а следовательно, и осложнению.

Эта необходимость, при расширении указанных выше границ района, применить двойной переход или двойную проекцию — сперва с эллипсоида на шар, а затем с шара на плоскость, и значительная сложность формул перехода с шара на плоскость при увеличении ординаты  $y$  за 80 км, вынуждают признать, что сферические координаты Зольднера и его проекция, неразрывно связанные друг с другом, не могут быть применяемы за пределами района, имеющего 160 км протяжение с запада на восток и 280 км — с севера на юг. Да и в пределах этого небольшого района проекция Гаусса-Крюгера обеспечивает заметно более удобную обработку и использование геодезических и топографических материалов и результатов, чем проекция Зольднера. Поэтому проекция Зольднера должна была потерять свое значение в геодезии и в топографии, которое она и заняла без особых к тому оснований.

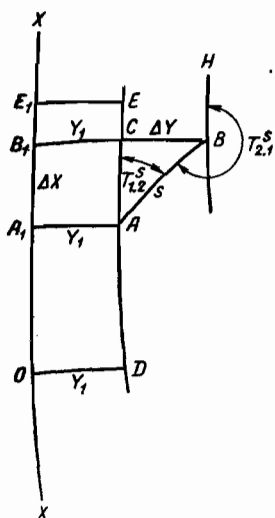
#### § 47. Сфероидические прямоугольные координаты. Переход от геодезических координат и азимутов к прямоугольным сфероидическим координатам и дирекционным углам на эллипсоиде

На черт. 56  $XOX$  — меридианная кривая, которая служит осью абсцисс и на которой находится в точке  $O$  начало прямоугольных сфероидических координат. Проведем в точках  $E_1, A_1, O$  на поверхности нашего эллипсоида геодезические линии  $E_1E, A_1A, OD$ , перпендикулярные в  $E_1, A_1, O$  к осевому меридиану  $XOX$ . По таким геодезическим линиям, как известно, откладываются ординаты  $Y$  в системе сфероидических прямоугольных координат. Отложим постоянную длину  $Y_1$  на геодезических линиях  $E_1E, A_1A$  и  $OD$ ; кривая  $EAD$ , для которой  $Y$  —



постоянно (и в данном случае равно  $Y_1$ ), называется *геодезической параллелью осевого меридиана*  $XOX$ . От геодезической параллели отсчитываются в данной точке дирекционные углы  $T^\circ$  от севера через восток, юг и запад по ходу часовой стрелки. Геодезическая параллель не является геодезической линией на нашей поверхности, но в точках  $E$ ,  $A$ ,  $D$  она будет пересекать геодезические линии  $EE_1$ ,  $AA_1$ ,  $DO \dots$  под прямым углом. Итак, для получения в точке  $A$  сфероидических прямоугольных координат, мы должны провести в  $A$  геодезическую линию  $AA_1$ , которая в  $A_1$  пересекала бы осевой меридиан под прямым углом, отрезок  $OA_1$  осевого меридиана будет абсциссой  $X_1$  точки  $A$ , а ординатой  $Y_1$  для этой точки является длина кривой  $A_1A$ . Проведя в  $A$  геодезическую параллель осевого меридиана, будем иметь, что угол в  $A$  между этой геодезической параллелью, т. е. кривой  $AE$  и геодезической линией  $AB$ , будет дирекционным углом  $T_{1,2}$  точки  $B$  в  $A$ . Очевидно, если проведем на эллипсоиде в  $A$  касательную к его поверхности, перпендикулярную к кривой  $AA_1$ , то эта касательная совпадет с касательной в  $A$  к геодезической параллели  $AE$ . Таким образом, мы можем сказать, что дирекционные углы в данной точке отсчитываются от направления касательной к эллипсоиду, перпендикулярной в этой точке к геодезической линии, для которой  $X$  является постоянным.

На черт. 56 точка  $C$  принадлежит геодезической параллели  $AE$ . Если  $BCB_1$  — геодезическая линия, перпендикулярная в  $B_1$  к осевому меридиану, то:  $\overline{OB_1} = X_2$  равна абсциссе точки  $B$ ;  $B_1A_1 = X_2 - X_1 = \Delta X$ ;  $\overline{BB_1} = Y_2$  равна ординате точки  $B$ ;  $CB_1 = Y_1$ ;  $CB = \Delta Y = Y_2 - Y_1$ ; угол между кривой  $ACE$  и кривой  $AB$  есть дирекционный угол  $T_{1,2}^\circ$  точки  $B$  в  $A$ ; угол между геодезической параллелью  $BH$  в  $B$  и геодезической линией  $BA$ , отсчитываемый, как показано на черт. 56, является дирекционным углом  $T_{2,1}^\circ$  точки  $A$  в  $B$ ; если на эллипсоиде построим касательную к его поверхности в  $B$ , перпендикулярную к кривой  $BB_1$ , то от направления этой касательной можем, конечно, отсчитывать дирекционный угол  $T_{2,n}^\circ$ .



Черт. 56

Прямоугольные сфероидические координаты еще не имеют до сих пор заметного применения в теории геодезии и никакого применения в практике геодезических работ. Но мы уже видели их полезное применение в теории решения больших сфероидических треугольников и в теории решения прямой геодезической задачи при значительных расстояниях между двумя геодезическими пунктами. Несомненно целесообразность применения этих прямоугольных сфероидических координат при получении так называемых дифференциальных формул. Совершенно естественен и логичен переход именно от этих, а не от географических координат к прямоугольным плоским

координатам в проекции Гаусса-Крюгера или в иной проекции. Поэтому позволим себе сказать, что вероятно в будущем подтвердится целесообразность введения прямоугольных сфероидических координат и в практику геодезических работ.

В § 36 мы дали формулы для получения прямоугольных сфероидических координат  $X$  и  $Y$  в частном случае, когда начало геодезической

линии  $AB$ , т. е. точка  $A$ , лежит на осевом меридиане и даже совпадает с началом координат (для точки  $A$ :  $X=0$ ;  $Y=0$ ). Конечно, если точка  $A$  не совпадает с началом координат  $O$ , но лежит на оси абсцисс, имея координаты  $X=X_1$  и  $Y=0$ , то формулы § 36 остаются в силе, но  $X_2$  для точки  $B$  будет вычисляться, как  $X_1+X$ , причем  $X$  дается формулами § 36. Характерным для случаев нахождения точки  $A$  на осевом меридиане является то, что  $T_{1,2}^s=A_{1,2}$ , т. е. дирекционные углы в  $A$  совпадают с геодезическими азимутами тех же направлений.

К сожалению, до сих пор мы не имеем надлежаще выведенных и надлежащей точности формул для решения прямой задачи в прямоугольных сфероидических координатах для общего случая, т. е. не имеем надлежащего решения задачи для определения разности координат  $\Delta X=X_2-X_1$  и  $\Delta Y=Y_2-Y_1$  (черт. 56) и разности дирекционных углов  $T_{2,1}^s \pm 180^\circ - T_{1,2}^s$  точек  $A$  и  $B$  по данным  $X_1, Y_1, T_{1,2}^s$  в точке  $A$  и по данному расстоянию  $s$  между точками  $A$  и  $B$ , при произвольном значении ординаты  $Y_1$  точки  $A$ . Мы приведем сейчас без вывода формулы, данные Гельмертом для решения этой задачи

$$u = s \cos T_{1,2}^s; \quad v = s \sin T_{1,2}^s;$$

$$\begin{aligned} Y_2 - Y_1 = v - \left( Y_1 + \frac{v}{3} \right) \frac{u^2}{2R^2} + \left( Y_1 + \frac{v}{5} \right) \left( \frac{u^4}{24R^4} - \frac{u^2 v^2}{3R^4} \right) - \\ - (Y_1 + 3v) \frac{u^2 Y_1^2}{6R^4} - \left[ \left( Y_1 + \frac{v}{3} \right) \frac{X_1}{R} + \left( \frac{1}{3} Y_1 + \frac{1}{6} v \right) \frac{u}{R} \right] \frac{e^2 u^2}{R^2} \sin 2B_0; \\ X_2 - X_1 = u \left\{ 1 + \left( \frac{Y_2^2}{2R^2} - \frac{v^2}{6R^2} \right) + \left( \frac{Y_2^2}{2R^2} - \frac{v^2}{5R^2} \right) \frac{u^2}{3R^2} + \right. \\ + \frac{5}{6} \left( \frac{Y_2^2}{2R^2} - \frac{v^2}{10R^2} \right)^2 + \left[ \left( \frac{Y_2^2}{R^2} - \frac{v^2}{3R^2} \right) \frac{X_1}{R} + \right. \\ \left. + \left( \frac{Y_2^2}{2R^2} - \frac{v^2}{12R^2} \right) \frac{u}{R} \right] e^2 \sin B_0 \left. \right\}; \end{aligned} \quad (383)$$

$$\begin{aligned} T_{2,1}^s \pm 180^\circ - T_{1,2}^s = -\rho'' \frac{u}{R} \left\{ \left( \frac{Y_1}{R} + \frac{v}{R} \right) + \left( \frac{Y_1}{R} + \frac{v}{4R} \right) \frac{5v^2 - u^2}{6R^2} + \right. \\ \left. + \left( \frac{Y_1}{3R} + \frac{v}{R} \right) \frac{Y_1^2}{R^2} + \left( \frac{2XY}{R^2} + \frac{uv}{6R^2} \right) e^2 \sin 2B_0 \right\}, \end{aligned}$$

причем в последней формуле  $X = \frac{X_1 + X_2}{2}$ ;  $Y = \frac{Y_1 + Y_2}{2}$ ;  $B_0$  — широта начала координат  $O$ ;  $R$  — средний радиус кривизны под этой широтой. Сравнение этих формул с (368), (369) и (370) показывает, что члены первого и третьего порядка в них совпадают; члены порядка  $Y \frac{u^4}{R^4}$ ,  $v \frac{u^4}{R^4}$ ,  $Y_2 \frac{u^3}{R^4}$ , ... появляются в результате удержания при решении сферического треугольника  $ABQ$  (черт. 53 и 54) в п. «а» § 45 членов соответствующего порядка, которыми мы там пренебрегали; члены порядка  $\frac{e^2 XY u^2}{R^3}$ ,  $\frac{e^2 v u^2 X}{R^3}$ ,  $\frac{e^2 u XY}{R^3}$ ,  $\frac{e^2 u^3 v}{R^3}$ , ... представляют собой влияние эллипсоидальности. Но при этом опущены члены порядка  $\frac{e^2 u^3 v^2}{R^4}$ ,  $\frac{e^2 v^4 Y}{R^4}$ , ..., которые, однако, подлежат вообще учету. Нам не приходилось слышать о применении этих формул (383) Гельмерта для

вычисления прямоугольных сфероидических координат  $X$  и  $Y$  точек основной геодезической сети путем постепенного, конечно, перехода от точки  $A$  к  $B$ , от  $B$  к  $C$ , и т. д., с вычислением по (383) приращений координат  $\Delta Y = Y_2 - Y_1$ ,  $\Delta X = X_2 - X_1$  и приращения дирекционного угла  $T_{2-1}^s \pm 180^\circ - T_{1-2}^s$ . Формулы (383), конечно, для вычислений громоздки и неудобны, притом они имеют недостаточную точность при значительных  $Y$ . По причинам неразработанности решения прямой задачи в сфероидических прямоугольных координатах, прибегают в нужных случаях к получению этих координат  $X$  и  $Y$  и дирекционных углов  $T^s$  из геодезических координат и геодезических азимутов. К этому вопросу мы и переходим.

Пусть для точки  $A$  даны широта  $B_1$ , долгота  $L_1$  и геодезический азимут  $A_{1-2}$  в ней на точку  $B$ ; начало координат  $O$  имеет широту  $B_0$  и долготу  $L_0$ . Назовем, как и ранее, через  $t_1 = L_1 - L_0$  разность долгот точек  $A$  и  $O$ . Точка  $C$  (черт. 57), очевидно, играет роль вспомогательной точки  $C$  при решении прямой геодезической задачи, широту ее назовем через  $B_f$ . Из формулы (1) § 37 пишем

$$Y_1 = N_f \cos B_f \frac{l''}{\rho''} + \frac{1}{3} \frac{Y_1^3}{N_f^3} t_f^2 - \frac{1}{15} \frac{Y_1^5}{N_f^5} t_f^2 (V^2 + 3 t_f^2) \dots (t_f = \operatorname{tg} B_f).$$

Из формулы (d) того же § 37

$$(B_1 - B_f)'' = -\frac{Y_1^2 t_f}{2 N_f^2} \rho'' V_f^2 + \frac{Y_1^4 t_f V_f^2}{24 N_f^4} \rho'' [V_f^2 - 3 t_f^2 (1 - 3 \eta_f^2)] - \frac{Y_1^6 t_f^2}{720 N_f^6} \rho'' (1 + 30 t_f^2 + 45 t_f^4).$$

Черт. 57

Пользуясь последней формулой, напомним

$$t_f = t_1 + (1 + t_1^2) \frac{Y_1^2 t_f V_f^2}{2 N_f^2} \left[ 1 - \frac{Y_1^2}{12 N_f^2} (1 + \eta_f^2 + 3 t_f^2 (1 - 3 \eta_f^2)) \right] + \frac{t_1 (1 + t_1^2) t_f^2 Y_1^4}{4 N_f^4} V_f^4;$$

$$(B_1 - B_f)'' = -\frac{Y_1^2 t_1}{2 N_f^2} V_f^2 \rho'' - \frac{Y_1^4 t_f (1 + t_1^2)}{4 N_f^4} V_f^4 \rho'' + \frac{Y_1^4 t_1 V_f^2}{24 N_f^4} \rho'' [V_f^2 + 3 t_f^2 (1 - 3 \eta_f^2)] + \frac{t_1 (1 + t_1^2)}{48 N_f^6} (1 - 3 t_1^2) Y_1^6 \rho'' + (1 + t_1^2) t_1 (1 + 3 t_1^2) \frac{Y_1^6}{48 N_f^6} \rho'' - \frac{Y_1^6 t_1 \rho''}{720 N_f^6} (1 + 30 t_1^2 + 45 t_1^4);$$

$$\frac{V_f^2}{N_f^2} = \frac{(1 + \eta_f^2)^2}{c^2} = \frac{V_1^2}{N_1^2} - \frac{4(1 + \eta_1^2) \eta_1^2 t_1}{c^2} \cdot \frac{Y_1^2 t_f}{2 N_f^2} V_f^2 \left[ 1 - \frac{Y_1^2}{12 N_f^2} (1 + 3 t_f^2) \right]$$

Теперь получаем

$$(B_1 - B_f)'' = -\frac{Y_1^2 t_1}{2 N_1^2} V_1^2 \rho'' + \frac{(1 + \eta_1^2) \eta_1^2 t_1^2 \rho''}{c^2} V_f^2 \frac{Y_1^4 t_f}{N_f^2} - \\ - \frac{t_1(1 + t_1^2) V_1^4}{4 N_1^4} Y_1^4 \rho'' - Y_1^6 \frac{(1 + t_1^2)^2 t_1}{8 N_1^6} \rho'' + \frac{Y_1^4 t_1 V_1^2}{24 N_1^4} \rho'' [V_1^2 + 3 t_1^2 (1 - \\ - 3 \eta_1^2)] + \frac{Y_1^6 t_1^3 (1 + t_1^2)}{8 N_1^6} \rho'' + \frac{t_1(1 + t_1^2)}{24 N_1^6} Y_1^6 \rho'' - \frac{Y_1^6 t_1}{720 N_1^6} (1 + 30 t_1^2 + 45 t_1^4),$$

причем в членах с  $Y^6$  пренебрежены слагаемые с  $\eta^2$ .

Окончательно

$$(B_1 - B_f)'' = -\frac{Y_1^2 \rho''}{2 N_1^2} t_1 V_1^2 - \frac{Y_1^4 \rho''}{24 N_1^4} t_1 V_1^2 \times \\ \times (5 V_1^2 + 3 t_1^2 - 9 \eta_1^2 t_1^2) - \frac{Y^6 \rho''}{720 N_1^6} t_1 (61 + 90 t_1^2 + 45 t_1^4). \quad (384)$$

При  $Y < 225$  км член с  $Y^6$  в (384) можно отбросить в широтах около  $45^\circ$ ; в широтах около  $60^\circ$ , только при  $Y < 200$  км можно отбросить в (384) член с  $Y^6$ , если желаем  $(B_1 - B_f)$  определить с ошибкой, не более  $0'',0002$ . Далее пишем

$$\cos B_f = \cos B_1 - \frac{Y_1^2 t_1 V_1^2 \sin B_1}{2 N_1^2} - \frac{Y_1^2 t_1 \sin B_1}{24 N_1^4} (5 V_1^2 + 3 t_1^2 - 9 \eta_1^2 t_1^2) Y_1^4 - \\ - \frac{t_1^2 \cos B_1}{8 N_1^4} V_1^4 Y_1^4;$$

$$\cos B_f = \cos B_1 \left\{ 1 - \frac{Y_1^2}{2 N_1^2} t_1^2 V_1^2 - \frac{Y_1^4}{24 N_1^4} V_1^2 t_1^2 (8 V_1^2 + 3 t_1^2 - 9 \eta_1^2 t_1^2) \right\};$$

$$N_f = N_1 \left\{ 1 + \frac{Y_1^2}{2 N_1^2} \eta_1^2 t_1^2 + \frac{Y_1^4}{24 N_1^4} \eta_1^2 t_1^2 [5 V_1^2 + 3 t_1^2 - 9 \eta_1^2 t_1^2 + 3 V_1^2 (1 - t_1^2)] \right\};$$

$$N_f = N_1 \left\{ 1 + \eta_1^2 t_1^2 \frac{Y_1^2}{2 N_1^2} + \eta_1^2 t_1^2 V_1^2 \frac{Y_1^4}{3 N_1^4} \right\};$$

$$N_f \cos B_f = N_1 \cos B_1 \left[ 1 - \frac{t_1^2}{2 N_1^2} Y_1^2 - \frac{t_1^2 (8 + 3 t_1^2 + 8 \eta_1^2)}{24 N_1^4} Y_1^4 \right].$$

Следовательно,

$$Y_1 = N_1 \cos B_1 \frac{1}{\rho''} \left[ 1 - \frac{Y_1^2}{2 N_1^2} t_1^2 - \frac{Y_1^4}{24 N_1^4} t_1^2 (8 + 3 t_1^2 + 8 \eta_1^2) + \right. \\ \left. + \frac{Y_1^3}{3 N_f^2} t_f^2 - \frac{Y_1^5}{15 N_f^4} t_f^2 (V_f^2 + 3 t_f^2) \right].$$

Для подстановки в член с  $Y^3$  принимаем

$$t_f^2 = t_1^2 + \frac{t_1^2 (1 + t_1^2)}{N_1^2} V_1^2 Y_1^2,$$

$$\frac{1}{N_f^2} = \frac{1}{N_1^2} \left( 1 - \frac{Y_1^2}{N_1^2} \eta_1^2 t_1^2 \right),$$

и получаем

$$\frac{1}{3} \frac{Y_1^3}{N_1^2} t_f^2 = \frac{1}{3} \frac{Y_1^3}{N_1^2} t_1^2 + \frac{1}{3} \frac{Y_1^5}{N_1^4} (V_1^2 + t_1^2),$$

$$Y_1 = N_1 \cos B_1 \frac{l''}{\rho''} \left( 1 - \frac{Y_1^2}{2 N_1^2} t_1^2 \right) + \frac{1}{3} \frac{Y_1^3}{N_1^2} t_1^2 + \text{члены пятого порядка.}$$

Для подстановки вместо  $Y$  в членах с  $Y^5$  можем принять

$$Y_1 = N_1 \cos B_1 \frac{l_1''}{\rho''}.$$

Далее

$$Y_1^2 = N_1^2 \cos^2 B_1 \frac{l_1''^2}{\rho''^2} + \text{члены четвертого порядка,}$$

$$Y_1^3 = N_1^3 \cos^3 B_1 \frac{l_1''^3}{\rho''^3} + \text{члены пятого порядка.}$$

Поэтому

$$Y_1 = N_1 \cos B_1 \frac{l_1''}{\rho''} \left[ 1 - \frac{t_1^2 \cos^2 B_1}{2 \rho''^2} l_1''^2 + \frac{t_1^2 \cos^2 B_1}{3 \rho''^2} l_1''^2 \right] + \\ + \text{члены пятого порядка,}$$

$$Y_1 = N_1 \cos B_1 \frac{l_1''}{\rho''} \left[ 1 - \frac{t_1^2 \cos^2 B_1}{6 \rho''^2} l_1''^3 \right] + \text{члены пятого порядка.}$$

Таким образом,

$$Y_1^2 = N_1^2 \cos^2 B_1 \frac{l_1''^2}{\rho''^2} \left( 1 - \frac{t_1^2 \cos^2 B_1}{3 \rho''^2} l_1''^2 \right) \dots$$

с ошибкой на величины шестого порядка,

$$Y_1^3 = N_1^3 \cos^3 B_1 \frac{l_1''^3}{\rho''^3} \left( 1 - \frac{t_1^2 \cos^2 B_1}{2 \rho''^2} l_1''^2 \right) \dots$$

с ошибкой на величины седьмого порядка.

Окончательно

$$Y_1 = N_1 \cos B_1 \frac{l_1''}{\rho''} \left\{ 1 - \frac{t_1^2 \cos^2 B_1}{2 \rho''^2} l_1''^2 + \frac{t_1^4 \cos^4 B_1}{6 \rho''^4} l_1''^4 - \right. \\ \left. - \frac{t_1^2 (8 + 3 t_1^2 + 8 \eta_1^2)}{24 \rho''^4} \cos^4 B_1 l_1''^4 \right\} + \frac{N_1 t_1^2 \cos^3 B_1}{3 \rho''^3} l_1''^3 - \\ - \frac{N_1 t_1^4 \cos^5 B_1}{6 \rho''^5} l_1''^5 - \frac{N_1 t_1^2 (V_1^2 + 3 t_1^2) \cos^5 B_1}{15 \rho''^5} l_1''^5 + \\ + \frac{t^2}{3} \frac{V_1^2 + t_1^2}{N_1^4} Y_1^5;$$

$$\rho'' \frac{Y_1}{N_1} = l_1'' \cos B_1 - \frac{t_1^2}{6} \frac{l_1''^3 \cos^3 B_1}{\rho''^2} - \frac{t_1^2}{120} (8 V_1^2 - t_1^2) \frac{l_1''^5}{\rho''^4} \cos^5 B_1 + \\ + \text{члены седьмого порядка;} \quad (385)$$

$$\lg \left[ \sin \left( Y_1 \frac{\rho''}{N_1} \right) \right] = \lg (\sin l_1 \cos B_1) - \frac{\mu e'^2}{15} \sin^2 B_1 (\sin l_1 \cos B_1)^4. \quad (386)$$

Понятно, что формула (385) достаточно проста для вычисления при высокой ее точности; формулу (385) можно было написать еще так

$$\frac{\rho''}{N_1} Y_1 = l''_1 \cos B_1 \left\{ 1 - \frac{l_1^2 \sin^2 B_1}{6 \rho''^2} - \frac{(8V_1^2 - t_1^2)}{120 \rho''^4} l''_1^4 \sin^2 B_1 \cos^2 B_1 \right\}. \quad (385')$$

Получив формулу для  $Y_1$ , перейдем к преобразованию формулы (384) для  $B_1 - B_f$ , с целью получить  $B_1 - B_f$  через геодезические координаты. Подставляем в (384)

$$\frac{Y_1^2}{N_1^2} = \frac{l''_1^2}{\rho''^2} \cos^2 B_1 \left( 1 - \frac{t_1^2}{3} \frac{l''_1^2}{\rho''^2} \cos^2 B_1 \right) + \frac{2t_1^2(t_1^2 - 3)}{45 \rho''^6} l''_1^6 \cos^6 B_1$$

и получаем

$$(B_f - B_1)'' = \frac{l''_1^2}{2 \rho''} \cos^2 B_1 t_1 V_1^2 - \frac{l''_1^4 \cos^4 B_1}{6 \rho''^3} t_1^3 V_1^2 +$$

$$+ \frac{l''_1^4 \cos^4 B_1}{24 \rho''^3} V_1^2 t_1 (5V_1^2 + 3t_1^2 - 9\eta_1^2 t_1^2) +$$

$$+ \frac{(61 - 58t_1^2 + t_1^4)}{720 \rho''^5} l''_1^6 \cos^6 B_1;$$

$$(B_f - B_1)'' = \frac{V_1^2 t_1}{2 \rho''} (l''_1 \cos B_1)^2 + \frac{V_1^2 t_1}{24 \rho''^3} (-4t_1^2 + 5V_1^2 + 3t_1^2 -$$

$$- 9\eta_1^2 t_1^2) (l''_1 \cos B_1)^4 + \frac{(61 - 58t_1^2 + t_1^4) t_1}{720 \rho''^5} (l''_1 \cos B_1)^6;$$

$$(B_f - B_1)'' = \frac{V_1^2 t_1}{2 \rho''} (l''_1 \cos B_1)^2 + \frac{V_1^2 t_1}{24 \rho''^3} (5V_1^2 - t_1^2 - 9\eta_1^2 t_1^2) (l''_1 \cos B_1)^4 +$$

$$+ \frac{(61 - 58t_1^2 + t_1^4)}{720 \rho''^5} (l''_1 \cos B_1)^6;$$

$$(B_f - B_1)'' = \frac{V_1^2 t_1}{2 \rho''} (l''_1 \cos B_1)^2 \left\{ 1 + \frac{(l''_1 \cos B_1)^2}{12 \rho''^2} [5V_1^2 - t_1^2 (1 + 9\eta_1^2)] \right\} +$$

$$+ \frac{t_1 (61 - 58t_1^2 + t_1^4)}{720 \rho''^5} (l''_1 \cos B_1)^6. \quad (387)$$

Искусственными преобразованиями, в основе которых лежит выделение в  $(B_f - B_1)$  «сферической» части, от (387) совершается переход к такой формуле

$$\lg \sin (B_f - B_1) = \lg \left( V_1^2 \sin 2B_1 \sin^2 \frac{l_1}{2} \sec \frac{Y_1 \rho''}{N_1} \right) +$$

$$+ \frac{\mu \eta_1^2}{12 \rho''^2} (5 - 9t_1^2) (l''_1 \cos B_1)^2 + \text{члены порядка } \frac{e^2 Y^4}{N^4}. \quad (387'')$$

Эта формула, которую мы приводим без вывода, имеет высокую точность — ее погрешность порядка  $e^2 \frac{Y^6}{N^6}$ .

Имея  $B_f$ , выводим  $B_f - B_0$  и по  $B_f - B_0$  находим дугу меридиана  $OC$ , ей соответствующую, т. е. абсциссу  $X_1$ . Эту задачу можем решать, конечно, по таблицам прямоугольных координат Гаусса-Крюгера, а именно: в таблицах найдем  $X_f$ , соответствующее  $B_f$ , и  $X_0$ , соответствующее  $B_0$ ; далее имеем  $X_1 = X_f - X_0$ . Но дадим и формулу для определения  $X_1$ .

Мы будем исходить из формулы (319)

$$(B_f - B_0)'' = \frac{X_1 \rho''}{M_0} \left\{ 1 - \frac{3}{4} \frac{e'^2 \sin 2 B_0}{N_0} X_1 - \frac{\eta_0^2}{2 N_0^2} [1 + \eta_0^2 - t_0^2 (1 + 5 \eta_0^2)] X_1^2 + \frac{1}{8} \eta_0^2 t_0^2 (4 + 23 \eta_0^2 - 15 \eta_0^2 t_0^2) \frac{X_1^3}{N_0^3} + \frac{\eta_0^2}{10} (1 - t_0^2) \frac{X_1^4}{N_0^4} \right\},$$

из которой получаем

$$X_1 = \frac{(B_f - B_0)'' M_0}{\rho''} \left\{ 1 + \frac{3}{4} \frac{e'^2 \sin 2 B_0}{N_0} X_1 + \frac{\eta_0^2 (2 V_0^2 - 2 t_0^2 - \eta_0^2 t_0^2)}{4 N_0^2} X_1^2 - \frac{\eta_0^2 t_0}{8} (4 + 11 \eta_0^2 - 3 \eta_0^2 t_0^2) \frac{X_1^3}{N_0^3} - \frac{\eta_0^2}{10} (1 - t_0^2) \frac{X_1^4}{N_0^4} \right\}. \quad (388)$$

(Нижний нулевой значок показывает, что величина относится к началу координат  $O$ , имеющему широту  $B_0$ ).

Для дальнейшего преобразования (388) и исключения в правой его части искомой величины  $X_1$ , выгодно величины  $M$ ,  $\eta$ ,  $N$ ,  $B$  и  $t$  отнести к средней широте  $B_m = \frac{B_f + B_0}{2}$ . Не делая этих преобразований, приведем просто результат

$$X_1 = \frac{(B_f - B_0)''}{\rho''} M_m \left\{ 1 + \frac{\eta_m^2 (V_m^2 - t_m^2 + 4 \eta_m^2 t_m^2)}{8 V_m^4} \frac{(B_f - P_0)''^2}{\rho''^2} - \frac{\eta_m^2 (1 - t_m^2)}{V_m^8} \frac{(B_f - B_0)''^4}{\rho''^4} \right\}; \quad (389)$$

$$\lg X_1 = \lg \frac{M_m (B_f - B_0)''}{\rho''} +$$

$$+ \frac{1}{8} \mu e'^2 \left( \frac{(B_f - B_0)''}{V_m^2 \rho''} \right)^2 \left\{ \cos 2 B_m \left[ 1 - \frac{1}{20} \left( \frac{(B_f - B_0)''}{V_m^2 \rho''} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + e'^2 \cos^2 B_m (4 - 3 \cos^2 B_m) \right\}. \quad (390)$$

Формулы (389) и (390) имеют высокую точность и могут быть применены для расстояний порядка 1000 км.

Нам осталось заняться вопросом об определении дирекционного угла  $T^s$ . В § 37 мы называли азимут линии  $BF$  (черт. 49) через  $270^\circ + c$ ; теперь роль линии  $BF$  играет геодезическая линия  $AC$ , азимут которой в  $A$  называем так же через  $270^\circ + c$ . Мы имеем формулу (323')

$$c'' = \frac{\rho''}{N_f} Y_1 t_f \left\{ 1 - \frac{1}{6} (V_f^2 + 2 t_f^2) \frac{Y_1^2}{N_1^2} + \frac{Y_1^4}{120 N_f^4} [V_f^4 + 4 V_f^2 t_f^2 (5 - 3 \eta_f^2) + 24 t_f^4] \right\}. \quad (323')$$

С другой стороны, мы имеем там же формулу (322)

$$t''_1 = \frac{\rho''}{N_f} Y_1 \sec B_f \left\{ 1 - \frac{Y_1^2 t_f^2}{3 N_f^2} + \frac{1}{15} \frac{Y_1^4}{N_f^4} t_f^3 (V_f^2 + 3 t_f^2) \right\}. \quad (322)$$

Из (322) и (323), делением их друг на друга, получаем

$$c'' = l''_1 \sin B_f \left\{ 1 - (V_f^2 + 2t_f^2) \frac{Y_1^2}{6N_f^2} + \frac{Y_1^4}{120N_f^4} [V_f^4 + 4V_f^2 t_f^2 (5 - 3\eta_f^2) + 24t_f^4] \right\} \times \left\{ 1 + \frac{Y_1^2 t_f^2}{3N_f^2} - \frac{Y_1^4}{15N_f^4} t_f^2 (V_f^2 + 3t_f^2) + \frac{Y_1^4}{9N_f^4} t_f^4 \right\};$$

$$c'' = l''_1 \sin B_f \left\{ 1 - \frac{V_f^2 Y_1^2}{6N_f^2} + \frac{3V_f^4 + 16V_f^2 t_f^2 - 36\eta_f^2 V_f^2 t_f^2 Y_1^4}{360 N_f^4} \right\}. \quad (391)$$

В (391) подставляем

$$\frac{Y_1^2}{N_1^2} = \frac{l''_1{}^2 \cos^2 B_1}{\rho''^2} \left( 1 - \frac{t_1^2}{3} \cdot \frac{l''_1{}^2 \cos^2 B_1}{\rho''^2} \right),$$

$$\frac{Y_1^4}{N_1^4} = \frac{l''_1{}^4 \cos^4 B_1}{\rho''^4},$$

и получаем

$$c'' = l''_1 \sin B_f \left\{ 1 - \frac{V_f^2 N_1^2}{6N_f^2 \rho''^2} l''_1{}^2 \cos^2 B_1 + \frac{V_f^2 N_1^2 t_1^2}{18N_f^2 \rho''^4} l''_1{}^4 \cos^4 B_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{3V_f^4 + 16t_f^2 - 36\eta_f^2 t_f^2}{360 \rho''^4} \cdot \frac{N_1^4}{N_f^4} l''_1{}^4 \cos^4 B_1 \right\}. \quad (392)$$

Используем далее формулу (387), в которой, однако, отбрасываем член с  $l''_1{}^6$

$$(B_f - B_1)'' = \frac{V_1^2 t_1}{2\rho''} l''_1{}^2 \cos^2 B_1 \left\{ 1 + \frac{l''_1{}^2 \cos^2 B_1}{12\rho''^2} [5V_1^2 - t_1^2 (1 - 9\eta_1^2)] \right\}$$

и из нее пишем

$$\sin B_f = \sin B_1 + \frac{V_1^2 t_1 \cos B_1}{2\rho''^2} l''_1{}^2 \cos^2 B_1 \left\{ 1 + \frac{1}{12} [5V_1^2 - t_1^2 (1 + 9\eta_1^2)] \frac{l''_1{}^2 \cos^2 B_1}{\rho''^2} \right\} - \frac{V_1^4 t_1^2 \sin B_1 l''_1{}^4 \cos^4 B_1}{8\rho''^4};$$

$$\sin B_f = \sin B_1 \left[ 1 + \frac{V_1^2}{2\rho''^2} l''_1{}^2 \cos^2 B_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{V_1^2}{24} (5V_1^2 - 4t_1^2 - 12\eta_1^2 t_1^2) \frac{l''_1{}^4 \cos^4 B_1}{\rho''^4} \right];$$

$$\frac{V_f^2}{N_f^2} = \frac{V_1^2}{N_1^2} \left[ 1 - 2\eta_1^2 t_1^2 \frac{l''_1{}^2 \cos^2 B_1}{\rho''^2} \right].$$

После подстановок в (392) получим

$$c'' = l''_1 \sin B_1 \left\{ 1 + \frac{V_1^2}{2\rho''^2} l''_1{}^2 \cos^2 B_1 + \frac{V_1^2}{24\rho''^4} (5V_1^2 - 4t_1^2 - 12\eta_1^2 t_1^2) l''_1{}^4 \cos^4 B_1 \right\} \times \left\{ 1 - \frac{V_1^2}{6\rho''^2} l''_1{}^2 \cos^2 B_1 + \frac{V_1^2}{3\rho''^4} \eta_1^2 t_1^2 l''_1{}^4 \cos^4 B_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{V_1^2 t_1^2}{18\rho''^4} l''_1{}^4 \cos^4 B_1 + \frac{(3V_1^2 + 16t_1^2 - 36\eta_1^2 t_1^2)}{360 \rho''^4} V_1^2 l''_1{}^4 \cos^4 B_1 \right\}.$$



После ряда счетных преобразований, которые опускаем, имеем

$$c'' = l''_1 \sin B_1 \left\{ 1 + \frac{V_1^2}{3\rho''^2} l''_1^2 \cos^2 B_1 + \frac{2V_1^2 - t_1^2 - 4\eta_1^2 t_1^2}{15\rho''^4} V_1^2 l''_1^4 \cos^4 B_1 \right\}. \quad (393)$$

От формулы (393) совершается переход еще к такой, очень удобной для вычислений

$$\lg \operatorname{tg} c'' = \lg (\operatorname{tg} l_1 \sin B_1) + \frac{V_1^2}{3\rho''^2} \eta_1^2 (l''_1 \cos B_1)^2 + \text{члены порядка } \eta^2 l^4. \quad (394)$$

Отброшенный в (394) член порядка  $\eta^2 l^4$  в логарифме  $\operatorname{tg} c$  или член порядка  $\eta^2 l^5$  в самом  $c$  дает в  $c$  погрешность в  $0'',0002$  при  $s = 600$  км.

Имея  $c$ , дирекционный угол  $T_{AB}^s$  или  $T_{1,2}^s$ , вычисляем так

$$T_{1,2}^s = A_{1,2} - c, \quad (395)$$

потому что перпендикуляр к  $AC$  (черт. 57), от которого отсчитывается  $T_{1,2}^s$ , образует с меридианом точки  $A$  угол  $c$ .

Формулами (385'), (386), (387'), (389), (390), (393), (394) и (395) исчерпывается вопрос перехода от геодезических координат и азимута к прямоугольным сфероидическим координатам и дирекционному углу. Именно пользуясь этими формулами, мы должны получить исходные координаты  $X$  и  $Y$  и исходный дирекционный угол в некоторой точке триангуляции, как об этом было указано в § 46. Далее мы можем перейти от этой точки вычисление прямоугольных сфероидических или прямоугольных сферических координат, применяя или формулы (368) — (370) или формулы (383) настоящего параграфа, с использованием при этом при постепенном переходе от точки к точке длин сторон треугольников триангуляции (или полигонометрических ходов) и углов между ними. Однако ни сферические, ни сфероидические координаты не имеют, как уже говорилось, в настоящее время сколько-нибудь широкого применения в практике геодезических работ.

## Глава VI

# ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ПЛОСКИЕ КООРДИНАТЫ ГАУССА-КРЮГЕРА

### § 48. Основные соображения

В Руководстве по высшей геодезии, части I, а также в § 3 главы I настоящей книги, уже достаточно выяснены выгоды перехода от эллипсоида на плоскость при обработке опорных геодезических сетей и при использовании этих сетей в практических целях. При этом переход на плоскость совершается, применяя некоторую проекцию, некоторое условное изображение эллипсоида на плоскости; другими словами, перенос координат, расстояний и направлений с эллипсоида на плоскость выполняется с достаточной строгостью по некоторому математическому закону, целесообразно избранному. Искажения расстояний и направлений, неизбежные во всякой проекции эллипсоида на плоскости, при этом не пренебрегаются, а строго учитываются. От триангуляции на эллипсоиде мы переходим к триангуляции на плоскости, образуемой уже треугольниками с прямолинейными сторонами, причем, вводя редукции в длины выходных сторон и в углы триангуляции на эллипсоиде, мы затем получаем по выходным сторонам на плоскости и по углам в треугольниках с прямолинейными сторонами плоские прямоугольные координаты вершин треугольников на плоскости, которые будут являться строгим изображением по принятому закону системы соответствующих им геодезических точек на эллипсоиде. Имея на плоскости систему опорных геодезических точек, мы в той же проекции выполняем съемку страны и все детальные ходы и детальные сети (геометрическую сеть, теодолитные ходы, тахеометрические ходы и т. п.); при этом то обстоятельство, что опорная сеть дана уже в проекции, *должно* приводить к тому, что материалы графических съемок укладывались бы в эту сеть *без редуцирований* этих материалов на плоскость, т. е. так, как они обычно укладываются в топографии, а материалы численных съемок, ведущихся обычно в крупных масштабах, укладывались бы с введением *лишь редукиций масштабного характера*.

Уже из этого очерка перехода с эллипсоида на плоскость можно заключить, что проекция должна обладать свойствами *конформности*. В самом деле, сохранение подобия в бесконечно малых частях в конформных проекциях обуславливает практическое постоянство масштаба *по всем направлениям* в данной точке *в пределах некоторого малого участка*, для которого эта точка является центральной. Следовательно, разделив поверхность эллипсоида на ряд мелких участков, можно представить себе, что при изображении эллипсоида на плоскости в конформной проекции каждый такой участок изображается с сохранением подобия во всех его частях, но в масштабе ином, чем смежные с ним участки. Конечно, если такие участки соответствуют трапециям съемки масштаба 1 : 25 000, 1 : 50 000, 1 : 100 000, то система геодезических опорных

точек, данная с полной точностью прямоугольными координатами на плоскости в избранной конформной проекции, приводит к тому, что масштаб проекции на данной съёмочной проекции будет учтен сам собой в этих координатах опорных точек, и, пользуясь ими, мы получим съёмку трапеции именно в этом масштабе, не прибегая ни к каким редукициям съёмочных материалов.

Но конформные проекции вовсе не обладают свойством малости и медленности изменения линейного масштаба изображения: начиная от некоторой центральной линии или от некоторой центральной точки, масштаб изображения в конформных проекциях изменяется при отходе от такой центральной линии (или точки) сперва очень медленно, но затем быстрота изменения масштаба все возрастает, и при охвате проекцией значительной территории линейный масштаб проекции делается значительно отличающимся от начального (на центральной линии) и быстро изменяющимся. Последнее обстоятельство делает то, что те участки, в пределах которых масштаб проекции можно считать практически постоянным, делаются на краю значительной территории крайне узкими в направлении, перпендикулярном к центральной линии или радиальном по отношению к центральной точке. Отсюда возникает необходимость подразделения значительной территории на *зоны*: в пределах каждой такой зоны применяется одна и та же для всех зон конформная проекция эллипсоида на плоскость, но центральная линия или центральная точка проекции берется *для каждой зоны своя*.

Если, например, мы решили бы применять коническую конформную проекцию, то мы разбили бы поверхность эллипсоида на пояса, разграниченные земными параллелями, и в каждом таком поясе применяли бы коническую конформную проекцию, но на конусе, касающемся земного эллипсоида по средней параллели пояса, что сказалось бы аналитически в том, что в нашей проекции для каждого пояса были бы взяты *свои постоянные проекции*.

Итак, при переходе на плоскость, мы должны использовать некоторую конформную проекцию эллипсоида на плоскости, причем при выборе такой проекции следует поставить требование, чтобы в случае ее применения к обширной территории, зоны, на которые будет разбита эта территория, были бы возможно немногочисленны, или чтобы каждая зона охватывала бы возможно большую площадь; это последнее требование, очень важное с практической точки зрения, должно сочетаться еще со следующим: математическая сторона применения проекции в *достаточно широкой зоне* должна быть сравнительно проста, т. е. формулы перехода от координат, расстояний и направлений на эллипсоиде к соответствующим им элементам на плоскости должны быть при высокой точности вычислений *достаточно простыми*. Требование малости искажений расстояний и направлений в проекции следует считать второстепенным и покрываемым требованием возможной простоты учета этих искажений.

Территория СССР значительно простирается с запада на восток: при  $35^\circ$  протяжения по широте, протяжение по долготе составляет  $150^\circ$ . Казалось бы поэтому, что деление нашей территории на зоны следует выполнять земными параллелями и применять в топографо-геодезических работах СССР по зонам, в виде поясов по параллелям, конформную коническую проекцию или конформную проекцию, близкую по свойствам к конической конформной. Однако оказывается, что при применении такой проекции формулы перехода от элементов эллипсоида к им соот-

ветствующим на плоскости будут очень сложными даже при сравнительно небольшом протяжении зоны по долготе, и, следовательно, неизбежно дробление поясов по параллелям на малые части меридианами; но к такому дроблению пояса, ограниченного двумя параллелями, приводит, конечно, и тот огромный отход участков пояса от оси ординат, который будет иметь место в конической проекции при удалении этих участков даже на  $20^\circ$  по долготе от центрального меридиана страны.

Все указанные выше требования и соображения достаточно обосновывают введение и применение в СССР проекции Гаусса-Крюгера. Проекция Гаусса-Крюгера была математически отработана Гауссом в 1825—1830 гг., и присоединение в ее названии фамилии Крюгера объясняется только тем, что Крюгер в 1912 г. дал формулы для вычислений в этой гауссовой проекции.

В конформной гауссовой проекции центральной линией является некоторый меридиан эллипсоида, который на плоскости изображается прямой линией, принимаемой за ось абсцисс в системе прямоугольных плоских координат; при этом меридианные дуги центрального меридиана откладываются на оси абсцисс на плоскости с сохранением их длины, т. е. в масштабе единица, или в некотором масштабе, постоянном для всех частей этого меридиана. Приведенное определение проекции Гаусса-Крюгера выражается затем в математической форме, дающей вполне определенный закон изображения эллипсоида на плоскости.

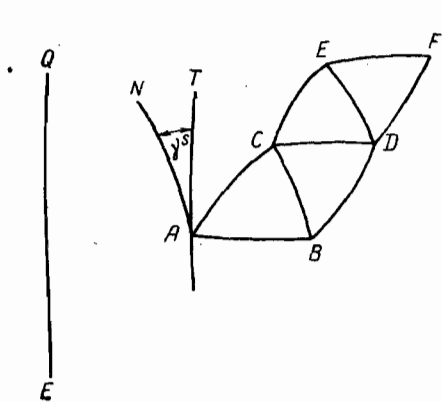
Если бы мы положили сжатие эллипсоида равным нулю, т. е. перешли к шару, то тогда проекция Гаусса-Крюгера обратилась бы в известную меркаторову цилиндрическую проекцию шара, но только с применением цилиндра, касающегося земного шара не по экватору, а по меридиану, принятому в проекции за центральный. Если при принятии земного эллипсоида за шар проекция Гаусса-Крюгера обращается в конформную поперечную цилиндрическую проекцию, то понятно, что вследствие малости сжатия земного эллипсоида эта проекция (при применении ее к эллипсоиду) близка по своим свойствам к проекции Меркатора на поперечное расположенном цилиндре, и поскольку меркаторово изображение эллипсоида (при цилиндре, касающемся эллипсоида по его экватору) дает простые математические выражения при решении разных задач геодезии, постольку и проекция Гаусса-Крюгера сохраняет это драгоценное свойство.

Разделение эллипсоида на зоны в проекции Гаусса-Крюгера происходит посредством земных меридианов: зона в виде двугрульника, ограниченного двумя меридианами, простирается от северного полюса до южного полюса; начало координат берется на экваторе, в пересечении его с центральным меридианом зоны, и по существу никаких неудобств *в применении на всем протяжении такой зоны* одной системы плоских прямоугольных координат не возникает, так как центральная линия проекции изображается прямой линией (в конической проекции центральная параллель пояса изображается окружностью, что дает существенные неудобства при заметном удалении по долготе от центральной части пояса). Долготный интервал зоны в проекции Гаусса-Крюгера принимается двоякий: шестиградусный и трехградусный. В пределах СССР долготы осевых меридианов шестиградусных зон будут такие: 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63, 69, 75, 81, 87, 93, 99, 105, 111, 117, 123, 129, 135, 141, 147, 153, 159, 165, 171, 177, 183,  $189^\circ$ ; эти осевые меридианы совпадают с средними меридианами листов карты в масштабе 1 : 1 000 000, относящихся соответственно к колоннам этой карты с но-

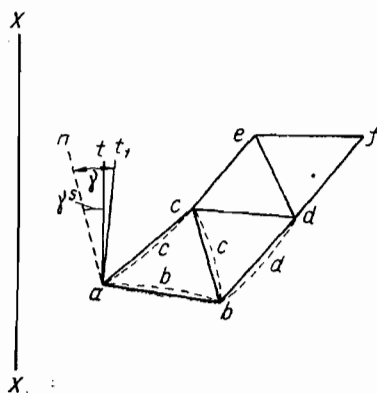
мерами от  $35$  ( $L_0 = 27^\circ$ ) до  $60$  ( $L_0 = 177^\circ$ ) и с номерами 1 и 2 ( $L_0 = 183^\circ$  и  $L_0 = 189^\circ$ ). Шестиградусные зоны требуют применения, конечно, более сложных формул, чем трехградусные; с другой стороны, на краях такой зоны масштаб изображения изменяется вместе с изменением ординаты  $y$  уже достаточно быстро, и полоса, в которой этот масштаб можно считать постоянным при обработке числовой съемки, становится узкой ( $< 10$  км). Поэтому шестиградусные зоны можно принять лишь в целях картографических — при обработке графических съемок масштаба  $1:50\,000$ ,  $1:100\,000$ . В трехградусных зонах осевые меридианы имеют долготы:  $24, 27, 30, 33, 36, \dots, 102, 105, 108, 111^\circ, \dots$ ; другими словами, осевые меридианы частью совпадают с средними меридианами листов миллионной карты, частью — с крайними меридианами этих листов. Каждая зона обслуживает все протяжение нашей территории по широте в соответствующей ее части, что, конечно, является очень существенным; хотя число зон на нашей огромной территории не может быть названо малым, но при применении других проекций это число было бы заметно большим, большим в несколько раз. Линейные искажения в проекции Гаусса-Крюгера не только в шестиградусной, но и в трехградусной зоне достаточно заметны и не могут быть признаны малыми; но учет этих искажений выполняется в ней достаточно просто при сохранении высокой точности, а это и обеспечивает успешное ее применение в целях геодезических. Точно так же переход от углов между геодезическими линиями в треугольниках триангуляции на эллипсоиде к соответствующим им углам в треугольниках триангуляции на плоскости, образованных прямолинейными сторонами, достаточно прост при сохранении высокой точности в этом переходе.

Представляется, что мы достаточно выяснили выгоду применения именно проекции Гаусса, а не иной, при переходе в СССР с эллипсоида на плоскость, при введении у нас проекции государственных съемок.

Мы позволим себе привести ту основную схему действий, которую приходится выполнять при применении проекции Гаусса-Крюгера.



Черт. 58



Черт. 59

На черт. 58 изображена триангуляция на эллипсоиде, причем  $QE$  — осевой меридиан; для точки  $A$  даны ее геодезическая широта  $B_1$  и геодезическая долгота ее  $L_1$ ; в точке  $A$  дан геодезический азимут  $A_{1,2}$  с  $A$  на  $B$ ; длина выходной стороны  $AB$  также известна. Проведем в  $A$  геоде-

тическую параллель  $AT$  по отношению к осевому меридиану. Пусть  $AN$  (черт. 58) — меридиан точки  $A$ ; угол  $\gamma^s$  между кривыми  $AN$  и  $AT$  называется *геодезическим сближением меридианов* в точке  $A$ ; очевидно,  $\gamma^s$  в точности совпадает с величиной  $s$  формулы (394) § 47 или формулы (C) § 48; имея  $B_1$  и  $L_1$ , мы вычислим  $\gamma^s$  именно по формуле (394). Пусть на плоскости (черт. 59) меридиан  $AN$  изобразится кривой  $an$ , а кривая  $AT$  — кривой  $at$ . Вследствие конформности проекции угол между кривыми  $an$  и  $at$  будет в точности равен  $\gamma^s$ . Однако если мы проведем в  $a$  прямую  $at_1$ , параллельную оси абсцисс  $xx$ , то она оказывается несовпадающей с касательной к кривой  $at$ . Угол между кривой  $at$  и прямой  $at_1$  есть малая величина четвертого порядка. На плоскости (в проекции) мы называем дирекционным углом  $T_{s,1}$  некоторой прямой  $st$  в точке  $s$  угол между прямой в  $s$ , параллельной оси абсцисс  $xx$ , и направлением этой прямой  $st$ , причем этот угол отсчитывается от севера через восток, юг и запад по ходу часовой стрелки. Назовем угол в  $a$  между кривой  $an$  и прямой  $at_1$  через  $\gamma$ ;  $\gamma$  есть так называемое *гауссово сближение меридианов в точке  $a$* . Геодезические линии  $AC, AB, BC, \dots$  изобразятся в проекции кривыми  $acc, abb, bcc, \dots$ , причем углы между этими кривыми в точках  $a, b, c$  будут в точности, вследствие конформности проекции, равны соответственно углам при  $A, B$  и  $C$  в треугольнике  $ABC$  на эллипсоиде. Назовем углы: в точке  $a$  между кривой  $abb$  и хордой  $ab$ ; между кривой  $acc$  и хордой  $ac$  соответственно через  $\delta_{ab}$  и  $\delta_{ac}$ ; в точке  $b$  — между кривой  $bba$  и хордой  $ba$ , между кривой  $bcc$  и хордой  $bc$ , между кривой  $bda$  и хордой  $bd$  соответственно через  $\delta_{ba}, \delta_{bc}$  и  $\delta_{bd}$ . Эти очень малые углы  $\delta$  носят название *поправок за кривизну*.

Переход от эллипсоида на плоскость выполняется по такой схеме:

1) прежде всего переходят от  $B_1$  и  $L_1$  к плоским прямоугольным координатам  $x$  и  $y$  точки  $A$ , являющейся изображением точки  $A$ ; одновременно вычисляют  $\gamma_1$  — гауссово сближение меридианов в  $a$ ; тогда можем написать

$$T_{1,2} = A_{1,2} - \gamma_1 - \delta_{ab};$$

2) пренебрегая пока редукциями углов треугольников и редукцией выходной стороны, вычисляют приближенно длины сторон треугольников, а затем, имея  $x$  и  $y$  для точки  $A$  и принимая  $T_{1,2} = A_{1,2} - \gamma_1$ , вычисляют с этими приближенными значениями длин сторон треугольников приближенные плоские прямоугольные координаты точек  $b, c, d, e, f, \dots$  (черт. 59);

3) с приближенными координатами точек  $b, c, d, e, f, \dots$  вычисляют «поправки  $\delta$  за кривизну» и редукции выходных сторон триангуляции, после чего получают, очевидно, углы в *прямолинейных* треугольниках  $abc, bcd, cde, def, \dots$  на плоскости;

4) выполняют уравнивание триангуляции на плоскости и с уравниваемыми углами — вычисление сторон треугольников на плоскости; после этого, имея  $T_{1,2} = A_{1,2} - \gamma_1 - \delta_{ab}$  и  $x$  и  $y$  для  $a$ , вычисляют окончательно прямоугольные плоские координаты или координаты Гаусса-Крюгера для точек  $b, c, d, e, f, \dots$ .

## § 49. Основные формулы

Нам придется пользоваться прежними обозначениями

$$c = \frac{a^2}{b}; \quad \operatorname{tg} B = t; \quad \eta^2 = e'^2 \cos^2 B; \quad 1 + \eta^2 = V^2.$$

Кроме того, назовем через  $X_B$  дугу меридиана от экватора до параллели с широтой  $B$ . На черт. 60:  $EQ$  — экватор эллипсоида,  $PE$  — осевой меридиан зоны, точка  $A$  имеет широту  $B$  и долготу  $l$  от меридиана  $PE$ ; на черт. 61 прямая  $P_1E_1$  изображает в проекции Гаусса-Крюгера меридиан  $PE$  и является осью абсцисс на плоскости; прямая  $E_1Q_1$ , перпендикулярная к  $E_1P_1$ , изображает экватор эллипсоида и служит осью ординат на плоскости; точка  $a$ , являющаяся изображением точки  $A$ , имеет координаты  $x$  и  $y$ . Точка  $A_1$  имеет на эллипсоиде координаты  $B + dB$  и  $l + dl$ ; ей соответствует на плоскости точка  $a_1$  с координатами  $x + dx$  и  $y + dy$ . Назовем расстояние  $AA_1$  через  $ds$ , и расстояние  $aa_1$  — через  $dS$ . Мы имеем

$$ds = \sqrt{(MdB)^2 + (N \cos B dl)^2},$$

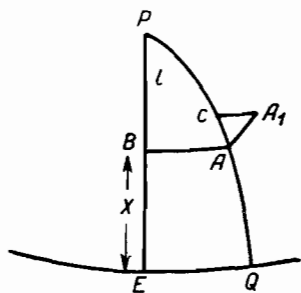
$$ds = N \cos B \sqrt{\left(\frac{M}{N} \cdot \frac{dB}{\cos B}\right)^2 + (dl)^2},$$

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

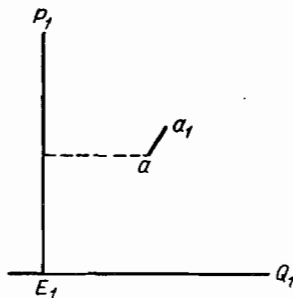
Величину  $\frac{M}{N} \frac{dB}{\cos B}$  назовем через  $q$ ; следовательно,

$$q = \int \frac{M}{N} \cdot \frac{dB}{\cos B}. \quad (396)$$

Величина  $q$  называется *изометрической широтой*; уравнение (396) легко интегрируется.



Черт. 60



Черт. 61

Масштаб изображения в точке  $A$  представляется так:

$$m = \frac{dS}{ds} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{N \cos B \sqrt{\left(\frac{M}{N} \frac{dB}{\cos B}\right)^2 + (dl)^2}}. \quad (397)$$

В конформной проекции масштаб  $m$ , оставаясь постоянным в данной точке, не зависит от азимута направления  $AA_1$ ; он является функцией только координат точки  $A$  и меняется лишь при переходе от точки  $A$  к точке с иными координатами. Таким образом, мы должны потребовать, чтобы правая часть уравнения (397) оказалась функцией только координат  $B$  и  $l$  точки  $A$  и совершенно не зависела бы от направления элемента  $AA_1$ .

Представим на основании (397) масштаб  $m$  в таком виде

$$m^2 = \frac{(dx + idy)(dx - idy)}{N^2 \cos^2 B (dq + idl)(dq - idl)} = \frac{1}{N^2 \cos^2 B} \frac{d(x+iy)d(x-iy)}{d(q+il)d(q-il)}. \quad (398)$$

$$i = \sqrt{-1}.$$

Условие конформности будет осуществлено, если потребовать, чтобы  $x + iy$  было некоторой аналитической функцией от аргумента  $(q + il)$  (или чтобы  $x - iy$  было бы аналитической функцией от аргумента  $q - il$ ). Другими словами, мы должны положить

$$x + iy = f(q + il). \quad (399)$$

При произвольном, в общем, виде функции  $f$  изображение будет конформным, если уравнение (399) имеет место. Чтобы получить именно гауссово конформное изображение эллипсоида на плоскости, мы устанавливаем вид функции  $f$  посредством таких условий:

1) осевой меридиан  $PE$  эллипсоида изображается прямой линией на плоскости и именно осью абсцисс; следовательно, в (399) при  $l = 0$ , при любом значении  $q$  ордината  $y$  должна равняться нулю;

2) для точек осевого меридиана абсциссы должны быть равны соответствующим дугам  $X_B$ , т. е. расстояниям соответствующих точек эллипсоида от его экватора. Следовательно, в (399) должно иметь при  $y = 0$

$$x = f(q) = X_B.$$

Полагая теперь, что  $l$  сравнительно невелико, например не более  $3^\circ$ , разложим  $f(q + il)$  в ряд Тейлора

$$x + iy = X_B + il \frac{df}{dq} - \frac{l^2}{2} \frac{d^2 f}{dq^2} - \frac{il^3}{6} \frac{d^3 f}{dq^3} + \frac{l^4}{24} \frac{d^4 f}{dq^4} + \frac{il^5}{120} \frac{d^5 f}{dq^5} - \frac{l^6}{720} \frac{d^6 f}{dq^6} + \dots$$

Производные в этом ряде должны быть вычислены при  $l = 0$ , вследствие чего они обращаются соответственно в производные  $\frac{dX_B}{dq}$ ,  $\frac{d^2 X_B}{dq^2}$ ,  $\frac{d^3 X_B}{dq^3}$ , ... Следовательно, мы имеем

$$\begin{aligned} x + iy = X_B + il \frac{dX_B}{dq} - \frac{l^2}{2} \frac{d^2 X_B}{dq^2} - \frac{il^3}{6} \frac{d^3 X_B}{dq^3} + \frac{l^4}{24} \frac{d^4 X_B}{dq^4} + \\ + \frac{il^5}{120} \frac{d^5 X_B}{dq^5} - \frac{l^6}{720} \frac{d^6 X_B}{dq^6} + \dots \end{aligned}$$

Сравнение действительных и мнимых частей приводит нас к таким основным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} x &= X_B - \frac{l^2}{2} \frac{d^2 X_B}{dq^2} + \frac{l^4}{24} \frac{d^4 X_B}{dq^4} - \frac{l^6}{720} \frac{d^6 X_B}{dq^6} + \dots \\ y &= l \frac{dX_B}{dq} - \frac{l^3}{6} \frac{d^3 X_B}{dq^3} + \frac{l^5}{120} \frac{d^5 X_B}{dq^5} - \dots \end{aligned} \right\}. \quad (400)$$

Уравнения (400) дают связь между координатами  $x$  и  $y$  точки  $a$  на плоскости и геодезическими координатами  $B$  и  $l$  ей соответствующей точки  $A$  на эллипсоиде; по существу эти уравнения и выражают закон изображения зоны эллипсоида на плоскости в проекции Гаусса-Крюгера.



### § 50. Формулы для определения конформных плоских координат по геодезическим координатам

Мы имеем

$$\begin{aligned}
 dX_B &= M dB = \frac{c}{V^3} dB; \quad dq = \frac{dB}{V^2 \cos B}; \quad \frac{dX_B}{dq} = \frac{c}{V} \cos B; \\
 \frac{d^2 X_B}{dq dB} &= -\frac{c}{V^2} \frac{dV}{dB} \cos B - \frac{c}{V} \sin B; \\
 2V dV &= -2\eta^2 t; \quad \frac{dV}{dB} = -\frac{\eta^2}{V} t; \\
 \frac{d^2 X_B}{dq dB} &= \frac{c}{V^3} \eta^2 t \cos B - \frac{c}{V} \sin B = -\frac{c}{V^3} \sin B; \\
 \frac{d^2 X_B}{dq^2} &= \frac{d^2 X_B}{dq dB} \frac{dB}{dq} = -\frac{c}{V} \sin B \cos B = -\frac{c}{2} \frac{\sin 2B}{V}; \\
 \frac{d^3 X_B}{dq^2 dB} &= -\frac{c}{2} \left[ \frac{2 \cos 2B}{V} + \frac{\sin 2B}{V^2} \frac{\eta^2}{V} \right] = \\
 &= \frac{c}{V^3} [\cos^2 B - \sin^2 B + \eta^2 \cos^2 B - \eta^2 \sin^2 B + \eta^2 \sin^2 B]; \\
 \frac{d^3 X_B}{dq^2 dB} &= -\frac{c}{V^3} [(1 + \eta^2) \cos^2 B - \sin^2 B]; \\
 \frac{d^3 X_B}{dq^3} &= -\frac{c \cos^2 B}{V} (1 + \eta^2 - t^2). \tag{401}
 \end{aligned}$$

Далее, без приведения подробностей

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d^4 X_B}{dq^4} &= \frac{c}{V} \sin B \cos^3 B (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) \\
 \frac{d^5 X_B}{dq^5} &= \frac{c}{V} \cos^5 B (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2) \\
 \frac{d^6 X_B}{dq^6} &= -\frac{c}{V} \sin B \cos^5 B (61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330\eta^2 t^2)
 \end{aligned} \right\} \tag{402}$$

Подставляя найденные производные в (400) с заменой в них  $\frac{c}{V}$  через  $N$ , мы и получим следующие основные формулы для вычисления прямоугольных гауссовых координат по геодезическим

$$\left. \begin{aligned}
 x - X_B &= \frac{N}{2\rho''^2} l^2 \sin B \cos B + \frac{N}{24\rho''^4} l^4 \sin B \cos^3 B (5 - t^2 + \\
 &+ 9\eta^2 + 4\eta^4) + \frac{N}{720\rho''^6} l^6 \sin B \cos^5 B (61 - 58t^2 + t^4); \\
 y &= \frac{N}{\rho''} l \cos B + \frac{N}{6\rho''^3} l^3 \cos^3 B (1 - t^2 + \eta^2) + \\
 &+ \frac{N}{120\rho''^5} l^5 \cos^5 B (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2).
 \end{aligned} \right\} \tag{403}$$

Для приведения этих формул к логарифмическому виду, перепишем их еще так

$$\left. \begin{aligned} x - X_B &= \frac{l''^2}{2\rho''^2} N \sin B \cos B \left\{ 1 + \frac{l''^2 \cos^2 B}{12\rho''^2} (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l''^4 \cos^4 B}{360\rho''^4} (61 - 58t^2 + t^4) \right\} \\ y &= \frac{l''}{\rho''} N \cos B \left\{ 1 + \frac{l''^2 \cos^2 B}{6\rho''^2} (1 - t^2 + \eta^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l''^4 \cos^4 B}{120\rho''^4} (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (404)$$

Так как

$$\lg(1 + ax + bx^2) = \mu ax + \mu bx^2 - \mu \frac{a^2 x^2}{2} + \dots = \mu ax - \mu \frac{a^2 - 2b}{2} x^2 + \dots,$$

то из (404) имеем

$$\begin{aligned} \lg(x - X_B) &= \lg \frac{l''^2}{2\rho''^2} N \cos B \sin B + \mu \frac{l''^2}{12\rho''^2} \cos^2 B (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) - \\ &\quad - \mu \frac{l''^4}{\rho''^4} \cos^4 B \frac{25 - 10t^2 + t^4}{144} - \frac{61 - 58t^2 + t^4}{180}; \\ \lg y &= \lg \frac{l''}{\rho''} N \cos B + \mu \frac{l''^2 \cos^2 B}{6\rho''^2} (1 - t^2 + \eta^2) - \\ &\quad - \mu \frac{l''^4 \cos^4 B}{\rho''^4} \frac{1 - 2t^2 + t^4 + 2\eta^2 - 2\eta^2 t^2}{36} - \\ &\quad - \mu \frac{l''^4}{2\rho''^4} \cos^4 B \frac{5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2}{60}. \end{aligned}$$

Отсюда окончательно

$$\begin{aligned} \lg(x - X_B) &= \lg \frac{l''^2}{2\rho''^2} N \sin B \cos B + \mu \frac{l''^2 \cos^2 B}{12\rho''^2} (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \\ &\quad + \frac{\mu}{1440} \frac{l''^4}{\rho''^4} \cos^4 B (119 - 182t^2 - t^4); \end{aligned} \quad (405)$$

$$\begin{aligned} \lg y &= \lg \frac{N}{\rho''} l'' \cos B + \frac{\mu l''^2 \cos^2 B}{6\rho''^2} (1 - t^2 + \eta^2) + \\ &\quad + \frac{\mu l''^4}{180\rho''^4} \cos^4 B (5 - 22t^2 - t^4 + 16\eta^2 - 82\eta^2 t^2). \end{aligned} \quad (406)$$

Введем следующие обозначения

$$\left. \begin{aligned} l'' \cos B &= l' \\ \frac{\mu}{6\rho''^2} l''^2 &= \sigma^2; \quad \frac{\mu}{3\rho''^2} l''^2 = \tau \\ v &= \frac{\mu}{6} \eta^2 \frac{l''^2}{\rho''^2} = \frac{\eta^2}{2} \tau \\ x &= \frac{\mu}{180\rho''^4} [1 + (20 + 82\eta^2) \cos^2 B - (26 + 98\eta^2) \cos^4 B] \end{aligned} \right\} \quad (407)$$

Так как

$$\begin{aligned} & \cos^4 B (5 - 22 t^2 - t^4 + 16 \eta^2 - 82 \eta^2 t^2) = \\ & = \cos^4 B (27 - 22 \sec^2 B - t^4 - 98 \eta^2 t^2 - 16 \eta^2 \sec^2 B) = \\ & = 27 \cos^4 B - 22 \cos^2 B - \sin^4 B - 98 \eta^2 \sin^2 B \cos^2 B + 16 \eta^2 \cos^2 B = \\ & = -20 \cos^2 B - 82 \eta^2 \cos^2 B + 26 \cos^4 B + 98 \eta^2 \cos^4 B + \cos^4 B - \\ & - 2 \cos^2 B - \sin^4 B = -[(20 + 82 \eta^2) \cos^2 B - (26 + 98 \eta^2) \cos^4 B + 1], \end{aligned}$$

то получим

$$\lg y = \lg N \frac{l''}{\rho''} + \tau - \sigma + \nu - \kappa l''^4, \quad (408)$$

$$\begin{aligned} \lg (x - X_B) = \lg \left( N \frac{l'' l'}{2 \rho''^2} \sin B \right) + \frac{3}{2} \tau - \frac{\sigma}{2} + \frac{9}{2} \nu + \tau \eta^4 + \\ + \frac{\mu}{1440} \frac{l''^4}{\rho''^4} \cos^4 B (119 - 182 t^2 - t^4), \end{aligned} \quad (408')$$

причем для получения последнего уравнения выполнено такое преобразование

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{12} \frac{l''^2}{\rho''^2} \cos^2 B (5 - t^2 + 9 \eta^2 + 4 \eta^4) &= \frac{9}{2} \nu + \frac{6}{12} \mu \frac{l''^2}{\rho''^2} \cos^2 B - \\ - \frac{\mu}{12} \frac{l''^2 \cos^2 B}{\rho''^2} (1 + t^2) + \frac{\mu}{3} \frac{l''^2}{\rho''^2} \cos^2 B \eta^4 &= \frac{9}{2} \nu + \frac{3}{2} \tau - \\ - \frac{1}{2} \sigma + \frac{\mu}{3} \frac{l''^2}{\rho''^2} \cos^2 B \eta^4. \end{aligned}$$

Так как обычно всегда  $l \leq 3^\circ$ , то члены  $\tau \eta^4$  и  $\frac{\mu l^4 \cos^4 B}{1440} (119 - 182 t^2 - t^4)$  в формуле для  $(x - X_B)$  дают в широтах, больших  $30^\circ$ , только 0,0004 м и, следовательно, могут быть отброшены. Таким образом,

$$\lg (x - X_B) = \lg N \frac{l'' l'}{2 \rho''^2} \sin B + \frac{3}{2} \tau - \frac{\sigma}{2} + \frac{9}{2} \nu; \quad (409)$$

при  $l \leq 1^\circ, 5$  член  $\kappa l''^4$  в (408) может быть отброшен.

### § 51. Соотношения между сферондическими прямоугольными координатами и координатами Гаусса-Крюгера

В § 47 мы получили формулу (385)

$$Y = N \frac{l''}{\rho''} \cos B - N \frac{l''^3 \cos^3 B}{6 \rho''^3} t^2 - \frac{N l''^5 \cos^5 B}{120 \rho''^5} (8 + 8 \eta^2 - t^2) t^2.$$

Вычитая из нее формулу (404) для  $y$ , получим

$$Y - y = -\frac{N}{6} \frac{l''^3 \cos^3 B}{\rho''^3} (1 + \eta^2) - \frac{N l''^5 \cos^5 B}{120 \rho''^5} (5 - 10 t^2 + 14 \eta^2 - 50 \eta^2 t^2).$$

Введем сюда вместо широты  $B$  точки  $A$  широту  $B_f$  точки  $C$  (черт. 57), причем нам будет достаточно воспользоваться таким выражением

$$B - B_f = -\frac{Y^2}{2 N_f^2} t_f V_f^2.$$

Отсюда

$$\cos^3 B = \cos^3 B_f + \frac{3}{2} \cos^2 B_f \sin B_f \frac{Y^2}{N_f^2} t_f V_f^2;$$

$$N(1 + \eta^2) = N_f(1 + \eta_f^2) + \frac{1}{2} \frac{Y^2 \eta_f^2 t_f^2}{N_f} (1 + \eta_f^2);$$

$$Y - y = -\frac{1}{6} N_f \frac{l''^3}{\rho''^3} \cos^3 B_f (1 + \eta_f^2) - \frac{Y^2 l''^3 \cos^3 B_f}{12 N_f \rho''^3} \eta_f^2 t_f^2 (1 + \eta_f^2) -$$

$$-\frac{1}{4} \frac{Y^3 l''^3 \cos^2 B_f}{N_f \rho''^3} t_f^2 (1 + \eta_f^2)^2 - \frac{N_f l''^5 \cos^5 B_f}{120 \rho''^5} (5 - 10 t_f^2 + 14 \eta_f^2 - 50 \eta_f^2 t_f^2);$$

$$Y - y = -\frac{N_f}{6} (1 + \eta_f^2) \frac{Y^3}{N_f^3} \left(1 - \frac{Y^2 t_f^2}{N_f^2}\right) - \frac{Y^5}{12 N_f^4} \eta_f^2 t_f^2 (1 + \eta_f^2) -$$

$$-\frac{1}{4} \frac{Y^5 t_f^2 (1 + \eta_f^2)^2}{N_f^4} - \frac{N_f}{120} \frac{Y^5}{N_f^5} (5 - 10 t_f^2 + 14 \eta_f^2 - 50 \eta_f^2 t_f^2);$$

причем для получения последнего уравнения воспользовались формулой (322) § 37

$$l'' = \frac{Y \sec B_f}{N_f} \left[1 - \frac{Y^2 t_f^2}{3 N_f^2}\right] \rho''.$$

Далее

$$Y - y = -\frac{1}{6} N_f (1 + \eta_f^2) \frac{Y^3}{N_f^3} + \frac{Y^5 t_f^2}{6 N_f^4} (1 + \eta_f^2) - \frac{Y^5 t_f^2}{12 N_f^4} (\eta_f^2 + 3 + 6 \eta_f^2) -$$

$$-\frac{Y^5}{120 N_f^4} (5 - 10 t_f^2 + 14 \eta_f^2 - 50 \eta_f^2 t_f^2);$$

$$Y - y = -\frac{N_f}{6} (1 + \eta_f^2) \frac{Y^3}{N_f^3} - \frac{Y^5}{120 N_f^4} (5 + 14 \eta_f^2).$$

Окончательно

$$\left. \begin{aligned} y &= Y + \frac{1}{6} (1 - \eta_f^2) \frac{Y^3}{N_f^3} + \frac{Y^5}{120 N_f^4} (5 + 14 \eta_f^2) \dots (\text{с широтой } B_f) \\ y &= Y + \frac{1}{6} (1 + \eta^2) \frac{Y^3}{N^2} + \frac{Y^5}{120 N^4} (5 + 14 \eta^2 - 40 \eta^2 t^2) \dots (\text{с} \\ &\quad \text{широтой } B \text{ точки } A) \end{aligned} \right\} \quad (410)$$

$$\left. \begin{aligned} Y &= y - \frac{1}{6} (1 + \eta_f^2) \frac{y^3}{N_f^2} + \frac{y^5}{120 N_f^4} (5 + 6 \eta_f^2) \dots (\text{с широтой } B_f) \\ Y &= y - \frac{1}{6} (1 + \eta^2) \frac{y^3}{N^2} + \frac{y^5}{120 N^4} (5 + 6 \eta^2 + 40 \eta^2 t^2) \dots (\text{с ши-} \\ &\quad \text{ротой } B \text{ точки } A) \end{aligned} \right\} \quad (411)$$

Формулы (410) и (411) решают поставленный вопрос относительно соотношения между  $Y$  и  $y$ . Для получения связи между  $X$  и  $x$  воспользуемся прежде всего формулой (387)

$$(B_f - B)'' = \frac{V^2 t}{2 \rho''} (l'' \cos B)^2 + \frac{V^2 t}{24 \rho''^3} l''^4 \cos^4 B (5 V^2 - t^2 + 9 \eta^2 t^2) +$$

$$+ \frac{t(61 - 58 t^2 + t^4)}{720 \rho''^5} l''^6 \cos^6 B, \quad (387)$$

в которой теперь  $B_1$  мы называем просто через  $B$ .

С другой стороны, вследствие незначительности  $B_f - B$ , мы можем написать

$$(B_f - B)'' = \frac{\rho'' \Delta X}{M} - \frac{3}{4} \frac{e^2 \sin 2B k \rho''}{a(1-e^2)M} (\Delta X)^2 - \frac{e^2 \cos 2B}{2a^2 M} (\Delta X)^3, \quad (412)$$

причем под  $\Delta X$  понимается дуга меридиана между параллелями с широтами  $B_f$  и  $B$ , другими словами

$$\Delta X = X_f - X_B = X - X_B.$$

Из (387) и (412) мы получаем

$$\Delta X = Nt \frac{(l'' \cos B)^2}{2 \rho''^2} + \text{члены четвертого порядка},$$

$$(\Delta X)^2 = \frac{N^2 t^2}{4} \frac{(l''^2 \cos^2 B)^2}{\rho''^4} + \text{члены шестого порядка},$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} X - x_B &= \frac{Nt l''^2 \cos^2 B}{2 \rho''^2} + \frac{3}{4} \frac{e^2 \sin 2B k}{a(1-e^2)} \frac{N^2 t^2}{4} \frac{l''^4 \cos^4 B}{\rho''^4} + \\ &+ \frac{Nt l''^4 \cos^4 B}{24 \rho''^4} (5V^2 - t^2 - 9\eta^2 t^2) + Nt \frac{61 - 58t^2 + t^4}{720 \rho''^6} l''^6 \cos^6 B; \\ X - X_B &= \frac{Nl''^2}{2 \rho''^2} \sin B \cos B \left\{ 1 + \frac{l''^2 \cos^2 B}{12 \rho''^2} (5 - t^2 + 5\eta^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l''^4 \cos^4 B}{360 \rho''^4} (61 - 58t^2 + t^4) \right\}. \end{aligned} \quad (413)$$

Вычитая из (413) первое из уравнений (404), получаем

$$\begin{aligned} X - x &= -\frac{N}{6} \frac{l''^4}{\rho''^4} \sin B \cos^3 B \eta^2 (1 + \eta^2); \\ X - x &= -\eta^2 t \frac{Y}{6} \left( \frac{Y}{N} \right)^3. \end{aligned} \quad (414)$$

## § 52. Выражение геодезических координат через координаты Гаусса-Крюгера

Используем прежде всего формулу (322) § 37

$$l'' = \frac{Y \rho''}{N_f} \sec B_f \left[ 1 - \frac{Y^2 t_f^2}{3 N_f^2} + \frac{1}{15} \frac{Y^4}{N_f^4} t_f^2 (1 + \eta_f^2 + 3 t_f^2) \right]$$

и заменим в ней  $Y$  через  $y$  по первой из формул (411). Мы получим

$$\begin{aligned} l'' &= \frac{y \rho''}{N_f} \sec B_f \left[ 1 - \frac{1}{6} (1 + \eta_f^2) \frac{y^2}{N_f^2} + \frac{y^4}{120 N_f^4} (5 + 6 \eta_f^2) \right] \times \\ &\times \left[ 1 - \frac{y^2 t_f^2}{3 N_f^2} + \frac{(1 + \eta_f^2)}{9} t_f^2 \frac{y^4}{N_f^4} + \frac{1}{15} \frac{y^4}{N_f^4} t_f^2 (1 + \eta_f^2 + 3 t_f^2) \right]; \\ l'' &= \frac{y \rho''}{N_f \cos B_f} \left\{ 1 - \frac{1}{6} (1 + \eta_f^2 + 2 t_f^2) \frac{y^2}{N_f^2} + \frac{y^4}{120 N_f^4} (5 + 6 \eta_f^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{y^4 t_f^2}{90 N_f^4} (21 + 21 \eta_f^2 + 18 t_f^2) \right\}. \end{aligned} \quad (415)$$

Теперь правую часть (415) отнесем не к широте  $B_f$ , а к широте  $\varphi'$ , которая получается при откладывании по осевому меридиану (или любому другому) от экватора абсциссы  $x$  точки  $A$ , имеющей широту  $B$  и долготу  $l$ . Другими словами, широта  $\varphi'$  относится к той точке осевого меридиана, для которой меридианная дуга  $X_\varphi$  равна абсциссе  $x$  в системе координат Гаусса-Крюгера для точки  $A$  с широтой  $B$  и долготой  $l$ .

Из (414) мы легко получаем

$$B_f = \varphi' - \frac{\eta^2 t}{6} \frac{t''^4}{\rho''^4} \cos^4 B (1 + \eta^2),$$

$$B_f = \varphi' - \frac{\eta^2 t}{6} \left( \frac{y}{N} \right)^4 (1 + \eta^2).$$

Заменяя в (415)  $B_f$  через  $\varphi'$ , получим

$$\begin{aligned} l'' &= \frac{y \rho''}{N' \cos \varphi'} \left\{ 1 - \frac{y^2}{6(N')^2} (1 + \eta'^2 + 2 t'^2) + \frac{y^4}{120(N')^4} (5 + 6 \eta'^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{y^4 t'^2}{90(N')^4} (21 + 21 \eta'^2 + 18 t'^2) \right\} - \frac{\eta'^2 t'^2}{6 \cos \varphi'} \frac{y^5 \rho''}{(N')^5}; \\ l'' &= \frac{y \rho''}{N' \cos \varphi'} \left\{ 1 - \frac{y^2}{6 N'^2} (1 + \eta'^2 + 2 t'^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{y^4}{120 N'^4} (5 + 6 \eta'^2 + 28 t'^2 + 8 \eta'^2 t'^2 + 24 t'^4) \right\}. \end{aligned} \quad (416)$$

Формула (416) и является окончательной; до ее вычисления требуется по данному  $x$  точки  $A$ , рассматриваемому как меридианная дуга, вывести при помощи таблиц величин  $\lambda_B$  значение широты  $\varphi'$ .

Используем теперь формулу (d) § 37

$$\begin{aligned} (B - B_f)'' &= - \frac{V_f^2 Y^2 t_f \rho''}{2 N_f^3} \left[ 1 - \frac{Y^2}{12 N_f^2} (V_f^2 + 3 t_f^2 - 9 \eta_f^2 t_f^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{Y^4}{360 N_f^4} (1 + 30 t_f^2 + 45 t_f^4) \right]. \end{aligned} \quad (d)$$

Прежде всего в ней заменим  $Y$  через  $y$ . Мы получим

$$\begin{aligned} (B - B_f)'' &= - \frac{V_f^2 y^2 t_f \rho''}{2 N_f^3} \left[ 1 - \frac{(1 + \eta_f^2)}{3} \frac{y^2}{N_f^2} + \frac{(1 + \eta_f^2)^2}{36} \frac{y^4}{N_f^4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{y^4}{60 N_f^4} (5 + 6 \eta_f^2) \right] \times \left[ 1 - \frac{y^2}{12 N_f^2} (V_f^2 + 3 t_f^2 - 9 \eta_f^2 t_f^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{y^4}{36 N_f^4} (1 + \eta_f^2) (V_f^2 + 3 t_f^2 - 9 \eta_f^2 t_f^2) + \frac{y^4}{360 N_f^4} (1 + 30 t_f^2 + 45 t_f^4) \right]. \end{aligned}$$

В членах с  $\frac{y^6}{N^6}$  мы можем отбросить слагаемые, содержащие множителями  $\eta^2$  и теперь получаем далее

$$\begin{aligned} (B - B_f)'' &= - \frac{V_f^2 y^2 t_f \rho''}{2 N_f^3} \left\{ 1 - \frac{y^2}{12 N_f^2} (5 + 5 \eta_f^2 + 3 t_f^2 - 9 \eta_f^2 t_f^2) + \right. \\ &\quad \left. + (61 + 90 t_f^2 + 45 t_f^4) \frac{y^4}{360 N_f^4} \right\}. \end{aligned}$$

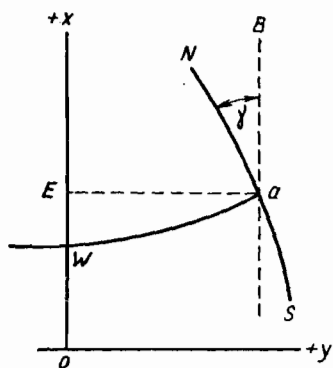
Теперь в последнем уравнении везде заменяем  $B$ , через  $\varphi'$  и имеем

$$(B - \varphi')'' = - \frac{V'^2 y^2 t' \rho''}{2 N'^2} \left[ 1 - \frac{y^2}{12 N'^2} (5 + 5 \eta^2 + 3 t'^2 - 9 \eta'^2 t'^2) + \right. \\ \left. + (61 + 90 t'^2 + 45 t'^4) \frac{y^4}{360 N'^4} \right]; \\ (\varphi' - B)'' = \frac{y^2 \rho''}{2 M' N'} t' \left\{ 1 - \frac{y^2}{12 N'^2} (5 + \eta'^2 + 3 t'^2 - 9 \eta'^2 t'^2) + \right. \\ \left. + (61 + 90 t'^2 + 45 t'^4) \frac{y^4}{360 N'^4} \right\}. \quad (417)$$

После получения  $\varphi'$ , как указано выше, вычисляем  $B$  по (417).

### § 53. Сближение меридианов на плоскости и масштаб изображения в функции геодезических координат

На черт. 62:  $ox$  и  $oy$  — оси координат на плоскости;  $a$  — конформное изображение точки  $A$ , имеющей координаты  $B$  и  $l$  на эллипсоиде и  $x$  и  $y$  на плоскости;  $aB$  — прямая, параллельная оси абсцисс;  $SaN$  — изображение в проекции Гаусса-Крюгера меридиана точки  $A$ ;  $aW$  — изображение параллели точки  $A$ . Угол  $\gamma$  в  $a$  между кривой  $aN$  и прямой  $aB$  будет, как указано в § 48, сближением меридианов на плоскости или гауссовым сближением меридианов. Если представить себе, что уравнение кривой  $aW$  написано в виде зависимости между координатами  $x$  и  $y$ , то



Черт. 62

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{dx}{dy},$$

причем  $\frac{dx}{dy}$  может быть найдено или из уравнения кривой  $aW$ , или путем дифференцирования найденных в § 50 формул для  $x$  и  $y$ , считая в них  $B$  величиной постоянной.

Поэтому из (404) пишем

$$\frac{dx}{dl} = \frac{N}{\rho''} l'' \sin B \cos B + \frac{N l''^3}{6 \rho''^3} \sin B \cos^3 B (5 - t^2 + 9 \eta^2 + 4 \eta^4) + \\ + \frac{N l''^5}{120 \rho''^5} \sin B \cos^5 B (61 - 58 t^2 + t^4); \\ \frac{dy}{dl} = N \cos B + \frac{N l''^2 \cos^2 B}{2 \rho''^2} (1 - t^2 + \eta^2) + \\ + \frac{N l''^4 \cos^4 B}{24 \rho''^4} (5 - 18 t^2 + t^4 + 14 \eta^2 - 58 \eta^2 t^2).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{dy}{dl}} &= \frac{1}{N \cos B} \left[ 1 - \frac{l''^2 \cos^2 B}{2\rho''^2} (1 - t^2 + \eta^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l''^4 \cos^4 B}{24\rho''^4} (1 + 6t^2 + 5t^4 - 2\eta^2 + 46\eta^2 t^2) \right]; \\ \operatorname{tg} \gamma &= \frac{l''}{\rho''} \sin B + \frac{l''^3}{3\rho''^3} \sin B \cos^2 B (1 + t^2 + 3\eta^2 + 2\eta^4) + \\ &\quad + \frac{l''^5}{15\rho''^5} \sin B \cos^4 B (2 + 4t^2 + 2t^4). \end{aligned} \quad (418)$$

При выводе (418) опущены члены порядка  $\eta^2 l''^5$ . Так как

$$\gamma = \operatorname{tg} \gamma - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \gamma + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 \gamma,$$

то из (418)

$$\gamma'' = l'' \sin B \left[ 1 + \frac{l''^2 \cos^2 B}{3\rho''^2} (1 + 3\eta^2 + 2\eta^4) + \frac{l''^4 \cos^4 B}{15\rho''^4} (2 - t^2) \right]; \quad (419)$$

$$\begin{aligned} \lg \gamma'' &= \lg l'' \sin B + \frac{\mu}{3\rho''^2} l''^2 \cos^2 B (1 + 3\eta^2 + 2\eta^4) + \\ &\quad + \frac{\mu}{90\rho''^4} l''^4 \cos^4 B (7 - 6t^2). \end{aligned} \quad (420)$$

Пользуясь приведенными в § 50 обозначениями

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{3\rho''^2} l''^2 \cos^2 B &= \tau, \\ \nu &= \frac{\mu}{6\rho''^2} \eta^2 l''^2 \cos^2 B, \end{aligned}$$

мы перепишем (420) еще так

$$\lg \gamma'' = \lg (l'' \sin B) + \tau + 6\nu + 4\eta^2 \nu + \frac{\mu l''^4 \cos^4 B}{90\rho''^4} (7 - 6t^2). \quad (421)$$

Для  $l \leq 3^\circ$  и для широт между  $40$  и  $60^\circ$  можно принять

$$\lg \gamma'' = \lg (l'' \sin B) + \tau + 6\nu. \quad (421')$$

Для масштаба  $m$  изображения имеем общую формулу

$$m^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(MdB)^2 + N^2 \cos^2 B dl^2} = \left( \frac{dy}{dl} \right)^2 \frac{1 + \left( \frac{dx}{dy} \right)^2}{N^2 \cos^2 B \left[ 1 + \left( \frac{MdB}{N \cos B dl} \right)^2 \right]}.$$

Если возьмем элемент  $ds$  по параллели, то

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{tg} \gamma; \quad 1 + \left( \frac{dx}{dy} \right)^2 = \sec^2 \gamma; \quad \frac{dB}{dl} = 0;$$

$$\frac{dy}{dl} = N \cos B + \frac{N l''^2}{2\rho''^2} \cos^2 B (1 - t^2 + \eta^2) + \frac{N l''^4}{24\rho''^4} \cos^5 B (5 - 18t^2 + t^4);$$

$$\frac{dy}{dl} \frac{1}{N \cos B} = 1 + \frac{l''^2}{2\rho''^2} \cos^3 B (1 - t^2 + \eta^2) + \frac{l''^4 \cos^4 B}{24\rho''^4} (5 - 18t^2 + t^4);$$

$$m = \frac{dy}{dl} \frac{1}{N \cos B} \sec \gamma.$$



Далее на основании (419)

$$\gamma'' = l'' \sin B + \frac{l''' \sin B \cos^2 B}{3\rho''^2} (1 + 3\eta^2);$$

$$\sec \gamma = 1 + \frac{\gamma^2}{2} + \frac{5}{24} \gamma^4;$$

$$\sec \gamma = 1 + \frac{l''^2}{2\rho''^2} \sin^2 B + \frac{l''^4}{24\rho''^4} \sin^2 B \cos^2 B (8 + 5t^2) \dots$$

(с отбрасыванием  $\eta^2 t^4$ ).

Подставляя  $\frac{dy}{dl} \frac{1}{N \cos B}$  и  $\sec \gamma$  в выражение  $m$ , получим

$$m = 1 + \frac{l''^2}{2\rho''^2} \cos^2 B (1 + \eta^2) + \frac{l''^4 \cos^4 B}{24\rho''^4} (5 - 4t^2); \quad (422)$$

$$\lg m = \frac{\mu}{2} \frac{l''^2}{\rho''^2} V^2 \cos^2 B + \frac{\mu}{12} \frac{l''^4}{\rho''^4} \cos^4 B (1 - 2t^2); \quad (423)$$

$$\lg m = \frac{3}{2} \tau + 3\nu - \frac{\mu}{12\rho''^4} l''^4 \cos^2 B (2 - 3 \cos^2 B). \quad (423')$$

В широтах между 30 и 60° с ошибкой, не превышающей 4 единиц восьмого логарифмического знака, можно принять

$$\lg m = \frac{3}{2} \tau + 3\nu. \quad (424)$$

#### § 54. Сближение меридианов на плоскости и масштаб изображения в функции конформных плоских координат

В § 47 имели формулу (393)

$$c'' = \gamma''' = l'' \sin B \left\{ 1 + \frac{V^2}{3} \frac{l''^2}{\rho''^2} \cos^2 B + \frac{2V^2 - t^2 - 4\eta^2 t^2}{15\rho''^4} V^2 l''^4 \cos^4 B \right\}.$$

Соответственно (419) ее упростим

$$\gamma''' = l'' \sin B \left\{ 1 + \frac{(1 + \eta^2)}{3\rho''^2} l''^2 \cos^2 B + \frac{2 - t^2}{15\rho''^4} l''^4 \cos^4 B \right\}. \quad (\gamma'')$$

Вычитая из (419) последнее уравнение, получаем

$$(\gamma - \gamma'') = \frac{l''' \sin B \cos^2 B}{3\rho''^2} (2\eta^2 + 2\eta^4) = \frac{2}{3} \eta^2 \frac{l'''^3}{\rho''^2} \sin B \cos^2 B (1 + \eta^2). \quad (425)$$

С другой стороны, для  $\gamma^s = c$  мы имеем формулу (323)

$$\gamma^s = \frac{V}{N_f} \operatorname{tg} B_f \left\{ 1 - \frac{1}{6} (1 + \eta_f^2 + 2t_f^2) \frac{Y^2}{N_f^2} + \frac{Y^4}{120N_f^4} (1 + 20t_f^2 + 24t_f^4) \right\}.$$

Деля в ней замены  $Y$  через  $y$  и  $B_f$  через  $\varphi'$ , получим с принятой точностью

$$\begin{aligned} \gamma^s = & \frac{y l'}{N'} \left[ 1 - \frac{1 + \eta_1^2}{6} \frac{y^2}{N'^2} + \frac{y^4}{24N'^4} \right] \times \\ & \times \left\{ 1 - \frac{1 + \eta^2 + 2t^2}{6} \frac{y^2}{N'^2} + \frac{y^4}{120N'^4} (1 + 20t'^2 + 24t'^4) + \right. \\ & \left. + \frac{y^4}{18(N')^4} (1 + 2t'^2) \right\}; \end{aligned}$$

$$\gamma^s = \frac{yt'}{N'} \left\{ 1 - (1 + \eta'^2 + t'^2) \frac{y^2}{3N'^2} + (3 + 4t'^2) \frac{y^4}{24N'^4} + \right. \\ \left. + (1 + 20t'^2 + 24t'^4) \frac{y^4}{120N'^4} \right\};$$

$$\gamma^s = \frac{yt'}{N'} \left\{ 1 - (1 + \eta'^2 + t'^2) \frac{y^2}{3N'^2} + \frac{(2 + 5t'^2 + 3t'^4)}{15} \frac{y^4}{N'^4} \right\}.$$

Теперь

$$\gamma'' = \gamma^{s''} + (\gamma'' - \gamma^{s''}) = \frac{yt' \rho''}{N'} \left\{ 1 - (1 + \eta'^2 + t'^2) \frac{y^2}{3N'^2} + \right. \\ \left. + \frac{(2 + 5t'^2 + 3t'^4)}{15} \frac{y^4}{N'^4} \right\} + \frac{2}{3} \eta^2 \frac{l''^3}{\rho''^2} \sin B \cos^2 B (1 + \eta^2).$$

Из (385) формулы

$$l'' \cos B = \frac{Y \rho''}{N} \left\{ 1 + \frac{l''^2 \sin^2 B}{6 \rho''^2} \right\};$$

$$l''^3 \cos^3 B = \frac{Y^3}{N^3} \rho''^3 \left\{ 1 + \frac{l''^2 \sin^2 B}{2 \rho''^2} \right\} = \frac{y^3}{N^3} \rho''^3 \left\{ 1 + \frac{y^2 t'^2}{2 N'^2} \right\}.$$

При принятой точности в  $\gamma$  нет нужды в последнем уравнении, при использовании его для получения  $(\gamma - \gamma^s)$ , различать  $Y$  от  $y$  и  $N$  и  $t^2$  от  $N'$  и  $t'^2$ . Поэтому окончательно получаем

$$\gamma'' = \frac{yt' \rho''}{N'} \left\{ 1 - \frac{y^2}{3N'^2} (1 + t'^2 - \eta'^2 - 2\eta'^4) + \frac{2 + 5t'^2 + 3t'^4}{15} \frac{y^4}{N'^4} \right\}; \quad (426)$$

$$\lg \gamma'' = \lg \frac{yt' \rho''}{N'} - \frac{\mu y^2}{3N'^2 \cos^2 \varphi'} (1 - \eta'^2 \cos^2 \varphi' - 2\eta'^4 \cos^2 \varphi') + \\ + \frac{\mu y^4}{90N'^4 \cos^4 \varphi'} (7 \cos^4 \varphi' + 20 \sin^2 \varphi' \cos^2 \varphi' + 13 \sin^4 \varphi');$$

$$\lg \gamma'' = \lg \frac{yt' \rho''}{N'} - \frac{\mu y^2}{3N'^2 \cos^2 \varphi'} (1 - \eta'^2 \cos^2 \varphi' - 2\eta'^4 \cos^2 \varphi') + \\ + \frac{\mu y^4}{90N'^4 \cos^4 \varphi'} (13 - 6 \cos^2 \varphi'). \quad (427)$$

Вводя обозначения

$$\tau_1 = \frac{\mu}{3 \rho''^2} \left( \frac{y \rho''}{N' \cos \varphi'} \right)^2 - \frac{\mu}{90 \rho''^4} \left( \frac{y \rho''}{N' \cos \varphi'} \right)^4 [13 - 10 (1 - \eta'^2) \cos^2 \varphi'],$$

$$\mu_1 = \frac{\mu}{6} \eta'^2 \frac{y^2}{N'^2},$$

$$\mu_2 = (2 + 4\eta'^2) \mu_1,$$

перепишем еще (427) так

$$\lg \gamma'' = \lg \frac{y \rho''}{N'} t' - \tau_1 + \mu_2 + \frac{2\mu}{45N'^4} \frac{y^4}{\cos^2 \varphi'}. \quad (428)$$

Пользуясь (416)

$$l'' = \frac{y\rho''}{N' \cos \varphi'} \left[ 1 - \frac{1}{6} (1 + 2t'^2) \frac{y^2}{N'^2} \right],$$

$$l''^2 = \frac{y^2 \rho''^2}{N'^2 \cos^2 \varphi'} \left[ 1 - \frac{1}{3} (1 + 2t'^2) \frac{y^2}{N'^2} \right],$$

получаем из (422)

$$m = 1 + \frac{y^2}{2N'^2} (1 + \eta^2) \frac{\cos^2 B}{\cos^2 \varphi'} \left[ 1 - \frac{1}{3} (1 + 2t'^2) \frac{y^2}{N'^2} \right] + \frac{y^4}{24N'^4} (5 - 4t'^2);$$

$$m = 1 + \frac{y^2}{2N'^2} (1 + \eta'^2) + \frac{y^4}{24N'^4}; \quad (429)$$

$$\lg m = \frac{\mu y^2}{2N'^2} (1 + \eta'^2) - \frac{\mu y^4}{12N'^4}. \quad (429')$$

или

$$\lg m = \frac{\mu y^2}{2N'^2} + 3\mu_1 - \frac{\mu y^4}{12N'^4}. \quad (430)$$

### § 55. Формулы перехода от геодезических координат к координатам Гаусса-Крюгера

Приведенные в § 50, 52, 53, 54 формулы достаточно точны; однако вычисление по ним не отличается простотой; упрощение вычислений получается лишь при  $l < 2^\circ$ . Крюгер, кроме этих, дает еще иные формулы для  $x$ ,  $y$ ,  $m$  и  $\gamma$ , которые, как и формулы (408), (408'), (421), (423), работают при  $l \geq 3^\circ$ . До перехода к выводу формул дадим краткое понятие о *гиперболических функциях*.

Пусть

$$\mu z = \lg \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{u}{2} \right),$$

тогда

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{i} \sin iz &= \operatorname{tg} u; & \frac{1}{i} \operatorname{tg} iz &= \sin u \\ \cos iz &= \frac{1}{\cos u}; & \frac{1}{i} \operatorname{tg} \left( i \frac{z}{2} \right) &= \operatorname{tg} \frac{u}{2} \end{aligned} \right\} \quad (431)$$

Соотношения (431) выводятся из формул

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2},$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

*Гиперболическими функциями* называются

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{i} \sin iz = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}),$$

$$\operatorname{ch} z = \cos iz = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}),$$

$$\operatorname{th} z = \frac{1}{i} \operatorname{tg} iz.$$

Напишем вторую из формул (404)

$$y = N \frac{l''}{\rho''} \cos B + N \frac{l''^3}{6\rho''^3} \cos^3 B (1 - t^2 + \eta^2) + \\ + \frac{N l''^5 \cos^5 B}{120\rho''^5} (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2). \quad (404)$$

Имеем

$$\frac{l''}{\rho''} = \sin l + \frac{1}{6} \sin^3 l + \frac{3}{40} \sin^5 l + \dots; \quad (a)$$

$$\frac{l''}{\rho''} \cos B = \sin l \cos B + \frac{1}{6} \sin^3 l \cos^3 B (1 + t^2) + \\ + \frac{3}{40} \sin^5 l \cos^5 B (1 + 2t^2 + t^4). \quad (432)$$

Положив

$$\sin l \cos B = \lambda,$$

получаем из (404) и (432)

$$\left. \begin{aligned} \frac{y}{N} &= \lambda + \frac{1}{6} (2 + \eta^2) \lambda^3 + \frac{1}{5} (1 + \eta^2 - 2\eta^2 t^2) \lambda^5 \\ i \frac{y}{N} &= i\lambda + \frac{1}{6} (2 + \eta^2) i\lambda^3 + \frac{1}{5} (1 + \eta^2 - 2\eta^2 t^2) i\lambda^5 \end{aligned} \right\} \quad (433)$$

Далее, при помощи (433)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} i \frac{y}{N} &= i \frac{y}{N} - \frac{i}{3} \frac{y^3}{N^3} + \frac{2}{15} i \frac{y^5}{N^5}, \\ \operatorname{tg} i \frac{y}{N} &= i\lambda + \frac{1}{6} i\eta^2 \lambda^3 + \frac{1}{30} i\eta^2 (1 - 12t^2) \lambda^5, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \operatorname{tg} i \frac{y}{N} &= \lambda \left( 1 + \frac{1}{6} \eta^2 \lambda^2 \right) + \frac{\eta^2}{30} (1 - 12t^2) \lambda^5, \\ \lg \left( \frac{1}{i} \operatorname{tg} i \frac{y}{N} \right) &= \lg \lambda + \frac{\mu}{6} \eta^2 \lambda^2 + \frac{\mu \eta^2}{360} (12 - 144t^2 - 5\eta^2) \lambda^4. \end{aligned} \quad (434)$$

Положив теперь  $z = \frac{y}{N}$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \operatorname{tg} i \frac{y}{N} &= \sin u, \\ \left. \begin{aligned} \sin u &= \lambda + \frac{\eta^2}{6} \lambda^3 \\ \lg \sin u &= \lg \lambda + \frac{\mu}{6} \eta^2 \lambda^2 \end{aligned} \right\} \quad (435)$$

с пренебрежением при этом в (435) величинами порядка  $\eta^2 \lambda^5$ .

Этими уравнениями (435) мы воспользуемся, чтобы исключить из (433) величину  $\eta$  и заменить ее через  $u$ . Имеем

$$\begin{aligned}\lambda &= \sin u - \frac{\eta^2}{6} \sin^3 u + \frac{1}{12} \eta^4 \sin^5 u, \\ \frac{y}{N} &= \sin u \left[ 1 + \frac{1}{3} \sin^2 u + \frac{1}{5} \sin^4 u \right], \\ \lg y &= \lg N \sin u + \frac{\mu}{3} \sin^2 u + \frac{13}{90} \mu \sin^4 u,\end{aligned}\quad (436)$$

причем вычислению  $y$  по (436) предшествует определение  $u$  по второму из уравнений (435)

$$\lg \sin u = \lg (\sin l \cos B) + \frac{\mu}{6} \eta^2 \sin^2 l \cos^2 B = \lg (\sin l \cos B) + v_1. \quad (435')$$

Обращаемся теперь к выводу формулы для  $\gamma$ , используя формулу (419)

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \gamma &= \frac{l''}{\rho''} \sin B + \frac{l'''^3}{3\rho''^3} \sin B \cos^2 B (1 + t^2 + 3\eta^2 + 2\eta^4) + \\ &+ \frac{2l''^5}{15\rho''^5} \sin B \cos^4 B (1 + 2t^2 + t^4).\end{aligned}\quad (418)$$

Далее на основании уравнения (а) настоящего параграфа

$$\begin{aligned}\frac{l''}{\rho''} &= \operatorname{tg} l \cos l \left( 1 + \frac{1}{6} \sin^2 l + \frac{3}{40} \sin^4 l \right); \\ \cos l &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 l - \frac{1}{8} \sin^4 l.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{l''}{\rho''} = \operatorname{tg} l \left[ 1 - \frac{1}{3} \sin^2 l \cos^2 B (1 + t^2) - \frac{2}{15} \sin^4 l \cos^4 B (1 + 2t^2 + t^4) \right].$$

Подставляя это значение  $l$  в (418), получим

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} l \sin B \left\{ 1 + \left( 1 + \frac{2}{3} \eta^2 \right) \sin^2 l \cos^2 B \eta^2 \right\}, \quad (437)$$

причем отмечаем, что в правой части (437) в множителе при  $\operatorname{tg} l \sin B$  коэффициент при  $\sin^4 l$  оказывается равным нулю.

Из (437) имеем

$$\left. \begin{aligned}\lg \operatorname{tg} \gamma &= \lg (\operatorname{tg} l \sin B) + v_2 \\ v_1 &= \frac{\mu}{6} \eta^2 \sin^2 l \cos^2 B; \quad v_2 = (6 + 4\eta^2) v_1\end{aligned} \right\} \quad (438)$$

Для вычисления  $x$  прежде всего перепишем второе из уравнений (404) в таком виде

$$\begin{aligned}i \frac{y}{2N} &= \frac{i}{2} \frac{l''}{\rho''} \cos B \left\{ 1 + \frac{l'''^2}{6\rho''^2} \cos^2 B (1 - t^2 + \eta^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l''^4 \cos^4 B}{120\rho''^4} (5 - 18t^2 + t^4) \right\}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{1}{i} \operatorname{tg} i \frac{y}{N} = \frac{l'' \cos B}{2\rho''} \left\{ 1 + \frac{l''^2 \cos^2 B}{12\rho''^2} (1 - 2^2 t + 2\eta^2) + \right. \\ \left. + \frac{l''^4 \cos^4 B}{120\rho''^4} (1 - 13t^2 + t^4) \right\}. \quad (439)$$

Так как

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma^3}{24} + \frac{2}{480} \gamma^5, \\ \gamma = \operatorname{tg} \gamma - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \gamma + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 \gamma,$$

то

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \gamma - \frac{1}{8} \operatorname{tg}^3 \gamma + \frac{1}{16} \operatorname{tg}^5 \gamma.$$

Подставим сюда  $\operatorname{tg} \gamma$  из (418) и получим

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{l''}{2\rho''} \sin B \left\{ 1 + \frac{l''^2 \cos^2 B}{12\rho''^2} (4 + t^2 + 12\eta^2 + 8\eta^4) + \right. \\ \left. + \frac{l''^4 \cos^4 B}{120\rho''^4} (16 + 2t^2 + t^4) \right\}. \quad (440)$$

Умножим теперь (439) на (440)

$$\frac{1}{i} \operatorname{tg} i \frac{y}{2N} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{l''^2}{4\rho''^2} \cos^2 B \operatorname{tg} B \left\{ 1 + \frac{l''^2 \cos^2 B}{12\rho''^2} (5 - t^2 + 14\eta^2 + 8\eta^4) + \right. \\ \left. + \frac{l''^4 \cos^4 B}{720\rho''^4} (122 - 101t^2 + 2t^4) \right\}. \quad (441)$$

Переписываем теперь первое из уравнений (404)

$$x - X_B = \frac{l''^2}{2\rho''^2} N \operatorname{tg} B \cos^2 B \left\{ 1 + \frac{l''^2 \cos^2 B}{12\rho''^2} (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \right. \\ \left. + \frac{l''^4 \cos^4 B}{720\rho''^4} (122 - 116t^2 + 2t^4) \right\}.$$

Отсюда находим

$$\operatorname{tg} \frac{x - X_B}{2N} = \frac{l''^2}{4\rho''^2} \operatorname{tg} B \cos^2 B \left\{ 1 + \frac{l''^2 \cos^2 B}{12\rho''^2} (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \right. \\ \left. + \frac{l''^4 \cos^4 B}{720\rho''^4} (122 - 101t^2 + 2t^4) \right\}.$$

Сравнивая это уравнение и уравнение (441), получаем

$$\operatorname{tg} \frac{x - X_B}{N} = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \frac{1}{i} \operatorname{tg} i \frac{y}{2N} \left\{ 1 - \frac{l''^2 \cos^2 B}{12\rho''^2} \eta^2 (5 + 4\eta^2) \right\}.$$

Так как

$$l = \sin l + \frac{1}{6} \sin^3 l + \dots$$

то

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{x - X_B}{N} &= \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \frac{1}{i} \operatorname{tg} i \frac{y}{2N} \left\{ 1 - \frac{\eta^2 (5 + 4\eta^2)}{12} \sin^2 l \cos^2 B \right\}, \\ \lg \operatorname{tg} \frac{x - X_B}{N} &= \lg \left( \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \frac{1}{i} \operatorname{tg} i \frac{y}{2N} \right) - \frac{\mu}{12} \eta^2 (5 + 4\eta^2) \sin^2 l \cos^2 B. \end{aligned} \quad (442)$$

Возвращаясь к основному уравнению гиперболических функций

$$\frac{1}{i} \operatorname{tg} i \frac{y}{2N} = \operatorname{tg} \frac{u}{2},$$

замечаем, что (442) представится так

$$\lg \operatorname{tg} \frac{x - X_B}{N} = \lg \left( \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right) - \frac{\mu}{12} \eta^2 (5 + 4\eta^2) \sin^2 l \cos^2 B.$$

Далее

$$\lg \frac{x - X_B}{2N'} = \lg \operatorname{tg} \frac{x - X_B}{2N} - \frac{\mu}{3} \operatorname{tg}^2 \frac{x - X_B}{2N}.$$

Окончательно

$$\lg (x - X_B) = \lg \left( 2N \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right) - \frac{\mu}{12} \eta^2 (5 + 4\eta^2) \sin^2 l \cos^2 B. \quad (443)$$

В уравнении (443), очевидно, отброшены члены шестого порядка.

Принимаем

$$\nu_1 = \frac{\mu}{6} \eta^2 (\sin l \cos B)^2; \quad \nu_2 = (6 + 4\eta^2) \nu_1; \quad \nu_3 = (2,5 + 2\eta^2) \nu_1.$$

Следовательно,

$$\lg (x - X_B) = \lg \left( 2N \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right) - \nu_3. \quad (443')$$

Не помещая вывода формулы для масштаба  $m$ , просто ее приведем

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{\cos \gamma}{\cos l} + \frac{1}{2} \eta^2 \frac{l''^2}{\rho''^2} \cos^2 B \\ \lg m &= \lg (\cos \gamma \operatorname{sec} l) + 3\nu_1 \end{aligned} \right\} \quad (444)$$

## § 56. Перенос расстояний и направлений с эллипсоида на плоскость и обратно

**а. Редукция расстояний.** Пусть на плоскости (черт. 63) расстояние (по прямой) между точками  $a$  и  $b$  равно  $S$ ; расстояние между соответственными точками на эллипсоиде, считаемое по геодезической кривой, их соединяющей, пусть будет равно  $s$ . Кривая  $ab'b$  есть изображение на плоскости геодезической линии  $AB$ ; назовем через  $\nu$  угол между некоторым элементом  $d\sigma$  кривой  $ab'b$  и прямой  $ab$ . Конечно,

$$S = \int \cos \nu \, d\sigma.$$

Из дальнейшего будет видно, что  $\nu$  — величина малая выше второго порядка, и поэтому очевидно, что  $S - s$  является малой величиной между четвертым и пятым порядками (понимая под  $\sigma$  длину кривой  $ab'b$ ).

Пренебрегая этими величинами выше четвертого порядка, мы пишем

$$S = \sigma; \quad dS = d\sigma.$$

С другой стороны

$$\frac{d\sigma}{ds} = m.$$

Поэтому

$$s = \int \frac{d\sigma}{m} = \int \frac{dS}{m}.$$

На основании (429) § 54

$$m = 1 + \frac{y^2}{2N^2}(1 + \eta^2) + \left(\frac{y^4}{24N^4}\right).$$

С другой стороны, называя через  $R$  средний радиус кривизны, имеем

$$R^2 = MN = \frac{c^2}{V^4};$$

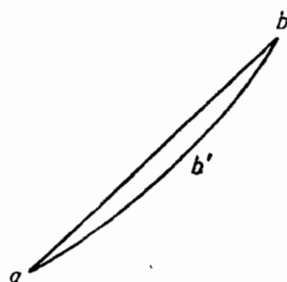
$$N^2 = \frac{c^2}{V^2}; \quad \frac{1}{N^2} = \frac{1}{R^2} \frac{1}{V^2} = \frac{1}{R^2} \frac{1}{1 + \eta^2}.$$

Следовательно

$$\frac{1}{N^2}(1 + \eta^2) = \frac{1}{R^2},$$

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \left(\frac{y^4}{24R^4}\right),$$

$$s = \int dS \left(1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4}\right)^{-1}.$$



Черт. 63

Называя через  $B_1$  широту точки  $A$  и через  $B$  широту произвольного элемента  $ds$  геодезической линии  $AB$ , мы напишем

$$\frac{1}{R^2} = \frac{V^4}{c^2} = \frac{(1 + \eta^2)^2}{c^2},$$

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{R_1^2} - \frac{2(1 + \eta_1^2)}{c^2} 2\eta_1^2 t_1 (B - B_1),$$

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{R_1^2} \left[1 - \frac{4(B - B_1)}{V^2} \eta_1^2 t_1\right].$$

Называя через  $x$  и  $x_1$  соответственно абсциссы произвольного элемента  $dS$  и точки  $a$ , с достаточным приближением напишем

$$B - B_1 = \frac{x - x_1}{M},$$

и поэтому

$$\frac{1}{m} = 1 - \frac{y^2}{2R_1^2} \left[1 - \frac{4(x - x_1)}{R_1} \eta_1^2 t_1\right] + \frac{5}{24R_1^4} y^4. \quad (445)$$

Обозначая дирекционный угол прямой  $ab$  через  $T_{1,2}$ , напишем

$$y = y_1 + p \sin T_{1,2},$$

$$x = x_1 + p \cos T_{1,2},$$

где  $p$  — расстояние элемента  $dS$  от  $a$ .



Теперь (445) перепишется так

$$\frac{1}{m} = 1 - \frac{(y_1 + p \sin T_{1.2})^2}{2R_1^2} \left( 1 - \frac{4p \cos T_{1.2}}{R_1} \eta_1^2 t_1 \right) + \frac{5}{24} \frac{y^4}{R^4}$$

Последнее уравнение можем представить в таком виде

$$\frac{1}{m} = \alpha + \beta p + \gamma p^2 + \delta p^3 + \frac{5}{24} \frac{y^4}{R^4},$$

причем

$$\alpha = 1 - \frac{y_1^2}{2R_1^2},$$

$$\beta = - \frac{y_1 \sin T_{1.2}}{R_1^2} + \frac{2y_1^2 \cos T_{1.2}}{R_1^3} \eta_1^2 t_1,$$

$$\gamma = - \frac{\sin^2 T_{1.2}}{2R_1^2} + \frac{4y_1 \sin T_{1.2} \cos T_{1.2}}{R_1^3} \eta_1^2 t_1$$

$$\delta = + \frac{2 \sin^2 T_{1.2} \cos T_{1.2}}{R_1^3} \eta_1^2 t_1.$$

Так как

$$s = \int \frac{dS}{m} = \int_0^s dS (\alpha + \beta p + \gamma p^2 + \delta p^3) + \frac{5}{24} \frac{y_m^4}{R^4} S^*,$$

причем в подынтегральной функции  $dS = dp$ , то

$$s = \alpha S + \beta \frac{S^2}{2} + \gamma \frac{S^3}{3} + \delta \frac{S^4}{4} + \frac{5}{24} \frac{y_m^4}{R^4} S. \quad (446)$$

С другой стороны, если назовем через  $m_1$ ,  $m_m$  и  $m_2$  значения масштаба  $m$  соответственно для  $a$ , для середины прямой  $ab$  и для  $b$ , то

$$\frac{1}{m_1} = \alpha + \frac{5}{24} \frac{y_1^4}{R^4} \dots p = 0;$$

$$\frac{1}{m_m} = \alpha + \beta \frac{S}{2} + \gamma \frac{S^2}{4} + \delta \frac{S^3}{8} + \frac{5}{24} \frac{y_m^4}{R^4} \dots p = \frac{S}{2};$$

$$\frac{1}{m_2} = \alpha + \beta S + \gamma S^2 + \delta S^3 + \frac{5}{24} \frac{y_2^4}{R^4} \dots p = S.$$

Нетрудно убедиться, что на основании (446)

$$\frac{s}{S} = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{4}{m_m} + \frac{1}{m_2} \right) \quad (447)$$

Следовательно, если при помощи уравнения

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4}$$

вычислим  $m_1$ ,  $m_m$  и  $m_2$  соответственно при  $y_1, y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$  и  $y_2^{**}$ , а также при  $R_1, R_m$  и  $R_2$ , соответствующих  $x_1, x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$  и  $x_2$ , то из (447) получим разность  $S - s$ , не вычисляя коэффициентов  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\delta$ .

\* Вследствие малости члена с  $y^4$  при интегрировании изменениями в нем  $y$  пренебрежено, и  $y$  заменен через среднее значение  $y_m$  ординаты для отрезка  $ab$ .

\*\* Через  $y_2$  и  $x_2$  обозначаются координаты точки  $b$ .

Но в практике вместо (447) употребляют обычно иные формулы.

Подставим в (446) значения  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  и заменим после подстановки  $S \sin T_{1-2}$  через  $y_2 - y_1$ , а  $S \cos T_{1-2}$  — через  $x_2 - x_1$ ; тогда получим

$$\frac{s}{S} = 1 - \frac{y_1^2}{2R_1^2} - \frac{(y_2 - y_1)y_1}{2R_1^3} + \frac{2y_1^2(x_2 - x_1)}{2R_1^3} \eta_1^2 t_1 - \frac{(y_2 - y_1)^2}{6R_1^2} +$$

$$+ \frac{4y_1(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)}{3R_1^3} \eta_1^2 t_1 + \frac{(y_2 - y_1)^2(x_2 - x_1)}{2R_1^3} \eta_1^2 t_1 + \frac{5y_m^4}{24R_m^4}$$

или

$$\frac{s}{S} = 1 - \frac{1}{6R_1^2} (y_1^2 + y_2 y_1 + y_2^2) +$$

$$+ \frac{\eta_1^2 t_1}{6R_1^3} (x_2 - x_1) (y_1^2 + 2y_2 y_1 + 3y_2^2) + \frac{5y_m^4}{24R_m^4}.$$

Введем еще в последнее уравнение вместо  $R_1$  радиус  $R_m$  для средней широты отрезка  $AB$

$$\frac{1}{R_1^2} = \frac{1}{R_m^2} \left[ 1 + \frac{2(x_2 - x_1)}{R_m} \eta_m^2 t_m \right].$$

Отсюда

$$\frac{s}{S} = 1 - \frac{1}{6R_m^2} (y_1^2 + y_2 y_1 + y_2^2) + \frac{\eta_m^2 t_m}{6R_m^3} (y_2^2 - y_1^2) (x_2 - x_1) +$$

$$+ \frac{5y_m^4}{24R_m^4}; \quad (448)$$

$$\lg s - \lg S = -\frac{\mu}{6R_m^2} (y_1^2 + y_2 y_1 + y_2^2) +$$

$$+ \frac{\mu \eta_m^2 t_m}{6R_m^3} (x_2 - x_1) (y_2^2 - y_1^2) + \frac{\mu y_m^4}{12R_m^4}. \quad (448')$$

Формула (448') остается удовлетворяющей самым строгим требованиям при  $S < 75$  км и при  $y_m < 300$  км. При  $S < 75$  км и при  $y_m < 200$  км можно в (448') отбросить член с  $\eta^2$  и написать так

$$\lg s - \lg S = -\frac{\mu}{12R_m^2} [y_1^2 + (y_1 + y_2)^2 + y_2^2] + \frac{\mu y_m^4}{12R_m^4}. \quad (449)$$

Введем обозначения

$$S = d; \quad \frac{y_2 - y_1}{R_m} = \frac{\Delta y}{R_m}.$$

Тогда

$$\lg d - \lg s = \frac{\mu}{12R_m^2} [2(y_1 + y_2)^2 - 2y_2 y_1] - \frac{\mu}{12} \left( \frac{y_m}{R_m} \right)^4;$$

$$\lg d - \lg s = \frac{\mu}{12R_m^2} \left[ 8y_m^2 - 2 \left( y_m + \frac{\Delta y}{2R_m} \right) \left( y_m - \frac{\Delta y}{2R_m} \right) \right] -$$

$$- \frac{\mu}{12} \left( \frac{y_m}{R_m} \right)^4;$$

$$\lg d - \lg s = \frac{\mu}{2} \left( \frac{y_m}{R_m} \right)^2 + \frac{\mu \Delta y^2}{24 R_m^2} - \frac{\mu}{12} \left( \frac{y_m}{R_m} \right)^4. \quad (450)$$

Эта формула и должна служить для точных вычислений при  $s < 75$  км и  $y_m < 200$  км; при сторонах триангуляции, меньших 75 км, предельное значение  $y_m$  при пользовании формулой (450) соответственно возрастает.

Формулу (447) легко преобразовать в следующую

$$\lg d - \lg s = \frac{1}{6} (\lg m_1 + 4 \lg m_m + \lg m_2), \quad (451)$$

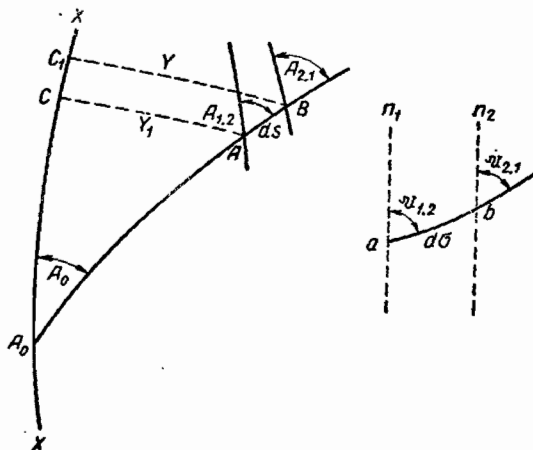
причем  $m_1$ ,  $m_m$  и  $m_2$  вычисляются соответственно для  $y_1$ ,  $y_m$  и  $y_2$ . Эта формула (451) работает для  $s < 75$  км и для  $y_m < 260$  км. При сторонах триангуляции, меньших 75 км, и при  $y_m < 112$  км

$$\lg d - \lg s = \frac{\mu}{2} \left( \frac{y_m}{R_m} \right)^2 + \frac{\mu}{24} \frac{\Delta y^2}{R_m^2}. \quad (452)$$

Требования точности, определяющие границы применения формул (445'), (449), (451) и (452), характеризуются сохранением в  $\lg d$  или в  $\lg s$  единицы восьмого логарифмического знака; другими словами, эти требования относятся к рядам триангуляции I класса. Для триангуляции II класса, именно для ее основных рядов, формула (452) работает до  $y_m = 220$  км, причем наибольшая погрешность в  $\lg d$  или в  $\lg s$  будет 0,5 единицы седьмого знака логарифма. Наконец, для заполняющих рядов II класса, при вычислении которых мы можем допустить в логарифмах сторон ошибку до единицы седьмого знака, и в сетях III класса работает формула

$$\lg d - \lg s = \frac{\mu}{2} \left( \frac{y_m}{R_m} \right)^2 = \lg m_m. \quad (453)$$

**6. Редукция направлений.** Возьмем на земном эллипсоиде два бесконечно близких пункта  $A$  и  $B$  (черт. 64); дуга  $AB$  имеет длину  $ds$ ; точ-



Черт. 64

ка  $A$  — широту  $B_1$  и долготу  $l_1$ ; разность широт точек  $A$  и  $B$  назовем через  $dB$ , разность их долгот — через  $dl$ ; геодезические дирекционные углы в  $A$  и  $B$  пусть равны  $T_{1,2}^s$  и  $T_{2,1}^s$ ; геодезические азимуты в  $A$  и  $B$  назовем через  $A_{1,2}$  и  $A_{2,1}$ ; геодезические сближения меридианов в  $A$  и  $B$  пусть будут  $\gamma_1^s$  и  $\gamma_2^s$ . На плоскости пусть  $A$  и  $B$  изобразятся соответственно точками  $a$  и  $b$ , причем элемент кривой  $ab$ , изображающей кривую

$AB$ , пусть имеет длину  $d\sigma$ ; прямые  $an_1$  и  $bn_2$  на плоскости параллельны оси абсцисс. Назовем в  $a$  угол между прямой  $an_1$  и кривой  $ab$  через  $\mathfrak{A}_{1,2}$ ; такой же угол в  $B$  между прямой  $bn_2$  и кривой  $ab$  — через  $\mathfrak{A}_{2,1}$ . Обозначим, кроме того, сближения (гауссовы) меридианов на плоскости в точках  $a$  и  $b$  соответственно  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Мы имеем

$$\gamma = l \sin B + \frac{l^3}{3} \sin B \cos^2 B (1 + 3\eta^2),$$

$$\gamma^s = l \sin B + \frac{l^3}{3} \sin B \cos^2 B (1 + \eta^2),$$

$$A_{1,2} = A_0 + \gamma_1^s - \varepsilon_1,$$

$$A_{2,1} = A_0 + \gamma_2^s - \varepsilon_2,$$

причем  $\varepsilon_1$  — избыток треугольника  $A_0CA$  (черт. 64), а  $\varepsilon_2$  — избыток треугольника  $BC_1A_0$ ; при этом  $A_0$  лежит в пересечении осевого меридиана  $XX$  с продолжением геодезической линии  $BA$ , а  $C$  и  $C_1$  лежат на пересечении осевого меридиана геодезическими линиями  $AC$  и  $BC_1$ , перпендикулярными к нему. Мы имеем

$$\mathfrak{A}_{1,2} = A_{1,2} - \gamma_1; \quad \mathfrak{A}_{2,1} = A_{2,1} - \gamma_2;$$

$$\mathfrak{A}_{2,1} - \mathfrak{A}_{1,2} = A_{2,1} - A_{1,2} - (\gamma_2 - \gamma_1) = (\gamma_2^s - \gamma_1^s) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - (\gamma_2 - \gamma_1) =$$

$$= (\gamma_2^s - \gamma_2) - (\gamma_1^s - \gamma_1) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1);$$

$$\mathfrak{A}_{2,1} - \mathfrak{A}_{1,2} = -2\eta^2 \left( \frac{l_2^3}{3} \sin B_2 \cos^2 B_2 - \frac{l_1^3}{3} \sin B_1 \cos^2 B_1 \right) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1).$$

Приращение избытка  $(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$  представлено на черт. 64 трапецией  $CC_1BA$ ; элементарная площадка этой трапеции имеет размер

$$dX dY \cos \frac{Y}{R} = \left( dY - \frac{Y^2}{2R^2} dY \right) dX;$$

при постоянном  $dX = CC_1$  имеем

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \frac{dX}{R^2} \int_0^Y \left( dY - \frac{Y^2}{2R^2} dY \right) = \frac{Y dX}{R^2} - \frac{Y^3}{6R^4} dX.$$

Поэтому

$$d\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{2,1} - \mathfrak{A}_{1,2} = -2\eta^2 l^2 dl \sin B_1 \cos^2 B_1 - \frac{Y dX}{R^2} + \frac{Y^3}{6R^4} dX.$$

В последнем уравнении  $Y$  — ордината на эллипсоиде для участка  $AB$ . Подставляя в последнее уравнение вместо

$$Y = y - \frac{1}{6} \frac{y^2}{R^2}$$

$$l^2 = \frac{y^2}{N^2 \cos^2 B}, \quad dl = \frac{dy}{N \cos B},$$

получим

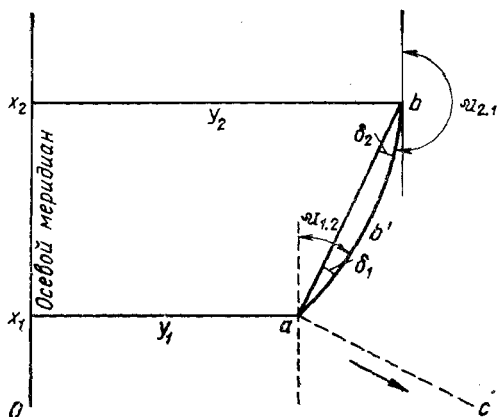
$$d\mathfrak{A} = -2\eta^2 t \frac{y^2}{R^2} \frac{dy}{R} - \frac{y dx}{R^2} + \frac{y^3 dx}{3R^4}. \quad (454)$$

Возьмем теперь между  $A$  и  $B$  конечное расстояние  $s$ , которому на плоскости будет соответствовать по кривой  $ab'b$  (черт. 65) расстояние  $\sigma$ . Координаты точек  $a$  и  $b$  назовем через  $y_1, x_1, y_2$  и  $x_2$ , а дирекционный угол хорды  $ab$  через  $T_{1,2}$ . Назовем через  $r$  радиус кривизны

кривой  $ab'b$ ; относя  $r$  к произвольному элементу кривой  $ab'b$ , мы напишем, так как эта кривая обращена вогнутостью к осевому меридиану,

$$-d\varrho = \frac{d\sigma}{r}; \quad \frac{1}{r} = -\frac{d\varrho}{d\sigma}.$$

В последующем отнесем кривую  $ab'b$  к прямоугольным осям координат с началом в  $a$ , с осью абсцисс по прямой  $ab$  и с осью ординат по прямой  $ac$  (черт. 65), перпендикулярной в  $a$  к хорде  $ab$ ; абсциссы в этой системе называем через  $p$ , а ординаты через  $q$ . Тогда



Черт. 65

$$\frac{1}{r} = -\frac{\frac{d^2q}{dp^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dq}{dp}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Так как, что увидим ниже,  $\frac{dq}{dp}$  есть величина порядка  $\frac{(x_2 - x_1)y}{2R^2}$ , то, пренебрегая малыми величинами пятого порядка, напишем

$$\frac{1}{r} = -\frac{d^2q}{dp^2}.$$

С другой стороны, различие между  $\sigma$  и длиной хорды  $ab = d$ , а также различие между  $d\sigma$  и  $dp$  — совершенно пренебрегаемы. Поэтому

$$-\frac{d^2q}{dp^2} = -\frac{d\varrho}{dp} = \frac{y dx}{R^2 dp} + 2\eta^2 t \frac{y^2 dy}{R^3 dp} - \frac{y^3}{3R^4} \frac{dx}{dp}. \quad (455)$$

Обозначая через  $R_1$  значение среднего радиуса кривизны для  $A$ , имеем

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{R_1^2} \left[ 1 - \frac{4(x - x_1)}{R_1} \eta^2 t_1 \right] \quad (\text{см. 445})$$

Теперь (455) переписываем так

$$-\frac{d^2p}{dq^2} = \frac{y}{R_1^2} \left[ 1 - \frac{4(x - x_1)}{R_1} \eta^2 t_1 \right] \frac{dx}{dp} + 2\eta^2 t_1 \frac{y^2}{R_1^3} \frac{dy}{dp} - \frac{y^3}{3R_1^4} \frac{dx}{dp}.$$

Так как

$$x = x_1 + p \cos T_{1.2}, \quad y = y_1 + p \sin T_{1.2},$$

то

$$\frac{dx}{dp} = \cos T_{1.2}; \quad \frac{dy}{dp} = \sin T_{1.2}.$$

Подставляя эти значения производных в выражение  $\frac{d^2q}{dp^2}$ , мы получим

$$\begin{aligned} -\frac{d^2q}{dp^2} = & \left( \frac{y_1}{R_1^2} \cos T_{1.2} + \frac{2}{R_1^3} \eta^2 t_1 y_1^2 \sin T_{1.2} - \frac{y_1^3}{3R_1^4} \cos T_{1.2} \right) + \\ & + \left[ \frac{1}{R_1^2} \sin T_{1.2} \cos T_{1.2} + \frac{4\eta^2 t_1 y_1}{R_1^3} (\sin^2 T_{1.2} - \cos^2 T_{1.2}) \right] p + \\ & + \frac{2\eta^2 t_1}{R_1^3} \sin T_{1.2} (\sin^2 T_{1.2} - 2 \cos^2 T_{1.2}) p^2 = A + Bp + Cp^2. \end{aligned}$$

Интегрируя последнее уравнение (причем в члене  $\frac{y^3}{3R_1^4} \cos T_{1,2}$  заменим  $y$  просто через  $y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$  и будем считать  $y_m$  постоянным), напомним

$$\left. \begin{aligned} -\frac{dq}{dp} &= Ap + \frac{B}{2}p^2 + \frac{C}{3}p^3 + C_1 \\ -q &= \frac{Ap^2}{2} + \frac{B}{6}p^3 + \frac{C}{12}p^4 + C_1p + C_2 \end{aligned} \right\}. \quad (456)$$

Так, как при  $p=0$  производная  $\frac{dq}{dp} = \delta_1$ , а при  $p=d$  производная  $\frac{dq}{dp} = -\delta_2$  если под  $\delta_1$  и  $\delta_2$  понимать в  $a$  и  $b$  углы кривой  $ab'b$  с положительным направлением оси абсцисс  $p$ , то из (456), полагая в ней сперва  $p=0$  и  $q=0$ , напомним

$$\begin{aligned} -\delta_1 &= C_1, \\ C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Полагая же в (456) теперь  $p=d=\bar{ab}$  и  $q=0$

$$\begin{aligned} \delta_2 &= Ad + \frac{B}{2}d^2 + \frac{C}{3}d^3 - \delta_1; \\ 0 &= \frac{Ad^2}{2} + \frac{B}{6}d^3 + \frac{C}{12}d^4 - \delta_1 d. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{Ad}{2} + \frac{B}{6}d^2 + \frac{C}{12}d^3 \\ \delta_2 &= \frac{Ad}{2} + \frac{B}{3}d^2 + \frac{C}{4}d^3 \end{aligned} \right\}. \quad (457)$$

Подставляя теперь значение  $A, B$  и  $C$  в (457) и помня, что

$$\cos T_{1,2} = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \sin T_{1,2} = \frac{y_2 - y_1}{d}$$

имеем при обозначениях  $x_2 - x_1 = \Delta x$ ,  $y_2 - y_1 = \Delta y$ .

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\Delta x}{2R_1^2} y_1 + \frac{\eta_1^2 t_1}{R_1^3} y_1^2 \Delta y + \frac{\Delta x \Delta y}{6R_1^2} + \frac{2}{3} \frac{\eta_1^2 t_1 y_1}{R_1^3} (\Delta y^2 - \Delta x^2) + \\ &\quad + \frac{\eta_1^2 t_1}{6R_1^3} \Delta y (\Delta y^2 - 2\Delta x^2) - \frac{y_m^3}{6R_1^4} \Delta x; \\ \delta_2 &= \frac{\Delta x y_1}{2R_1^2} + \frac{\eta_1^2 t_1}{R_1^3} \Delta y y_1^2 + \frac{\Delta x \Delta y}{3R_1^2} + \frac{4}{3} \frac{\eta_1^2 t_1 y_1}{R_1^3} (\Delta y^2 - \Delta x^2) + \\ &\quad + \frac{\eta_1^2 t_1}{2R_1^3} \Delta y (\Delta y^2 - 2\Delta x^2) - \frac{y_m^3 \Delta x}{6R_1^4}, \end{aligned}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\Delta x}{6R_1^2} (2y_1 + y_2) - \frac{y_m^3}{6R_1^4} \Delta x - \frac{\eta_1^2 t_1}{3R_1^3} \Delta x^2 (y_1 + y_2) + \\ &\quad + \frac{\eta_1^2 t_1}{6R_1^3} \Delta y (3y_1^2 + 2y_1 y_2 + y_2^2) \\ \delta_2 &= \frac{\Delta x}{6R_1^2} (y_1 + 2y_2) - \frac{y_m^3}{6R_1^4} \Delta x - \frac{\eta_1^2 t_1}{3R_1^3} \Delta x^2 (3y_2 + y_1) + \\ &\quad + \frac{\eta_1^2 t_1}{6R_1^3} \Delta y (y_1^2 + 2y_1 y_2 + 3y_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (458)$$

Если в этих уравнениях (458) введем вместо  $R_1$  средний радиус кривизны  $R_m$  для средней абсциссы  $x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$ , то

$$\left. \begin{aligned} \delta''_1 &= \frac{\Delta x (2y_1 + y_2)}{6R_m^2} \rho'' - \frac{y_m^3}{6R_m^4} \Delta x \rho'' + \frac{\eta_m^2 t_m}{3R_m^3} \Delta x^2 y_1 \rho'' + \\ &\quad + \frac{\eta_m^2 t_m \rho''}{6R_m^3} \Delta y (3y_1^2 + 2y_1 y_2 + y_2^2) \\ \delta''_2 &= \frac{\Delta x (y_1 + 2y_2)}{6R_m^2} \rho'' - \frac{y_m^3}{6R_m^4} \Delta x \rho'' - \frac{\eta_m^2 t_m \rho''}{3R_m^3} \Delta x^2 y_2 + \\ &\quad + \frac{\eta_m^2 t_m \rho''}{6R_m^3} \Delta y (y_1^2 + 2y_1 y_2 + 3y_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (459)$$

Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \frac{\rho'' \Delta x}{2 R_m} \frac{y_m}{R_m} \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{y_m^2}{R_m^2} \right) + \frac{\eta_m^2 t_m \rho''}{R_m} \Delta y \left( \frac{y_m}{R_m} \right)^2 \\ \psi_2 &= \frac{\rho'' \Delta x \Delta y}{12 R_m^2} \end{aligned} \right\} \quad (460)$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \delta''_1 &= \psi_1 - \psi_2 - \frac{\eta_m^2 t_m \rho''}{12 R_m^3} (2\Delta x^2 - \Delta y^2) \Delta y + \\ &\quad + \frac{\eta_m^2 t_m \rho''}{3 R_m^2} \frac{y_m}{R_m} (\Delta x^2 - \Delta y^2) \\ -\delta''_2 &= -(\psi_1 + \psi_2) + \frac{\eta_m^2 t_m \rho''}{12 R_m^3} (2\Delta x^2 - \Delta y^2) \Delta y + \\ &\quad + \frac{\eta_m^2 t_m \rho''}{3 R_m^2} \frac{y_m}{R_m} (\Delta x^2 - \Delta y^2) \end{aligned} \right\} \quad (461)$$

Формулы (461) являются очень точными: ошибки  $\delta_1$  и  $\delta_2$  при  $s < 40$  км и при  $y < 200$  км не превышают  $0'',0006$ .

Понятно, что

$$\begin{aligned} T_{1,2} &= A_{1,2} - \gamma_1 - \delta_1, \\ T_{2,1} &= A_{2,1} - \gamma_2 + \delta_2, \end{aligned}$$

причем должно быть  $T_{2.1} = T_{1.2} \pm 180^\circ$ .

Упростим теперь формулы (461), представив их так

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \frac{\rho''}{2} \frac{\Delta x}{R_m} \frac{y_m}{R_m} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{y_m^2}{R_m^2}\right) + \frac{\eta_m^2 t_m \rho''}{R_m} \Delta y \left(\frac{y_m}{R_m}\right)^2 \\ \psi_2 &= \frac{\rho'' \Delta x \Delta y}{12 R_m^2} \\ \delta_1 &= \psi_1 - \psi_2; \quad \delta_2 = \psi_1 + \psi_2 \end{aligned} \right\} \quad (462)$$

При  $s < 50$  км и при  $y_m < 200$  км ошибка  $\delta_1$  или  $\delta_2$ , определенных по (462), не превышает  $0'',0015$ , т. е. эти формулы вполне отвечают требованиям вычислений в триангуляции I класса.

Далее, проводя еще большее упрощение, напишем

$$\begin{aligned} \delta''_1 &= \frac{\rho''}{2} \frac{\Delta x}{R_m} \frac{y_m}{R_m} - \frac{\rho'' \Delta x \Delta y}{12 R_m^2} = \frac{\rho''}{2} \frac{\Delta x}{R_m^2} \left(y_m - \frac{\Delta y}{6}\right), \\ \delta_1'' &= \frac{\rho''}{6} \frac{\Delta x (2y_1 + y_2)}{R_m^2}. \end{aligned} \quad (463)$$

При  $d = 25$  км и  $y_m < 200$  км ошибка формулы (463) не превышает  $0'',006$ , т. е. она вполне пригодна для триангуляции II класса; если предельное  $y_m < 120$  км, то при  $d = 40$  км формула (463) пригодна и для триангуляции I класса.

Обычно формулой (463) пользуются в таком виде

$$r_{1.2} = \frac{\rho''}{6} \frac{(x_1 - x_2) (2y_1 + y_2)}{R_m^2}, \quad T_{1.2} = A_{1.2} - \gamma_1 + r_{1.2}, \quad (464)$$

применяя ее в триангуляции II класса и в детальных триангуляциях. В триангуляции I класса обычно все-таки пренебрегают членом с  $\eta^2$  в (462) и применяют следующую формулу

$$\begin{aligned} r_{1.2} &= \frac{\rho''}{6} \frac{(x_1 - x_2) (2y_1 + y_2)}{R_m^2} - \frac{(x_1 - x_2) (y_2 + y_1)^3}{48 R_m^4} \rho'', \\ T_{1.2} &= A_{1.2} - \gamma_1 + r_{1.2}, \end{aligned}$$

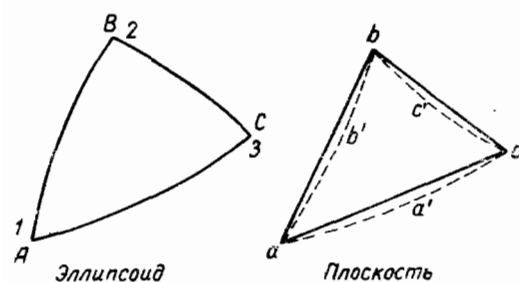
в которой влияние удержанного члена  $\frac{1}{6} \frac{(x_1 - x_2)}{R_m} \frac{y_m^3}{R_m^3} = \frac{(x_1 - x_2)}{48 R_m^4} (y_2 + y_1)^3$  одинаково, даже при  $d = 40$  км и при  $y_m = 120$  км, с отброшенным членом  $\frac{\eta_m^2 t_m}{R_m} \Delta y \left(\frac{y_m}{R_m}\right)^2$ . Очевидно, что это неправильно. Другими словами, в триангуляции I класса должна применяться, даже при  $d = 40$  км и  $y_m = 120$  км, формула

$$\left. \begin{aligned} r''_{1.2} &= \frac{\rho''}{6} \frac{(x_1 - x_2) (2y_1 + y_2)}{R_m^2} - \frac{(x_1 - x_2) (y_2 + y_1)^3}{48 R_m^4} \rho'' - \\ &\quad - \frac{\eta_m^2 t_m \rho''}{4 R_m} (y_2 - y_1) \frac{(y_2 + y_1)^2}{R_m^2} \end{aligned} \right\} \quad (465)$$

Формулу (464) применять при вычислениях в триангуляции II класса. В одном из следующих параграфов будет указан порядок применения этих формул; важно иметь в виду, что  $r_{1.2}$  есть *редукция направления* при переходе с эллипсоида на плоскость, придаваемая к измеренному направлению со знаком плюс.



Назовем в треугольнике  $ABC$  (черт. 66) измеренные в натуре направления



Черт. 66

с  $A$  на  $B$  через  $N_{1,2}$ ,

„  $A$  „  $C$  „  $N_{1,3}$ ,

„  $B$  „  $A$  „  $N_{2,1}$ ,

„  $B$  „  $C$  „  $N_{2,3}$ ,

„  $C$  „  $B$  „  $N_{3,2}$ ,

„  $C$  „  $A$  „  $N_{3,1}$ ,

приписывая при этом точкам  $A$ ,  $B$ ,  $C$  номера 1, 2, 3—соответственно. Угол на плоскости между прямыми  $ab$  и  $ac$  назовем через  $A_1$ ; угол на плос-

кости между прямыми  $ba$  и  $bc$  назовем через  $B_1$ ; угол между прямыми  $cb$  и  $ca$  назовем через  $C_1$ . Пусть геодезическая линия  $AB$  (на эллипсоиде) изобразилась на плоскости кривой  $ab'b$ ; геодезическая линия  $BC$  — кривой  $bc'c$ ; и геодезическая линия  $AC$  — кривой  $aa'c$ . Мы имеем

$$\begin{aligned} A_1 &= T_{1,3} - T_{1,2} = \mathfrak{A}_{1,3} + r_{1,3} - \mathfrak{A}_{1,2} - r_{1,2} = \\ &= N_{1,3} - N_{1,2} + r_{1,3} - r_{1,2} = A + (r_{1,3} - r_{1,2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= T_{2,1} - T_{2,3} = \mathfrak{A}_{2,1} + r_{2,1} - \mathfrak{A}_{2,3} - r_{2,3} = \\ &= N_{2,1} - N_{2,3} + r_{2,1} - r_{2,3} = B + (r_{2,1} - r_{2,3}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= T_{3,2} - T_{3,1} = \mathfrak{A}_{3,2} + r_{3,2} - \mathfrak{A}_{3,1} - r_{3,1} = \\ &= N_{3,2} - N_{3,1} + r_{3,2} - r_{3,1} = C + (r_{3,2} - r_{3,1}), \end{aligned}$$

причем под  $A$ ,  $B$  и  $C$  понимаются измеренные углы.

Далее мы имеем

$$A_1 + B_1 + C_1 = A + B + C + (r_{1,3} - r_{1,2}) + (r_{2,1} - r_{2,3}) + (r_{3,2} - r_{3,1}).$$

Очевидно, должно быть

$$(r_{1,3} - r_{1,2}) + (r_{2,1} - r_{2,3}) + (r_{3,2} - r_{3,1}) = -\varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  — сферический избыток треугольника  $ABC$  на эллипсоиде. Таким образом, сумма редуций углов треугольника должна быть равна сферическому избытку этого треугольника, взятому с обратным знаком.

## § 57. Вычисление разностей плоских координат Гаусса-Крюгера по данным длине и направлению геодезической линии на эллипсоиде.

### Обратная задача

Назовем данные для начала  $A$  геодезической линии  $AB$  координаты через  $x_1$  и  $y_1$ ; данная длина этой геодезической линии пусть равна  $s$ , а данный азимут ее в  $A$  назовем через  $A_{1,2}$ . Требуется рассчитать приращения  $\Delta x_{1,2}$  и  $\Delta y_{1,2}$  плоских прямоугольных координат по прямой  $ab$ , соответствующей в проекции геодезической линии  $AB$ .

Прежде всего рассчитываем по формуле (428) величину  $\gamma_1$ , т. е. гауссово сближение меридианов в точке  $A$

$$\lg \gamma_1 = \lg \frac{y_1 t' \rho''}{N'} - \tau_1 + \mu_2 + \frac{2\mu}{45N'^4} \frac{y_1^4}{\cos^2 \varphi'}, \quad (a)$$

причем, конечно,  $\varphi'$  определяется предварительно по  $x_1$ . Затем рассчитываем масштаб  $m_1$  по формуле

$$m_1 = 1 + \frac{y_1^2}{2R_1^2}. \quad (b)$$

Далее следует вывод приближенного значения  $(T_{1.2})$  по формуле

$$(T_{1.2}) = A_{1.2} - \gamma_1 - \frac{m_1 s \cos(A_{1.2} - \gamma_1)}{2R_m^2} y_1. \quad (c)$$

Приближенность формулы заключается, конечно, в пренебрежении величиной  $\frac{\Delta x \Delta y}{6R^2}$  в (463) и величиной  $\delta_{1.2}$  в аргументе  $\cos(A_{1.2} - \gamma_1)$ . Имея  $(T_{1.2})$ , выводим

$$\left. \begin{aligned} (\Delta x_{1.2}) &= m_1 s \cos(T_{1.2}); & (\Delta y_{1.2}) &= m_1 s \sin(T_{1.2}) \\ (y_2) &= y_1 + (\Delta y_{1.2}); & y_m &= \frac{y_1 + (y_2)}{2} = y_1 + \frac{(\Delta y_{1.2})}{2} \end{aligned} \right\}. \quad (d)$$

Полагая теперь  $y < 200$  км и  $s < 60$  км, применяем формулу (450)

$$\lg d = \lg s + \frac{\mu}{2} \frac{y_m^2}{R_m^2} + \frac{\mu}{24} \frac{(\Delta y_{1.2})^2}{R_m^2} - \frac{\mu}{12} \left( \frac{y_m}{R_m} \right)^4 \quad (e)$$

или

$$d = s \left[ 1 + \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} + \frac{y_m^4}{24R_m^4} \right] \quad (e')$$

и вычисляем, кроме того,

$$r''_{1.2} = \frac{(x_1 - x_2) \rho''}{6R_m^2} (2y_1 - y_2), \quad (f)$$

причем в (e), (e') и (f) величины  $y_m$ ,  $x_1 - x_2$ ,  $\Delta y$ ,  $y_2$  считают полученными по (d). Широту  $B_m$  определяют так

$$B_m = B_1 + \frac{(\Delta x)}{60};$$

$$B_1 = \varphi' - \frac{y_1^2 t'}{2R^2} \rho''.$$

Наконец, выводят

$$T_{1.2} = A_{1.2} - \gamma_1 + r_{1.2},$$

$$\Delta x_{1.2} = d \cos T_{1.2}; \quad \Delta y_{1.2} = d \sin T_{1.2}.$$

Ошибки определения  $\Delta x_{1.2}$  и  $\Delta y_{1.2}$  будут, при  $y < 200$  км и  $s < 60$  км, менее 4 мм; при  $d = 40$  км и  $y < 120$  км эти ошибки менее 1 мм.

Обычно рекомендуют иной порядок решения задачи, а именно: вычислив по (428)  $\gamma_1$ , затем выводят

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 - \gamma_1^s &= \frac{2}{3} \eta_1^2 t_1 \rho'' \left( \frac{y_1}{R_1} \right)^3 \\ T_{1.2}^s &= A_{1.2} - \gamma_1 + (\gamma_1 - \gamma_1^s), \\ u &= s \cos T_{1.2}^s \\ v &= s \sin T_{1.2}^s \end{aligned} \right\}. \quad (u, v)$$

Далее

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_{1.2} &= v \left( 1 + \frac{y_1^2}{2R_1^2} \right) - (3y_1 + v) \frac{u^2 - v^2}{6R_1^2} \\ \Delta x_{1.2} &= u \left( 1 + \frac{y_2^2}{2R_1^2} \right) - \frac{1}{6} \left( \frac{v}{R_1} \right)^2 u \\ \Delta T^s &= - \frac{\Delta x y_m}{R_m^2} \rho'' \left( 1 - \frac{y_m^2}{3R_m^2} \right) \\ T_{2.1}^s &= T_{1.2}^s \pm 180^\circ + \Delta T_s \end{aligned} \right\} \quad (466)$$

Формулы (466) приводятся без вывода. Нужно иметь в виду, что к ним надлежит прибавить еще вычисление

$$\operatorname{tg} T_{1.2} = \frac{\Delta y_{1.2}}{\Delta x_{1.2}}; \quad d = \frac{\Delta x_{1.2}}{\cos T_{1.2}}; \quad d = \frac{\Delta y_{1.2}}{\sin T_{1.2}};$$

или вычисление

$$r_{1.2} = - \frac{\Delta x_{1.2} \rho''}{6R_m^2} (2y_1 + y_2);$$

$$T_{1.2} = A_{1.2} - \gamma_1 + r_{1.2}; \quad d = \frac{\Delta x_{1.2}}{\cos T_{1.2}} = \frac{\Delta y_{1.2}}{\sin T_{1.2}}.$$

Сравним порядок, представленный формулами (а) — (f) с порядком, представленным формулами (466). Результаты, получаемые и в том и в другом случае, остаются непроконтролируемыми; вычисления по формулам (а) — (f) требуют менее времени, чем по формулам (466), да с прибавкой к ним еще вычисления  $T_{1.2}$  и  $d$ .

Однако обычно приходится рассматриваемую задачу применять не к одной геодезической линии  $AB$ , а к геодезическим линиям  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ , ..., образующим замкнутую фигуру на сфероиде или соединяющим точки  $A$  и  $E$  с данными для них координатами  $x$  и  $y$ . При переходе к линии  $BC$  мы при применении формул (а) — (f) должны будем по  $x_2$  и  $y_2$  получить прежде всего  $\gamma_2$  и затем вычислять все формулы от (b) до (f) включительно по линии  $BC$ . При применении формул (466) мы получаем  $T^s$  для линии  $BA$  и, прибавляя или вычитая из него известный всегда сфероидический угол  $CBA$ , перейдем к  $T_{BC}^s$ . Следовательно, после этого без вычисления  $\gamma_2$  мы можем применять формулы (466) к линии  $BC$  и т. д. Это исключение необходимости вычислять величины  $\gamma$  на точках  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $E$  составит, конечно, известное преимущество применения формул (466). Но никто не мешает при применении формул (а) — (f) угол  $CBA$  редуцировать на плоскость и тем заменить вычисление  $\gamma_2$ .

Обратная задача, т. е. получение длины геодезической линии  $AB$  и азимутов в ее конечных точках по данным  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $x_2$ ,  $y_2$  в точках  $A$  и  $B$ , решается обычно по следующим формулам, получаемым легко из (466)

$$\left. \begin{aligned}
 \lg (s \sin T_m^s) &= \lg \Delta y_{1.2} - \frac{\mu}{2} \left( \frac{y_m}{R_m} \right)^2 - \frac{\mu}{12} \frac{\Delta x_{1.2}^2}{R_m^2} - \frac{\mu}{24} \frac{\Delta y_{1.2}^2}{R_m^2} \\
 \lg (s \cos T_m^s) &= \lg \Delta x_{1.2} - \frac{\mu}{2} \left( \frac{y_m}{R_m} \right)^2 + \frac{\mu}{24} \frac{\Delta y_{1.2}^2}{R_m^2} \\
 \left[ T_m^s = \frac{T_{1.2}^s + T_{2.1}^s \pm 180^\circ}{2} \right] \\
 \lg \left( -\frac{\Delta T^s}{2} \right) &= \lg \frac{\rho''}{2} \frac{\Delta x_{1.2}}{R_m} \frac{y_m}{R_m} - \frac{\mu}{3} \left( \frac{y_m}{R_m} \right)^2 \\
 \operatorname{tg} T_m^s &= \frac{(s \sin T_m^s)}{(s \cos T_m^s)}; \quad s = \frac{(s \sin T_m^s)}{\sin T_m^s} = \frac{(s \cos T_m^s)}{\cos T_m^s} \\
 T_{1.2}^s &= T_m^s - \frac{1}{2} \Delta T^s; \quad T_{2.1}^s = T_m^s + \frac{1}{2} \Delta T^s \pm 180^\circ \\
 A_{1.2} &= T_{1.2}^s + \gamma_1 - (\gamma_1 - \gamma_1^s) \\
 A_{2.1} &= T_{2.1}^s + \gamma_2 - (\gamma_2 - \gamma_2^s)
 \end{aligned} \right\} \quad (467)$$

причем, конечно,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  вычисляются по (428), а  $\gamma_1 - \gamma_1^s$  — по формуле

$$\gamma_1 - \gamma_1^s = \frac{2}{3} \eta_1^2 t_1 \rho'' \left( \frac{y_1}{R_1} \right)^3.$$

Но с успехом можно воспользоваться и следующими формулами

$$\left. \begin{aligned}
 1) \lg s &= \lg d - \frac{\mu y_m^2}{24 R_m^2} - \frac{\mu \Delta y_{1.2}^2}{24 R_m^2} + \frac{\mu y_m^4}{12 R_m^4} \\
 r''_{1.2} &= \frac{(x_1 - x_2)}{6 R_m^2} (2y_1 + y_2) \rho''; \quad r''_{2.1} = \frac{(x_2 - x_1)}{6 R_m^2} (2y_2 + y_1) \rho'' \\
 2) &\text{ формулами (428) для вычисления } \gamma_1 \text{ и } \gamma_2 \\
 3) A_{1.2} &= T_{1.2} + \gamma_1 - r_{1.2}; \quad A_{2.1} = T_{2.1} + \gamma_2 - r_{2.1}
 \end{aligned} \right\} \quad (467')$$

Конечно, решение по (467'), существенно проще.

### § 58. Переход из зоны в зону (трансформация координат Гаусса-Крюгера)

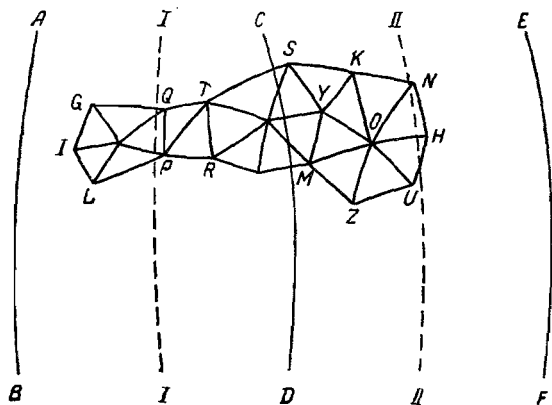
На черт. 67 изображены две смежные зоны эллипсоида в системе координат Гаусса-Крюгера: зона I с краевыми меридианами  $AB$  и  $CD$  и осевым меридианом  $I. I$ ; зона II с краевыми меридианами  $CD$  и  $EF$  и осевым меридианом  $II. II$ . Пусть точка  $K$  имеет плоские координаты, отнесенные к левой зоне I; требуется получить плоские координаты этой же точки  $K$  в системе II зоны. Такая задача по перечислению (трансформации) координат точки из одной зоны в систему другой зоны возникает часто в практике.

Применение в СССР, на ряду с зонами шестиградусными, зон трехградусных, очевидно, также ведет к передкому возникновению в практике задачи трансформации координат: раздельный меридиан  $CD$  для шести-

градусных зон служит осевым меридианом в одной из трехградусных зон, и при использовании в общих целях опорных пунктов, вычисленных в трехградусной зоне с осевым меридианом  $CD$ , возникает задача переноса координат части этих пунктов в систему шестиградусной зоны I, а другой их части — в систему шестиградусной зоны II. Задача перехода из зоны в зону может быть решена различно.

1. Если идет речь об одном-двух пунктах, то всего проще от координат  $x_I, y_I$  точки  $K$  в системе I зоны перейти к координатам геодезическим  $B_K$  и  $L_K$  этой точки по формулам § 52, а затем от  $B_K$  и  $L_K$  по формулам § 50 перейти к координатам  $x_{II}$  и  $y_{II}$  точки  $K$  в зоне II. При этом возможно упрощение задачи, если мы применим формулы, дающие  $X-x$  и  $Y-y$ , о чем будет сказано ниже.

2. Пусть сеть геодезических опорных точек II класса проложена между твердыми точками  $G, I, L, M, H, U$  (черт. 67) I класса; так как для точек I класса  $N, H$  и  $U$  имеются, кроме координат Гаусса в зоне II,



Черт. 67

еще геодезические их координаты  $B$  и  $L$ , то сперва переходим по формулам § 50 от геодезических координат пункта  $N$  к плоским его прямоугольным координатам в зоне I. Далее, вычисляем по длине геодезической линии  $NH$  и по ее геодезическому азимуту, в порядке и по формулам, указанным в § 57, разности координат  $\Delta x_{NH}, \Delta y_{NH}$  в той же зоне I для точек  $N$  и  $H$ , а получив  $x$  и  $y$  для точки  $N$  в зоне I, от  $N$  пе-

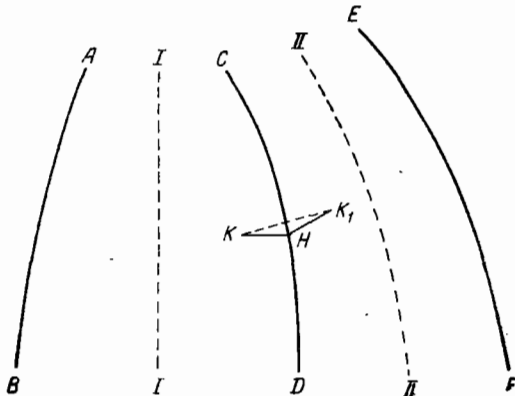
реходим точно таким же образом к  $U$ . Следующей стадией работы будет вывод приближенных координат в зоне I для всех точек II класса, расположенных в нашей сети между сторонами I класса  $GI, IL, NH$  и  $HU$ , причем в западной части ее используем, в качестве исходных, пункты  $G, I, L$ , а в восточной части — пункты  $N, H, U$ . С этими приближенными координатами, полученными в системе I зоны, выполняем вычисление редукций углов в треугольниках триангуляции II класса, и имея: плоские углы этих треугольников в системе I зоны, плоские координаты точек  $N, H, U, G, I, L$  в системе той же зоны, дирекционные углы  $T$  (на плоскости) сторон  $GI, IL, NH, HU$ , длины  $d$  тех же сторон на плоскости в одной системе I зоны, — выполняем уравнивание нашей сети II класса на плоскости. После уравнивания вычисляем координаты Гаусса-Крюгера в зоне I для всех точек II класса, включая и точки  $K, O, Z, N, H, U$ , чтобы, с одной стороны, получить контроль уравнильных вычислений, а с другой стороны, дать заход в зону II, или чтобы получилось перекрытие зон I и II, которые всегда надлежит иметь в пределах некоторой полосы. Вводя в уравненные на плоскости углы этих треугольников, со знаком минус, ранее вычисленные их редукции в системе зоны I, мы получим, очевидно, значение соответствующих уравненных углов на эллипсоиде, или значение сфероидических уравненных углов.

Теперь, исходя из известных координат точек  $N, H, U$  в зоне II, вычисляем приближенные координаты в зоне II точек  $K, O, Z, M, Y$  и  $S$ , с ними — редукции углов треугольников  $KON, ONH, OHU, OZU, OZM, YOM, SYK, KYO$ , отнесенные, очевидно, к зоне II. Вводя эти последние редукции в сфероидические уравненные углы тех же треугольников, вычисляем теперь, исходя от длин и дирекционных углов сторон  $NH$  и  $HU$  в зоне II и от координат пунктов  $N, H, U$ , координаты Гаусса-Крюгера в зоне II для точек  $K, O, Z, S, Y, M$ . Вообще этот *второй прием* перехода из зоны в зону заключается в том, что стороны и углы триангуляции или полигонометрии, отнесенные к той зоне  $A$ , от которой нужно перейти в другую зону  $B$ , перечисляются сперва на соответствующие им стороны и углы на эллипсоиде: это выполняется путем введения редукций сторон и углов, полученных в зоне  $A$  до вычисления еще окончательных координат в системе этой зоны, с обратным знаком в соответствующие редукцированные на плоскость стороны и углы в системе зоны  $A$ . Со сторонами и углами, отнесенными на эллипсоид, вычисляют приближенные плоские координаты в *системе зоны  $B$*  для тех пунктов, которые нужно перечислить из зоны  $A$  в зону  $B$ , причем, конечно, используют исходные координаты в зоне  $B$  и исходный дирекционный угол в системе той же зоны для некоторого пункта и некоторой из него исходящей стороны. С этими приближенными координатами вычисляют редукции сторон и углов для перехода от эллипсоида на плоскость в *системе зоны  $B$* ; наконец, эти редукции вводят в сфероидические стороны и углы, и тогда выполняют окончательное вычисление координат Гаусса-Крюгера для подлежащих точек. Как видно, дело сводится к добавочному вычислению редукций в новой зоне.

Представляется, что в большинстве случаев этот *второй прием* и следует применять, причем исходные координаты могут быть получаемы или по первому приему (через географические координаты), или по третьему, или четвертому приему.

3. Способ раздельного меридиана. Пусть от координат  $x, y$  точки  $K$  (черт. 68), данных в системе зоны I, мы должны перейти к координатам  $x_{II}, y_{II}$  этой же точки в системе зоны II; раздельный меридиан зон I и II пусть будет  $CD$ . Если на эллипсоиде возьмем точку  $K_1$ , симметричную с точкой  $K$  относительно этого раздельного меридиана, то широта ее будет равна широте точки  $K$ , а долгота ее относительно осевого меридиана II будет равна по величине, но противоположна по знаку, долготе  $l$  точки  $K$  относительно осевого меридиана I. Другими словами, абсцисса точки  $K_1$  в зоне II будет равна абсциссе  $x$  точки  $K$  в зоне I, а ордината точки  $K_1$  в зоне II будет равна ординате точки  $K$  в зоне I, но взятой с обратным знаком.

Возьмем на раздельном меридиане  $CD$  точку  $H$ , для которой абсцисса в системе зоны I равнялась бы  $x_1$ ; очевидно, что и в зоне II абсцисса точки  $H$  будет равна  $x_1$ .



Черт. 68

В системе сфероидических прямоугольных координат при осевом меридиане  $I$  и начале координат на экваторе абсцисса  $X_H$  точки  $H$  на основании (414) § 51 получится так

$$X_H = x_I - \frac{N_H}{6} \frac{L''^4}{\rho''^4} \sin B_H \cos^2 B_H \eta^2 (1 + \eta^2).$$

Здесь  $L$  — долгота  $H$  относительно меридиана  $I$ , или половина долготного интервала зоны. При  $L = 3^\circ$  и  $B = 45^\circ$  величина  $X_H - x_I$  составит менее 6 мм. Разность широт точек  $H$  и  $K$  будет всегда менее двух минут. Вычислим широту  $B$  точки  $K$  по формуле (417)

$$B = \varphi' - \frac{y_1^2 t' \rho''}{2N' M'}, \quad (468)$$

причем  $\varphi'$  возьмем из таблицы меридианных дуг по  $x_I$ .

Если теперь напишем

$$X_H = x_I - \frac{N}{6} \frac{L''^4}{\rho''^4} \sin B \cos^2 B \eta^2, \quad (469)$$

то ошибка в  $X_H$  не превзойдет 1 : 75 000 м при  $L = 3^\circ$ .

Определив  $X_H$ , точно определяем по таблицам меридианных дуг ему соответствующее  $B_f$ . Из (323) имеем

$$\operatorname{tg} \left( \frac{Y_H \rho''}{N_f} \right) = \operatorname{tg} L'' \cos B_f \left[ 1 - \frac{\eta_f^2 t_f^2 L''^4 \cos^4 B_f}{15 \rho''^4} \right] \quad (470)$$

или

$$Y_H = \frac{N_f}{\rho''} L'' \cos B_f \left[ 1 + \frac{(L'' \cos B_f)^2 t_f^2}{3 \rho''^2} - \frac{(L \cos B_f)^4 t_f^2}{15 \rho''^4} (1 + \eta_f^2 - 2 t_f^2) \right].$$

Применяя теперь формулу (410), получим

$$\begin{aligned} y_H = Y_H + \frac{1}{6} (1 + \eta_f^2) N_f \frac{L''^3 \cos^3 B_f}{\rho''^3} + \frac{N_f}{6} (1 + \eta_f^2) \frac{L''^5 \cos^3 B_f \sin^2 B_f}{\rho''^5} + \\ + \frac{N_f L''^5 \cos^5 B_f}{120 \rho''^5} (5 + 14 \eta_f^2); \\ y_H = \frac{N_f L'' \cos B_f}{\rho''} \left[ 1 + \frac{(L'' \cos B_f)^2}{6 \rho''^2} (1 + \eta_f^2 + 2 t_f^2) + \right. \\ \left. + \frac{(5 + 14 \eta_f^2 + 12 t_f^2 + 16 t_f^4 + 12 \eta_f^2 t_f^2)}{120 \rho''^4} L''^4 \cos^4 B_f \right]. \quad (471) \end{aligned}$$

В § 47 имеем формулу (391)

$$\gamma_H^s = L \sin B_f \left[ 1 - \frac{V_f^2 Y_H^2}{6 N_f^2} + \frac{3 V_f^4 + 16 V_f^2 t_f^2 - 36 \eta_f^2 V_f^2 t_f^2 Y_H^4}{360 N_f^4} \right].$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \gamma_H^s = L \sin B_f \left[ 1 - \frac{(1 + \eta_f^2)}{6 \rho''^2} L''^2 \cos^2 B_f + \right. \\ \left. + \frac{1 + 2 \eta_f^2 - 20 \eta_f^2 t_f^2 - 8 t_f^2}{120 \rho''^4} L''^4 \cos^4 B_f \right]. \quad (472) \end{aligned}$$

В (472) член с  $L^5 \sin B_f \cos^4 B_f$  дает при  $L = 3^\circ$  в широте  $45^\circ$  около  $0'',0005$  и может быть опущен. Далее

$$\gamma_H = \gamma_H^s + \frac{2}{3} \eta^2 \frac{L''^3}{\rho''^2} \sin B \cos^2 B (1 + \eta^2),$$

$$\gamma''_H = L'' \sin B_f \left[ 1 - \frac{(1 - 3\eta_f^2 - 4\eta_f^4)}{6\rho''^2} L''^2 \cos^2 B_f \right]. \quad (473)$$

В системе зоны II геодезические линии  $KH$  и  $K_1H$  изобразятся так (черт. 69): если  $H'N'$  — прямая, параллельная оси  $x$  в зоне II, то геодезическая линия  $HK_1$  представится прямой  $H'K'_1$ , перпендикулярной к  $H'N'$ ; длина отрезка  $HK'_1$  будет равна  $y_H - y_I$ ; геодезическая линия  $KH$  представится кривой  $K'k'H'_1$ ; угол между касательной  $H'C'$  к изображению раздельного меридиана и прямой  $H'N'$  равен  $\gamma_H$ , вычисляемому по формуле (473). Абсцисса точки  $K_1$  в зоне II равна  $x_I$ , ордината ее равна  $-y_I$ ; абсцисса точки  $H$  в зоне II равна  $x_I$ , ордината  $-y_H$ . Так как на эллипсоиде угол  $CHK_1$  равен углу  $CHK$  (черт. 69), то угол  $C'H'k'K'$  (в  $H'$ ) равен  $90^\circ + \gamma_H$ ; угол в  $H'$  между хордой  $H'K'$  и кривой  $H'k'K'$  назовем через  $\delta$ , а длину хорды  $K'H'$  — через  $d$ . Расстоянию  $s$  по геодезической линии  $KH$  (черт. 69) соответствует в зоне I хорда длиной  $y_H - y_I$ .

Продолжив прямую  $H'K'_1$ , опустим на нее перпендикуляр  $K'R'$  и обозначим  $K'R' = \Delta x_0$ ;  $R'H' = \Delta y_0$ .

В первом приближении, применяя (e') § 57, имеем

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_0 &= -(y_H - y_I) \sin 2\gamma_H \left( 1 + \frac{y_H(y_H - y_I)}{R^2} \right) \\ \Delta y_0 &= -(y_H - y_I) \cos 2\gamma_H \left( 1 + \frac{y_H(y_H - y_I)}{R^2} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (474)$$

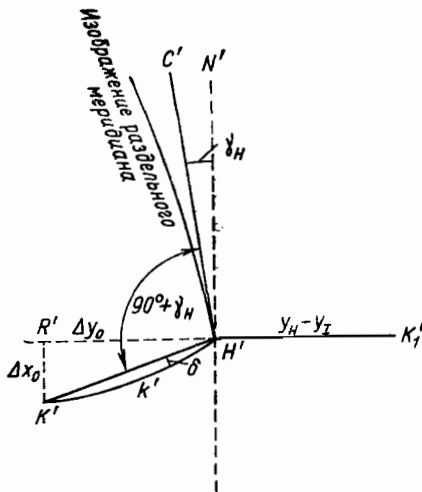
Величины  $\Delta x_0$  и  $\Delta y_0$  используем для вычисления  $\delta$  и  $d$ . Очевидно,

$$\delta'' = -\frac{\Delta x_0 (3y_H - \Delta y_0)}{6R^2} \rho''. \quad (475)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} s &= (y_H - y_I) \left\{ 1 - \frac{1}{6R^2} (y_H^2 + y_H y_I + y_I^2) + \frac{5}{384} \frac{(y_H + y_I)^4}{R^4} \right\} \text{ (I зона);} \\ d &= s \left\{ 1 - \frac{1}{6R^2} [y_H^2 + y_H(y_H - \Delta y_0) + (y_H - \Delta y_0)^2] + \frac{5}{384} \frac{(2y_H - \Delta y_0)^4}{R^4} \right\}^{-1} = \\ &= s \left\{ 1 + \frac{1}{6R^2} [y_H^2 + (y_H - \Delta y_0)(2y_H - \Delta y_0)] - \frac{5}{384} \frac{(2y_H - \Delta y_0)^4}{R^4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{[y_H^2 + (y_H - \Delta y_0)(2y_H - \Delta y_0)]^2}{36R^4} \right\}^*; \end{aligned}$$

\*  $d$  — во II зоне.



Черт. 69



$$d = s \left\{ 1 + \frac{1}{6R^2} (3y_H^2 - 3y_H \Delta y_0 + \Delta y_0^2) - \frac{5}{384} \frac{(3y_H - y_I)^4}{R^4} + \frac{(7y_H^2 - 5y_H y_I + y_I^2)^2}{36R^4} \right\};$$

$$d = s \left\{ 1 + \frac{3y_H^2 - 3y_H \Delta y_0 + \Delta y_0^2}{6R^2} - \frac{927y_H^4 + 620y_H^3 y_I - 438y_H^2 y_I^2 + 140y_H y_I^3 - 17y_I^4}{1152R^4} \right\};$$

$$d = (y_H - y_I) \left\{ 1 - \frac{1}{6R^2} (y_H^2 + y_H y_I + y_I^2) + \frac{3y_H^2 - 3y_H \Delta y_0 + \Delta y_0^2}{6R^2} + \frac{y_H^4}{288R^4} + (-190y_H^4 - 104y_H^3 y_I + 72y_H^2 y_I^2 + 8y_H y_I^3) \frac{1}{192R^4} \right\}.$$

Для подстановки  $\Delta y_0$  в члены второго порядка в последнем уравнении, пишем

$$\cos 2\gamma_H = 1 - \frac{4\gamma_H^2}{2} = 1 - 2\gamma_H^2 = 1 - 2 \frac{y_H^2}{R^2} \operatorname{tg}^2 B_f \quad [\text{см. (473)}]$$

Отсюда

$$\Delta y_0 = -(y_H - y_I) \left( 1 - \frac{2y_H^2}{R^2} \operatorname{tg}^2 B_f \right) \left( 1 + \frac{y_H (y_H - y_I)}{R^2} \right);$$

$$\Delta y_0 = -(y_H - y_I) + 2(y_H - y_I) \frac{y_H^2}{R^2} t_f^2 - \frac{y_H (y_H - y_I)^2}{R^2};$$

$$\frac{3y_H^2 - 3y_H \Delta y_0 + \Delta y_0^2}{6R^2} = \frac{7y_H^2 - 5y_H y_I + y_I^2}{6R^2} + \frac{5y_H^4 + 9y_H^2 y_I^2 - 12y_H^3 y_I - 2y_H y_I^3}{6R^4} + \frac{14y_H^3 y_I - 10y_H^4 - 4y_H^2 y_I^2}{6R^4} t_f^2.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$d = (y_H - y_I) \left\{ 1 + \frac{y_H (y_H - y_I)}{R^2} + \frac{(-7y_H^4 - 53y_H^3 y_I + 90y_H^2 y_I^2 - 14y_H y_I^3)}{48R^4} - \frac{y_H^4}{144R^4} - \frac{y_H^2 t_f^2}{3R^4} (5y_H^2 - 7y_H y_I + 2y_I^2) \right\}.$$

Преобразовывая последнее уравнение, имеем

$$d = (y_H - y_I) \left\{ 1 + \frac{y_H (y_H - y_I)}{R^2} - \frac{y_H (y_H - y_I) (7y_H^2 + 60y_H y_I - 30y_I^2)}{48R^4} + \frac{48y_H^3 y_I - y_H^4}{144R^4} - \frac{y_H^2 (y_H - y_I) (5y_H - 2y_I) t_f^2}{3R^4} \right\};$$

$$d = (y_H - y_I) \left\{ 1 + \frac{y_H (y_H - y_I)}{R^2} - \frac{y_H (y_H - y_I) (23y_H^2 + 76y_H y_I - 14y_I^2)}{48R^4} + \frac{47y_H^4}{144R^4} - \frac{y_H^2 (y_H - y_I) (5y_H - 2y_I) t_f^2}{3R^4} \right\}; \quad (476)$$

$$\begin{aligned} \lg d = \lg (y_H - y_I) + \frac{\mu y_H (y_H - y_I)}{R^2} - \frac{\mu y_H (y_H - y_I)}{48R^4} (47y_H^2 + \\ + 52y_H y_I - 14y_I^2) - \frac{\mu y_H^3 (y_H - y_I)}{3R^4} (5y_H - 2y_I) t_f^2 + \frac{47\mu y_H^4}{144R^4}; \\ \lg d = \lg (y_H - y_I) + \frac{\mu y_H (y_H - y_I)}{R^2} - \frac{\mu y_H (y_H - y_I)}{48R^4} \{47y_H^2 + \\ + 52y_H y_I - 14y_I^2 + (80y_H^2 - 32y_H y_I) t_f^2\} + \frac{47y_H^4 \mu}{144R^4}. \quad (477) \end{aligned}$$

В трехградусной зоне формула (477) для широт 45—60° переписывается так

$$\lg d = \lg (y_H - y_I) + \frac{\mu y_H (y_H - y_I)}{R^2} - \frac{\mu y_H^3 (y_H - y_I)}{48R^4} (47 + 80t_f^2), \quad (478)$$

если допускать в  $d$  ошибочность в 2—3 мм.

Таким образом, ход вычислений будет следующий ( $L$  — половина долготного интервала зоны):

1) по данному  $x_I$  выбираем из таблиц меридианных дуг до полу-минуты  $\varphi'$  и вычисляем до полуминуты

$$B = \varphi' - \frac{y_I^2 t' \rho''}{2N' M'} = \varphi' - \frac{y_I^2 t' \rho''}{2R'^2}; \quad (468)$$

2) вычисляем

$$X_H = x_I - \frac{N}{6} \frac{L''^4}{\rho''^4} \eta^2 \sin B \cos^2 B \quad (469)$$

и по  $X_H$  находим точно из таблиц меридианных дуг ему соответствующее  $B_f$ ;

3) вычисляем точно.

$$\begin{aligned} y_H = \frac{L'' \cos B_f}{(2)_f} \left[ 1 + \frac{(L'' \cos B_f)^2}{6\rho''^2} (1 + \eta_f^2 + 2t_f^2) + \right. \\ \left. + \frac{(5 + 14\eta_f^2 + 12t_f^2 + 16t_f^4 + 12\eta_f^2 t_f^2)}{120\rho''^4} (L'' \cos B_f)^4 \right], \quad (471) \end{aligned}$$

$$\gamma''_H = L'' \sin B_f \left[ 1 - \frac{(1 - 3\eta_f^2 - 4\eta_f^4)}{6\rho''^2} (L'' \cos B_f)^4 \right]; \quad (473)$$

4) определяем приближенно

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_0 &= -(y_H - y_I) \sin 2\gamma_H \left( 1 + \frac{y_H (y_H - y_I)}{R^2} \right) \\ \Delta y_0 &= -(y_H - y_I) \cos 2\gamma_H \left( 1 + \frac{y_H (y_H - y_I)}{R^2} \right) \end{aligned} \right\}; \quad (474)$$

5) вычисляем

$$\delta'' = - \frac{\Delta x_0 (3y_H - \Delta y_0)}{6R^2} \rho'',$$

$$\begin{aligned} \lg d = \lg (y_H - y_I) + \frac{\mu y_H (y_H - y_I)}{R^2} + \frac{47y_H^4 \mu}{144R^4} - \\ - \frac{\mu y_H (y_H - y_I)}{48R^4} \{47y_H^2 + 52y_H y_I - 14y_I^2 + 16(5y_H^2 - 2y_H y_I) t_f^2\}, \quad (477') \end{aligned}$$

или в трехградусной зоне

$$\lg d = \lg (y_H - y_I) + \frac{\mu y_H (y_H - y_I)}{R^2} - \frac{\mu y_H^3 (y_H - y_I)}{48R^4} (47 + 80t^2_f); \quad (478)$$

б) вычисляем

$$\Delta x = -d \sin (2\gamma_H - \delta),$$

$$\Delta y = -d \cos (2\gamma_H - \delta),$$

$$x_{II} = x_I - d \sin (2\gamma_H - \delta),$$

$$y_{II} = -y_H - d \cos (2\gamma_H - \delta).$$

} координаты точки  $K$  в зоне II.

Как видно, при соблюдении требуемой при вычислении координат Гаусса-Крюгера точности, изложенный способ *раздельного меридиана* сопровождается довольно сложными вычислениями. Допуская ошибку, до 2—3 мм в определяемых величинах, напомним для трехградусной зоны

$$X_H = x_I,$$

$$y_H = \frac{L'' \cos B_f}{(2)_f} \left[ 1 + \frac{(L'' \cos B_f)^2}{6\rho''^2} (1 + \eta_f^2 + 2t_f^2) \right]$$

$$\gamma_H = L'' \sin B_f \left[ 1 - \frac{(1 - 3\eta_f^2)}{6\rho''^2} (L'' \cos B_f)^2 \right]$$

$$\Delta x_0 = -(y_H - y_I) \sin 2\gamma_H$$

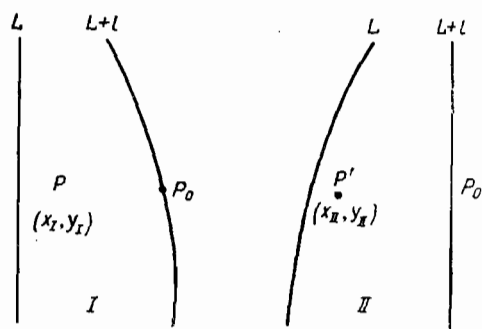
$$\Delta y_0 = -(y_H - y_I) \cos 2\gamma_H$$

$$\delta'' = -\frac{\Delta x_0 (3y_H - \Delta y_0)}{6R^2} \rho''$$

(479)

$$\lg d = \lg (y_H - y_I) + \frac{\mu y_H (y_H - y_I)}{R^2} - \frac{\mu y_H^3 (y_H - y_I)}{48R^4} (47 + 80t_f^2)$$

$$x_{II} = x_I - d \sin (2\gamma_H - \delta); \quad y_{II} = -y_H - d \cos (2\gamma_H - \delta)$$



Черт. 70

Очевидно, способ раздельного меридиана достаточно приемлем *только в применении к трехградусным зонам*. Можно, конечно, составить таблицы величины  $\gamma_H$  и  $y_H$  и тем заметно облегчить вычисление.

4. Способ, основанный на применении таблиц Вировца и Рабиновича. На черт. 70 точка  $P$  имеет координаты  $x_I, y_I$  в зоне I, осевой меридиан которой имеет долготу  $L$ . Требуется получить координаты  $x_{II}, y_{II}$  точки  $P$  в зоне II, осевой меридиан которой имеет долготу  $L+I$ . Возьмем в зоне I на меридиане  $L+I$  вспомогательную точку  $P_0$ , которая пусть в этой зоне имеет абсциссу  $x_0$ , равную абсциссе  $x_I$ ; пусть эта вспомогательная точка изобразится в зоне II точкой  $P'_0$ .

Пусть  $\Delta y = y_I - y_0$ , где  $y_0$  — ордината точки  $P_0$  в зоне I.

Если назовем через  $X_0$  дугу меридиана от экватора до параллели точки  $P_0$ , то можно написать

$$\left. \begin{aligned} x_{II} &= X_0 + (a + b\Delta y \cdot 10^{-10}) \Delta y + c \\ y_{II} &= \Delta y + (a_1 + b_1\Delta y \cdot 10^{-10}) \Delta y + c_1 \end{aligned} \right\}. \quad (480)$$

В уравнениях (480)

$$a = -h_{1,2} = -\frac{1}{m} \sin \gamma;$$

$$a_1 = -(1 - h_{1,1}) = -\left(1 - \frac{1}{m} \cos \gamma\right);$$

( $m$  — масштаб и  $\gamma$  — гауссово сближение меридианов в  $P_0$  для зоны I)

$$b = -\tau_2 \cos \beta_2 = \frac{1}{2} (h_{1,2} h_{2,2} - h_{1,1} h_{2,1});$$

$$b_1 = -\tau_2 \sin \beta_2 = \frac{1}{2} (h_{1,1} h_{2,2} + h_{1,2} h_{2,1});$$

$$c = Dd^3 + Ed^4;$$

$$c_1 = D_1 d^3 + E_1 d^4;$$

$$d = \Delta y.$$

В этих формулах

$$h_{1,1} = \frac{1}{m} \cos \gamma; \quad h_{1,2} = \frac{1}{m} \sin \gamma; \quad h_{2,1} = \frac{2\eta^2}{M} \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} l \cos B_0;$$

$$h_{2,2} = \frac{1}{M} \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} B_0};$$

( $M$  — меридианный радиус для точки  $P_0$ ,  $B_0$  — широта точки  $P_0$ )

$$h_{3,1} = \frac{h_{1,2}^2}{M^2} (1 - 3\eta^2) - \frac{h_{2,2}^2}{M^2} (1 - 2\eta^2);$$

$$h_{3,2} = -\frac{h_{1,1} h_{1,2}}{M^2} (1 + 3\eta^2);$$

$$h_{4,1} = h_{2,2} h_{3,2} (5,8387 + 8\eta^2);$$

$$h_{4,2} = -\frac{h_{2,2}}{M^2} (0,9194 + 15\eta^2 - 6h_{1,2}^2);$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_2 &= \frac{1}{2} \frac{k_2}{m}; \quad \beta_2 = \gamma + \alpha_2 \\ \tau_3 &= \frac{1}{6} \frac{k_3}{m}; \quad \beta_3 = \gamma + \alpha_3 \end{aligned} \right\} \quad \tau_4 = \frac{1}{24} \frac{k_4}{m}; \quad \beta_4 = \gamma + \alpha_4.$$

В последних формулах величины  $k$  и  $\alpha$  определяются из таких уравнений

$$k_2 \cos \alpha_2 = h_{2,1}; \quad k_3 \cos \alpha_3 = h_{3,1}; \quad k_4 \cos \alpha_4 = h_{4,1};$$

$$k_2 \sin \alpha_2 = h_{2,2}; \quad k_3 \sin \alpha_3 = h_{3,2}; \quad k_4 \sin \alpha_4 = h_{4,2}.$$

Далее

$$D = \mp \tau_3 \sin \beta_3 = \pm \frac{1}{6} (h_{1,1} h_{3,2} + h_{1,2} h_{3,1});$$

$$D_1 = \pm \tau_3 \cos \beta_3 = \mp \frac{1}{6} (h_{1,2} h_{3,2} - h_{1,1} h_{3,1});$$

$$E = \tau_4 \cos \beta_4 = \frac{1}{24} (h_{1,1} h_{4,1} - h_{1,2} h_{4,2});$$

$$E_1 = \tau_4 \sin \beta_4 = \frac{1}{24} (h_{1,1} h_{4,2} + h_{1,2} h_{4,1}).$$

Мы не будем приводить вывод формул (480) и входящих в них коэффициентов  $a, b, c, a_1, b_1, c_1$ .

Таблицы проф. Вировца и доцента Рабиновича состоят из трех частей.

В первой части, или в таблицах I, даны значения величин  $y_0$  и  $X_0$ , причем аргументом является  $x_1$ , даваемый в целых километрах и изменяющийся через один километр от 4000 км до 7200 км (от  $B = 33^\circ 30'$  до  $B = 76^\circ 30'$ ). Коэффициенты  $a, b, a_1$  и  $b_1$  при заданном  $l$  будут, конечно, функциями только  $x_1$ ; эти коэффициенты даются в той же таблице I и находятся также по аргументу  $x$ . Коэффициент  $a_1$  изменяется столь медленно, что выписывается из таблицы I без интерполяции; коэффициент  $b_1$  изменяется также столь мало, что интерполяция выполняется просто на четверть и половину интервала.

Во второй части таблиц, или в таблице II, даются величины  $c$ , а в третьей части таблиц — величины  $c_1$ . Так как  $c$  и  $c_1$  суть функции  $x_1$  и  $\Delta y$ , то таблицы для этих величин имеют два входа.

В таблице II величина  $\Delta y$  изменяется через 10 км; аргумент  $x_1$  изменяется: через 100 км для  $\Delta y$  от 20 до 150 км; через 50 км — для  $\Delta y$  от 150 до 200 км; через 20 км для  $\Delta y$  от 200 до 270 км при  $x_1 = 4000$  км, и от  $\Delta y = 200$  км до значений  $\Delta y$ , обслуживающих шестиградусную зону, при  $x_1 > 5200$  км; через 10 км для  $\Delta y$  от 270 км до значений, обслуживающих шестиградусную зону. Указанный подбор интервалов для  $x_1$  в таблице II обеспечивает возможность при определении  $c$  интерполирование вести только по  $\Delta y$ .

Таблица III для вычисления величин  $c_1$  составлена аналогично. По таблице III величины  $c_1$  выбираются без всякого интерполирования.

Вычисление  $x_{II}$  и  $y_{II}$  по формулам (480) выполняется при помощи таблиц проф. Вировца и доцента Рабиновича сравнительно очень быстро; на отдельное вычисление требуется не более 15 минут для вычислителя с малым опытом.

Благодаря труду проф. Вировца и доцента Рабиновича мы располагаем прекрасным способом трансформации координат Гаусса-Крюгера, единственным недочетом которого является то, что  $y_0, B_0, c$  и  $c_1$  даются с сантиметрами, и выведенные  $x_{II}$  и  $y_{II}$  могут иметь ошибочность до 2 см.

### § 59. Расчет и нанесение «километровых» линий; вставка географической сети в прямоугольную и обратно

При введении в СССР проекции Гаусса-Крюгера для государственной топографической съемки было признано целесообразным съемочные планшеты и листы топографической карты ограничивать попрежнему соответствующими линиями меридианов и параллелей. Пересечения этих

линий меридианов и параллелей, т. е. углы рамок съёмочных трапеций и углы рамок листов карты должны быть наносимы по их прямоугольным в проекции Гаусса-Крюгера координатам, выбираемым из таблиц; средние точки параллелей, ограничивающих с севера и юга листы карты в масштабах 1 : 100 000 и 1 : 200 000, должны быть наносимы также по их прямоугольным координатам в проекции Гаусса-Крюгера; на «сдвоенных» листах карты в масштабе 1 : 200 000 и на листах карты в масштабе 1 : 500 000 при построении ограничивающих их с севера и с юга параллелей надлежит иметь координаты Гаусса-Крюгера для точек, подразделяющих эти параллели на четвертые их части.

Значения координат  $x$  и  $y$  для углов рамок вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} x &= X_B + \frac{N l''^2}{2\rho''^2} \sin B \cos B + \frac{N l''^4}{24\rho''^4} \sin B \cos^3 B (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4), \\ y &= \frac{N l'' \cos B}{\rho''} + N \frac{l''^3}{6\rho''^3} \cos^3 B (1 - t^2 + \eta^2) + \\ &\quad + \frac{N l''^5 \cos^5 B}{120\rho''^5} (5 - 18t^2 + t^4). \end{aligned} \quad (481)$$

Ошибки табличных значений  $x$  и  $y$  порядка вообще 0,05 м.

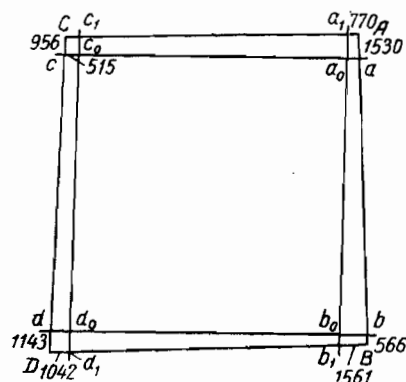
Перейдем теперь к нанесению километровых линий или километровой сетки, т. е. линий, заданных округленными до километра абсциссами и ординатами.

Если топографическая съёмка исполнена в проекции Гаусса-Крюгера или лист карты построен в этой же проекции, то нанесение километровой сетки делается, конечно, одновременно с построением рамки планшета или листа карты и сводится к проведению прямых, параллельных нанесённым на листе карты или на планшете вспомогательным координатным осям, и заданных округленными до целых километров абсциссами и ординатами, изменяющимися через тот или иной интервал. Но значительное число планшетов съёмок масштабов 1 : 50 000, 1 : 25 000 и листов карты масштаба 1 : 100 000 были исполнены в многогранной проекции, см. § 11; кроме того, приходится пользоваться прежними съёмками, исполненными в той же проекции в масштабах 1 : 21 000, 1 : 42 000, 1 : 84 000. Строго рассуждая, линия с постоянной ординатой  $y$  изобразится на планшетах или картах, построенных в многогранной проекции, кривой линией, однако кривизна ее едва заметна, и этой кривизной возможно пренебрегать при графических построениях. Кривизна линии с постоянной абсциссой оказывается еще гораздо меньшей.

Пусть на черт. 71 изображен планшет  $ABDC$  топографической съёмки в масштабе 1 : 100 000, исполненной в проекции Мюффлинга. Выписав из таблиц координаты точек  $A, B, D, C$ , выбираем сперва прямую  $ac$  километровой сетки, ближайшую к северной стороне  $AC$  рамки планшета, и прямую  $bd$ , ближайшую к южной стороне  $BD$  рамки. Та и другая прямая должны расположиться внутри рамки  $ABDC$ . Пусть мы имеем такие координаты точек  $A, B, D$  и  $C$

$x$	$y$
$A + 6060530$	$- 96770$
$B + 6023434$	$- 97561$
$D + 6022857$	$- 65042$
$C + 6059956$	$- 64515$

Прямая  $ac$ , очевидно, имеет абсциссу 6059 км, а прямая  $bd$  — 6024. С достаточной точностью:  $Aa = 1530$  м;  $Cc = 956$  м;  $Bb = 566$  м;  $Dd = 1143$  м. Далее соображаем ординаты линий  $a_1b_1$  и  $c_1d_1$ , параллельных оси абсцисс и ближайших к западной и восточным рамкам нашего планшета. Мы имеем:  $y_0 = -96$  км;  $y_w = -64$  км. Следовательно:  $Aa_1 = 770$  м;  $Bb_1 = 1561$  м;  $Cc_1 = 515$  м;  $Dd_1 = 1042$  м. Построив прямоугольник  $a_0b_0d_0c_0$ , далее делим  $a_0c_0$  и  $b_0d_0$  на 32 части, а отрезки  $a_0b_0$  и  $c_0d_0$  — на 35 частей; остаются точки подразделений соединить параллельными прямыми. Если планшет приходится в перекрытии зон координат Гаусса-Крюгера, то на нем наносят километровую сетку как для



Черт. 71

своей, так и для смежной зоны; дело сводится к подсчету долгот точек  $A$ ,  $B$ ,  $D$  и  $C$  относительно осевого меридиана не своей, а смежной зоны; по этим долготам и широтам точек  $A$ ,  $B$ ,  $D$  и  $C$  из таблиц выписывают для этих точек (или выполняют указанным выше образом интерполирование) прямоугольные координаты  $x$  и  $y$ , которые, очевидно, будут относиться к смежной зоне. Все остальное выполняется, как уже указано выше. Километровая сетка в смежной зоне не вычерчивается, показываются лишь пересечения линий этой сетки с рамками планшета, или так называемые «выходы» линий этой сетки смежной зоны.

Так как масштаб проекции Гаусса-Крюгера может на краю шестиградусной зоны иметь значение  $1:1800$ , то, очевидно, в отрезках  $Bb_1$ ,  $Aa$ ,  $Dd_1$ , ... мы делаем максимальную ошибку в 2 м, что, конечно, совершенно не существенно.

По существу изложенным нанесением километровых линий представлен и вопрос о нанесении прямоугольной сетки в географическую. Но представим себе, что имеем задачу на лист карты  $ABDC$ , построенной в многогранной проекции, нанести линию  $GH$  (черт. 72), заданную ординатой  $y$  в проекции Гаусса-Крюгера.

Чтобы нанести точку  $G$ , поступим так:

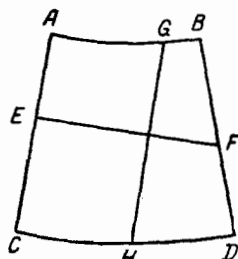
- 1) введем временно  $Y_g = y - \frac{1}{6} \frac{y^3}{R^2}$ , где  $R$  относится к широте  $B_1$  линии  $AB$ ;
- 2) далее напишем

$$l'' = (2)_1 Y_g \sec B_1 \left( 1 + \frac{Y_g^2 \operatorname{tg}^2 B_1}{6N_1^2} \right),$$

причем  $l$  — долгота точки  $G$  от осевого меридиана той зоны, в системе которой дано  $y$ . Далее, вводя обратно  $y$

$$N_1 \frac{l''}{\rho''} \cos B_1 = y \left[ 1 - \frac{y^2 (1 - l_1^2)}{6N_1^2} \right]. \quad (482)$$

Вычислив по последней формуле пятизначными логарифмами  $N_1 \frac{l''}{\rho''} \cos B_1$  и помня, что эта величина есть дуга параллели, выбираем



Черт. 72

из таблиц дуг параллелей дугу  $S$  параллели под широтой  $B_1$ , соответствующую разности долгот  $L_{BD} - L_0$ , где  $L_0$  — долгота осевого меридиана, а  $L_{BD}$  — долгота рамки  $BD$ . Разность  $[N_1 \frac{l''}{\rho''} \cos B_1 - S]$  откладываем по  $BA$ , как по прямой, до точки  $G$ , если осевой меридиан приходится восточнее  $BD$ ; как поступить в других случаях, легко сообразить по чертежу.

Точка  $H$  наносится аналогично, вычислив пятизначными логарифмами

$$N_2 \frac{l''}{\rho''} \cos B_2 = y \left( 1 - \frac{y^2 (1 - t^2)}{6N_2^2} \right),$$

причем под  $B_2$  понимается широта параллели  $DC$ .

Пусть требуется нанести линию  $EF$ , заданную ее абсциссой  $x$  в проекции Гаусса. Можем принять  $X = x$ . По  $X$  находим из таблиц меридианных дуг широту  $B_f$ , которую, конечно, не следует смешивать с широтой точки  $F$ .

Из формулы (387) пишем

$$B_f - B = \frac{V^2 t}{2\rho''} (l''_0 \cos B)^2 \left\{ 1 + \frac{(l''_0 \cos B)^2}{12\rho''^2} (5 - t^2) \right\},$$

понимая под  $B$  широту точки  $F$ .

Далее

$$B_f - B = \frac{V_f^2 l''^2_0 \sin 2B_f}{4\rho''} \left\{ 1 + \frac{(l''_0 \cos B_f)^2}{12\rho''^2} (5 - t^2) \right\} - \frac{l''^4_0 \sin 2B_f \cos 2B_f}{8\rho''^3};$$

$$B_f - B = \frac{V_f^2 l''^2_0 \sin 2B_f}{4\rho''} \left\{ 1 + \frac{5l''^2_0 \cos^2 B_f - l''^2_0 \sin^2 B_f}{12\rho''^2} - \frac{(\cos^2 B_f - \sin^2 B_f) l''^2_0}{2\rho''^2} \right\};$$

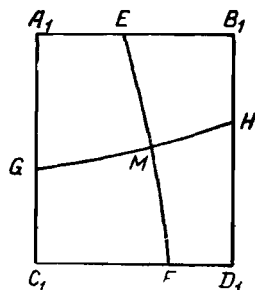
$$B_f - B = \frac{V_f^2 l''^2_0 \sin 2B_f}{4\rho''} \left\{ 1 - \frac{l''^2_0 \cos^2 B_f (1 - 5 \operatorname{tg}^2 B_f)}{12\rho''^2} \right\}. \quad (483)$$

В (483) величина  $l_0$  есть долгота  $BD$  от осевого меридиана, т. е. по выше примененному обозначению

$$l_0 = L_{BD} - L_0.$$

Рассчитав по (483) широту  $B$ , далее находим  $B - B_2$  и, умножая  $(B - B_2)$  на длину секунды меридиана под широтой  $B_2$ , получаем отрезок  $FD$ . Аналогично рассчитывается широта точки  $E$ , но в (483) вместо  $l_0$  нужно подставить  $l_w = L_{AC} - L_0$ . Понятно, что  $B_f$ , найденное при вычислении точки  $F$ , остается неизменным и для точки  $E$ .

Если требуется вставить географическую сеть в прямоугольную, то можно дать следующие формулы. Пусть меридиан  $EF$  с долготой  $l'$  относительно осевого меридиана должен быть нанесен на прямоугольную рамку  $A_1B_1D_1C_1$  (черт. 73), построенную в проекции Гаусса. В качестве данных имеем  $l$  и  $x_1$ , понимая под  $x_1$  абсциссу ли-



Черт. 73



нии  $A_1B_1$ . Не различая  $x_1$  от  $X_1$ , т. е. от прямоугольной сфероидической абсциссы точки  $B_1$  или  $A_1$ , найдем по  $X_1$  из таблицы меридианных дуг значение широты  $B_f$ .

Теперь из (I) § 37 имеем

$$V = N_f \cos B_f \frac{l'''}{\rho''} + \frac{1}{3} N_f \frac{l'''^3}{\rho''^3} \sin^2 B_f \cos B_f.$$

Далее

$$y = N_f \cos B_f \frac{l'''}{\rho''} + \frac{1}{3} N_f \frac{l'''^3}{\rho''^3} \sin^2 B_f \cos B_f + \frac{1}{6} \frac{N_f^3}{R^2} \frac{\cos^3 B_f l'''^3}{\rho''^3},$$

$$y = \frac{N_f}{\rho''} l'' \cos B_f \left[ 1 + \frac{l''^2 \cos^2 B_f}{6 \rho''^2} (1 + 2t^2) \right]. \quad (484)$$

Получением ординаты  $y$  точки  $E$  по (484) вопрос построения этой точки и заканчивается.

Если требуется нанести точку  $H$  (черт. 73), заданную ее ординатой  $y_1$  и широтой  $B$ , то, следовательно, вопрос сводится к нахождению абсциссы  $x_H$  точки  $H$ . Мы пишем

$$B_f - B = \frac{y_1^2 t \varphi''}{2MN},$$

с ошибкой менее  $0'',08$ .

Найдем по  $B_f$  соответствующую меридианную дугу  $X_f$ , т. е. абсциссу  $X$  точки  $H$  на сфероиде. Пренебрегая теперь различием  $x_H$  и  $X$ , напишем

$$x_H = X = X_f.$$

Таким же образом будет найдена абсцисса точки  $G$ . На параллели  $GH$  следует пайти еще хотя бы одну точку  $M$ , чтобы построить эту линию  $GH$  с учетом ее кривизны. Точку  $M$  можем задать ее широтой  $B$  и долготой. Тогда по таблицам можно найти абсциссу и ординату точки  $M$ .

Вообще, целесообразное применение приведенных здесь упрощенных формул, однако дающих достаточную для графических построений точность, решает задачу вставки координатных линий проекции Гаусса-Крюгера в географическую сетку и обратную задачу нанесения тех или других меридианов и параллелей в прямоугольную рамку в проекции Гаусса-Крюгера.

### § 60. Вычисление редуций расстояний и направлений

В триангуляции I класса для расстояний  $s \leq 75$  км и для  $y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} < 200$  км, имеем формулу (450)

$$\lg d - \lg s = \frac{\mu}{2} \left( \frac{y_m}{R_m} \right)^2 + \frac{\mu}{24} \frac{\Delta y^2}{R_m^2} - \frac{\mu}{12} \left( \frac{y_m}{R_m} \right)^4;$$

$$\Delta y = y_2 - y_1.$$

При сторонах  $s < 75$  км и  $y_m < 112$  км работает формула

$$\lg d - \lg s = \frac{\mu}{2} \left( \frac{y_m}{R_m} \right)^2 + \frac{\mu}{24} \frac{\Delta y^2}{R_m^2} \quad (452)$$

В триангуляции II класса применяем формулу (452), но с заменой в ней  $R_m$  через  $R_1$ .

В сетях II и III класса при  $s < 15$  км применяется формула

$$\lg d - \lg s = \frac{\mu}{2} \left( \frac{y_m}{R_1} \right)^2.$$

При применении (450) к редуцированию выходной стороны базисной сети I класса, имея в точке  $P_1$  значения  $x_1, y_1, s_{1,2}, \gamma_1, A_{1,2}$  и  $m_1$  (т. е. сделав переход от  $B_1$  и  $L_1$  к  $x_1$  и  $y_1$  и вычислив  $\gamma_1$ ), вычисляют с пятью знаками

$$\Delta y_0 = s_{1,2} \sin (A_{1,2} - \gamma_1) m_1,$$

$$y_m = y_1 + \frac{\Delta y_0}{2}$$

и с тремя знаками

$$(\Delta \varphi)' = \frac{(1)_1}{60} s_{1,2} \cos A_{1,2}; \quad \lg \frac{(1)_1}{60} = 6.732 - 10;$$

$$\varphi_m = B_1 + \frac{(\Delta \varphi)'}{2}.$$

При применении (452) в триангуляции II класса отпадает вычисление  $\varphi_m$ , а  $\Delta y_0$  вычисляют четырехзначными логарифмами.

В полигонометрии I класса следует редуцирование длины звеньев (главных сторон) выполнять, применяясь к формулам и к порядку для редуцирования выходных сторон триангуляции I класса; в полигонометрии II класса — применяясь к формулам для редуцирования сторон в триангуляции II класса.

Редукция направления или «поправка за кривизну» вычисляется по приводимым ниже формулам.

1. В триангуляции I класса при  $s < 50$  км и при  $y_m < 200$  км

$$\left. \begin{aligned} r_{1,2} &= \psi_2 - \psi_1; & \Delta x &= x_2 - x_1; & \Delta y &= y_2 - y_1 \\ \psi_1 &= \frac{\rho''}{2} \frac{\Delta x}{R_m} \frac{y_m}{R_m} & \left(1 - \frac{1}{3} \frac{y_m^2}{R_m^2}\right) &+ \frac{\eta_m^2 t_m \rho''}{R_m} \Delta y \left(\frac{y_m}{R_m}\right)^2 \\ \psi_2 &= \rho'' \frac{\Delta x}{12 R_m^2} \frac{\Delta y}{R_m} \end{aligned} \right\} \quad (462)$$

Членом с  $\eta^2$  в  $\psi_1$  можно пренебрегать только при  $y_m < 120$  км и  $s < 30$  км.

В триангуляции I класса формуле (462) следует придать такой вид

$$\begin{aligned} r''_{1,2} &= \frac{\rho''}{6} \frac{(x_1 - x_2)(2y_1 + y_2)}{R_m^2} - \frac{(x_1 - x_2)(y_2 + y_1)^3 \rho''}{48 R_m^4} - \\ &\quad - \frac{\eta_m^2 t_m \rho''}{R_m} \Delta y \left(\frac{y_m}{R_m}\right)^2. \end{aligned} \quad (465)$$

2. В триангуляции II класса при  $s \geq 12$  км

$$\begin{aligned} r''_{1,3} &= \frac{\rho''}{6} \frac{(x_1 - x_2)(2y_1 + y_2)}{R_1^2} = \\ &= \frac{\rho''}{2} \frac{(x_1 - x_2)}{R_1^2} \left(y_1 + \frac{\Delta y}{3}\right) \dots (464) \dots \Delta y = y_2 - y_1. \end{aligned}$$

3. В триангуляции II класса при  $s < 12$  км, и в триангуляции III класса

$$r''_{1,2} = \frac{(x_1 - x_2) y_m}{R_1^2} \frac{\rho''}{2}; \quad r_{1,2} = -r_{2,1}.$$

Для пользования приведенными формулами для  $r_{1,2}$  необходимо знать *приближенные* значения  $x$  и  $y$ . В триангуляции I класса  $x$  следует знать с ошибкой, *не большей 2 м*, а  $y$  — с ошибкой, *не большей 10 м*. В триангуляции II класса ошибка в  $\Delta x$  не должна быть более 8 м, а ошибка  $y$  более 50 м. Эти строгие требования по отношению к триангуляции I класса вызывают такой порядок получения в ней *приближенных* значений координат  $x$  и  $y$ :

1) получив, как указано выше,  $x_1, y_1, \gamma_1, y_2, T_{1,2}$  для выходной стороны и  $\lg d_{1,2}$  для нее, далее с измеренными углами в треугольниках триангуляции вычисляем значения  $T^\circ$  для всех сторон триангуляции, значения  $s^\circ$  длин сторон всех треугольников и приращения  $\Delta x_0$  и  $\Delta y_0$  плоских прямоугольных координат по каждой стороне триангуляции с последующим выводом по последним приближенным координат  $x^\circ$  и  $y^\circ$ ;

2) с этими величинами  $x^\circ$  и  $y^\circ$  вычисляем приближенные значения

$$r_{i,k}^\circ = \frac{x_i^\circ - x_k^\circ}{2R^2} \frac{y_i^\circ + y_k^\circ}{2} \rho''$$

для всех сторон триангуляции, включая и выходную ее сторону;

3) исправив измеренные углы в треугольниках триангуляции редукциями ( $r_{i,k}^\circ - r_{in}^\circ$ ), с такими отнесенными на плоскость углами вычисляем вновь: значения  $T'$  для всех сторон триангуляции, длины  $d'$  всех сторон триангуляции и, исходя от  $x_1, y_1, T'_{1,2} = A_{1,2} - \gamma_1 + r_{1,2}$  и  $d_{1,2}$ , вычисляем с этими значениями  $T'$  и  $d'$  плоские прямоугольные координаты  $x'$  и  $y'$  всех пунктов триангуляции. С этими координатами  $x'$  и  $y'$  приступаем к вычислению редукций направлений по формуле (465).

При обработке триангуляции II класса достаточно произвести только вычисление приближенных координат  $x^\circ$  и  $y^\circ$ , выполнив, следовательно, только один первый пункт из числа вышеуказанных трех пунктов, выполняемых при обработке триангуляции I класса. С величинами  $x^\circ$  и  $y^\circ$  приступают к вычислению редукций  $r$  по формуле (464).

## Глава VII

# ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ЭЛЛИПСОИДА НА ШАРЕ К РЕШЕНИЮ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПО МЕТОДАМ ГАУССА

### § 61. Основные формулы

Решение геодезической задачи, изложенное в главе IV, т. е. решение, основанное на разложении в ряды разностей широт, долгот и азимутов с вычислениями коэффициентов этих рядов по аргументам средней широты и среднего азимута, работает на те же предельные расстояния, что и те способы решения геодезической задачи, которые будут изложены в этой главе и которые основаны на приложении Гауссом к задаче геодезии теории конформного отображения эллипсоида на шаре. Другими словами, в практическом смысле эта глава ничего не прибавит. Однако методы Гаусса имеют крупное общенаучное значение и поэтому представляют для геодезиста особый интерес, тем более, что эти методы включают в себя важные моменты для картографии; кроме того, возможно дальнейшее развитие в использовании методов Гаусса — именно потому, что они вытекают из большой научной мысли.

Мы полагаем, что общематематическое изложение вопроса о конформном отображении эллипсоида на шаре известно, и поэтому позволим себе подойти к этому вопросу не совсем так, как это делается в математике. Именно, мы заранее поставим условие, чтобы меридианы эллипсоида изображались меридианными большими кругами на шаре, а параллели эллипсоида — параллелями сферы.

В конформном отображении эллипсоида на шаре масштаб изображения, являясь лишь функцией координат точки, остается в данной точке постоянным, т. е. не зависит от азимута линейного элемента поверхности, для которого он рассчитывается. С другой стороны, из теории картографических проекций известно, что если два бесконечно малых элемента одной поверхности, проведенных в некоторой ее точке под прямым углом, изображаются, при принятом законе изображения этой поверхности на другой, двумя элементами этой другой поверхности, образующими друг с другом также прямой угол, то по направлению одного из таких элементов имеем наибольший масштаб  $m$  в рассматриваемой точке, а по направлению другого элемента имеем наименьший масштаб  $n$  изображения в той же точке. В случае конформности изображения  $m$  должно равняться  $n$ ; условие

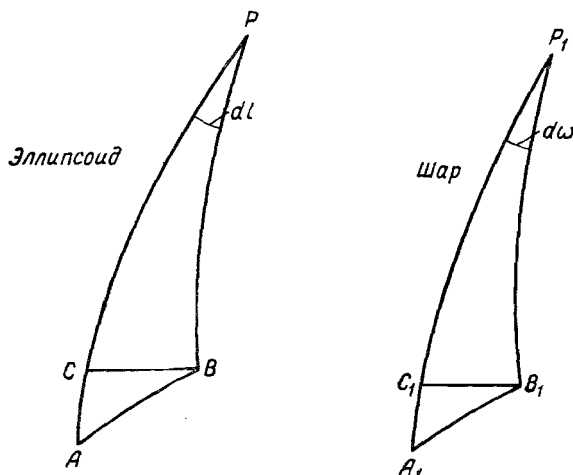
$$m = n$$

является необходимым и достаточным для конформности изображения.

Раз мы поставили условие, чтобы меридианы эллипсоида изображались меридианными большими кругами на шаре, а параллели эллип-

соида — параллелями шара, то очевидно, что взаимно перпендикулярные элементы меридиана и параллели в данной точке на поверхности эллипсоида изобразятся на шаре также взаимно перпендикулярными направлениями; следовательно, если под  $m$  будем понимать масштаб по меридиану, а под  $n$  — масштаб по параллели, то равенство  $m = n$  и приведет нас к изображению эллипсоида на шаре, которое будет обладать свойствами конформности и будет, следовательно, одним из бесчисленно возможных конформных отображений эллипсоида на шаре.

Пусть на черт. 74 точки  $A$  и  $B$  эллипсоида имеют геодезические широты и долготы:  $B, L$  и  $B_1, L_1$ , причем  $B_1 = B + dB$  и  $L_1 = L + dL$ .



Черт. 74

На шаре пусть точки  $A$  и  $B$  изображаются соответственно точками  $A_1$  и  $B_1$ , полюс эллипсоида  $P$  — полюсом  $P_1$ . Меридианные эллипсы  $PA$  и  $PB$  изображаются меридианными большими кругами на шаре  $P_1A_1$  и  $P_1B_1$ , параллель  $BC$  изображается на шаре параллелью  $B_1C_1$ . Сферические широты и долготы точек  $A_1$  и  $B_1$  назовем соответственно:  $U, \omega$ ;  $U + dU, \omega + d\omega$ .

Масштаб  $m$  по меридиану вычислится так

$$m = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{RdU}{MdB} \quad (485)$$

( $R$  — радиус шара).

Масштаб  $n$  по параллели напишется так

$$n = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{R d\omega \cos U}{N dl \cos B}. \quad (486)$$

Приравнивая  $m$  и  $n$ , получаем условие конформности

$$\frac{dU}{\cos U} = \frac{M}{N} \frac{dB}{\cos B} \frac{d\omega}{dl}. \quad (487)$$

Но поставленное условие, чтобы меридиан эллипсоида изображался меридианом шара, а параллель эллипсоида — параллелью шара, приводит к тому, что  $\frac{d\omega}{dl}$  должна быть постоянной величиной. Таким образом,

$$\omega = \alpha L + \beta.$$

Если условиться считать на шаре нуль долгот на том его меридиане, который изображает нулевой меридиан эллипсоида, то, очевидно,  $\beta = 0$ . Итак

$$\omega = \alpha L. \quad (488)$$

Теперь (487) перепишется так

$$\begin{aligned} \frac{dU}{\cos U} &= \alpha \frac{M}{N \cos B} = \alpha \frac{(1 - e^2) dB}{(1 - e^2 \sin^2 B) \cos B} = \\ &= \alpha \frac{1 - e^2 \sin^2 B - e^2 \cos^2 B}{(1 - e^2 \sin^2 B) \cos B} dB; \\ \frac{dU}{\cos U} &= \alpha \left\{ \frac{dB}{\cos B} - \frac{e^2 \cos B dB}{1 - e^2 \sin^2 B} \right\} = \alpha \left\{ \frac{dB}{\cos B} - \frac{ed(e \sin B)}{1 - e^2 \sin^2 B} \right\}; \\ \frac{dU}{\cos U} &= \alpha \left\{ \frac{dB}{\cos B} - \frac{e}{2} \frac{d(e \sin B)}{1 - e \sin B} - \frac{e}{2} \frac{d(e \sin B)}{1 + e \sin B} \right\}. \end{aligned}$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем

$$\lg \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{U}{2} \right) = \alpha \left[ \lg \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) + \frac{e}{2} \lg \frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B} \right] - \lg k,$$

понимая под  $\lg k$  произвольное постоянное интегрирования. Окончательно:

$$\omega = \alpha L$$

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{U}{2} \right) = \frac{1}{k} \operatorname{tg}^{\alpha} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \left\{ \frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B} \right\}^{\frac{\alpha e}{2}}. \quad (489)$$

Уравнения (489) выражают закон изображения эллипсоида на шаре, причем в этих уравнениях мы имеем два произвольных постоянных:  $\alpha$  и  $k$ , не считая радиуса шара  $R$ , остающегося произвольным.

## § 62. Выбор произвольных постоянных

Этот выбор для случая изображения на шаре не всего, а некоторой части эллипсоида, производим таким образом, чтобы формулы конформного отображения позволили с возможной простотой, при сохранении высокой точности, делать перенос расстояний и направлений с эллипсоида на шар. Для этого поставим условия: 1) чтобы масштаб  $m$  для некоторой широты  $P$  равнялся точно единице; 2) чтобы масштаб  $m$  к югу и к северу от параллели с широтой  $P$  изменялся возможно медленнее. Чем медленнее будет изменяться масштаб вместе с возрастанием  $B - P$ , тем более будет протяжение с юга на север той зоны эллипсоида, для всех точек которой масштаб  $m$  можно будет считать *практически* постоянным (по середине этой зоны будет проходить параллель с широтой  $P$ ). Постоянство же масштаба позволит сфероидические элементы принимать за сферические (если  $m = 1$ ). Указанные требования к выбору постоянных выражаются так

$$\left( \frac{dm}{dB} \right)_0 = 0; \quad \left( \frac{d^2 m}{dB^2} \right)_0 = 0; \quad m_0 = \alpha \frac{R \cos U_0}{N_0 \cos P} = 1, \quad (490)$$

причем значок «0» при производных означает, что они вычисляются при  $B = P$ , а через  $U_0$  обозначена широта на шаре, соответствующая широта  $P$  эллипсоида.

Из (486) имеем

$$m = \alpha \frac{R \cos U}{N \cos B}.$$

Отсюда

$$\frac{dm}{dB} = m \frac{d \ln m}{dB} = m \frac{d}{dB} (\ln \alpha + \ln R + \ln \cos U - \ln N - \ln \cos B),$$

$$\frac{dm}{dB} = m \left( -\operatorname{tg} U \frac{dU}{dB} + \operatorname{tg} B - \frac{e^2 \sin B \cos B}{1 - e^2 \sin^2 B} \right).$$

Но из (487)

$$\frac{dU}{dB} = \alpha \frac{M \cos U}{N \cos B}.$$

Поэтому

$$\operatorname{tg} U \frac{dU}{dB} = \alpha \frac{M \sin U}{N \cos B}.$$

Далее

$$\operatorname{tg} B - \frac{e^2 \sin B \cos B}{1 - e^2 \sin^2 B} = \frac{\sin B}{\cos B} \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \sin^2 B} = \frac{M \sin B}{N \cos B},$$

$$\frac{dm}{dB} = \frac{mM}{N \cos B} (-\alpha \sin U + \sin B). \quad (491)$$

Чтобы вторая производная  $\frac{d^2 m}{dB^2}$  при  $B = P$  была равна нулю, достаточно потребовать, чтобы  $\frac{d}{dB} (-\alpha \sin U + \sin B) = 0$ , при  $B = P$ . Но

$$\begin{aligned} \frac{d}{dB} (-\alpha \sin U + \sin B) &= -\alpha \cos U \frac{dU}{dB} + \\ &+ \cos B = -\alpha^2 \frac{M}{N} \frac{\cos^2 U}{\cos B} + \cos B. \end{aligned}$$

Следовательно

$$-\alpha^2 \frac{M_0}{N_0} \frac{\cos^2 U_0}{\cos P} + \cos P = 0 \quad (492)$$

или

$$\alpha^2 \cos^2 U_0 = \frac{N_0}{M_0} \cos^2 P = \frac{1 - e^2 \sin^2 P}{1 - e^2} \cos^2 P. \quad (493)$$

По вычитании же обеих частей последнего уравнения из  $\alpha^2$

$$\alpha^2 \sin^2 U_0 = \alpha^2 - \frac{1 - e^2 \sin^2 P}{1 - e^2} \cos^2 P. \quad (494)$$

Из (491) следует, что

$$\alpha \sin U_0 = \sin P, \quad (495)$$

вследствие чего (493) переписывается так

$$\alpha^2 = \sin^2 P + \frac{1 - e^2 \sin^2 P}{1 - e^2} \cos^2 P = 1 - \cos^2 P + \frac{(1 - e^2 \sin^2 P)}{1 - e^2} \cos^2 P,$$

$$\alpha^2 = 1 - \frac{\cos^2 P}{1 - e^2} (1 - e^2 - 1 + e^2 \sin^2 P) = 1 + \frac{e^2 \cos^4 P}{1 - e^2}. \quad (496)$$

По уравнению (496) определяем сперва  $\alpha$ ; затем из (495) рассчитываем  $U_0$  и, применяя (489) к широте  $P$ , определяем  $k$

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{U_0}{2} \right) = \frac{1}{k} \operatorname{tg}^{\alpha} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{P}{2} \right) \left( \frac{1 - e \sin P}{1 + e \sin P} \right)^{\frac{\alpha e}{2}}. \quad (497)$$

Уравнение  $m_0 = 1$  напишется, на основании (493) и (486), так

$$\frac{R}{N_0} \frac{\alpha \cos U_0}{\cos P} = 1 = \frac{R}{a} \frac{1 - e^2 \sin^2 P}{\sqrt{1 - e^2}},$$

т. е.

$$R = \frac{a \sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \sin^2 P} = \sqrt{M_0 N_0}. \quad (498)$$

Радиус шара  $R$  равен среднему радиусу кривизны эллипсоида под широтой  $P$ . Широту  $P$ , для которой масштаб равен единице и для которой  $\frac{dm}{dB}$  и  $\frac{d^2 m}{dB^2}$  равны нулю, называют *нормальной широтой*.

### § 63. Выражение масштаба $m$ в виде ряда

Более выгодно иметь дело не с  $m$ , а с  $\lg m$ . Поэтому мы напишем

$$\begin{aligned} \lg m = \lg m_0 &+ \left( \frac{d \lg m}{dB} \right)_0 (B - P) + \left( \frac{d^2 \lg m}{dB^2} \right)_0 \frac{(B - P)^2}{2} + \\ &+ \left( \frac{d^3 \lg m}{dB^3} \right)_0 \frac{(B - P)^3}{6} + \left( \frac{d^4 \lg m}{dB^4} \right)_0 \frac{(B - P)^4}{24} + \dots \end{aligned}$$

Конечно,

$$\left( \frac{d \lg m}{dB} \right)_0 = 0 \text{ и } \left( \frac{d^2 \lg m}{dB^2} \right)_0 = 0.$$

На основании (485) и (491)

$$Mm = R \frac{dU}{dB}; \quad \frac{d \lg m}{dB} = \frac{M}{N \cos B} (-\alpha \sin U + \sin B) = Fg,$$

причем

$$F = \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2 B) \cos B}; \quad g = -\alpha \sin U + \sin B.$$

Применяя теперь формулу  $n$ -й производной от произведения двух функций, мы получим

$$\frac{d^3 \lg m}{dB^3} = F'' g + 2g' F' + Fg''.$$

Но при  $B = P$  непременно  $g = 0$  и  $g' = 0$ , следовательно,

$$\left( \frac{d^3 \lg m}{dB^3} \right)_0 = F_0 g''_0.$$

Мы имеем

$$g' = -\alpha \cos U \frac{dU}{dB} + \cos B = -\alpha \cos Um \frac{M}{R} + \cos B.$$



Отсюда дальнейшим дифференцированием находим

$$g'' = \alpha \sin Um^2 \frac{M^2}{R^2} - \alpha \cos U \frac{dm}{dB} \frac{M}{R} - \alpha \cos Um \frac{dM}{R dB} - \sin B.$$

Рассчитывая  $g''$  при  $B = P$  и  $U = U_0$ , напишем

$$g''_0 = \sin P \frac{M_0}{N_0} - \frac{\alpha \cos U_0}{\sqrt{M_0 N_0}} \frac{3ae^2 (1 - e^2) \sin P \cos P}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 P)^5}} - \sin P,$$

$$g''_0 = \sin P \frac{M_0}{N_0} - \frac{3\alpha \cos U_0 M_0 N_0^2 e^2 \sin P \cos P}{a^2 \sqrt{M_0 N_0}} - \sin P.$$

Но из (486)

$$\alpha R \cos U_0 = N_0 \cos P,$$

поэтому

$$g''_0 = \sin P \frac{M_0}{N_0} - \frac{3e^2 N_0^2 \sin P \cos P}{a^2} - \sin P;$$

$$g''_0 = - \frac{4e^2 \sin P \cos^2 P}{1 - e^2 \sin^2 P}; \quad (499)$$

$$F_0 g''_0 = - \frac{4e^2 (1 - e^2) \sin P \cos P}{(1 - e^2 \sin^2 P)^2} = \left( \frac{d^3 \lg m}{dB^3} \right)_0. \quad (500)$$

Теперь имеем

$$\lg m = - \frac{2}{3} \mu \frac{e^2 (1 - e^2) \sin P \cos P}{(1 - e^2 \sin^2 P)^2} (B - P)^3 + \dots \quad (501)$$

Полагая  $P = 55^\circ$  и  $B - P = 1 \frac{1}{4}^\circ$ , из (501) найдем

$$\lg m = 0.00000001.$$

Следовательно, в пределах пояса эллипсоида, заключенного между параллелями с широтами  $P + 1^\circ$  и  $P - 1^\circ$ , масштаб  $m$  и  $\lg m$  практически можно считать постоянными.

Примем теперь такие обозначения

$$B = P + p,$$

$$U = U_0 + q.$$

Конечно

$$q = p \left( \frac{dU}{dB} \right)_0 + \frac{p^2}{2} \left( \frac{d^2 U}{dB^2} \right) + \dots$$

Из (487)

$$\frac{dU}{dB} = \alpha \frac{M \cos U}{N \cos B}; \quad \left( \frac{dU}{dB} \right)_0 = \sqrt{\frac{N_0}{M_0}} \frac{M_0}{N_0} = \sqrt{\frac{M_0}{N_0}} = \frac{1}{V_0}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U}{dB^2} = & -\alpha^2 \frac{M^2}{N^2} \frac{\sin U \cos U}{\cos^2 B} + \alpha \frac{M}{N} \frac{\cos U \sin B}{\cos^2 B} + \\ & + \frac{\alpha 2 (1 - e^2) e^2 \sin B \cos B}{(1 - e^2 \sin^2 B)^2 \cos B} \cos U; \end{aligned}$$

$$\frac{d^2U}{dB^2} = \alpha \frac{M^2}{N^2} \frac{\cos U}{\cos^2 B} \left[ -\alpha \sin U + \frac{1 - e^2 \sin^2 B}{1 - e^2} \sin B + \right. \\ \left. + \frac{2e^2 \sin B \cos^2 B}{1 - e^2} \right];$$

$$\frac{d^2U}{dB^2} = \alpha \frac{M^2}{N^2} \frac{\cos U}{\cos^2 B} \left[ -\alpha \sin U + \frac{1 - e^2 \sin^2 B + 2e^2 \cos^2 B}{1 - e^2} \sin B \right];$$

$$\left( \frac{d^2U}{dB^2} \right)_0 = \frac{M_0}{N_0} \frac{\sqrt{M_0}}{\sqrt{N_0}} \sec P \left( -\sin P + \frac{1 - e^2 \sin^2 P + 2e^2 \cos^2 P}{1 - e^2} \sin P \right);$$

$$\left( \frac{d^2U}{dB^2} \right)_0 = \frac{M_0}{N_0} \frac{\sqrt{M_0}}{\sqrt{N_0}} \frac{\operatorname{tg} P}{1 - e^2} [-1 + e^2 + 1 - e^2 + 3e^2 \cos^2 P];$$

$$\left( \frac{d^2U}{dB^2} \right)_0 = \frac{M_0}{N_0} \frac{\sqrt{M_0}}{\sqrt{N_0}} \frac{\operatorname{tg} P}{1 - e^2} 3e^2 \cos^2 P;$$

$$\left( \frac{d^2U}{dB^2} \right)_0 = \frac{3\eta_0^2 \operatorname{tg} P}{V_0^3}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{V_0} p + \frac{3}{2} \frac{\eta_0^2}{V_0^3} \operatorname{tg} P p^2; \\ V_0 q &= p + \frac{3}{2} \frac{\eta_0^2}{V_0^3} \operatorname{tg} P p^2; \\ V_0 q - p &= \frac{3}{2} \frac{\eta_0^2}{V_0^3} \operatorname{tg} P p^2. \end{aligned} \quad (502)$$

С ошибкой на величины порядка  $\eta^2 p^3$ .

$$\left. \begin{aligned} V_0^2 q^2 &= p^2 \\ p^2 - q^2 &= \eta_0^2 q^2 \end{aligned} \right\}. \quad (503)$$

Заменяя в (501)  $p = B - P$  через  $q$ , напишем

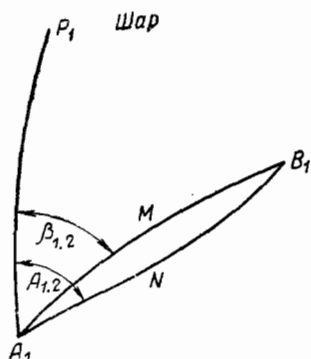
$$\begin{aligned} \lg m &= -\frac{2}{3} \mu \frac{e^2 (1 - e^2) \sin P \cos P}{(1 - e^2 \sin^2 P)^2} V_0^3 q^3 = \\ &= -\frac{2}{3} \mu \frac{e^2 (1 - e^2) (1 - e^2 \sin^2 P)^{\frac{3}{2}}}{(1 - e^2 \sin^2 P)^2 (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} q^3, \end{aligned}$$

или окончательно

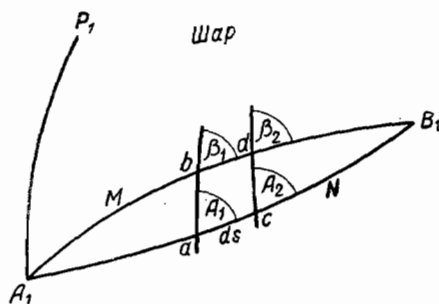
$$\left. \begin{aligned} \lg m &= -\frac{2}{3} \mu \frac{e^2}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{\sin P \cos P}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 P}} q^3 = \beta q^3 \\ \beta &= -\frac{2}{3} \mu \frac{e^2}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{\sin P \cos P}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 P}} \end{aligned} \right\}. \quad (504)$$

## § 64. Поправка азимута

Пусть точки  $A_1$  и  $B_1$  (черт. 75) есть изображения на шаре точек  $A$  и  $B$  эллипсоида. Соединим точки  $A_1$  и  $B_1$  дугой большого круга  $A_1MB_1$ ; эта дуга не совпадает с изображением геодезической линии  $AB$ , которое представляется сложной кривой  $A_1NB_1$ , имеющей двоякую кривизну. Азимут  $A_{1,2}$  на шаре кривой  $A_1NB_1$ , конечно, в силу конформности изображения, будет в точности равен азимуту в  $A$  геодезической линии  $AB$  на эллипсоиде, но этот азимут  $A_{1,2}$  будет отличаться от азимута  $\beta_{1,2}$  дуги большого круга  $A_1MB_1$  в  $A_1$ . Очевидно, на сфере мы должны пользоваться азимутами  $\beta$ , так как соединения точек на сфере будут выполняться, конечно, дугами больших кругов. Поэтому нам нужно знать поправку азимута, равную  $\beta_{1,2} - A_{1,2}$ . Вопрос о нахождении этой поправки дадим с точностью, отвечающей небольшим расстояниям  $AB$ .



Черт. 75



Черт. 76

Черт. 76 относится к шару; на нем  $A_1acB_1$  — изображение геодезической линии  $AB$ ;  $A_1b dB_1$  — дуга большого круга;  $ab$  и  $cd$  — два меридиана на шаре с разностью долгот  $d\omega$ ;  $A_1$  и  $A_2$  — сфероидические азимуты в  $a$  и  $c$ .

Пусть на эллипсоиде точке  $a$  шара соответствует точка с широтой  $B$ ; пусть на эллипсоиде точки, соответствующие точкам  $a$  и  $c$ , имеют разность долгот  $dl$  и разность широт  $dB$ . Мы, конечно, имеем

$$A_2 - A_1 = dl \sin B, \quad \beta_2 - \beta_1^* = \alpha dl \sin U,$$

понимая под  $U$  широту на шаре точки  $b$ , под  $A_2$  и  $A_1$  — азимуты в  $a$  и  $c$ .

Следовательно:  $(\beta_2 - \beta_1) - (A_2 - A_1) = (\alpha \sin U - \sin B) dl$ .

Представим себе теперь цилиндр, касающийся шара по дуге  $A_1b dB_1$ , и, следовательно, имеющий осью диаметр шара, перпендикулярный плоскости большого круга  $A_1B_1$ . Вследствие крайней узости фюзю между кривыми  $A_1b dB_1$  и  $A_1acB_1$  (менее 1 м при  $AB = 200$  км) фигура  $abdc$  и фигура  $A_1bB_1caA_1$  развернутся на таком цилиндре без всякого искажения, причем кривизна кривых по разворачивании этого цилиндра в плоскость обратится в так называемую геодезическую кривизну этих кривых.

Понятно, что при этом большой круг  $A_1B_1$  и отрезки  $ab$  и  $cd$  изображаются прямыми линиями с геодезической кривизной их, равной нулю (черт. 77), а геодезическая кривизна кривой  $A_1acB_1$  будет обусловлена ее второй кривизной. Пусть касательные  $ae$  и  $ce$  в  $a$  и  $c$  к кривой  $A_1acB_1$

\*  $\beta_2$  и  $\beta_1$  суть азимуты на шаре кривой  $A_1MB_1$  в  $b$  и  $d$  (черт. 76).

образуют между собой угол в  $e$ , равный  $\delta$ . Из пятиугольника  $abdce$  получаем

$$180^\circ - \beta_1 + \beta_2 + A_1 + 180^\circ - \delta + 180^\circ - A_2 = 540^\circ$$

и, следовательно,

$$\delta = (\alpha \sin U - \sin B) dl.$$

Получим теперь сперва разность  $\alpha \sin U - \sin B$ . Мы имеем

$$\alpha \sin U = \alpha \sin U_0 + \alpha q \cos U_0 - \alpha \frac{q^2}{2} \sin U_0 \dots q = U - U_0.$$

Из (493):  $\alpha \sin U_0 = V_0 \cos P$ , поэтому напомним далее

$$\alpha \sin U = \sin P + V_0 \cos P q - \frac{q^2}{2} \sin P.$$

С другой стороны

$$\sin B = \sin P + p \cos P - \frac{p^2}{2} \sin P.$$

Отсюда

$$\alpha \sin U - \sin B = \cos P (V_0 q - p) - (q^2 - p^2) \frac{\sin P}{2}.$$

Используя же (502) и (503), получим

$$\alpha \sin U - \sin B = \frac{3}{2} \frac{\eta_0^2}{V_0^2} \sin P p^2 + \eta_0^2 q^2 \frac{\sin P}{2} = 2\eta_0^2 q^2 \sin P. \quad (505)$$

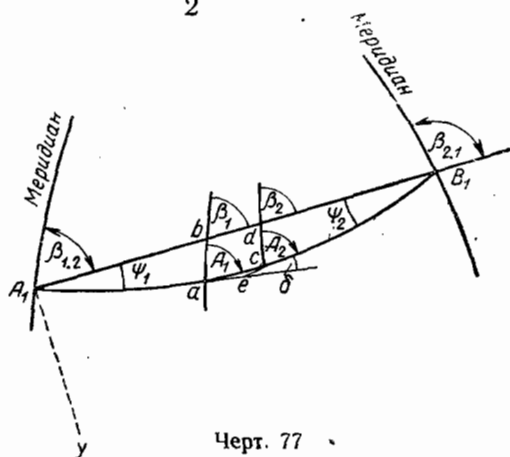
Примем теперь  $A_1$  (черт. 77) за начало прямоугольных плоских координат, ось  $x$  направим по прямой  $A_1 B_1$ , ось  $y$  — по перпендикуляру в  $A_1$  к  $A_1 B_1$ , как показано на черт. 77. Радиус  $\rho$  кривизны кривой  $A_1 a c B_1$  представится такой формулой

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left\{ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= - \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\delta}{dx} = (\alpha \sin U - \sin B) \frac{dl}{dx}.$$

Как увидим ниже,  $\frac{dy}{dx}$  будет малой величиной порядка  $\eta^2 q^2 \frac{s}{R}$ , поэтому  $\left( \frac{dy}{dx} \right)^2$  в выражении знаменателя  $\rho$  откинуто; знак минус взят перед  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  потому, что  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  будет отрицательно. Итак, мы имеем, используя (505)

$$- \frac{d^2 y}{dx^2} = 2\eta_0^2 q^2 \sin P \frac{dl}{dx}. \quad (506)$$



Черт. 77

Но  $dl = \frac{ds \sin A}{N \cos B}$  и поэтому, так как  $dx$  можно не различать от  $ds$

$$\frac{dl}{dx} = \frac{\sin A_1}{N_0 \cos B}$$

или, без внесения в  $\frac{d^2y}{dx^2}$  ощутимой погрешности,

$$\frac{dl}{dx} = \frac{\sin A_1}{N_0 \cos P}.$$

Следовательно,

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\eta_0^2}{N_0} \operatorname{tg} P \sin A_1 q^2. \quad (507)$$

Из (493) и (495)

$$V_0 \operatorname{tg} U_0 = \operatorname{tg} P,$$

поэтому

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\eta_0^2 V_0}{R V_0} \operatorname{tg} U_0 \sin A_1 q^2 = \frac{2\eta_0^2}{R} \operatorname{tg} U_0 \sin \beta_1 q^2,$$

причем  $A_1$  заменено через  $\beta_1$ , так как это даст ошибку порядка  $\eta^4 q^4 \frac{s}{R}$ . Обозначая через  $q_1$  и  $\beta_{1.2}$  значения  $q$  и сферического азимута в точке  $A_1$  и через  $U_1$  широту на шаре точки  $A_1$ , с достаточной приближенностью напишем

$$q = q_1 + \frac{x}{R} \cos \beta_{1.2}; \quad q^2 = q_1^2 + 2q_1 \frac{x}{R} \cos \beta_{1.2};$$

$$\beta_1 = \beta_{1.2} + \frac{x}{R} \sin \beta_{1.2} \operatorname{tg} U_1; \quad \sin \beta_1 = \sin \beta_{1.2} + \frac{x}{R} \sin \beta_{1.2} \cos \beta_{1.2} \operatorname{tg} U_1$$

$$q_2 \sin \beta_1 = \left( q_1^2 + 2q_1 \frac{x}{R} \cos \beta_{1.2} + \frac{x}{R} q_1^2 \cos \beta_{1.2} \operatorname{tg} U_1 \right) \sin \beta_{1.2};$$

причем пренебрегли слагаемым  $2q_1 \frac{x^2}{R^2} \sin \beta_{1.2} \cos^2 \beta_{1.2} \operatorname{tg} U_1$ , которое считаем более высокого порядка при  $x < 100$  км, чем  $\frac{x}{R} q_1^2 \sin \beta_{1.2} \times \times \cos \beta_{1.2} \operatorname{tg} U_1$ . Таким образом, теперь получаем

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\eta_0^2}{R} \operatorname{tg} U_0 \sin \beta_{1.2} \left\{ q_1^2 + 2q_1 \frac{x}{R} \cos \beta_{1.2} + \frac{x}{R} q_1^2 \cos \beta_{1.2} \operatorname{tg} U_1 \right\}. \quad (508)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} -\frac{dy}{dx} &= \frac{2\eta_0^2}{R} \operatorname{tg} U_0 \left( q_1^2 x + q_1 \frac{x^2}{R} \cos \beta_{1.2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x^2}{2R} q_1^2 \cos \beta_{1.2} \operatorname{tg} U_1 \right) \sin \beta_{1.2} + C_1 \\ -y &= \frac{2\eta_0^2}{R} \operatorname{tg} U_0 \left( \frac{q_1^2}{2} x^2 + q_1 \frac{x^3}{3R} \cos \beta_{1.2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x^3}{6R} q_1^2 \cos \beta_{1.2} \operatorname{tg} U_1 \right) \sin \beta_{1.2} + C_1 x + C_2 \end{aligned} \right\}. \quad (509)$$

Назовем через  $\psi_1$  и  $\psi_2$  углы при  $A_1$  и  $B_1$  между кривыми  $A_1acB_1$  и  $A_1bdB_1$ . Из второго уравнения (509) мы получим при  $y=0$  и  $x=0$ , т. е. относя это уравнение к точке  $A_1$ , что постоянное  $C_2=0$ . Относя то же уравнение к точке  $B_1$  и полагая для точки  $B_1$  абсциссу  $x$  равной  $s$ , получим

$$C_1 = -\frac{2\eta_0^2}{R} \operatorname{tg} U_0 \left( \frac{q_1^2}{2} s + q_1 \frac{s^2}{3R} \cos \beta_{1.2} + \frac{s^2}{6R} q_1^2 \cos \beta_{1.2} \operatorname{tg} U_1 \right) \sin \beta_{1.2}.$$

Из первого уравнения (509), относя его к точке  $A_1$ , напомним

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \operatorname{tg} \psi_1 = \psi_1 = \\ &= \frac{2\eta_0^2}{R} \operatorname{tg} U_0 \left( \frac{q_1^2}{2} s + q_1 \frac{s^2}{3R} \cos \beta_{1.2} + \frac{s^2}{6R} q_1^2 \cos \beta_{1.2} \operatorname{tg} U_1 \right) \sin \beta_{1.2}. \end{aligned} \quad (510)$$

Теперь введем обозначение

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \eta_0^2 \operatorname{tg} U_0 q_1^2 \\ k_2 &= \eta_0^2 \operatorname{tg} U_0 q_2^2 \end{aligned} \right\}, \quad (511)$$

$$k_2 = \eta_0^2 \operatorname{tg} U_0 \left( q_1^2 + 2 \frac{s}{R} q_1 \cos \beta_{1.2} \right).$$

Выражение (510) для  $\frac{dy}{dx}$  перепишем так

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \psi_1 &= \psi_1 = \\ &= \frac{\eta_0^2 \operatorname{tg} U_0 s \sin \beta_{1.2}}{3R} \left[ 3q_1^2 + 2q_1 \frac{s}{R} \cos \beta_{1.2} + \frac{s}{R} q_1^2 \cos \beta_{1.2} \operatorname{tg} U_1 \right]. \end{aligned}$$

Далее, называя через  $\beta_{2.1}$  сферический азимут в  $B_1$  кривой  $A_1bdB_1$ , напомним

$$\begin{aligned} 2k_1 \sin \beta_{1.2} + k_2 \sin \beta'_{2.1} &= 2k_1 \sin \beta_{1.2} + k_2 \sin \beta_{1.2} + \\ &+ k_2 \frac{s}{R} \sin \beta_{2.1} \cos \beta_{1.2} \operatorname{tg} U_1; \\ \beta'_{2.1} &= \beta_{2.1} \pm 180^\circ; \\ 2k_1 \sin \beta_{1.2} + k_2 \sin \beta'_{2.1} &= \eta_0^2 \operatorname{tg} U_0 \sin \beta_{1.2} \left\{ 2q_1^2 + q_1^2 + 2 \frac{s}{R} q_1 \cos \beta_{1.2} + \right. \\ &\left. + q_1^2 \frac{s}{R} \cos \beta_{1.2} \operatorname{tg} U_1 + 2 \frac{s^2}{R^2} \cos^2 \beta_{1.2} q_1 \operatorname{tg} U_1 \right\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что с ошибкой на величину  $\frac{2}{3} \eta_0^2 \operatorname{tg} U_0 \operatorname{tg} U_1 \cos^2 \beta \times$   
 $\times \sin \beta \frac{s^3}{R^3} q_1$ .

$$\left. \begin{aligned} \psi''_1 &= \frac{2k_1 \sin \beta_{2.1} + k_2 \sin \beta'_{2.1}}{3} \frac{s}{R} \rho''; \\ \psi'_1 &= \frac{2k_1 \sin A_{1.2} + k_2 \sin A'_{2.1}}{3} \frac{s}{R} \rho'' \\ A'_{2.1} &= A_{1.2} \pm 180^\circ \\ k_1 &= \frac{\eta_0^2}{V_0} \operatorname{tg} P \frac{(q_1^\circ)^2}{(\rho^\circ)^2}; \quad k_2 = \frac{\eta_0^2}{V_0} \operatorname{tg} P \frac{(q_2^\circ)^2}{(\rho^\circ)^2} \\ \beta_{1.2} &= A_{1.2} - \psi_1 \end{aligned} \right\}. \quad (512)$$

Формулами (512) и исчерпывается вопрос поправки азимута при переходе с эллипсоида на шар. Ошибочность этих формул при  $s=150$  км и при  $q_1=2^\circ,5$  не превышает  $0'',0005$ , т. е. вполне достаточна для всех случаев, встречающихся при обработке триангуляции. Но не понижая заметно точности формулы (512) для  $\psi$ , можем написать

$$\left. \begin{aligned} \beta_{1,2} &= A_{1,2} - \frac{2k_1 + k_2}{3} \frac{s}{R} \sin A_{1,2} \\ k_1 &= \frac{\eta_0^2}{V_0} \operatorname{tg} P(q^\circ_1)^2 \frac{\rho''}{(\rho^\circ)^2}, \quad k_2 = \frac{\eta_0^2}{V_0} \operatorname{tg} P(q^\circ_2)^2 \frac{\rho''}{(\rho^\circ)^2} \end{aligned} \right\}, \quad (513)$$

при  $s < 150$  км и при  $q < 2^\circ,5$ .

В частном случае, когда нормальная параллель пересекает по середине геодезическую линию  $AB$ ,

$$\left. \begin{aligned} \psi'_1 &= \frac{1}{12} \eta^2 \operatorname{tg} P \frac{s^3}{R^3} \rho'' \sin A_{1,2} \cos^2 A_{1,2} \\ \psi_2 &= -\psi_1 \end{aligned} \right\} \text{(приводится без вывода)} \quad (514)$$

### § 65. Редукция расстояния

При  $s = 200$  км и  $q = 3^\circ$  редукция  $\phi_1$  азимута не превышает  $0'',06$ . Отсюда ясно, что длина кривой  $A_1NB_1$  (черт. 75) и длина дуги большого круга  $A_1MB_1$  между собой различаются совершенно ничтожно (на малую величину 10-го порядка). Таким образом, понимая под  $dS$  элемент дуги  $A_1MB_1$ , а под  $ds$  — элемент геодезической линии  $AB$  на сфероиде, можем написать

$$ds = \frac{dS}{m}; \quad s = \int \frac{dS}{m}.$$

Пользуясь формулой (504), напомним

$$m = 1 - \frac{2}{3} \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\sin P \cos P}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 P}} q^3 = 1 + \beta q^3.$$

Далее, называя через  $q_1$  значение  $q$  для  $A_1$ , имеем

$$q = q_1 + \frac{S_1}{R} \cos A_{1,2} - \frac{S_1^2}{2R^2} \sin^2 A_{1,2} \operatorname{tg} U_1.$$

Обеспечивая вполне при  $s < 150$  км и при  $q < 3^\circ$  восьмой знак в  $\lg S$  и обозначая через  $S_1$  расстояние текущей точки на дуге  $A_1MB_1$  от  $A_1$ , можно принять с достаточной точностью

$$q^3 = q_1^3 + 3q_1^2 \frac{S_1}{R} \cos A_{1,2} + 3q_1 \frac{S_1^2}{R^2} \cos^2 A_{1,2} + \frac{S_1^3}{R^3} \cos^3 A_{1,2};$$

$$\begin{aligned} (1 + \beta q^3)^{-1} &= 1 - \beta q_1^3 - 3\beta q_1^2 \frac{S_1}{R} \cos A_{1,2} - \\ &\quad - 3\beta q_1 \frac{S_1^2}{R^2} \cos^2 A_{1,2} - \beta \frac{S_1^3}{R^3} \cos^3 A_{1,2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} s = \int \frac{dS}{m} &= S \left\{ 1 - \beta q_1^3 - \frac{3}{2} \beta q_1^2 \frac{S}{R} \cos A_{1,2} - \right. \\ &\quad \left. - \beta q_1 \frac{S^2}{R^2} \cos^2 A_{1,2} - \beta \frac{S^3}{4R^3} \cos^3 A_{1,2} \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим через  $m_1$ ,  $m_m$  и  $m_2$  масштабы соответственно в начале, в середине и в конце геодезической линии  $AB$  (или, что все равно, дуги  $A_1MB_1$ ). Мы имеем

$$m_1 = 1 + \beta q_1^3; \quad m_m = 1 + \beta \left( q_1 + \frac{S}{2R} \cos A_{1.2} \right)^3;$$

$$m_2 = 1 + \beta \left( q_1 + \frac{S}{2R} \cos^3 A_{1.2} \right)^3.$$

Оказывается, с принятой точностью

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{4}{m_m} + \frac{1}{m_2} \right) = \\ & = 1 - \beta \left\{ q_1^3 + \frac{3}{2} q_1^2 \frac{S}{R} \cos A_{1.2} + q_1 \frac{S^2}{R^2} \cos^2 A_{1.2} + \frac{S^3}{4R^3} \cos^3 A_{1.2} \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{S}{6} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{4}{m_m} + \frac{1}{m_2} \right) \\ \lg S &= \lg s + \frac{1}{6} (\lg m_1 + 4 \lg m_m + \lg m_2) \end{aligned} \right\} \quad (515)$$

Формулу (515) можно написать из известной формулы Симпсона

$$P = \frac{h}{3} \left\{ 4 \sum_1^n y_{2k} + 2 \sum_0^n y_{2k+1} - (y_1 + y_{2n+1}) \right\}$$

(в нашем случае  $2n = 2$ ,  $h = \frac{S}{2}$ ).

При  $s < 100$  км можно принять, что

$$\frac{1}{6} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{4}{m_m} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{1}{\sqrt{m_1 m_2}}.$$

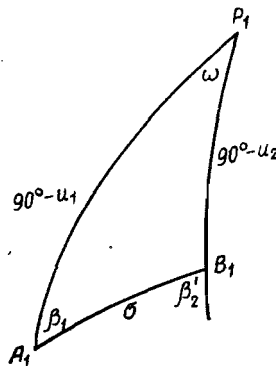
Поэтому при  $s < 100$  км

$$\lg S = \lg s + \frac{\lg m_1 + \lg m_2}{2}, \quad (516)$$

причем при вычислении  $\lg m_1$  и  $\lg m_2$  пользуются формулой (504). Формула (515) применяется, понятно, сравнительно в редких случаях.

## § 66. Решение сферического треугольника по одному из способов Гаусса

Пусть  $P_1$ ,  $A_1$  и  $B_1$  (черт. 78) суть конформные изображения на шаре полюса эллипсоида  $P$  и конечных точек  $A$  и  $B$  геодезической линии  $AB$ . Широты точек  $A_1$  и  $B_1$  на шаре суть соответственно  $U_1$  и  $U_2$ , разность их сферических долгот равна  $\omega$ , азимут дуги большого круга в  $A_1$  равен  $\beta'_1$ , а в  $B_1$  равен  $\beta'_2$ , причем  $\beta'_2$  отсчитываем в  $B_1$  от южной части меридиана. Расстояние  $A_1B_1$  по дуге большого круга на шаре радиуса единица равно  $\sigma$ . Будем решать треугольник  $A_1B_1P_1$ , предполагая данными  $U_1$ ,  $\sigma$  и  $\beta'_1$ . Введем обозначения



Черт. 78



$$\frac{U_1 + U_2}{2} = Q; \quad U_2 - U_1 = q;$$

$$\frac{\beta'_2 + \beta_1}{2} = \beta_m; \quad \beta'_2 - \beta_1 = t.$$

Следовательно,

$$U_2 = Q + \frac{q}{2}; \quad \beta'_2 = \beta_m + \frac{t}{2}.$$

Напишем известные формулы Гаусса или Делаμβра для решения сферического треугольника

$$\sin \frac{a}{2} \cos \frac{C-B}{2} = \sin \frac{c+b}{2} \sin \frac{A}{2},$$

$$\sin \frac{a}{2} \sin \frac{C-B}{2} = \sin \frac{c-b}{2} \cos \frac{A}{2},$$

$$\cos \frac{a}{2} \cos \frac{C+B}{2} = \cos \frac{c+b}{2} \sin \frac{A}{2},$$

$$\cos \frac{a}{2} \sin \frac{C+B}{2} = \cos \frac{c-b}{2} \cos \frac{A}{2}.$$

Полагая в этих формулах

$$a = \sigma, \quad A = \omega, \quad 90^\circ - U_1 = b, \quad 90^\circ - U_2 = c,$$

$$B = 180^\circ - \beta'_2, \quad C = \beta_1,$$

перепишем их так

$$\sin \frac{\sigma}{2} \sin \beta_m = \sin \frac{\omega}{2} \cos Q,$$

$$\sin \frac{\sigma}{2} \cos \beta_m = \cos \frac{\omega}{2} \sin \frac{q}{2},$$

$$\cos \frac{\sigma}{2} \sin \frac{t}{2} = \sin \frac{\omega}{2} \sin Q,$$

$$\cos \frac{\sigma}{2} \cos \frac{t}{2} = \cos \frac{\omega}{2} \cos \frac{q}{2}.$$

Раскладывая теперь синусы и косинусы малых дуг в ряды Маклорена, с отбрасыванием малых величин пятого порядка, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \sigma \left(1 - \frac{\sigma^2}{24}\right) \sin \beta_m &= \omega \left(1 - \frac{\omega^2}{24}\right) \cos Q \\ \sigma \left(1 - \frac{\sigma^2}{24}\right) \cos \beta_m &= q \left(1 - \frac{q^2}{24}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{8}\right) \\ t \left(1 - \frac{t^2}{8}\right) \left(1 - \frac{t^2}{24}\right) &= \omega \left(1 - \frac{\omega^2}{24}\right) \sin Q \\ \sigma^2 + t^2 &= q^2 + \omega^2 \end{aligned} \right\} \quad (517)$$

Последнее из уравнений (517) используется впоследствии лишь при образовании поправочных членов, поэтому в нём опущены члены четвертого порядка. Из (517), с ошибками на величины третьего порядка, находим

$$\left. \begin{aligned} q &= \sigma \cos \beta_m \\ \omega &= \sigma \sin \beta_m \sec Q \\ t &= \omega \sin Q \end{aligned} \right\}. \quad (518)$$

Если теперь в первых трех уравнениях (517) в членах третьего порядка подставим  $q$ ,  $\omega$  и  $t$ , определяемые уравнениями (518), то с погрешностью лишь на величины пятого порядка находим

$$\begin{aligned} \omega &= \sigma \sin \beta_m \sec Q \left(1 - \frac{\sigma^2}{24}\right) \left(1 + \frac{\omega^2}{24}\right); \\ q &= \sigma \cos \beta_m \left(1 - \frac{\sigma^2}{24}\right) \left(1 + \frac{q^2}{24}\right) \left(1 + \frac{\omega^2}{8}\right); \\ t &= \omega \sin Q \left(1 - \frac{\omega^2}{24}\right) \left(1 + \frac{\sigma^2}{8}\right) \left(1 + \frac{t^2}{24}\right); \end{aligned}$$

и для преобразования поправочных членов

$$q^2 - \sigma^2 = t^2 - \omega^2.$$

Далее с условленной точностью

$$\left. \begin{aligned} q &= \sigma \cos \beta_m \left(1 - \frac{\sigma^2}{24} + \frac{q^2}{24} + \frac{\omega^2}{8}\right) \\ \omega &= \sigma \sin \beta_m \sec Q \left(1 - \frac{\sigma^2}{24} + \frac{\omega^2}{24}\right) \\ t &= \omega \sin Q \left(1 + \frac{\sigma^2}{8} - \frac{\omega^2}{24} + \frac{t^2}{24}\right) \end{aligned} \right\}$$

и окончательно

$$\left. \begin{aligned} q &= \sigma \cos \beta_m \left(1 + \frac{\omega^2}{12} + \frac{t^2}{24}\right) \\ t &= \sigma \sin \beta_m \operatorname{tg} Q \left(1 + \frac{\sigma^2}{12} + \frac{t^2}{24}\right) \\ \omega &= \sigma \sin \beta_m \sec Q \left(1 - \frac{\sigma^2}{24} + \frac{\omega^2}{24}\right) \end{aligned} \right\}. \quad (519)$$

Формулы (519) решают последовательными приближениями, применяя в общем порядок, уже указанный в § 33 и 34.

## § 67. Применение формул § 61—66 к решению прямой геодезической задачи. Первый и второй способы Гаусса

**Первый способ Гаусса.** В этом способе имеем такие стадии решения: 1) от данной широты  $B_1$  точки  $A$ , от данного азимута  $A_{1,2}$  геодезической линии  $AB$  в ее начальной точке и от длины  $s$  этой геодезической линии переходят соответственно к широте  $U_1$  на шаре, к азимуту  $\beta_{1,2}$  дуги большого круга  $A_1B_1$  в точке  $A_1$  и к расстоянию  $\sigma$  между  $A_1$  и  $B_1$  при радиусе шара, равном единице; 2) по найденным  $U_1$ ,  $\beta_{1,2}$  и  $\sigma$  по формулам (519) находят  $U_2$ ,  $\beta_{2,1}$  и  $\omega$ ; 3) совершают обратный переход с шара на эллипсоид и находят по  $U_2$  широту  $B_2$  точки  $B$  на эллипсоиде, разность долгот  $l$  точек  $A$  и  $B$  и обратный азимут  $A_{2,1}$  геодезической линии  $AB$  в ее конечной точке  $B$ . Переход с эллипсоида на шар и с шара на эллипсоид выполняют, пользуясь особыми таблицами конформного изображения эллипсоида на шаре.

**Второй способ Гаусса.** Понятно, что при решении прямой геодезической задачи шар является промежуточной инстанцией, связывающей через посредство элементов сферического треугольника  $A_1BC_1$  искомые величины на эллипсоиде с данными на эллипсоиде же. Понятно, что аналитически можно в этих связях исключить элементы сферического треугольника и в результате получить непосредственно связь между искомыми и данными величинами на эллипсоиде. Прежде всего, исходя из (487), получим

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dB}{dU}\right)_0 &= \frac{\sqrt{1-e^2} \sin^2 P}{\sqrt{1-e^2}} = C \\ \left(\frac{d^2B}{dU^2}\right)_0 &= -\frac{3e^2 \sin P \cos P}{1-e^2} = 2D \\ \left(\frac{d^3B}{dU^3}\right)_0 &= \frac{3e^2 [\sin^2 P - \cos^2 P + e^2 (5 \sin^2 P \cos^2 P - \sin^4 P)]}{(1-e^2)^2 \sqrt{1-e^2} \sin^2 P} = 6E \end{aligned} \right\} \quad (520)$$

На шаре возьмем нормальную широту  $U_0$  как среднее из  $U_1$  и  $U_2$  для точек  $A$  и  $B$ . Далее, обозначим

$$\begin{aligned} b &= B_2 - B_1; \quad \frac{B_2 + B_1}{2} = B_m; \\ B &= P + p; \quad U = U_0 + q; \\ B_1 &= P + p_1; \quad U_1 = U_0 + q_1; \\ B_2 &= P + p_2; \quad U_2 = U_0 + q_2; \\ U_2 - U_1 &= q_0; \end{aligned}$$

$P$  — нормальная широта на эллипсоиде.

Отсюда

$$\begin{aligned} p_1 &= B_1 - P = B_m - P - \frac{b}{2} \quad \left| \quad q_1 = -\frac{q_0}{2}, \right. \\ p_2 &= B_2 - P = B_m - P + \frac{b}{2} \quad \left| \quad q_2 = +\frac{q_0}{2}. \right. \end{aligned}$$

Так как

$$p = F(P, q),$$

причем при  $q = 0$  и  $p = 0$ , то, применяя ряд Маклорена, напишем

$$p = \left(\frac{dp}{dq}\right)_0 q + \left(\frac{d^2p}{dq^2}\right)_0 \frac{q^2}{2} + \left(\frac{d^3p}{dq^3}\right)_0 \frac{q^3}{6} + \left(\frac{d^4p}{dq^4}\right)_0 \frac{q^4}{24} + \dots$$

Здесь все производные вычисляются при  $q = 0$ , т. е. при  $U = U_0$  или при  $B = P$ . Но  $dp = dB$  и  $dq = dU$ . Поэтому

$$p = Cq + Dq^2 + Eq^3 + Hq^4, \quad (521)$$

принимая  $H = \frac{1}{24} \left(\frac{d^4B}{dU^4}\right)_0$ , а  $C$ ,  $D$  и  $E$  беря из (520). Применяя (521) сперва к точке  $A$ , а затем к  $B$ , будем иметь

$$\begin{aligned} B_m - P - \frac{b}{2} &= -C \frac{q_0}{2} + D \frac{q_0^2}{4} - E \frac{q_0^3}{8} + H \frac{q_0^4}{16}, \\ B_m - P + \frac{b}{2} &= C \frac{q_0}{2} + D \frac{q_0^2}{4} + E \frac{q_0^3}{8} + H \frac{q_0^4}{16}. \end{aligned}$$

Отсюда с погрешностью лишь на величины порядка  $e^2 q^4$

$$B_m - P = D \frac{q_0^2}{4} = - \frac{3}{8} \frac{e^2 \sin P \cos P}{1 - e^2} q_0^2. \quad (522)$$

и с ошибкой на величины порядка  $e^2 q_0^5$

$$b = Cq_0 + E \frac{q_0^3}{4}. \quad (523)$$

Возьмем теперь первую из формул (519)

$$q_0 = \sigma \cos T \left( 1 + \frac{\omega^2}{12} + \frac{t^2}{24} \right).$$

При сделанном выборе нормальной широты

$$m_1 = 1 - \beta \frac{q_0^3}{8},$$

$$\sqrt{m_1 m_2} = \sqrt{1 - \frac{\beta q_0^3}{8} + \frac{\beta q_0^3}{8}},$$

$$m_2 = 1 + \beta \frac{q_0^3}{8},$$

т. е. в данном случае отличие  $\sqrt{m_1 m_2}$  от единицы есть величина порядка  $e^2 q^4$ . Поэтому в данном случае с высокой точностью

$$S = s; \quad \sigma'' = \frac{s \rho''}{R} = \frac{s \rho''}{a} \frac{(1 - e^2 \sin^2 P)}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

Далее в данном случае можем применять (514). т. е.

$$\frac{A_{1.2} + A'_{2.1}}{2} = A_m = \frac{\beta_{1.2} + \beta'_{2.1}}{2} = \beta_m; \quad (524)$$

$$\begin{aligned} & (A_{2.1} - A_{1.2}) - (\beta_{2.1} - \beta_{1.2}) = \\ & = - \frac{1}{6} \frac{e^2 \sin P \cos P}{\sqrt{1 - e^2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 P}} \sigma^3 \sin A_{1.2} \cos^2 A_{1.2}. \end{aligned} \quad (525)$$

Теперь мы имеем

$$\begin{aligned} b &= C \sigma \cos A_m \left( 1 + \frac{\alpha^2 t^2}{12} + \frac{t^2}{24} \right) + E \frac{\sigma^3 \cos^3 A_m}{4}; \\ b &= - \frac{(1 - e^2 \sin^2 P)^{\frac{3}{2}}}{\alpha (1 - e^2)} \rho'' s \cos A_m \left( 1 + \frac{t^2}{24} + \frac{\alpha^2 t^2}{12} \right) + \\ &+ \frac{e^2 [\sin^3 P - \cos^3 P + e^2 (5 \sin^2 P \cos^2 P - \sin^4 P)]}{8 (1 - e^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 P}} q_0^3. \end{aligned}$$

В последнем уравнении:  $t$  в поправочном члене  $\frac{t^2}{24}$ , конечно, не следует различать от  $A_{2.1} - A_{1.2} - 180^\circ$ ; далее, так как  $P$  от  $B_m$  различается только на величины порядка  $e^2 q_0^2$ , то в коэффициенте при  $q_0^3$  можно везде  $P$  заменить через  $B_m$ , а также и в  $\alpha^2$ , в члене  $\frac{\alpha^2 t^2}{12} \left( \alpha^2 = 1 + \frac{e^2 \cos^4 P}{1 - e^2} \right)$ ;

наконец,  $q_0^3$  можно заменить просто через  $\frac{b^3}{C^3}$ , с заменой притом  $P$  в  $C^3$  через  $B_m$ . Таким образом, мы получаем далее

$$b'' = \frac{(1 - e^2 \sin^2 P)^{\frac{3}{2}}}{a(1 - e^2)} \rho'' s \cos A_m \left[ 1 + \frac{t''^2}{24\rho''^2} + \frac{l''^2}{12\rho''^2} + \frac{e^2 \cos^4 B_m l''^2}{12(1 - e^2)\rho''^2} \right] + \\ + \frac{b''^3 (1 - e^2)^{\frac{3}{2}} e^2 [\sin^2 B_m - \cos^2 B_m + e^2 (5 \sin^2 B_m \cos^2 B_m - \sin^4 B_m)]}{\rho''^3 8(1 - e^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_m} (1 - e^2 \sin^2 B_m)^{\frac{3}{2}}}. \quad (526)$$

Остается заменить  $P$  через  $B_m$  в множителе  $(1 - e^2 \sin^2 P)^{\frac{3}{2}}$  при главном члене. Не приводя выкладок по этой замене, а имея в виду, что  $P = B_m - \frac{3}{8} \frac{e^2 \sin B_m \cos B_m}{1 - e^2} \frac{b^2}{C^2}$ , отметим, что исключение всех величин, относящихся к шару, уже выполнено, и поэтому можно привести окончательную формулу для  $b$ , опуская все дальнейшие преобразования уравнения (526), как чисто алгебраические. Именно, мы получаем

$$b'' = (1)_m s \cos A_m \left\{ 1 + \frac{t''^2}{8\rho''^3} + \right. \\ \left. + \frac{\sigma''^2}{12\rho''^2} - \frac{b''^2}{24\rho''^2} \frac{[2 + e^2 - (8e^2 - 14e^4) \sin^2 B_m - 9e^4 \sin^4 B_m]}{(1 - e^2 \sin^2 B_m)^2} \right\}. \quad (527)$$

При выводе долготы исходим от третьей из формул (519)

$$\omega = \sigma \sin \beta_m \sec Q \left( 1 - \frac{\sigma^2}{24} + \frac{\omega^2}{24} \right),$$

которая для данного случая переписывается так

$$\omega'' = \frac{s\rho'' (1 - e^2 \sin^2 P)}{a \sqrt{1 - e^2} \cos U_0} \sin A_m \left( 1 + \frac{t''^2}{24\rho''^2} - \frac{q''^2_0}{24\rho''^2} \right) = \alpha l''.$$

Так как

$$\alpha \cos U_0 = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 P}}{\sqrt{1 - e^2}} \cos P,$$

то

$$l'' = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 P}}{a \cos P} \rho'' s \sin A_m \left( 1 + \frac{t^2}{24} - \frac{q^2_0}{24} \right).$$

В последнем уравнении  $q_0^2$  можно заменить по уравнению

$$q_0 = \frac{b^2}{C} = \frac{b^2 (1 - e^2)}{1 - e^2 \sin^2 B_m}$$

Остается заменить  $P$  через  $B_m$  в множителе  $\frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 P}}{\cos P}$ . Это выполняется таким образом

$$(1 - e^2 \sin^2 P)^{\frac{1}{2}} = (1 - e^2 \sin^2 B_m)^{\frac{1}{2}} - \frac{e^2 \sin B_m \cos B_m}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_m}} (P - B_m) = \\ = (1 - e^2 \sin^2 B_m)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{8} \frac{e^4 \sin^2 B_m \cos^2 B_m}{(1 - e^2) \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_m}} q_0^2;$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{1 - e^2 \sin^2 P} = \\
& = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_m} \left[ 1 - \frac{3}{8} \frac{e^4 \sin^2 B_m \cos^2 B_m}{(1 - e^2 \sin^2 B_m)} b^2 \right]; \\
& \frac{1}{\cos P} = \frac{1}{\cos B_m} + \frac{3}{8} \frac{\sin B_m}{\cos^2 B_m} \frac{e^2 \sin B_m \cos B_m}{1 - e^2} q^2; \\
& \frac{1}{\cos P} = \frac{1}{\cos B_m} \left[ 1 + \frac{3}{8} \frac{e^2 \sin^2 B_m}{1 - e^2} \frac{(1 - e^2) b^2}{(1 - e^2 \sin^2 B_m)} \right].
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
l'' &= \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_m}}{a \cos B_m} \rho'' s \sin A_m \left\{ 1 + \frac{t''^2}{24 \rho''^2} - \frac{(1 - e^2) b''^2}{24 \rho''^2 (1 - e^2 \sin^2 B_m)} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{3}{8} \frac{e^2 \sin^2 B_m (b'')^2}{\rho''^2 (1 - e^2 \sin^2 B_m)} - \frac{3}{8} \frac{e^4 \sin^2 B_m \cos^2 B_m}{\rho''^2 (1 - e^2 \sin^2 B_m)^2} b''^2 \right\}; \\
l'' &= \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_m}}{a \cos B_m} \rho'' s \sin A_m \left\{ 1 + \frac{t''^2}{24 \rho''^2} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{[(1 - e^2 - 9e^2 \sin^2 B_m)(1 - e^2 \sin^2 B_m) + 9e^4 \sin^2 B_m \cos^2 B_m]}{24 (1 - e^2 \sin^2 B_m)^2 \rho''^2} b''^2 \right\}
\end{aligned}$$

Окончательно

$$l'' = (2)_m \frac{s \sin A_m}{\cos B_m} \left[ 1 + \frac{t''^2}{24 \rho''^2} - \frac{b''^2 (1 - e^2) (1 - 10e^2 \sin^2 B_m)}{24 \rho''^2 (1 - e^2 \sin^2 B_m)^2} \right]. \quad (528)$$

Не приводя вывода для  $t$ , дадим просто окончательную формулу

$$\begin{aligned}
& A_{2,1} \pm 180^\circ - A_{1,2} = (2)_m s \sin A_m \operatorname{tg} B_m \times \\
& \times \left[ 1 + \frac{\sigma''^2}{12 \rho''^2} + \frac{t''^2}{24 \rho''^2} + \frac{b''^2}{24 \rho''^2} \frac{5e^2 + (4e^2 - 14e^4) \sin^2 B_m + 5e^4 \sin^4 B_m}{(1 - e^2 \sin^2 B_m)^2} \right]. \quad (529)
\end{aligned}$$

Введем, следуя Гауссу, обозначения

$$\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} = k; \quad \frac{\mu}{12 \rho''^2} = \mu'; \quad (3) = \frac{\mu}{12 R^2};$$

$$(4) = \frac{\mu'}{2k^4} [5e^2 + (4e^2 - 14e^4) \sin^2 B + 5e^4 \sin^4 B];$$

$$(5) = \frac{\mu'}{2k^4} [2 + e^2 - (8e^2 - 14e^4) \sin^2 B - 9e^4 \sin^4 B];$$

$$(6) = \frac{\mu'}{2k^4} (1 - e^2) (1 - 10e^2 \sin^2 B); \quad \frac{\mu'}{2} = (7).$$

Тогда формулы (527), (528) и (529), по их логарифмированию, переписутся так

$$\left. \begin{aligned} \lg b'' &= \lg (1)_m s \cos A_m + (3) s^2 - (5) b''^2 + 3 (7) t''^2 \\ \lg l'' &= \lg (2)_m \frac{s \sin A_m}{\cos B_m} - (6) b''^2 + (7) t''^2 \\ \lg t'' &= \lg (2)_m s \sin A_m \operatorname{tg} B_m + (3) s^2 + (4) b''^2 + (7) t''^2 \\ t &= A_{2.1} \pm 180^\circ - A_{1.2} \end{aligned} \right\} \quad (530)$$

Путем преобразования формул (527), (528) и (529) мы получим в точности формулы (279) «с средней широтой и средним азимутом», данные в главе IV. Следовательно, точность формул (527), (528) и (529), а также формул (530) та же самая, что и формулы (280). Упрощая целесообразно формулы (527), (528) и (529) при расстояниях  $s < 40$  км, мы придем к формулам (281), или вместо (530) — к формулам (282).

## Глава VIII

### ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

#### § 68. Дифференциальные формулы первого рода для геодезической линии

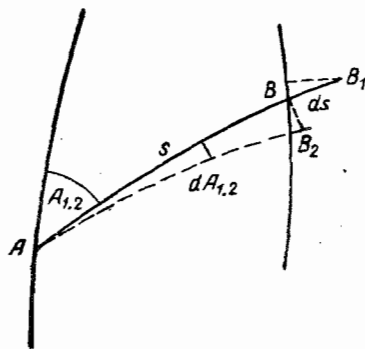
В главе II было дано определение «*приведенной*» длины  $m$  геодезической линии и выведена для  $m$  формула (160)

$$m = s \left\{ 1 - \frac{s^2}{6N_1^2} (1 + \eta_1^2) + \frac{s^3}{3N_1^3} \eta_1^2 \operatorname{tg} B_1 \cos A_{1,2} (1 + \eta_1^2) + \right. \\ \left. + \frac{s^4}{120N_1^4} (1 + 2\eta_1^2 + 12\eta_1^2 \cos^2 A_{1,2} - 12\eta_1^2 \operatorname{tg}^2 B_1) \right\}.$$

В этой формуле значок «1» относится к точке  $A$ , начальной для геодезической линии, и значок «2» — к точке  $B$ , конечной для этой геодезической линии. Вообще будем обозначать в  $A$  широту и долготу через  $B_1$  и  $L_1$  в  $B$  — широту и долготу через  $B_2$  и  $L_2$ , азимут с  $A$  на  $B$  — через  $A_{1,2}$ , азимут с  $B$  на  $A$  — через  $A_{2,1}$ .

Если, оставляя неизменными  $B_1$ ,  $L_1$  и  $A_{1,2}$ , изменим только  $s$  на  $ds$ , то тогда, очевидно (черт. 79)

$$\left. \begin{aligned} dB_2^s &= -\frac{1}{M_2} \cos A_{2,1} ds \\ dL_2^s &= -\frac{1}{N_2} \frac{\sin A_{2,1}}{\cos B_2} ds \\ dA_{2,1}^s &= -\frac{1}{N_2} \sin A_{2,1} \operatorname{tg} B_2 ds \end{aligned} \right\} \quad (531)$$



Черт. 79

Если в  $A$  при неизменных  $B_1$  и  $L_1$  изменяется на  $dA_{1,2}$  азимут  $A_{1,2}$ , то при неизменном  $s$  будем иметь

$$\left. \begin{aligned} dB_2^{A_1} &= +\frac{m}{M_2} \sin A_{2,1} dA_{1,2} \\ dL_2^{A_1} &= -\frac{m}{N_2} \frac{\cos A_{2,1}}{\cos B_2} dA_{1,2} \end{aligned} \right\} \quad (532)$$

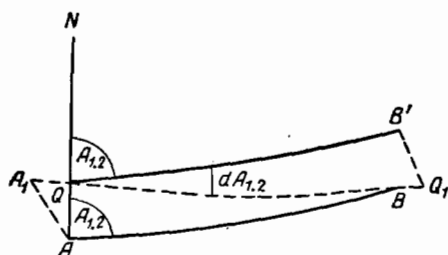


Что касается изменения азимута  $dA_{2,1}A_1$ , то, конечно, здесь нужно применить формулу (166)

$$dA_{2,1}A_1 = \left[ \left( \frac{dm}{ds} \right)_1 - \frac{m}{N_2} \cos A_{2,1} \operatorname{tg} B_2 \right] dA_{1,2}, \quad (533)$$

причем значок «1» при производной  $\frac{dm}{ds}$  указывает, что она вычисляется для точки  $A$ .

Представим теперь себе, что при неизменяемых  $s$  и  $A_{1,2}$  изменяется на  $dB_1$  широта точки  $A$ . Перемещение в  $B'$  придется представить себе осуществляемым таким образом: если на меридиане  $AN$  (черт. 80) точка  $Q$  имеет широту  $B_1 + dB$ , то сперва вращаем геодезическую линию  $AB$  около точки  $B$  так, чтобы она прошла через  $Q$ , и, откладывая



Черт. 80

на ней длину  $BA_1 = s = AB$ , получаем в  $A_1$  новое положение точки  $A$ ; после этого заставляем перемещаться  $A_1$  по геодезической линии  $QB$  до совпадения с  $Q$ , а  $B$  — по продолжению  $QB$  до положения  $Q_1$  так, чтобы  $QQ_1$  имело длину  $s$ . Наконец, поворачиваем геодезическую линию  $QQ_1$  около  $Q$  так, чтобы ее азимут в  $Q$  был равен  $A_{1,2}$ , и тогда приходим к перемещению  $Q_1$  в  $B'$ , причем  $B'$  и есть искомое новое положение

ние  $B$ . При первом перемещении роль  $dp$  § 22 играет отрезок  $AQ$ ; при этом роль точки  $A$  черт. 32 играет точка  $B$ , и при переходе  $A$  в  $Q$  изменяются одновременно азимут в  $B$  и длина линии  $BA$ . Очевидно, при этом перемещении

$$\begin{aligned} dp &= \widetilde{AQ}, \\ d\theta &= dA_{1,2}, \\ \theta &= 180^\circ + A_{1,2}. \end{aligned}$$

И из формулы (168) мы имеем

$$dA_{1,2} = \frac{1}{m} \left( \frac{dm}{ds} \right)_2 \sin A_{1,2} \widetilde{AQ} = \frac{M_1}{m} \left( \frac{dm}{ds} \right)_2 \sin A_{1,2} dB_1.$$

При последующем перемещении  $A$  в  $A_1$  азимут  $A_{2,1}$  в  $B$  изменится на:

$$dA'_{2,1} = \frac{\widetilde{AA_1}}{m} = \frac{M_1}{m} \sin A_{1,2} dB_1.$$

При перемещении  $A_1$  в  $Q$  и  $B$  в  $Q_1$  имеем

$$\widetilde{A_1Q} = \widetilde{BQ_1} = M_1 \cos A_{1,2} dB_1.$$

Последнее же перемещение  $Q_1$  в  $B_1$  вычисляется так

$$\widetilde{Q_1B_1} = m dA_{1,2} = M_1 \sin A_{1,2} \left( \frac{dm}{ds} \right)_2 dB_1.$$

Теперь нетрудно видеть

$$\left. \begin{aligned} dB_2^\varphi &= -\frac{M_1}{M_2} \cos A_{1.2} \cos A_{2.1} dB_1 - \frac{M_1}{M_2} \sin A_{1.2} \sin A_{2.1} \left(\frac{dm}{ds}\right)_2 dB_1; \\ dB_2^\varphi &= -\frac{M_1}{M_2} \left[ \sin A_{1.2} \sin A_{2.1} \left(\frac{dm}{ds}\right)_2 + \cos A_{1.2} \cos A_{2.1} \right] dB_1 \\ dL_2^\varphi &= \frac{M_1}{N_2 \cos B_2} \left[ \sin A_{1.2} \cos A_{2.1} \left(\frac{dm}{ds}\right)_2 - \cos A_{1.2} \sin A_{2.1} \right] dB_1 \\ dA_{2.1}^\varphi &= \frac{M_1}{m} \sin A_{1.2} dB_1 - \frac{M_1}{N_2} \sin A_{2.1} \cos A_{1.2} \operatorname{tg} B_2 dB_1 - \\ &\quad - \frac{M_1}{m} \sin A_{1.2} \left(\frac{dm}{ds}\right)_2 dB_1 \left[ \left(\frac{dm}{ds}\right)_1 - \frac{m}{N_2} \cos A_{2.1} \operatorname{tg} B_2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (534)$$

В последнем уравнении первое слагаемое есть  $dA'_{2.1}$ , обусловленное перемещением  $A$  в  $A_1$ , второе слагаемое есть изменение азимута при переходе от  $B$  к  $Q_1$ , и третье слагаемое получается по (166) с заменой в нем  $dA_{1.2}$  через  $-\frac{M_1}{m} \left(\frac{dm}{ds}\right)_2 \sin A_{1.2} dB_1$  и  $\cos A_2$  — через  $\cos A_{2.1}$ , так как в третьем перемещении приходится от  $A_{1.2} + dA_{1.2}$  снова переходить к  $A_{1.2}$ .

Итак

$$\begin{aligned} dA_{2.1}^\varphi &= \left\{ \frac{M_1}{m} \sin A_{1.2} - \frac{M_1}{m} \sin A_{1.2} \left(\frac{dm}{ds}\right)_1 \left(\frac{dm}{ds}\right)_2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{M_1}{N_2} \left[ \sin A_{1.2} \cos A_{2.1} \left(\frac{dm}{ds}\right)_2 - \sin A_{2.1} \cos A_{1.2} \right] \operatorname{tg} B_2 \right\} dB_1. \end{aligned} \quad (535)$$

Соберем теперь вместе все формулы

$$\begin{aligned} m &= s \left\{ 1 - \frac{s^2}{6N_1^2} (1 + \eta_1^2) + \frac{s^3}{3N_1^3} \eta_1^2 \operatorname{tg} B_1 \cos A_{1.2} (1 + \eta_1^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{s^4}{120N_1^4} (1 + 2\eta_1^2 + 12\eta_1^2 \cos^2 A_{1.2} - 12\eta_1^2 \operatorname{tg}^2 B_1) \right\}; \\ \left. \begin{aligned} dB_2^s &= -\frac{1}{M_2} \cos A_{2.1} ds \\ dL_2^s &= -\frac{1}{N_2} \frac{\sin A_{2.1}}{\cos B_2} ds \\ dA_{2.1}^s &= -\frac{1}{N_2} \sin A_{2.1} \operatorname{tg} B_2 ds \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} dB_{2.1}^A &= \frac{m}{M_2} \sin A_{2.1} dA_{1.2} \\ dL_{2.1}^A &= -\frac{m \cos A_{2.1}}{N_2 \cos B_2} dA_{1.2} \\ dA_{2.1}^A &= \left[ \left(\frac{dm}{ds}\right)_1 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{m}{N_2} \cos A_{2.1} \operatorname{tg} B_2 \right] dA_{1.2} \end{aligned} \right\} \quad (536) \\ \left(\frac{dm}{ds}\right)_1 &= 1 - \frac{s^2}{2N_1^2} (1 + \eta_1^2) + \frac{4}{3} \frac{s^3}{N_1^3} \eta_1^2 \operatorname{tg} B_1 \cos A_{1.2} (1 + \eta_1^2) + \\ &\quad + \frac{s^4}{24N_1^4} (1 + 2\eta_1^2 + 12\eta_1^2 \cos^2 A_{1.2} - 12\eta_1^2 \operatorname{tg}^2 B_1); \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 dB_2^{\varphi_1} &= -\frac{M_1}{N_2} \left[ \sin A_{2,1} \sin A_{1,2} \left( \frac{dm}{ds} \right)_2 + \cos A_{1,2} \cos A_{2,1} \right] dB_1 \\
 dL_2^{\varphi_1} &= \frac{M_1}{N_2 \cos B_2} \left[ \sin A_{1,2} \cos A_{2,1} \left( \frac{dm}{ds} \right)_2 - \cos A_{1,2} \sin A_{2,1} \right] dB_1 \\
 dA_{2,1}^{\varphi_1} &= dB_1 \left\{ \frac{M_1}{m} \sin A_{1,2} - \frac{M_1}{m} \sin A_{1,2} \left( \frac{dm}{ds} \right)_1 \left( \frac{dm}{ds} \right)_2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{M_1}{N_2} \left[ \sin A_{1,2} \cos A_{2,1} \left( \frac{dm}{ds} \right)_2 - \sin A_{2,1} \cos A_{1,2} \right] \operatorname{tg} B_2 \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (537)$$

$$\left( \frac{dm}{ds} \right)_2 = 1 - \frac{s^2}{2N_2^2} (1 + \eta_2^2) + \frac{4}{3} \frac{s^3}{N_2^3} \eta_2^2 \operatorname{tg} B_2 \cos A_{2,1} (1 + \eta_2^2) + \\
 + \frac{s^4}{24N_2^4} (1 + 2\eta_2^2 + 12\eta_2^2 \cos^2 A_{2,1} - 12\eta_2^2 \operatorname{tg} B_2).$$

Верхний значок «s» показывает, что изменяется только длина  $s$  геодезической линии  $AB$ ; верхний значок « $A_1$ » показывает, что изменяется только азимут  $A_{1,2}$  в  $A$ ; верхний значок « $\varphi_1$ » показывает, что изменяется только широта точки  $A$ . Понятно, что если изменяется только  $L_1$  на  $dL_1$ , то изменение  $dL_2$  будет равно  $dL_1$ , а изменения  $B_2$  и  $A_{2,1}$  будут равны нулю. В практике бывают случаи, когда независимо друг от друга изменяются и  $s$ , и  $B_1$  и  $A_{1,2}$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 dB_2 &= dB_2^s + dB_2^{A_1} + dB_2^{\varphi_1}; \\
 dL_2 &= dL_1 + dL_2^s + dL_2^{A_1} + dL_2^{\varphi_1}; \\
 dA_{2,1} &= dA_{2,1}^s + dA_{2,1}^{A_1} + dA_{2,1}^{\varphi_1}.
 \end{aligned}$$

### § 69. Дифференциальные формулы первого рода для геодезической линии при длине ее порядка 250 км

При этих значениях  $s$  мы можем написать

$$\left( \frac{dm}{ds} \right)_1 = 1 - \frac{s^2}{2N_1^2} (1 + \eta_1^2) + \frac{4}{3} \frac{s^3}{N_1^3} \eta_1^2 \operatorname{tg} B_1 \cos A_{1,2} (1 + \eta_1^2) + \frac{s^4}{24N_1^4}.$$

Введем сюда среднюю широту  $B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}$ , и так как  $\frac{(1 + \eta^2)}{N^2} = \frac{1}{R^2}$  то в результате получим

$$\left( \frac{dm}{ds} \right)_1 = 1 - \frac{s^2}{2R_m^2} + \frac{1}{3} \frac{s^3}{R_m^3} \eta_m^2 \operatorname{tg} B_1 \cos A_{1,2} (1 + \eta_m^2) + \frac{s^4}{24R_m^4}.$$

Пренебрегая здесь членом с  $\eta_1^2 s^3$ , напишем

$$\left( \frac{dm}{ds} \right)_1 = 1 - \frac{s^2}{2R_m^2} + \frac{s^4}{24R_m^4} = \cos \frac{s}{R_m}.$$

Следовательно, с погрешностью порядка  $\eta_1^2 s^3$  можно не различать

$$\left( \frac{dm}{ds} \right)_1 \text{ от } \left( \frac{dm}{ds} \right)_2.$$

Пусть сферический треугольник  $A_1P_1B_1$  (черт. 81) является бесслезным изображением сфероидического треугольника  $APB$ . Из треугольника  $A_1P_1B_1$  имеем

$$\sin A_{1,2} \sin A_{2,1} \cos \sigma + \cos A_{1,2} \cos A_{2,1} = -\cos \omega.$$

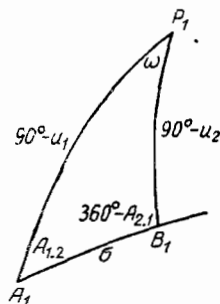
На основании (336)

$$d\omega = dl \left( 1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 u + \dots \right),$$

$$\omega = l \left( 1 + \frac{e^2}{2} \cos^2 \beta \right),$$

а на основании (335)

$$\sigma = \frac{s}{R} \left( 1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 \beta \right),$$



Черт. 81

причем под  $\beta$  понимается среднее значение приведенной широты для дуги  $A_1B_1$ . Теперь первая из формул (537) переписывается так

$$dB_2^{\varphi_1} = -\frac{M_1}{M_2} \left[ \sin A_{1,2} \sin A_{2,1} \cos \left( \sigma - \frac{e^2 \sigma}{2} \sin^2 \beta \right) + \cos A_{1,2} \cos A_{2,1} \right] dB_1;$$

$$dB_2^{\varphi_1} = -\frac{M_1}{M_2} \left[ -\cos \omega + \frac{e^2 \sigma}{2} \sin^2 \beta \sin A_{1,2} \sin A_{2,1} \sin \sigma \right] dB_1.$$

Или, пренебрегая величиной порядка  $e^2 \sigma^2 dB_1$ .

$$dB_2^{\varphi_1} = \frac{M_1}{M_2} \cos \omega dB_1,$$

или, пренебрегая опять величиной порядка  $e^2 l^2 dB_1$

$$dB_2^{\varphi_1} = \frac{M_1}{M_2} \cos l_{1,2} dB_1. \quad (538)$$

Из треугольника  $A_1P_1B_1$  имеем далее

$$\sin \omega \sin u_2 = -\cos A_{1,2} \sin A_{2,1} + \sin A_{1,2} \cos A_{2,1} \cos \sigma$$

и теперь вторую из формул (537) переписываем так

$$dL_2^{\varphi_1} = \frac{M_1}{N_2 \cos B_2} (\sin A_{1,2} \cos A_{2,1} \cos \sigma - \cos A_{1,2} \sin A_{2,1}) dB_1;$$

$$dL_2^{\varphi_1} = \frac{M_1}{N_2 \cos B_2} \sin \omega \sin u_2 dB_1.$$

Так как

$$\sin \omega = \sin l + \frac{e^2 l}{2} \cos l \cos^2 \beta,$$

$$\sin u_2 = \sin B_2 \left( 1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 u_2 \right),$$

то

$$\sin \omega \sin u_2 = \sin B_2 \sin l + \text{члены порядка } e^2 \sigma^2.$$

Окончательно принимаем

$$dL_2^{\varphi_1} = \frac{M_1}{N_2} \operatorname{tg} B_2 \sin l dB_1. \quad (539)$$

Наконец, третья из формул (537) преобразовывается так

$$dA_{2,1}^{\varphi} = \left[ \frac{M_1}{m} \sin A_{1,2} \sin^2 \frac{s}{R} + \right. \\ \left. + \frac{M_1}{N_2} (\sin A_{1,2} \cos A_{2,1} \cos \sigma - \sin A_{2,1} \cos A_{1,2}) \operatorname{tg} B_2 \right] dB_1, \\ dA_{2,1}^{\varphi} = \left[ \frac{M_1}{R} \sin A_{1,2} \sin \frac{s}{R} + \frac{M_1}{N_2} \operatorname{tg} B_2 \sin B_2 \sin l \right] dB_1,$$

причем принято  $m = R \sin \frac{s}{R}$ , что ведет к пренебрежению лишь величинами порядка  $\frac{e^2 s^3}{N^3}$ . Далее, из треугольника  $A_1 P_1 B_1$  имеем

$$\sin A_{1,2} \sin \sigma = \sin \omega \cos u_2,$$

и так как

$$\sin \sigma = \sin \frac{s}{R} \left( 1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 \beta \right),$$

$$\sin \omega = \sin l \left( 1 + \frac{e^2}{2} \cos^2 \beta \right),$$

$$\cos u_2 = \cos B_2 \left( 1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 B_2 \right),$$

то

$$\sin A_{1,2} \sin \frac{s}{R} = \sin l \cos B_2 \left( 1 + \frac{e^2}{2} \cos^2 B_2 \right).$$

Далее можно положить

$$\frac{M_1}{R} = 1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 B_2; \quad \frac{M_1}{N_2} = 1 - e^2 \cos^2 B_2;$$

поэтому

$$dA_{2,1}^{\varphi} = [\sin l \cos B_2 + \operatorname{tg} B_2 \sin B_2 \sin l (1 - e^2 \cos^2 B_2)] dB_1; \\ dA_{2,1}^{\varphi} = \frac{\sin l}{\cos B_2} [1 - e^2 \sin^2 B_2 \cos^2 B_2] dB_1. \quad (540)$$

Таким образом, можно окончательные результаты представить в таком виде

$$dB_2 = \frac{\partial B_2}{\partial B_1} dB_1 + \frac{\partial B_2}{\partial s} ds + \frac{\partial B_2}{\partial A_{1,2}} dA_{1,2}; \\ dl = \frac{\partial l}{\partial B_1} dB_1 + \frac{\partial l}{\partial s} ds + \frac{\partial l}{\partial A_{1,2}} dA_{1,2}; \\ dA_{2,1} = \frac{\partial A_{2,1}}{\partial B_1} dB_1 + \frac{\partial A_{2,1}}{\partial s} ds + \frac{\partial A_{2,1}}{\partial A_{1,2}} dA_{1,2};$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_2}{\partial B_1} &= \frac{M_1}{M_2} \cos l \\
\frac{\partial l}{\partial B_1} &= \frac{M_1}{N_2} \sin l \operatorname{tg} B_2 \\
\frac{\partial A_{2,1}}{\partial B_1} &= \frac{\sin l}{\cos B_2} (1 - e^2 \sin^2 B_2 \cos^2 B_2) \\
\frac{\partial B_2}{\partial s} &= - \frac{\cos A_{2,1}}{M_2} \varphi'' \\
\frac{\partial l}{\partial s} &= - \frac{\sin A_{2,1}}{N_2 \cos B_2} \varphi'' \\
\frac{\partial A_{2,1}}{\partial s} &= - \frac{\sin A_{2,1}}{N_2} \operatorname{tg} B_2 \varphi'' \\
\frac{\partial B_2}{\partial A_{1,2}} &= \frac{m}{M_2} \sin A_{2,1} \\
\frac{\partial l}{\partial A_{1,2}} &= - \frac{m \cos A_{2,1}}{N_2 \cos B_2} \\
\frac{\partial A_{2,1}}{\partial A_{1,2}} &= \cos \frac{s}{R} - \frac{m}{N_2} \cos A_{2,1} \operatorname{tg} B_2 = 1 - \frac{s^2}{2R^2} - \\
&\quad - \frac{s}{N_2} \cos A_{2,1} \operatorname{tg} B_2 \\
m &= R \sin \frac{s}{R} \\
\lg m &= \lg s - \frac{\mu s^2}{6R^2}
\end{aligned} \tag{541}$$

Величины, стоящие в левых частях формул (541), по существу не являются производными: это — коэффициенты, умножая на которые  $dB_1$ ,  $ds$  и  $dA_{1,2}$ , мы получаем с той или иной точностью изменения  $dB_2$ ,  $dl$  и  $A_{2,1}$ .

Выведенные в настоящем параграфе *дифференциальные формулы первого рода* и, именно, формулы (541) обеспечивают вполне, при применении их,  $0'',0001$  в координатах и азимутах при  $s < 250$  км. Поэтому они могут быть рекомендованы для применения в некоторых методах уравнивания триангуляции *на сфероиде*. Далее, применение этих формул имеет место при перевычислениях триангуляций, которые могут быть обусловлены: исправлением длин базисов вследствие установления новых значений эталонов длины; установлением новых значений так называемых исходных геодезических дат, т. е. новых значений геодезических широты, долготы и азимута в исходном пункте государственной триангуляции; переуравниванием той или другой части триангуляции. Однако при значительном протяжении триангуляции нужно считаться с неточностью этих формул (541). Конечно, *введение новых размеров референц-эллипсоида* вызывает изменения геодезических координат и азимутов всех точек триангуляции. Дифференциальные формулы, выражающие изменения разностей широт, долгот и азимутов по некоторой геодезической линии  $AB$ , обусловленные изменением большой полуоси и сжатия эллипсоида, носят название *дифференциальных формул второго рода*.

Понятно, что если в некоторой точке  $I$  получили изменение ее широта, долгота и азимут в ней вследствие изменения размеров эллипсоида, то в смежной точке  $K$  изменения широты, долготы и азимута будут обусловлены двумя причинами: а) изменениями широты, долготы и азимута в точке  $I$ , причем влияние этих изменений на широту, долготу и азимут в  $K$  должно учитываться по формулам (541) *первого рода*; б) изменениями разностей широт, долгот и азимутов по геодезической линии  $IK$ , обусловленными изменением размеров эллипсоида и учитываемыми по дифференциальным формулам *второго рода*.

### § 70. Малой точности дифференциальные формулы первого рода

Эти формулы получим, если сфероидический треугольник  $ABP$  (черт. 82) будем рассматривать, как *сферический*. Полагая, что  $B_1$  изменяется на  $dB_1$ ;  $A_{1,2}$  — на  $dA_{1,2}$ ;  $L_1$  — на  $dL_1$  и  $lg s$  — на  $\Delta lg s$ , будем отыскивать соответствующие изменения в  $B_2$ ,  $L_2$  и  $A_{2,1}$ . Из треугольника  $APB$  имеем

$$\sin B_2 = \cos \sigma \sin B_1 + \sin \sigma \cos B_1 \cos A_{1,2}.$$

Отсюда

$$\cos B_2 dB_2 =$$

$$= (\cos \sigma \cos B_1 - \sin \sigma \sin B_1 \cos A_{1,2}) dB_1 - \sin \sigma \cos B_1 \sin A_{1,2} dA_{1,2}$$

Но

$$\cos \sigma \cos B_1 - \sin \sigma \sin B_1 \cos A_{1,2} = \cos l \cos B_2; \quad (542)$$

$$\sin \sigma \sin A_{1,2} = \cos B_2 \sin l,$$

и, следовательно,

$$dB_2 = \cos l dB_1 - \sin l \cos B_1 dA_{1,2}. \quad (543)$$

Теперь из (542) напомним

$$- \sin B_2 \cos l dB_2 - \cos B_2 \sin l dl =$$

$$= -(\cos \sigma \sin B_1 + \sin \sigma \cos B_1 \cos A_{1,2}) dB_1 + \sin \sigma \sin B_1 \sin A_{1,2} dA_{1,2};$$

$$\cos l dB_2 - \operatorname{ctg} B_2 \sin l dl = -dB_1 + \frac{\sin \sigma \sin B_1 \sin A_{1,2}}{\sin B_2} dA_{1,2};$$

$$\operatorname{ctg} B_2 dl = \sin l dB_1 + \left( \cos B_1 \cos l - \frac{\sin B_1}{\sin B_2} \cos B_2 \right) dA_{1,2};$$

$$dl = \sin l \operatorname{tg} B_2 dB_1 - \frac{\sin \sigma \cos A_{2,1}}{\cos B_2} dA_{1,2};$$

$$dl = \sin l \operatorname{tg} B_2 dB_1 - \sin l \frac{\cos A_{2,1}}{\sin A_{1,2}} dA_{1,2}. \quad (544)$$

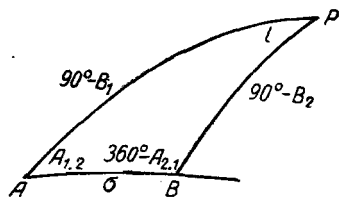
Возьмем теперь формулу

$$\sin B_1 = \cos \sigma \sin B_2 + \sin \sigma \cos B_2 \cos A_{2,1}.$$

Из нее получаем

$$\cos B_1 dB_1 = (\cos \sigma \cos B_2 - \sin \sigma \sin B_2 - \cos A_{2,1}) dB_2 - \sin \sigma \cos B_2 \sin A_{2,1} dA_{2,1};$$

$$dB_1 = \cos l dB_2 + \sin l \cos B_2 dA_{2,1};$$



Черт. 82

$$\begin{aligned}\sin l \cos B_2 dA_{2,1} &= \sin^2 l dB_1 + \cos B_1 \sin l \cos l dA_{1,2}; \\ dA_{2,1} &= \sin l \sec B_2 dB_1 - \cos l \frac{\sin A_{2,1}}{\sin A_{1,2}} dA_{1,2}.\end{aligned}\quad (545)$$

Или

$$dA_{2,1} = \sin l \sec B_2 dB_1 + \left[ 1 + \frac{(B_2 - B_1)'}{\rho'} \operatorname{tg} B_1 \right] \cos l dA_{1,2}.$$

Если к изменениям  $B_1$  и  $A_{1,2}$  присоединим еще изменения  $s$  и  $L_1$ , то будем иметь

$$\left. \begin{aligned}dB_2 &= \cos l dB_1 - \cos B_1 \sin l dA_{1,2} - (1)_2 \cos A_{2,1} \frac{\Delta \lg s}{\mu} \\ dL_2 &= dL_1 + \sin l \operatorname{tg} B_2 dB_1 - \sin l \frac{\cos A_{2,1}}{\sin A_{1,2}} dA_{1,2} - \\ &\quad - (2)_2 \frac{\sin A_{2,1}}{\cos B_2} \frac{\Delta \lg s}{\mu} \\ dA_{2,1} &= \sin l \sec B_2 dB_1 - \cos l \frac{\sin A_{2,1}}{\sin A_{1,2}} dA_{1,2} - \\ &\quad - (2)_2 \sin A_{2,1} \operatorname{tg} B_2 \frac{\Delta \lg s}{\mu}\end{aligned}\right\} \quad (546)$$

Сравнивая (546) с (541), мы легко видим, что формулы (546) ошибочны на величины порядка  $e^2 \frac{s}{a}$  в коэффициентах при  $dB_1$  и  $dA_{1,2}$ , т. е. сохранение в  $dB_2$ ,  $dL_2$  и  $dA_{2,1}$  0",001 не обеспечивается этими формулами даже при  $s = 50$  км. Следовательно, формулами (546) придется пользоваться лишь в целях топографических и картографических.

## § 71. Дифференциальные формулы второго рода для геодезической линии

Как уже указывалось, эти формулы служат для определения изменений в разностях широт, долгот и азимутов, обусловленных изменением большой полуоси  $a$  эллипсоида (на  $da$ ) и изменением полярного сжатия эллипсоида (на  $d\alpha$ ).

1. В ы в о д:

$$\frac{db}{da} \text{ и } \frac{db}{d\alpha}; \quad (b = B_2 - B_1).$$

Применяя формулу (256) к точке  $B$  как начальной для геодезической линии  $BA$ , напомним

$$\begin{aligned}\frac{B_1 - B_2}{V_2^2} &= \frac{V_2}{c} s \cos A_{2,1} - \frac{V_2^2}{2c^2} \operatorname{tg} B_2 s^2 \sin^2 A_{2,1} + \dots; \\ B_2 - B_1 = b &= -\frac{V_2^3}{a} \sqrt{1-e^2} s \cos A_{2,1} + \frac{V_2^4}{2a^2} (1-e^2) \operatorname{tg} B_2 s^2 \sin^2 A_{2,1} - \dots; \\ \frac{\partial b}{\partial a} &= \frac{V_2^3}{a^2} \sqrt{1-e^2} s \cos A_{2,1} - \frac{V_2^4}{a^3} (1-e^2) \operatorname{tg} B_2 s^2 \sin^2 A_{2,1} + \\ &\quad + \frac{V_2^3}{a} \sqrt{1-e^2} s \sin A_{2,1} \frac{dA_{2,1}}{da} \dots\end{aligned}\quad (547)$$



Эта формула подлежит еще дальнейшим упрощениям и преобразованиям. Из (527) или из формулы (279) с средней широтой и средним азимутом имеем

$$b = \frac{s \cos A_m}{a(1-e^2)} (1-e^2 \sin^2 B_m)^{\frac{3}{2}} + \text{члены третьего порядка.}$$

Отсюда с достаточной точностью

$$\begin{aligned} \frac{db}{d\alpha} &= \frac{s \cos A_m}{a(1-e^2)^2} \times \\ &\times \left[ 2(1-e^2) \sin^2 B_m)^{\frac{3}{2}} \frac{de}{d\alpha} - 3(1-e^2) (1-e^2 \sin^2 B_m)^{\frac{1}{2}} e \sin^2 B_m \frac{de}{d\alpha} \right] - \\ &- \frac{(1-e^2 \sin^2 B_m)^{\frac{3}{2}}}{a(1-e^2)} s \sin A_m \frac{dA_m}{d\alpha}; \\ \frac{de}{d\alpha} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}; \\ A_m &= A_{1,2} + \frac{(1-e^2 \sin^2 B_m)^{\frac{1}{2}}}{2a} \operatorname{tg} B_m s \sin A_m; \\ \frac{dA_m}{d\alpha} &= - \frac{\sqrt{1-e^2} s \sin A_m}{2a(1-e^2 \sin^2 B_m)^{\frac{1}{2}}} \sin^2 B_m \operatorname{tg} B_m. \end{aligned}$$

В  $\frac{dA_m}{d\alpha}$  пренебрегли величинами порядка  $\frac{s^2}{a^2}$ , что приведет в  $\frac{dB}{d\alpha}$  к ошибке порядка  $\frac{s^3}{R^3}$  и при  $s = 200$  км может дать в  $db$  ошибку до 0''0003.

Теперь будем иметь, обозначая  $(1-e^2 \sin^2 B_m)^{\frac{1}{2}}$  через  $W_m$ .

$$\begin{aligned} \frac{db}{d\alpha} &= - \frac{3W_m}{\sqrt{1-e^2}} \frac{s}{a} \cos A_m \sin^2 B_m + \frac{2}{\sqrt{1-e^2}} \frac{s}{M_m} \cos A_m + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{1-e^2}} \frac{s^2}{N_m^2} \sin^2 A_m \sin^2 B_m \operatorname{tg} B_m. \end{aligned}$$

Так как с принятой точностью

$$l = \frac{s \sin A_m}{N_m \cos B_m},$$

то

$$\frac{db}{d\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ - \frac{3(1-e^2)}{W_m^2} b \sin^2 B_m + 2b + \frac{1}{2} l^2 \sin^3 B_m \cos B_m \right\} \quad (548)$$

При пониженных требованиях точности можно написать

$$\frac{db}{d\alpha} = (2 - 3 \sin^2 B_m) (B_2 - B_1). \quad (549)$$

2. Вывод:

$$\frac{dl}{da} \text{ и } \frac{dl}{d\alpha}.$$

Применяя формулу (257) к точке  $B$ , как к *начальной* на геодезической линии  $BA$ , напомним

$$l \cos B_2 = -\frac{V_2}{a} \sqrt{1-e^2} s \sin A_{2,1} - \frac{V_2^2}{a^2} (1-e^2) s^2 \sin A_{2,1} \times \\ \times \cos A_{2,1} \operatorname{tg} B_2 - \dots$$

Отсюда

$$\frac{dl}{du} = \frac{V_2}{a^2} \sqrt{1-e^2} \frac{s \sin A_{2,1}}{\cos B_2} + \frac{V_2^2}{a^3} (1-e^2) s^2 \sin 2A_{2,1} \frac{\operatorname{tg} B_2}{\cos B_2} - \\ - \frac{V_2^2}{a} \sqrt{1-e^2} \frac{s \cos A_{2,1}}{\cos B_2} \frac{dA_{2,1}}{da} - \\ - \frac{V_2}{a} \sqrt{1-e^2} s \sin A_{2,1} \frac{\operatorname{tg} B_2}{\cos B_2} \frac{dB_2}{da}. \quad (550)$$

Эта формула подлежит еще дальнейшим преобразованиям. Так как

$$V = W \sqrt{1+e^2} = W \frac{1}{\sqrt{1-e^2}},$$

то формулу (257) переписываем еще так

$$l = W_1 \frac{s \sin A_{1,2}}{a \cos B_1} + W_1^2 \frac{s^2 \sin A_{1,2}}{a^2 \cos B_1} \cos A_{1,2} \operatorname{tg} B_1 + \dots$$

Отсюда

$$\frac{dl}{d\alpha} = -\frac{s \sin A_{1,2}}{a W_1 \cos B_1} \sin^2 B_1 \sqrt{1-e^2} - \\ - 2 \sqrt{1-e^2} \frac{s^2 \sin A_{1,2} \cos A_{1,2}}{a^2 \cos B_1} \sin^2 B_1 \operatorname{tg} B_1; \\ \frac{dl}{d\alpha} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{W_1^2} \left( W_1 \frac{s \sin A_{1,2}}{a \cos B_1} \sin^2 B_1 + \right. \\ \left. + 2W_1^2 \frac{s^2 \sin A_{1,2} \cos A_{1,2}}{a^2 \cos B_1} \operatorname{tg} B_1 \sin^2 B_1 \right); \\ \frac{dl}{d\alpha} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{W_1^2} \sin^2 B_1 \left( l + W_1 l \frac{s}{a} \cos A_{1,2} \operatorname{tg} B_1 \right).$$

С отбрасыванием членов порядка  $e^2 \frac{s^2}{a^2}$  напомним далее

$$\frac{dl}{d\alpha} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{W_1^2} \sin^2 B_1 l \left( 1 + \frac{s}{a} \cos A_{1,2} \operatorname{tg} B_1 \right).$$

Взяв приближенную формулу

$$\cos B_2 = \cos B_1 - \frac{s}{M_1} \cos A_{1,2} \sin B_1,$$

$$\frac{\cos B_2}{\cos B_1} = 1 - \frac{s}{a} \cos A_{1,2} \operatorname{tg} B_1; \quad \frac{\cos B_1}{\cos B_2} = 1 + \frac{s}{a} \cos A_{1,2} \operatorname{tg} B_1,$$

получим окончательно

$$\frac{dl}{d\alpha} = - \frac{\sqrt{1-e^2}}{W_1^2} \sin^2 B_1 l \frac{\cos B_1}{\cos B_2}. \quad (551)$$

3. Вывод

$$-\frac{dA_{2,1}}{da} \text{ и } \frac{dA_{2,1}}{dz}.$$

Из формулы (258) § 31 имеем

$$A_{2,1} = A_{1,2} \pm 180^\circ + W_1 \frac{s}{a} \sin A_{1,2} \operatorname{tg} B_1 + \\ + W_1^3 \frac{s^2}{2a^2} \sin A_{1,2} \cos A_{1,2} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 B_1 + e^2 \cos^2 B_1).$$

или

$$A_{1,2} = A_{2,1} \pm 180^\circ + \frac{V_2}{a} \sqrt{1-e^2} s \sin A_{2,1} \operatorname{tg} B_2 + \\ + \frac{V_2^2}{2a^2} (1-e^2) s^2 (1 + 2 \operatorname{tg}^2 B_2) \sin A_{2,1} \cos A_{2,1}.$$

Отсюда

$$\frac{dA_{2,1}}{da} = \frac{V_2}{a^2} \sqrt{1-e^2} s \sin A_{2,1} \operatorname{tg} B_2 + \frac{V_2^2 (1-e^2)}{a^3} s^2 (1 + 2 \operatorname{tg}^2 B_2) \times \\ \times \sin A_{2,1} \cos A_{2,1} - \frac{V_2}{a} \sqrt{1-e^2} s \sin A_{2,1} \operatorname{tg} B_2 \frac{dA_{2,1}}{da} - \\ - \frac{V_2}{a} \sqrt{1-e^2} s \sin A_{2,1} \frac{1}{\cos^2 B_2} \frac{dB_2}{da}, \quad (552)$$

причем, конечно, ясно что  $\frac{dA_{2,1}}{da}$  вычисляется, как  $\frac{d(A_{2,1}-A_{1,2})}{da}$ , а  $\frac{dB_2}{da} = \frac{db}{da}$ .

Далее

$$\frac{dA_{2,1}}{d\alpha} = - \frac{\sqrt{1-e^2}}{W_1} \frac{s}{a} \sin A_{1,2} \operatorname{tg} B_1 \sin^2 B_1 - \\ - \sqrt{1-e^2} \frac{s^2}{a^2} \sin A_{1,2} \cos A_{1,2} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 B_1) \sin^2 B_1 + \\ + W_1^3 \frac{s^2}{a^2} \sin A_{1,2} \cos A_{1,2} \sqrt{1-e^2} \cos^2 B_1.$$

Далее

$$\frac{dA_{2,1}}{dz} = - \frac{\sqrt{1-e^2}}{W_1^2} \left\{ \frac{s}{a} W_1 \frac{\sin A_{1,2}}{\cos B_1} \sin^3 B_1 + W_1^2 \frac{s^2}{a^2} \sin A_{1,2} \cos A_{1,2} \sin^2 B_1 + \right. \\ \left. + 2 W_1^2 \frac{s^2}{a^2} \sin A_{1,2} \cos A_{1,2} \operatorname{tg}^2 B_1 \sin^2 B_1 - \right. \\ \left. - \frac{s^2}{a^2} \sin A_{1,2} \cos A_{1,2} \cos^2 B_1 \right\}; \\ \frac{dA_{2,1}}{d\alpha} = - \frac{\sqrt{1-e^2}}{W_1^2} \left\{ \frac{s}{a} W_1 \frac{\sin A_{1,2}}{\cos B_1} \sin^3 B_1 + \frac{s^2}{a^2} \sin A_{1,2} \cos A_{1,2} \sin^2 B_1 + \right. \\ \left. + W_1^2 \frac{s^2}{a^2} \frac{\sin A_{1,2}}{\cos B_1} \cos A_{1,2} \operatorname{tg} B_1 \sin^3 B_1 + \right. \\ \left. + \frac{s^2}{a^2} \sin A_{1,2} \cos A_{1,2} \operatorname{tg}^2 B_1 \sin^2 B_1 - \frac{s^2}{a^2} \sin A_{1,2} \cos A_{1,2} \cos^2 B_1 \right\};$$

$$\frac{dA_{2,1}}{dx} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{W_1^2} \left\{ l \sin^3 B_1 + \frac{s^2 \sin A_{1,2} \cos A_{1,2}}{a^2 \cos B_1} \sin^3 B_1 \operatorname{tg} B_1 + \right. \\ \left. + \frac{s^2 \sin A_{1,2} \cos A_{1,2}}{a^2 \cos B_1} B (\sin^2 B_1 \cos B_1 - \cos^3 B_1) \right\};$$

$$\frac{dA_{2,1}}{dx} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{W_1^2} \{ l \sin^3 B_1 [1 + (B_2 - B_1) \operatorname{tg} B_1] + \\ + l (B_2 - B_1) \cos^3 B_1 (\operatorname{tg}^2 B_1 - 1) \},$$

причем в членах порядка  $\frac{s^2}{a^2}$  член  $\frac{s \cos A_{1,2}}{a}$  приравнен  $B_2 - B_1$ , а член  $\frac{s \sin A_{1,2}}{a}$  приравнен  $l \cos B_1$ .

Так как с той же точностью

$$\frac{\cos B_1}{\cos B_2} = 1 + (B_2 - B_1) \operatorname{tg} B_1, \quad \frac{\sin B_1}{\sin B_2} = 1 - (B_2 - B_1) \operatorname{ctg} B_1,$$

то

$$\frac{dA_{2,1}}{dx} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{W_1^2} \left\{ l \sin^3 B_1 \frac{\cos B_1}{\cos B_2} + l (B_2 - B_1) \cos^3 B_1 (\operatorname{tg}^2 B_1 - 1) \right\};$$

$$\frac{dA_{2,1}}{dx} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{W_1^2} \left\{ l \sin^2 B_1 \sin B_2 \frac{\cos B_1}{\cos B_2} [1 - (B_2 - B_1) \operatorname{ctg} B_1] + \right. \\ \left. + l (B_2 - B_1) \cos^3 B_1 (\operatorname{tg}^2 B_1 - 1) \right\};$$

$$\frac{dA_{2,1}}{dx} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{W_1^2} \left\{ l \sin^2 B_1 \sin B_2 \frac{\cos B_1}{\cos B_2} - l (B_2 - B_1) \cos^3 B_1 \right\}. \quad (553)$$

Теперь для (547), (550) и (552) имеем в виду, что из (552)

$$\begin{aligned} -\frac{V_2^3}{a} \sqrt{1-e^2} s \sin A_{2,1} \frac{dA_{2,1}}{da} &= \frac{V_2^4 (1-e^2)}{a^3} s^2 \sin^2 A_{2,1} \operatorname{tg} B_2; \\ -\frac{V_2}{a} \sqrt{1-e^2} \frac{s \cos A_{2,1}}{\cos B_2} \frac{dA_{2,1}}{da} - \frac{V_2}{a} \sqrt{1-e^2} s \sin A_{2,1} \frac{\operatorname{tg} B_2}{\cos B_2} \frac{dB_2}{da} &= \\ = -\frac{V_2^2}{a^3} (1-e^2) s^2 \sin A_{2,1} \cos A_{2,1} \frac{\operatorname{tg} B_2}{\cos B_2} - \\ - \frac{V_2^4 (1-e^2)}{a^3} s^2 \sin A_{2,1} \cos A_{2,1} \times \frac{\operatorname{tg} B_2}{\cos B_2} &= \\ = -V_2^2 \frac{(1-e^2)}{a^3} s^2 \sin 2A_{2,1} \frac{\operatorname{tg} B_2}{\cos B_2}; \\ \frac{V_2}{a} \sqrt{1-e^2} s \sin A_{2,1} \frac{1}{\cos^2 B_2} \frac{dB_2}{da} &= \frac{V_2^4}{a^3} (1-e^2) s^2 \sin A_{2,1} \cos A_{2,1} (1 + \operatorname{tg}^2 B_2) \\ \frac{V_2}{a} \sqrt{1-e^2} s \cos A_{2,1} \operatorname{tg} B_2 \frac{dA_{2,1}}{da} &= \frac{V_2^2}{a^3} (1-e^2) s^2 \sin A_{2,1} \cos A_{2,1} \operatorname{tg} B_2; \\ -\frac{V_2}{a} \sqrt{1-e^2} s \sin A_{2,1} \frac{1}{\cos^2 B_2} \frac{dB_2}{da} - \frac{V_2}{a} \sqrt{1-e^2} s \cos A_{2,1} \operatorname{tg} B_2 \frac{dA_{2,1}}{da} &= \\ = -\frac{V_2^2}{a^3} (1-e^2) s^2 \sin A_{2,1} \cos A_{2,1} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 B_2). \end{aligned}$$

Следовательно

$$\left. \begin{aligned} \frac{db}{da} &= \frac{s \cos A_{2.1}}{a M_2} \\ \frac{dl}{da} &= \frac{s \sin A_{2.1}}{a N_2 \cos B_2} \\ \frac{d(A_{2.1} \pm 180^\circ - A_{1.2})}{da} &= \frac{s \sin A_{2.1}}{a N_2} \operatorname{tg} B_2 \end{aligned} \right\} \quad (554)$$

Сюда присоединяем

$$\left. \begin{aligned} \frac{db}{d\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left[ b \left( 2 - \frac{3}{W_m^2} \sin^2 B_m \right) + \frac{l^2}{2} \sin^2 B_m \cos B_m \right] \\ \frac{dl}{d\alpha} &= - \frac{\sqrt{1-e^2}}{W_1^2} \sin^2 B_1 \frac{\cos B_1}{\cos B_2} l \\ \frac{dA_{2.1}}{d\alpha} &= - \frac{\sqrt{1-e^2}}{W_1^2} \left[ l \sin^2 B_1 \sin B_2 \frac{\cos B_1}{\cos B_2} - l b \cos^3 B_1 \right] \\ \frac{dA_{2.1}}{d\alpha} &= - \frac{\sqrt{1-e^2}}{W_1^2} l \cos B_1 [\sin^2 B_1 \operatorname{tg} B_2 - b \cos^2 B_1] \end{aligned} \right\} \quad (555)$$

По существу, так как  $dA_{1.2}$  принимается равным нулю, то  $\frac{dA_{2.1}}{d\alpha} = \frac{d[A_{2.1} - A_{1.2} \pm 180^\circ]}{d\alpha}$  и  $\frac{dA_{2.1}}{da} = \frac{d[A_{2.1} - A_{1.2} \pm 180^\circ]}{da}$  т. е. в последней из формул (554) и в последней из формул (555) отыскивается и дается изменение *разности* обратного и прямого азимутов при изменении  $a$  и  $\alpha$ .

Дифференциальными формулами (554) и (555), т. е. формулами *второго рода*, приходится пользоваться, *во-первых*, при введении, вместо ранее принятого эллипсоида, нового эллипсоида, с иными размерами экваториальной полуоси и сжатия (это имеет место обычно при перемычислениях старых триангуляций), *во-вторых*, при определении из астрономо-геодезической сети обширной страны размеров и сжатия эллипсоида, наилучшее подходящего к геоиду в пределах этой страны, и при одновременном установлении так называемых исходных геодезических дат, т. е. геодезической широты, геодезической долготы и геодезического азимута в некотором, принимаемом за исходный, пункте государственной триангуляции. Нужно, впрочем, сказать, что при решении этой задачи для обширной страны точность формул (554) и (555) недостаточна. Понятно, что задача установления исходных геодезических дат совпадает с задачей ориентирования эллипсоида.

## § 72. Зависимость между передвижениями концов геодезической линии и изменениями ее азимутов в конечных точках

Пусть координаты концов  $A$  и  $B$  геодезической линии  $AB$  изменяются соответственно на  $dB_1, dL_1$  и на  $dB_2, dL_2$ . Определим вызываемые этими изменениями координат изменения в азимутах нашей геодезической линии в точках  $A$  и  $B$ . Представим себе, что сперва изменяются только  $B_2$  на  $dB_2$  и  $L_2$  на  $dL_2$ ; обусловленное  $dB_2$  и  $dL_2$  изменение азимута  $A_{1.2}$  назовем через  $dA''_{1.2}$ . Из уравнений (536) имеем

$$\left. \begin{aligned} dB_2 &= -\frac{1}{M_2} \cos A_{2,1} ds + \frac{m}{M_2} \sin A_{2,1} dA''_{1,2} \\ dL_2 &= -\frac{1}{N_2} \frac{\sin A_{2,1}}{\cos B_2} ds - \frac{m}{N_2} \frac{\cos A_{2,1}}{\cos B_2} dA''_{1,2} \end{aligned} \right\}. \quad (A)$$

Исключая отсюда  $ds$ , мы получим

$$dA''_{1,2} = \frac{M_2}{m} \sin A_{2,1} dB_2 - \frac{N_2}{m} \cos B_2 \cos A_{2,1} dL_2. \quad (556)$$

Предполагая, что изменяются только  $B_1$  и  $L_1$ , соответствующее изменение в  $A_{2,1}$  назовем через  $A'_{2,1}$ . Понятно, что простым обращением значков в (556) получим  $dA'_{1,2}$  в таком виде

$$dA'_{2,1} = \frac{M_1}{m} \sin A_{1,2} dB_1 - \frac{N_1}{m} \cos A_{1,2} \cos B_1 dL_1. \quad (557)$$

Представим себе вновь, что точка  $A$  неподвижна, а точка  $B$  перемещается на  $dB_2$  и  $dL_2$ . Назовем происходящее при этом изменение азимута  $A_{2,1}$  через  $dA''_{2,1}$ , тогда к формулам (A) присоединим еще третьи формулы из формул (536)

$$dA''_{2,1} = -\frac{1}{N_2} \sin A_{2,1} \operatorname{tg} B_2 ds + \left[ \left( \frac{dm}{ds} \right)_1 - \frac{m}{N_2} \cos A_{2,1} \operatorname{tg} B_2 \right] dA''_{1,2}. \quad (B)$$

Исключая из уравнений (A) и (B) величины  $ds$  и  $dA''_{1,2}$ , причем для  $dA''_{1,2}$  используем (556), мы получим

$$\begin{aligned} dA''_{2,1} &= \frac{M_2}{N_2} \sin A_{2,1} \cos A_{2,1} \operatorname{tg} B_2 dB_2 + \sin A_{2,1} \sin A_{2,1} \sin B_2 dL_2 + \\ &+ \left( \frac{dm}{ds} \right)_1 \left[ \frac{M_2}{m} \sin A_{2,1} dB_2 - \frac{N_2}{m} \cos B_2 \cos A_{2,1} dL_2 \right] - \\ &- \frac{M_2}{N_2} \sin A_{2,1} \cos A_{2,1} \operatorname{tg} B_2 dB_2 + \cos^2 A_{2,1} \sin B_2 dL_2; \\ dA''_{2,1} &= \left( \frac{dm}{ds} \right)_1 \frac{M_2}{m} \sin A_{2,1} dB_2 + \\ &+ \left[ \sin B_2 - \frac{N_2}{m} \left( \frac{dm}{ds} \right)_1 \cos B_2 \cos A_{2,1} \right] dL_2. \end{aligned}$$

Эту формулу для  $dA''_{1,2}$  можно было бы и оставить в полученном только что виде. Но займемся (без доказательства) у Гельмерта следующую формулу для  $\left( \frac{dm}{ds} \right)_1$

$$\left( \frac{dm}{ds} \right)_1 = -\frac{N_1}{N_2} \frac{\cos B_1}{\cos B_2} \frac{\cos A_{1,2}}{\cos A_{2,1}} + \frac{m}{N_2} \frac{\operatorname{tg} B_2}{\cos A_{2,1}}.$$

Подставляя это выражение в последнее уравнение для  $dA''_{2,1}$ , получаем

$$dA''_{2,1} = \left( \frac{dm}{ds} \right)_1 \frac{M_2}{m} \sin A_{2,1} dB_1 + \frac{N_1}{m} \cos B_1 \cos A_{1,2} dL_2. \quad (558)$$

Если представим себе, что  $B$  неподвижно, а перемещается  $A$  на  $dB_1$  и  $dL_1$ , то обусловленное этими изменениями координат точки  $A$  измене-

ние в азимуте  $A_{1,2}$ , которое мы назовем через  $dA'_{1,2}$ , получится из (558) простым обращением значков. Следовательно,

$$dA'_{1,2} = \left(\frac{dm}{ds}\right)_2 \frac{M_1}{m} \sin A_{1,2} dB_1 + \frac{N_2}{m} \cos B_2 \cos A_{2,1} dL_1. \quad (559)$$

Собирая вместе полученные в этом параграфе формулы, напомним такие результаты:

1. Если перемещается  $B$  при неподвижном  $A$ , то

$$\left. \begin{aligned} dA''_{1,2} &= \frac{M_2}{m} \sin A_{2,1} dB_2 - \frac{N_2}{m} \cos B_2 \cos A_{2,1} dL_2 \\ dA''_{2,1} &= \left(\frac{dm}{ds}\right)_1 \frac{M_2}{m} \sin A_{2,1} dB_2 + \frac{N_1}{m} \cos B_1 \cos A_{1,2} dL_2 \end{aligned} \right\}. \quad (560)$$

2. Если перемещается  $A$  при неподвижном  $B$ , то

$$\left. \begin{aligned} dA'_{1,2} &= \left(\frac{dm}{ds}\right)_2 \frac{M_1}{m} \sin A_{1,2} dB_1 + \frac{N_2}{m} \cos B_2 \cos A_{2,1} dL_1 \\ dA'_{2,1} &= \frac{M_1}{m} \sin A_{1,2} dB_1 - \frac{N_1}{m} \cos B_1 \cos A_{1,2} dL_1 \end{aligned} \right\}. \quad (561)$$

3. Если перемещается одновременно и  $A$  и  $B$ , то

$$\left. \begin{aligned} dA_{1,2} &= dA'_{1,2} + dA''_{1,2} \\ dA_{2,1} &= dA'_{2,1} + dA''_{2,1} \end{aligned} \right\}. \quad (562)$$

При применении формул (560) и (561) при  $s < 200$  км, вычисляем  $m$  по формуле

$$\lg m = \lg s - \frac{\mu s^2}{6R^2},$$

а  $\left(\frac{dm}{ds}\right)_1$  не различаем от  $\left(\frac{dm}{ds}\right)_2$  и вычисляем  $\frac{dm}{ds}$  так

$$\lg \frac{dm}{ds} = -\frac{\mu s^2}{2R^2}.$$

Дифференциальные формулы (560), (561) и (562) применяются для составления уравнений погрешностей при уравнивании государственной астрономо-геодезической сети по способу посредственных наблюдений. При этом оказывается нужной как формула для  $dA_{1,2}$ , так и формула для  $ds$ . Формулу для  $dA_{1,2}$  из (562), (561) и (560) напомним так

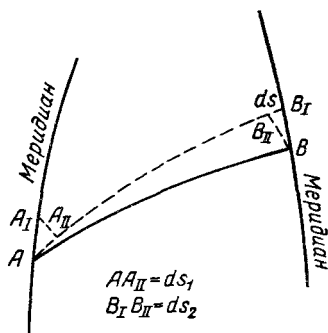
$$\begin{aligned} dA_{1,2} &= \left(\frac{dm}{ds}\right)_1 \frac{M_1}{m} \sin A_{1,2} dB_1 + \frac{M_2}{m} \sin A_{2,1} dB_2 + \\ &+ \frac{N_2}{m} \cos B_2 \cos A_{2,1} dL_1 - \frac{N_2}{m} \cos B_2 \cos A_{2,1} dL_2. \end{aligned} \quad (563)$$

Иногда эту формулу (563) упрощают, понижая несколько ее точность, и именно представляют в таком виде

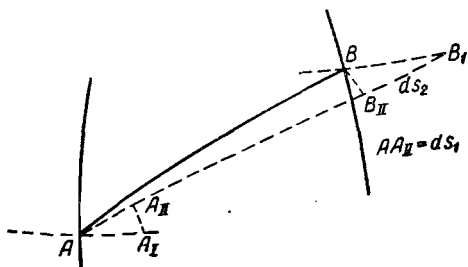
$$\begin{aligned} dA_{1,2} &= \frac{M_1}{s} \sin A_{1,2} dB_1 + \frac{M_2}{s} \sin A_{2,1} dB_2 - \\ &- \frac{N_1}{s} \cos B_1 \left( \cos A_{1,2} - \frac{s}{N_1} \operatorname{tg} B_1 \right) dL_1 - \frac{N_2}{s} \cos B_2 \cos A_{2,1} dL_2 \end{aligned} \quad (564)$$

(см. проф. Н. А. Урмаев, «Методы уравнивания триангуляции I класса»).

Из черт. 83 и 84 легко находим



Черт. 83



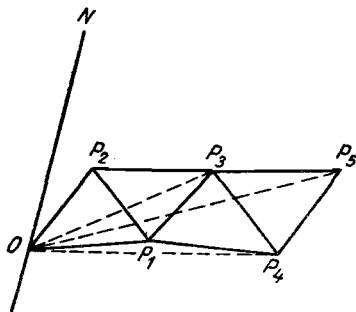
Черт. 84

$$ds = -\frac{M_2}{\rho''} \cos A_{2 \cdot 1} dB_2 - \frac{M_1}{\rho''} \cos A_{1 \cdot 2} dB_1 - \\ - \frac{N_2}{\rho''} \cos B_2 \sin A_{2 \cdot 1} dL_2 - \frac{N_1}{\rho''} \cos B_1 \sin A_{1 \cdot 2} dL_1. \quad (565)$$

### § 73. Полярные координаты

Полярные координаты приходится применять при обработке градусных измерений и при уравнивательных вычислениях в большой триангуляции\*. Хотя вопрос о полярных координатах и не имеет отношения к дифференциальным формулам, являющимся содержанием настоящей главы, но вместе с этими формулами он необходим для подготовки изложения вопросов последующих глав о градусных измерениях и об обработке значительных триангуляционных сетей. Поэтому этот вопрос приходится поставить, как завершающий главу VIII, но, конечно, можно было бы его поместить и в главе X — «Градусные измерения», однако несколько перебивая изложение главы X. Мы будем придерживаться того вывода формул для вычисления полярных координат, который был дан в свое время Струве при обработке его знаменитой дуги по меридиану.

Представим себе сперва, что начало  $O$  полярных координат совпадает (черт. 85) с одной из вершин треугольников триангуляции. Пусть  $ON$  — меридиан точки  $O$ . Полярными координатами точек  $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$  являются длины геодезических линий  $OP_1, OP_2, OP_3, OP_4, \dots$  и азимуты в  $O$  этих линий. Азимут первой линии  $OP_1$  будет известен или из астрономических определений, если  $OP_1$  есть исходная сторона триангуляции, или из геодезической передачи посредством треугольников, соединяющих  $OP_1$  с исходной стороной триангуляции. Если азимут  $OP_1$  известен, то сейчас же по уравненному углу



Черт. 85

\* Кроме того, полярные координаты могут быть применены при вычислении сферических прямоугольных координат по формулам (317) и (316).



$P_2OP_1$  соображаем азимут  $OP_2$ ; из вычисления же треугольников длины сторон  $OP_1$  и  $OP_2$  также известны. Таким образом, в первом треугольнике полярные координаты его вершин не требуют специального вычисления.

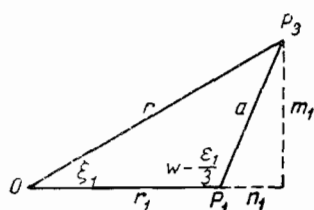
Переходя к вычислению полярных координат точки  $P_3$ , введем обозначения

$$\begin{aligned} OP_3 &= r; \text{ азимут в } O \text{ на } P_3 \text{ равен } R; \\ OP_1 &= r_1; \quad " \quad " \quad O \quad " \quad P_1 \quad " \quad R_1; \\ OP_2 &= r_2; \quad " \quad " \quad O \quad " \quad P_2 \quad " \quad R_2; \\ P_1P_3 &= a; \quad P_2P_3 = b; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle OP_1P_3 &= w_1; & \angle OP_2P_3 &= w_2; \\ \angle P_3OP_1 &= z_1; & \angle P_3OP_2 &= z_2; \\ \angle OP_3P_1 &= y_1; & \angle P_2P_3O &= y_2; \end{aligned}$$

сферический избыток треугольника  $P_3OP_1 = \varepsilon_1$ ;  
 " " " "  $P_3OP_2 = \varepsilon_2$ .

Применяя к решению треугольника  $P_3OP_1$  теорему Лежандра и руководясь черт. 86, напишем



Черт. 86

$$\begin{aligned} m_1 &= a \sin \left( w_1 - \frac{\varepsilon_1}{3} \right); & \operatorname{tg} \xi_1 &= \frac{m_1}{r_1 - n_1}; \\ n_1 &= a \cos \left( w_1 - \frac{\varepsilon_1}{3} \right); \\ r &= \frac{r_1 - n_1}{\cos \xi_1}; \\ z_1 &= \xi_1 + \frac{\varepsilon_1}{3}; & R &= R_1 \pm z_1; \end{aligned}$$

$$y_1 = 180^\circ + \varepsilon_1 - (w_1 + z_1).$$

В формуле для  $R$  знак плюс берется, если  $P_3$  южнее  $P_1$ .

Применяя к решению треугольника  $P_3OP_2$  теорему Лежандра, аналогично напишем

$$\begin{aligned} m_2 &= b \sin \left( w_2 - \frac{\varepsilon_2}{3} \right); \\ n_2 &= b \cos \left( w_2 - \frac{\varepsilon_2}{3} \right); \\ \operatorname{tg} \xi_2 &= \frac{m_2}{r_2 - n_2}; & r &= \frac{r_2 - n_2}{\cos \xi_2}; \\ z_2 &= \xi_2 + \frac{\varepsilon_2}{3}; & R &= R_2 \pm z_2; \\ y_2 &= 180^\circ + \varepsilon_2 - (w_2 + z_2). \end{aligned}$$

Контроль вычислений

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= \angle P_2OP_1 \quad (\text{может быть } z_2 - z_1), \\ y_1 + y_2 &= \angle P_2P_3P_1 \quad (\text{может быть } y_2 - y_1); \end{aligned}$$

кроме того, два вывода  $r$  и  $R$  должны между собой согласоваться.

Переходя к точке  $P_4$ , образуем для нахождения  $r$  и  $R$  для нее треугольники  $OP_3P_4$  и  $OP_1P_4$ , причем угол  $w_2$  получится, как только

что найденный  $y_1^* + \angle P_1 P_3 P_4$ ; символ  $a$  приписываем стороне  $P_1 P_4$ , символ  $b$  — стороне  $P_2 P_4$ ; дальнейший ход вычисления ясен.

Сферические избытки треугольников  $OP_1 P_3$ ,  $OP_2 P_3$ ,  $OP_3 P_4$  вычисляются по формуле

$$\varepsilon'' = \frac{bc \sin A_2''}{2M_m N_m},$$

если  $\varepsilon'' < 15''$ ; при больших значениях  $\varepsilon$  пользуются формулой

$$\varepsilon'' = \frac{bc \sin \left(A - \frac{\varepsilon}{3}\right)}{2M_m N_m} \varepsilon'' \left(1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24M_m N_m}\right).$$

При значительном протяжении триангуляции, именно, когда  $r$  превысит 250 км, может оказаться, что  $\varepsilon$  будет около  $30''$ . Тогда придется применять точные формулы § 22; следовательно, в этом случае в треугольнике  $OP_3 P_1$  (черт. 86) будем иметь

$$m_1 = a \sin \left(w_1 - \frac{\varepsilon_1}{3}\right);$$

$$n_1 = a \cos \left(w_1 - \frac{\varepsilon_1}{3}\right);$$

$$\frac{\varepsilon_1}{3} = \frac{\varepsilon_1}{3} + \frac{\varepsilon_1 n}{60} (m^2 - r^2) - \frac{\varepsilon_1}{12} \frac{n' - n'_2}{n'};$$

$$z_1 = \xi_1 + \frac{\varepsilon_1}{3} + \frac{\varepsilon_1 n'}{60} (m^2 - a^2) -$$

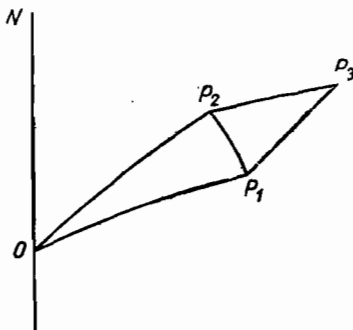
$$- \frac{\varepsilon_1}{12} \frac{n' - n'_1}{3};$$

$$m^2 = \frac{a^2 + r^2 + r^2}{3}; \quad n' = \frac{n'_1 + n'_2 + n'_3}{3};$$

$$n'_1 = \frac{1}{MN} \dots \text{для } O;$$

$$n'_2 = \frac{1}{MN} \dots \text{для } P_1;$$

$$n'_3 = \frac{1}{MN} \dots \text{для } P_3.$$



Черт. 87

Если начало координат  $O$  не входит в триангуляцию, то тогда (черт. 87) придется сперва по геодезическим координатам точек  $P_1$  и  $O$  вычислить из решения обратной геодезической задачи длину геодезической линии  $OP_1$  и азимуты ее в  $O$  и в  $P_1$ . По азимуту в  $P_1$  на  $O$  и по азимуту в  $P_1$  на  $P_2$ , который, конечно, должен быть известен вместе с координатами  $P_1$  и  $O$ , соображается  $\angle P_2 P_1 O$ , после чего треугольник  $P_2 O P_1$  решается по двум сторонам и углу между ними совершенно так же, как ранее мы решали треугольник  $P_3 O P_1$  (черт. 86). Дальнейший ход вычислений ясен сам собой.

Полярные координаты имеют лишь вспомогательное значение: они применяются при обработке градусных измерений, могут служить для вычисления сфероидических прямоугольных координат и используются при уравнивании больших триангуляций.

\* При решении треугольника  $P_3 O P_1$ .

## Глава IX

# ОБ УКЛОНЕНИЯХ ОТВЕСНЫХ ЛИНИЙ И ОПРЕДЕЛЕНИИ ОТСТУПЛЕНИЙ ГЕОИДА ОТ РЕФЕРЕНЦ-ЭЛЛИпсоиДА

### § 74. Общие соображения

Мы определяем силу тяжести, как равнодействующую центробежной силы и силы земного притяжения. Направление силы тяжести в некоторой точке *A*, или направление отвесной линии, конечно, вполне определяется видом уровенной поверхности в этой точке *A*. Известно из теории фигуры Земли, что вообще можно подобрать множество распределений масс внутри объема, занимаемого земным шаром, без того, чтобы вид основной уровенной поверхности, т. е. поверхности геоида, изменился. Другими словами, по виду уровенной поверхности, например, по отступлениям геоида от сфероида, мы не можем еще судить о распределении масс, вызвавших такие отступления. Но обратно, существующее распределение масс в земном теле вполне определяет уровенные поверхности и направления отвесных линий. Говоря иначе, отступления геоида от сфероида обусловлены существующим распределением масс на поверхности земного шара и внутри его и соответствуют этому распределению.

Внутреннее устройство Земли остается для нас и в настоящее время далеко неполно изученным. Геодезия уже двести лет назад установила, что Земля неоднородна и что плотность вещества в ней должна возрастать вместе с приближением к центру земного шара\*. Геофизика представляет Землю состоящей из четырех (или трех) слоев, причем плотность нижних слоев более плотности верхних. Предположение, что в крайне отдаленные времена Земля была огненно-жидкой, является очень вероятным. Из этого предположения вытекает, что внутренние слои Земли, лежащие на несколько десятков километров ниже уровня Океана, и по их затвердении должны остаться в гидростатическом равновесии или быть близки к нему, и что внутреннее строение Земли, за исключением ее коры, возможно принимать состоящим из слоев разной плотности, *разграничиваемых поверхностями*, близкими к уровенным поверхностям, отвечающим условиям равновесия жидкой вращающейся массы. Скорость вращения Земли такова, что при ней фигурой равновесия жидкой вращающейся массы могут быть лишь фигуры вращения, весьма близкие к шару; такие фигуры вообще носят название *сфероидов*. Геофизика показывает, что в значительной своей толще Земля обладает достаточной пластичностью и поэтому к ней, за исключением внешней

\* Это же было ранее за 50 лет установлено Ньютоном, оценившим массу и плотность Земли на основании движения Луны.

коры сравнительно малой толщины, приложимы законы гидростатики. Другими словами, и без предположения о первоначальном огненно-жидком состоянии Земли мы приходим к заключению, что Земля состоит из слоев разной плотности, разграниченных поверхностями, близкими к уровненным поверхностям, и именно поверхностями сфероидов. Поверхность океанов, по данным геодезии, близка к поверхности эллипсоида вращения, а это является также доказательством и притом одним из наилучших, что уровненные поверхности, разграничивающие внутренние слои Земли, являются сфероидами.

Простейший из сфероидов — эллипсоид вращения, строго рассуждая, не может быть фигурой равновесия неоднородной жидкой вращающейся массы; однако теоретические исследования показали, что так называемый «нормальный геоид», т. е. соответствующий правильному, идеальному распределению масс в земном шаре и являющийся сфероидом равновесия, отступает от эллипсоида вращения максимально всего на 2—3 м (в средних широтах). При этом под идеальным распределением масс понимается то, когда Земля, включая и ее кору, представляется состоящей из однородных слоев разной плотности, разграниченных сфероидами.

Предположение, что плотность Земли везде постоянна, или предположение, что Земля однородна, приводит, в применении к Земле, как к жидкому вращающемуся телу, к заключению, что полярное сжатие Земли близко к 1 : 230; предположение, что вся масса Земли сосредоточена в ее центре, приводит к заключению, что полярное сжатие Земли равно 1 : 578. Из градусных измерений и из измерений силы тяжести мы имеем значения земного сжатия между 1 : 293 и 1 : 302, поэтому мы должны заключить, что Земля неоднородна и плотность вещества в ней возрастает вообще от наружных слоев к центру. Современная геофизика так рисует нам внутреннее строение Земли: земная кора, образованная кристаллическими породами, имеет толщину 50—60 км и среднюю плотность 2,7; вблизи ее нижней границы кристаллические породы находятся в состоянии скрытой пластичности; далее, до глубины 1200 км, следует «оболочка», имеющая на глубине 60 км плотность 3,1 и на глубине 1200 км — 3,4; эта оболочка до глубины 120 км находится в состоянии пластичности и образована кристаллическими породами, в которых могут быть гнезда активной магмы; от глубины 120 км до 1200 км оболочка образована тяжелыми магматическими породами (кремний и магний); за «оболочкой» следует «промежуточный слой» от глубины 1200 км до глубины 2900 км; промежуточный слой имеет плотность на верхней границе 4,8 и на нижней границе 9,2, состоит из минералов типа оливина; ниже промежуточного слоя находится ядро с постоянной плотностью 11,2 и состоящее из железа и никеля (может быть с примесью меди и кобальта). Агрегатное состояние ядра и промежуточного слоя далеко еще не установлено; обычно оно характеризуется, как аморфное, стекло-видное.

Земная кора не находится в состоянии гидростатического равновесия, однако в общем и целом в земной коре существует равновесие, правда постоянно нарушаемое в отдельных ее частях.

Между поверхностью, ограничивающей изнутри (снизу) кристаллическую земную кору, и некоторой (ниже ее лежащей) правильной поверхностью  $S$ , на которой и ниже которой уже существует гидростатическое равновесие, находится слой  $Q$ , в котором распределение масс должно отвечать неправильностям строения земной коры — в том на-

правления, чтобы в результате на поверхности  $S$  давление выше лежащих масс было бы постоянным. Так как неправильности строения кристаллической земной коры сказываются в направлении вертикали, то, следовательно, и в слое  $Q$  нарушение равномерности распределения плотностей должно в общем сводиться к делению этого слоя на вертикальные колонны разной плотности, избыток или недостаток которой должен компенсировать недостаток или избыток масс в соответствующих вертикальных разделах кристаллической коры. Распределение масс в слое  $Q$  должно изменяться с течением времени в связи с изменениями в наружной земной коре, а следовательно, вещество в слое  $Q$  должно обладать пластичностью и текучестью, при плотности большей, чем плотность кристаллической земной коры. Впрочем, нужно указать, что может быть и иное представление — именно, что ограничивающая изнутри, снизу, кристаллическую земную кору поверхность может отображать внешнюю физическую поверхность земной коры таким образом, чтобы обусловить возможность равновесия в кристаллической коре; последняя в этом случае представляется состоящей из глыб, плавающих и погруженных в слой  $Q$ , состоящий из пластичной и текучей магмы. Состояние равновесия при том или другом из двух высказанных представлений называется *изостатическим равновесием*\*. Если принять первое представление, то современные геодезические и гравиметрические результаты устанавливают глубину поверхности  $S$ , или «поверхности изостазии», вообще меньшую 120 км, а именно от 90 до 120 км. Между тем, крупные современные геофизики считают, что наименьшая возможная глубина поверхности изостазии не более 60 км, и что в слое между глубинами 60 и 120 км возможны лишь самые незначительные неправильности в виде изменения плотности масс в горизонтальном направлении.

При втором представлении обстоятельств изостатического равновесия в земной коре приходится допустить, что кристаллическая кора толще под материками и тоньше под океанами. Гравиметрические результаты устанавливают толщину кристаллической земной коры в 50—100 км под материками. Геофизика, подтверждая существование изостатического равновесия, однако, не дает данных для достаточного обоснования ни первого, ни второго из приведенных представлений или схем изостатического равновесия.

Для нас важно здесь отметить, что нарушения правильного распределения масс, при которых плотность вещества в данном слое изменяется в горизонтальном направлении (т. е. имеет различные значения в разных местах, находящихся, однако, на одной и той же глубине), охватывают лишь внешний слой Земли, имеющий толщину всего 60—70 км и составляющий всего 1 : 30 от всего объема Земного шара и 1 : 65 долю от его массы. Уже отсюда ясно, что отступления геоида от эллипсоида вращения и уклонения отвесных линий от нормалей к общему земному эллипсоиду должны быть малыми величинами, как обусловленные неправильностями распределения вещества только в верхнем слое толщиной в 60—70 км.

Допустим, что все неправильности строения земной коры представляются только океаническими впадинами глубиной в 4 км, и континентальными массивами, возвышающимися над уровнем океана в среднем на 0,8 км. Мы можем подсчитать отступления геоида от общего земного эллипсоида, вызванные именно таким нарушением правильности строения

\* Подробное изложение схем изостатического равновесия дано в § 94.

внешнего слоя Земли. Они оказываются порядка 400—500 м, причем на океанах геоид будет располагаться ниже поверхности общего земного эллипсоида, а на континентах — выше. Такие отступления геоида от общего эллипсоида, если бы они действительно существовали, должно было бы назвать отступлениями общего характера. Этим отступлениям геоида от эллипсоида соответствовали бы однообразные в общем уклонения отвесных линий, однообразные потому, что везде отвесные линии были бы уклонены в сторону континентов, причем величина этих уклонений особенно быстро нарастала бы вблизи береговой полосы; не доходя на 100—200 км до берега, уклонения отвеса достигали бы значения порядка 15", а вблизи берега, может быть, 30—40".

Геодезические и гравиметрические работы показывают, что в действительности дело обстоит далеко не так: наибольшие отступления геоида от общего земного эллипсоида вряд ли превышают 150 м. Изостатическая компенсация делает то, что недостаток массы в некотором районе покрывается избытком ее в слоях, залегающих на некоторой глубине под этим районом, и наоборот.

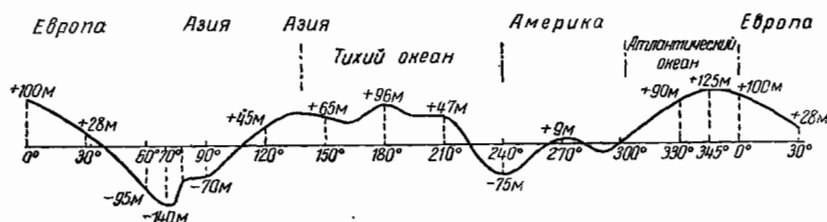
Хотя гравиметрическое изучение земного шара в виде «мировой» гравиметрической съемки выполнено еще не более как на 30%, все-таки полученные результаты по определению силы тяжести уже позволяют установить с известной степенью достоверности порядок отступлений геоида от общего земного эллипсоида и общую картину смены больших волн геоида. Если небольшой неизученный район охватывается с разных сторон районами с достаточной гравиметрической изученностью, то, применяя интерполирование аномалий силы тяжести, можно получить аномалии для неизученного района. Для районов, где такого интерполирования сделать нельзя, можно использовать предположение, что наблюдаемая сила тяжести, приведенная редукцией за высоту точки наблюдения над уровнем океана (редукция в свободном воздухе) и редукцией за суммарное действие масс между внешней поверхностью Земли и поверхностью изостазии, может быть рассматриваема, как имеющая *нормальное значение*; вторая редукция носит название *изостатической редукции* и учитывает влияние неправильностей строения внешней части земной коры и внутренних, компенсирующих их масс согласно гипотезе изостазии. Назовем первую редукцию через  $r_1$ , вторую через  $r_2$ , наблюдаемое значение ускорения силы тяжести через  $g$ , нормальное его значение через  $\gamma_0$ . Тогда имеем\*

$$\left. \begin{aligned} g + r_1 + r_2 &= \gamma_0 \\ (g + r_1) - \gamma_0 + r_2 &= 0 \\ (g + r_1) - \gamma_0 &= -r_2 \end{aligned} \right\}. \quad (566)$$

Левая часть этого уравнения (566) носит название «*аномалии в свободном воздухе*». Этими аномалиями и должно пользоваться для вычисления высот  $N$  геоида над общим земным эллипсоидом (или вернее над нормальным сфероидом), если применять при этом теорию и формулы Стокса. На основании (566) эта аномалия  $(g + r_1) - \gamma_0$  может быть получена, как  $-r_2$ , и, следовательно, применяя теорию изостазии, можно получить аномалии силы тяжести в свободном воздухе и там, где наблюдений силы тяжести не было выполнено; такие аномалии назовем «*гипотетическими*». Далее на основании полученных из наблюдений аномалий силы тяжести для изученных гравиметрически районов и на основании

\* В предположении, что  $g$  не искажено влияниями, не учитываемыми через  $r_2$ .

«гипотетических» аномалий для неизученных районов выполняется вычисление величин  $N$  отступлений геоида от эллипсоида. Гипотетические аномалии имеют, конечно, довольно крупную среднюю ошибку, поэтому и выведенным с помощью их высотам  $N$  приписывают крупную среднюю ошибку около  $\pm 30$  м. Но тем не менее приведенные в зарубежной литературе результаты по выводу величин  $N$  указанным методом следует признать достаточно существенными; они подтверждают: 1) что среднее квадратическое значение  $N$  не превышает  $\pm 50$  м; 2) что наибольшие поднятия геоида над нормальным эллипсоидом и наибольшие понижения геоида не превосходят 150 м; 3) что максимумы положительных  $N$  (наибольшие поднятия геоида над нормальным эллипсоидом) происходят не на материках, а в океанах, и, наоборот, наибольшие понижения геоида имеют место на материках. На черт. 88 приведен профиль геоида, построенный по результатам вывода величин  $N$ , экстраполированных на



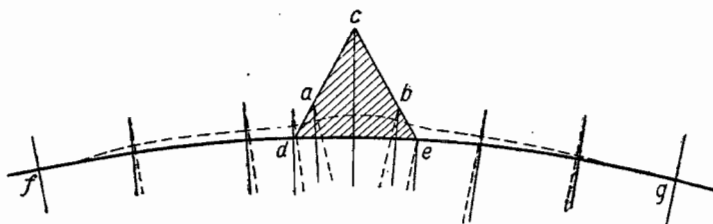
Черт. 88

земной экватор. Существенно отметить, что здесь подтверждается существование широких волн геоида, *общих отступлений его* от нормального эллипсоида, *определенно связанных с долготой места*. Высота этих волн до 150 м, смена их фаз — через  $180^\circ$  по долготу. По результатам гравиметрических работ последних лет можно заключить, что имеются и широтные волны геоида, но меньшего размера, однако может быть имеющие также в известной степени общий характер.

Еще в 90-х годах прошлого столетия московский профессор Ф. А. Слудский, на основании имевшегося тогда малого материала по определениям силы тяжести, указывал на существование *общих отступлений геоида* от эллипсоида и на то, что на океанах имеют место преимущественно положительные  $N$ , а на континентах — отрицательные  $N$ . Отсюда и из современных результатов можно сделать заключение о залегании пластов значительной плотности ниже дна Океана.

Для нас в главе об уклонениях отвесных линий важно иметь в виду, что существование *общих отступлений геоида* от эллипсоида достаточно подтверждено. Эти общие отступления характеризуются тем, что нарастания величин  $N$ , им соответствующих, происходят медленно и плавно вместе с изменением координат точки, и величины  $N$  имеют один и тот же знак для громадных площадей порядка площади отдельных континентов. Наибольшие значения  $N$  — около 150 м. Этим общим отступлением геоида от эллипсоида сопутствуют и *общие уклонения отвесных линий*. Наибольшие значения таких общих уклонений отвесных линий вряд ли превышают  $8''$ , вместо указанных ранее 20—30''. Медленное и плавное изменение таких общих уклонений отвеса с изменением координат точки и однообразный характер этих уклонений на огромных площадях — вот что является для них характерным. Местные неправильности в строении земной коры вызывают *местные волны* геоида, которым сопутствуют и *местные уклонения* отвеса. Мы, конечно, можем назвать

*местными* волны геоида и уклонения отвеса, возникающие вблизи береговой линии океанов и морей; *местными же* волнами геоида и *местными уклонениями отвеса* мы должны назвать те, которые обусловлены отдельными горными образованиями, например Уралом, Кавказом, Альпами, Балканскими горами и т. п. Если общие отступления геоида мы приписываем причинам, действие которых, прямое или косвенное, сказывается во всех точках поверхности земного шара, то местные отступления геоида рассматриваем, как вызванные локальными причинами, действие которых вообще ничтожно по сравнению с действием первых причин и ограничивается или некоторым районом или некоторой областью, за пределами которых оно совершенно не ощущается. *Местные отступления* геоида представляются в виде сравнительно мелких волн, имеющих небольшую высоту и простирающихся на площади района или некоторой области. Но соответствующие им *местные уклонения* отвесной линии могут достигать, вследствие значительного изменения кривизны уровенной поверхности, очень значительных величин, десятков секунд, причем ход изменения этих местных уклонений отвесной линии всегда достаточно большой, и уклонения отвесных линий в сравнительно близких точках заметно различаются друг от друга. Кавказский хребет, взятый без Малого Кавказа, дает местную волну геоида, высота которой около 30 м\*; уже в Сталинграде влияние этого хребта на уклонение отвеса



Черт. 89

выражается долями секунды и в расстояниях 300—400 км от него вообще совершенно затухает. У северной подошвы ската уклонение отвеса около 25"; на высоте 0,9 км и в 40 км к югу от подошвы оно достигает наибольшего значения в 38"; в 120 км к югу от северной подошвы и в 10 км к северу от гребня оно равно нулю, на гребне — около 8", но уже изменяет свой знак. Таким образом, на первой трети подъема, на 40 км, уклонение отвеса изменяется на 13", а на следующих двух третях подъема, т. е. на расстоянии около 90 км, оно изменяется на 46"\*\*. Имеются случаи, когда на равнинной местности, благодаря действию подземных залеганий, уклонение отвеса достигает значений 10—15", изменяясь на протяжении 10—12 км на 12" (подмосковный район). Черт. 89 дает схему уклонений отвеса, обусловленных притяжением горы *dce*, с поперечным сечением в виде равнобедренного треугольника: на чертеже кривая *fdeg* — невозмущенная уровенная поверхность, нормали к которой показаны сплошной линией, а отвесные линии показаны пунктиром; в точках *f* и *g*, достаточно удаленных от горы, укло-

\* При этом изостатическая компенсация в расчет не принимается.

\*\* Уклонения отвеса по Кавказу взяты без учета изостатической компенсации и, пользуясь схематизированным представлением этого хребта; действительные уклонения отвеса имеют заметно меньшие значения.



нение отвеса равно нулю; по мере приближения к горе отклонение отвеса в сторону горы непрерывно нарастает до точек  $a$  и  $b$ , приходящихся на *одной трети* скатов  $cd$  и  $ce$ ; сперва это нарастание идет очень медленно, но затем все усиливается; в точках  $a$  и  $b$  отклонение отвеса достигает наибольших значений и затем, по мере приближения к гребню  $c$  горы, быстро убывает, обращаясь в нуль в точке  $c$ ; пунктиром показана уровенная поверхность, сместившаяся вверх под действием горы.

Говоря об отклонении отвеса, мы должны точно представлять, конечно, с каким направлением в данной точке сравнивается направление в ней отвесной линии. Если мы отклонение отвеса определяем, как угол между отвесной линией и нормалью к общему земному эллипсоиду, или, вернее, нормалью к нормальному сфероиду, устанавливаемому из гравиметрических результатов, то такие отклонения отвеса носят название *абсолютных*. Так как нормальный сфероид предполагается соответствующим правильному распределению масс в Земле, то эти *абсолютные отклонения отвеса* обусловлены *физикой* Земли, действительным распределением масс в ней, и потому представляют особую ценность. Конечно, выше в содержании этого параграфа шла речь именно об абсолютных отклонениях отвеса.

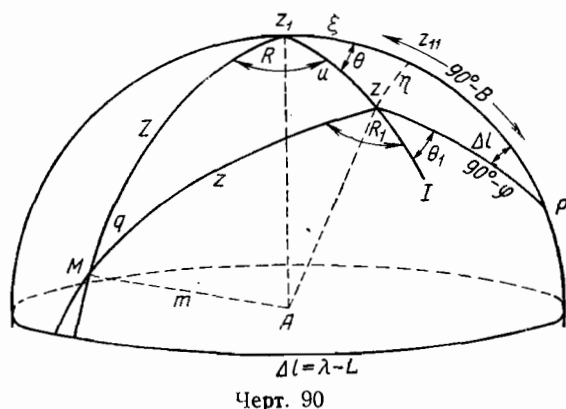
Если мы определяем отклонение отвеса, как угол  $\delta$  отвесной линии в некоторой точке с нормалью в ней к некоторому референц-эллипсоиду, принятому в той или другой стране для обработки геодезических материалов, то имеем тогда дело с так называемыми *относительными отклонениями отвесных линий*. Этот угол  $\delta$  зависит: 1) от абсолютного отклонения отвеса в начальной точке триангуляции, если геодезические координаты начального пункта триангуляции были приняты равными астрономическим координатам этого пункта; 2) от ошибочности принятых большой полуоси и сжатия референц-эллипсоида; 3) от абсолютного отклонения отвеса в самой рассматриваемой точке. Очевидно, что относительные отклонения отвеса могут значительно отличаться от абсолютных в тех же точках и по ним мы не можем непосредственно судить о влиянии на направление отвесной линии той или другой возмущающей массы, не можем и делать каких-либо заключений о характере неправильностей в строении земной коры. Нужно, однако, иметь в виду, что в пределах небольшого района, например радиуса около 100 км, разности относительных отклонений отвеса в любых двух точках такого района равны практически разности абсолютных отклонений отвеса в тех же точках. Относительные отклонения отвеса нередко называют еще *астрономо-геодезическими*.

В заключение параграфа отметим, что ряд авторов по геодезии употребляет только термин «*местные отклонения отвесных линий*», совершенно не упоминая об *общих* отклонениях.

В каждой точке Земли общая и местная части отклонения отвеса суммируются, и выделить чисто местную часть мы обычно не в состоянии, так как общие отступления геоида от нормального сфероида совсем еще мало изучены. Только в редких случаях, когда район местного притяжения не велик и на смежных с ним и притом обширных территориях не имеется своих местных влияний, мы можем с той или другой приближенностью выделить свойственные этому району местные отклонения отвеса. Но вообще, приписывая местные отклонения местным причинам, мы обычно не можем достаточно определенно наметить границы района, в котором именно эти причины сосредоточены.

### § 75. Влияние уклонения отвеса на астрономические широты, долготы и азимуты, на измеренные горизонтальные направления и углы и на зенитные расстояния. Лапласовы азимуты

Пусть точка  $A$  (черт. 90) лежит на земной поверхности и представляет собой центр, заложенный на некотором пункте триангуляции. Вообразим некоторую вспомогательную сферу с центром в  $A$ . Астрономические широту и долготу точки  $A$  назовем соответственно через  $\varphi$  и  $\lambda$ ; пусть в  $A$  взят на земной предмет  $m$  астрономический азимут, который назовем через  $\alpha_m$ . Геодезические широту и долготу точки  $A$ , отнесенные к некоторому референц-эллипсоиду, назовем через  $B$  и  $L$ ; геодезический азимут в  $A$  на точку  $m$  обозначим через  $A_m$ . Пусть на нашей вспомогательной сфере зенит точки  $A$  совпадает с  $z$  (черт. 90), так что прямая  $Az$  является продолжением кверху отвесной линии в  $A$ ; проведем в  $A$  продолжение нормали в ней к референц-эллипсоиду, которое представлено на черт. 90 прямой  $Az_1$ ;  $z_1$  на нашей сфере является «геодезическим» зенитом точки  $A$ . Далее проведем в  $A$  прямую  $AP$  (на чертеже



не показана), параллельную оси Мира, и назовем через  $P$  пересечение этой прямой со сферой. Плоскость  $AzP$  совпадает с плоскостью астрономического меридиана точки  $A$ ; дуга большого круга  $zP$  будет равна  $90^\circ - \varphi$ . Если  $m$  проектируется на сфере в  $M$ , то вертикальная плоскость  $MAz$  составит с плоскостью  $AzP$  угол  $\alpha_m$ , и угол  $PzM$  на сфере при точке  $z$ , отсчитываемый по ходу часовой стрелки от дуги  $zP$ , будет, конечно, также равен  $\alpha_m$ . Плоскость  $MAz_1$  будет плоскостью прямого нормального сечения в  $A$  на  $m$ . Плоскость  $z_1AP$  параллельна плоскости геодезического меридиана в  $A$ ; дуга  $z_1P$  будет равна  $90^\circ - B$ , так как малая ось референц-эллипсоида всегда параллельна оси Мира\*, а угол между плоскостями  $z_1AP$  и  $Mz_1A$  будет равен геодезическому азимуту  $A_m$ . Дуга  $Mz = z$  представит измеренное в  $A$  зенитное расстояние на предмет  $m$ ; дугу  $Mz_1$  назовем «геодезическим» зенитным расстоянием точки  $m$  и обозначим через  $Z$ .

Угол при  $P$  между плоскостями  $AzP$  и  $Az_1P$ , т. е. сферический угол  $z_1Pz$ , равен разности астрономической и геодезической долгот точки  $A$ , т. е. равен  $\lambda - L = \Delta l$ , так как и геодезические и астрономические долготы отсчитываются от плоскости одного и того же нулевого меридиана.

\* См. § 4 «Руководства по высшей геодезии», часть I, вып. 1.

Проведем из  $z$  дугу  $zz_{11}$  (черт. 90), перпендикулярную к  $Pz_1$ . Назовем через  $u$  дугу  $zz_1$ , т. е. собственно величину отклонения отвеса в  $A$ , азимут плоскости  $z_1Az$ , в которой происходит это отклонение, назовем через  $\Theta$ , понимая под  $\Theta$  собственно геодезический азимут, отсчитываемый от меридиана  $z_1P$ , от севера через восток, юг и запад. Дуга  $\xi = z_1z_{11}$  является слагающей отклонения отвеса в  $A$  в меридиане, дуга  $zz_{11} = \eta$  является слагающей отклонения отвеса в  $A$  в первом вертикале. Очевидно, дуга  $z_1P$  равна  $90^\circ - (B + \xi)$ . Из треугольника  $z_{11}zP$  имеем

$$\cos(\lambda - L) \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg}(B + \xi),$$

$$\sin \eta = \sin(\lambda - L) \cos \varphi.$$

Вследствие малости  $(\lambda - L)$ ,  $\eta$  и  $\xi$  можем пренебрегать величинами  $(\lambda - L)^2$ ,  $\eta^2$  и  $\xi^2$ . Поэтому

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(B + \xi) &= \operatorname{tg} \varphi \\ \xi &= \varphi - B \end{aligned} \right\}; \quad (567)$$

$$\eta = (\lambda - L) \cos \varphi; \quad (568)$$

$$(\lambda - L) = \eta \sec \varphi. \quad (569)$$

Если  $A$  является одновременно астрономическим и геодезическим пунктом, то по уравнениям (567) и (568) мы находим  $\xi$  и  $\eta$ ; одновременно (567) и (569) определяют влияние отклонения отвеса на астрономическую широту и долготу.

Из треугольника  $z_1zz_{11}$ , который по его малости можно рассматривать как плоский, напишем

$$\xi = u \cos \Theta; \quad \eta = u \sin \Theta;$$

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\eta}{\xi}; \quad u = \frac{\xi}{\cos \Theta} = \frac{\eta}{\sin \Theta} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}; \quad (570)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \Theta &= \frac{(\lambda - L) \cos \varphi}{\varphi - B}; \quad u = \frac{\varphi - B}{\cos \Theta} = \frac{(\lambda - L) \cos \varphi}{\sin \Theta} \\ u &= \sqrt{(\varphi - B)^2 + (\lambda - L)^2 \cos^2 \varphi} \end{aligned} \right\}. \quad (571)$$

Формулы (571) позволяют определить величину отклонения отвеса и азимут плоскости, в которой отклонение имеет место, по наблюдаемым астрономическим широте  $\varphi$  и долготе  $\lambda$  точки  $A$  и по определенным из триангуляции геодезическим широте  $B$  и долготе  $L$  точки  $A$ .

Продолжим дугу  $z_1z$  и обозначим угол  $TzP$  через  $\Theta_1$ , угол  $TzM$  — через  $R_1$ , угол  $zz_1M$  — через  $R$ . Мы имеем

$$z_m = \Theta_1 + R_1,$$

$$A_m = \Theta + R.$$

Из треугольника  $zz_1P$  напишем

$$-\cos \Theta_1 = -\cos \Theta \cos(\lambda - L) + \sin \Theta \sin(\lambda - L) \sin B.$$

Далее, пренебрегая  $(\lambda - L)^2$ ,  $(\lambda - L)^3$ ,  $(\lambda - L)\xi$ , имеем

$$\cos \Theta - \cos \Theta_1 = \sin \Theta (\lambda - L) \sin \varphi = \sin \Theta \eta \operatorname{tg} \varphi;$$

$$\Theta_1 - \Theta = \eta \operatorname{tg} \varphi. \quad (572)$$

Сферический треугольник  $Mz_1P$  аналогичен треугольнику  $zz_1P$ , только в нем роль  $P$  играет  $M$ , и поэтому роль  $90^\circ - \varphi$  играет зенитное расстояние  $z$ , а роль  $\lambda - L$  — угол  $q$  при  $M$  между дугами  $Mz_1$  и  $Mz$ . Поэтому мы можем написать

$$\begin{aligned} R_1 - R &= q \cos z; \\ \sin q &= \sin u \frac{\sin R}{\sin z}; \\ R_1 - R &= \frac{u \sin R}{\operatorname{tg} z} = \frac{u \sin (A_m - \Theta)}{\operatorname{tg} z}. \end{aligned} \quad (573)$$

Складывая (572) и (573), получаем

$$\alpha_m - A_m = \eta \operatorname{tg} \varphi + \frac{u \sin (A_m - \Theta)}{\operatorname{tg} z}. \quad (574)$$

Уравнение (574) дает влияние уклонения отвеса на *астрономический азимут*. В этом влиянии различаем две части: одну, *постоянную* в данной точке  $A$ , в виде слагаемого  $\eta \operatorname{tg} \varphi$ , и другую *переменную*, зависящую от азимута  $A_m$  наблюдаемого предмета  $m$  и от его зенитного расстояния  $z$ . Среднее значение  $\eta$  (если говорить об абсолютных уклонениях отвеса) равно  $\pm 3''{,}5$ ; значение  $\operatorname{tg} z$  всегда в триангуляции I класса достаточно велико, — только в горных районах оно, да и то в очень редких случаях, достигает значения 20, в обычных районах  $\operatorname{tg} z$  достигает значений порядка 120—240. Другими словами, слагаемое  $\frac{u \sin (A_m - \Theta)}{\operatorname{tg} z}$  обычно имеет ничтожное числовое значение по сравнению с членом  $\eta \operatorname{tg} \varphi$ . Непосредственно наблюдаемые астрономические азимуты в триангуляции относятся к выходным сторонам базисных сетей, или к сторонам базисной сети, а иногда и к самим базисам; здесь всегда  $z$  очень близко к  $90^\circ$ . Принимая во внимание, что  $\alpha_m$  определяется с средней ошибкой около  $\pm 0{,}6 - 0''{,}7$ , можно поэтому, когда переходят от непосредственно наблюдаемого астрономического азимута к геодезическому, уравнение (574) написать так

$$\alpha - A = \eta \operatorname{tg} \varphi = (\lambda - L) \sin \varphi. \quad (575)$$

Это уравнение называют *уравнением Лапласа* и читают так: *влияние уклонения отвеса на азимут есть следствие уклонения отвеса по долготе*. По (574) получаем

$$A_m = \alpha_m - \eta \operatorname{tg} \varphi - \frac{u \sin (A_m - \Theta)}{\operatorname{tg} z_m}; \quad (576)$$

$$A_m = \alpha_m - (\lambda - L) \sin \varphi + \frac{\eta \cos A_m - \xi \sin A_m}{\operatorname{tg} z_m}. \quad (577)$$

Уравнение (577) имеет очень важное значение: оно дает возможность точного перехода от *астрономических азимутов* к *геодезическим*, которые при получении их по уравнению (577) называются *азимутами Лапласа*. Для получения азимута Лапласа необходимо на геодезическом пункте иметь наблюдаемые значения астрономического азимута, астрономической долготы и астрономической широты; если пренебрегать поправкой вида  $\frac{u \sin (A - \Theta)}{\operatorname{tg} z}$ , то определение астрономической широты на «лапласовом» пункте триангуляции не обязательно.

Точность определения лапласова азимута по формуле (577) обуславливается ошибками определения: астрономического азимута  $\alpha$ , астрономической долготы  $\lambda$  и геодезической долготы  $L$ .

Обычно средняя продольная ошибка звена триангуляции I класса, длиной в 200 км, составляет  $\pm 0,6$  м. Если представим себе, что ряд I класса, длиной в 2000 км, располагается по земной параллели, то искажение его длины представится средней ошибкой в  $\pm 0,6\sqrt{10}$  м, при условии, конечно, отсутствия систематических ошибок в углах треугольников триангуляции и при условии правильной обработки большой триангуляции. Систематические ошибки углов треугольников в значительной мере аннулируются именно при уравнивании звеньев триангуляции между лапласовыми азимутами. Поэтому мы можем считать, что геодезическая долгота  $L$ , передаваемая на 2000 км, будет иметь среднюю ошибку  $\pm \left( \frac{0,6\sqrt{10}}{31 \cos \varphi} \right)''$ , что обусловит среднюю ошибку в лапласовом

азимуте на конце такого ряда в  $\frac{0,6\sqrt{10}}{3} \operatorname{tg} \varphi$  в секундах, или в широте  $54^\circ$  — ошибку около  $\pm 0'',09$ ; в рядах по меридианам, протяжением около 2000 км, эта ошибка возрастает до  $\pm 0'',13$ . Отсюда мы видим, что лапласовы азимуты в ничтожной степени зависят от ошибок триангуляции, и по существу, как и астрономические азимуты, можно считать их выведенными на разных пунктах независимо друг от друга, как бы без участия ошибок триангуляции, и приписывать им постоянную во всей астрономо-геодезической сети среднюю ошибку, равную

$$\sqrt{m_\alpha^2 + m_\lambda^2 \sin^2 \varphi},$$

которая в наших широтах будет иметь значение  $\pm 0'',7$ . Эти замечательные свойства лапласовых азимутов уже были указаны в «Руководстве по высшей геодезии», часть I. Лапласовы азимуты позволяют иметь одну и ту же среднюю ошибку ориентирования всех звеньев и рядов триангуляции; они исключают в этом ориентировании значительное накопление ошибок, которое неизбежно происходило бы при пользовании только углами треугольников триангуляции при получении в ней геодезических азимутов; конечно, это ведет, в свою очередь, к существенному уменьшению ошибок в координатах точек большой триангуляции. Далее, хорошо определенные лапласовы азимуты на концах звена триангуляции позволяют использовать возникающее при этом азимутальное условие в звене, и при уравнивании его в значительной мере аннулировать систематические ошибки углов. Наконец, такие лапласовы азимуты, определенные с хорошей точностью на концах звена триангуляции I класса, доставляют надежный контроль угловых измерений в звене, который особенно важен в наших условиях, когда в триангуляции I класса мы имеем построения в виде *простых цепей треугольников*. Можно сказать, что именно лапласовы азимуты заметно приближают точность построения полигонов триангуляции, составленных рядами из простых цепей, к точности построения их же при образовании рядов триангуляции из сложных фигур (геодезические четырехугольники, центральные системы и т. п.).

Так как  $\eta \operatorname{tg} \varphi$  — величина постоянная в  $A$ , то член  $-\frac{\eta \sin(A - \theta)}{\operatorname{tg} z}$  в (576) или член  $\frac{+\eta \cos A - \xi \sin A}{\operatorname{tg} z}$  в уравнении (577) должно назы-

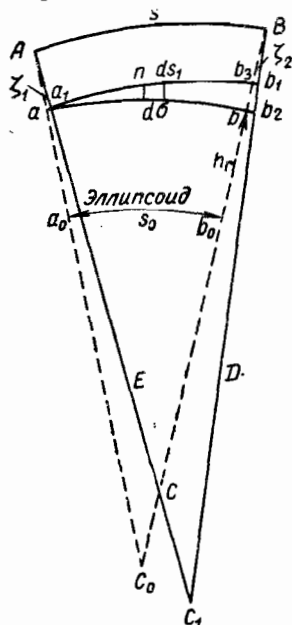


Понятно, что  $Z - z$  является величиной одного порядка с самим уклонением отвеса  $u$ . Использование формулы (579) будет указано одним из последующих параграфов.

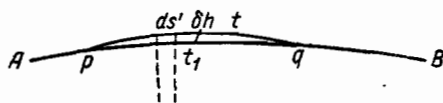
### § 76. Отнесение измеренного базиса к поверхности референц-эллипсоид

Этот вопрос имеет существенное значение для правильной обработки триангуляции. В предыдущем параграфе мы рассмотрели вопрос о редуцировании измеренных в триангуляции направлений к поверхности референц-эллипсоида. Теперь на очереди — вопрос о редуцировании к поверхности референц-эллипсоида измеренных длин, а так как и этот вопрос стоит в известной связи с уклонениями отвесных линий, то мы и приводим его в настоящей главе.

На черт. 92:  $A$  и  $B$  — проекции отвесных линиями концов базиса (центров на концах базиса) на уровненную поверхность, имеющую высоту  $H$  над уровнем океана, равную средней высоте базиса над океаном; длину дуги  $AB$  можем рассматривать именно как измеренную длину  $s$  базиса; дуга  $a_1b_1$  лежит на поверхности геоида и является проекцией базиса отвесными линиями  $AE$  и  $BD$  на уровень океана; длину дуги  $a_1b_1$  назовем через  $s_1$ . Прямые  $AC_0$  и  $BC_0$  — нормали в  $A$  и  $B$  к поверхности  $a_0b_0$  референц-эллипсоида; искомую длину дуги  $a_0b_0$  назовем через  $s_0$ . Точка  $a$  лежит на продолжении дуги  $a_1b_1$  в пересечении ее с нормалью  $AC_0$ ; точка  $b_3$  лежит на той же дуге  $a_1b_1$  (на уровне океана) в пересечении ее с нормалью  $BC_0$ . Через  $a$  проводим дугу  $ab_2$



Черт. 92



Черт. 93

концентрическую с дугой  $a_0b_0$  и ей параллельную, т. е. точки дуги  $ab_2$  находятся над дугой  $a_0b_0$  на постоянной высоте  $h_r = aa_0 = bb_0$ . Уклонение отвеса в плоскости базиса в точке  $A$ , т. е. угол  $C_0AE$ , называем через  $\zeta_1$ , уклонение отвеса в плоскости базиса в точке  $B$ , т. е. угол  $C_0BD$ , называем через  $\zeta_2$ .

Понятно, что нормали  $AC_0$  и  $BC_0$  вообще не пересекаются, но, конечно, как видели в § 15 (формула 93), несовпадение нормальных плоскостей  $BAC_0$  и  $ABC_0$  будет ничтожно — угол между ними при  $s = 30$  км будет менее  $2''$ , и мы имеем право прямые  $AC_0$  и  $BC_0$  считать пересекающимися в  $C_0$ , в центре кривизны дуги  $a_0b_0$ , и можем, кроме того, принять, что радиус кривизны  $R_0$  этой дуги остается постоянным для всей дуги  $a_0b_0$ . Расхождение взаимных нормальных сечений между  $a_0$  и  $b_0$  будет менее  $0,002$  м. В § 14 видели, что если дугу  $a_0b_0$  мы будем рассматривать, как сферическую, то сделаем в ее длине ошибку  $\frac{s_0^3}{6N^2} \eta^2 \cos^2 A$ , которая при  $s = 30$  км составит  $1 : 60\,000\,000$  от  $s_0$ .

Конечно, и отвесные линии  $AC_1$  и  $BC_1$  вообще между собой не пересекутся. Но заметим, что случайные колебания в величинах уклонений

ствесных линий на профиле уровенной поверхности между  $A$  и  $B$  не имеют никакого ощутимого влияния на длину  $s$ . Допустим, например, что на средней трети базиса имелась бы мелкая волна геоида  $ptq$  (черт. 93). Непосредственное влияние наклона  $i$  элемента  $ds'$  кривой  $ptq$  к соответствующему элементу кривой  $ApqB$  выражалось бы в относительной мере, как  $2 \sin^2 i = \frac{i'^2}{2\rho'^2}$ , и при  $i = 10''$  это влияние дало бы относительную ошибку в  $\frac{1}{2} 10^{-8}$ . Но наклон дуги  $pt$  к дуге  $ApqB$  обуславливает еще нарастание высоты  $\approx h$ .

Конечно,

$$ds = ds' - \frac{ds' \delta h}{R},$$

где  $ds$  — элемент кривой  $ApqB$ ,  $ds'$  — элемент кривой  $ptq$ , а  $R$  — радиус кривизны кривой  $ApqB$ . При  $i = 10''$  и  $pt_1 = 5$  км нарастание высоты  $\delta h$  равно 0,25 м, и при  $R = 6400$  км это вызовет влияние на длину  $s$ , меньшее 1 : 25 000 000.

Приведенный расчет показывает, что с некоторой волнообразностью уровенной поверхности между  $A$  и  $B$  мы можем совсем не считаться. Мы должны лишь учитывать *общий наклон*  $\zeta_m$  дуги  $a_1b_1$  к дуге  $a_0b_0$  (или к дуге  $ab_2$ ), причем влияние этого наклона, даже при значении его в  $20''$ , сказывается только постольку, поскольку он вызывает различие высоты элемента  $ds_1$  и элемента  $d\sigma$  (черт. 92). Этот общий наклон  $\zeta_m$  дуги  $a_1b_1$  к  $a_0b_0$  может быть обусловлен или неудачным выбором референц-эллипсоида, и тогда может достичь значения даже  $20''$ , или некоторой волной геоида, захватывающей весь район базисной сети, или той и другой причиной вместе. Первая причина дает нарастание величины  $\zeta$  от  $\zeta_1$  к  $\zeta_2$ , пропорциональное расстоянию, и одного знака на всей линии от  $A$  к  $B$ . Вторая причина может дать наклон, плавно изменяющийся, но одного знака в одной части кривой  $a_1b_1$  и другого знака — в другой ее части. Этот случай оставим пока без рассмотрения, и будем считать, что и эта вторая причина дает изменения  $\zeta$ , пропорциональные расстоянию, одного знака на всей кривой  $a_1b_1$ . Таким образом,

$$\zeta = \zeta_1 + ks_1.$$

При сделанных предположениях кривую  $a_1b_1$  в нашем вопросе мы можем рассматривать\* как часть эллипса, как нормальное сечение на эллипсоиде с малым сжатием. Таким образом, все, что было сказано в отношении кривых  $ab_2$  и  $a_0b_0$ , относится и к кривым  $AB$  и  $a_1b_1$ ; прямые  $AE$  и  $BD$  можно принимать пересекающимися в центре кривизны  $C_1$ , и радиус  $R_1$  кривизны дуги  $a_1b_1$  можно считать постоянным. Плоскости  $ABC_0$  и  $ABC_1$  вообще не совпадут, но угол между ними будет очень мал и мы имеем право, спроектировав ортогонально точки  $a_1$ ,  $b_1$  и  $C_1$  на плоскость  $ABC_0$ , считать, что при этом длина кривой  $a_1b_1$  несколько не изменится, не изменится и ее кривизна. После этих предварительных замечаний, мы имеем

$$a_1b_1 = s_1 = s - \frac{H}{R_1} s + \frac{H^2}{R_1^2} s,$$

понимая под  $R_1$  радиус  $a_1C_1 = b_1C_1$  кривой  $a_1b_1$ .

\* Подтверждение этого см. в § 79.



Назовем элемент кривой  $ab_2$  через  $d\sigma$ , а наклон этого элемента (черт. 92) к соответствующему элементу  $ds_1$  через  $\zeta$ ; назовем далее высоту  $ds_1$  над  $d\sigma$  через  $h$ , и через  $n$  — точку, в которой взят элемент  $ds_1$ . Мы имеем

$$d\sigma = ds_1 \cos \zeta - ds_1 \cos \zeta \frac{h}{R_0 + h_r}.$$

Влияние отлнчнх  $\cos \zeta$  от единицы будет совершенно пренебрегаемо, что было видно уже из сравнения длин кривых черт. 93.

Так как  $dh = ds_1 \sin \zeta$ , то, понимая под  $s_1^{(n)}$  длину дуги  $an$ , напишем:

$$\zeta'' = \zeta''_1 + k s_1^{(n)};$$

$$h = \zeta_1 s_1^{(n)} + \frac{k (s_1^{(n)})^2}{2};$$

$$d\sigma = ds_1 - \frac{ds_1}{\rho'' R_0} \left\{ \zeta_1 s_1^{(n)} + \frac{k (s_1^{(n)})^2}{2} \right\};$$

$$\sigma = \overline{ab}_2 = \overline{ab}_1 - \frac{\zeta''_1}{R_0 \rho''} \frac{(\overline{ab}_1)^2}{2} - \frac{k (\overline{ab}_1)^3}{6 R_0 \rho''};$$

$$\sigma = \overline{ab}_2 = \overline{ab}_1 - \frac{(\overline{ab})^2}{2 R_0 \rho''} \left( \zeta_1 + \frac{k \overline{ab}_1}{3} \right).$$

Но если мы приняли равномерность изменения  $\zeta$  на протяжении кривой  $a_1 b_1$ , то

$$\zeta_2 = \zeta_1 + k a b_1; \quad \frac{\zeta_2 + \zeta_1}{3} = \frac{2}{3} \zeta_1 + k \frac{\overline{ab}_1}{3};$$

$$\sigma = \overline{ab}_2 = \overline{ab}_1 - \frac{(\overline{ab}_1)^2}{6 \rho'' R_0} (2\zeta''_1 + \zeta''_2) = \overline{ab}_1 - \frac{s_1^2}{6 R_0 \rho''} (2\zeta''_1 + \zeta''_2).$$

Поправка  $\frac{s_1^2}{6 R_0 \rho''} (2\zeta''_1 + \zeta''_2)$  можем дать при  $\zeta_1 = 20''$  почти 1 : 4 000 000 от  $s$  и поэтому вообще пренебрегаема, но, конечно, при ее вычислении можно  $R_0 + h_r$  заменить через  $R_0$ , а  $a_1 b_1$  заменить через  $s_1$ , что мы и сделали.

Так как

$$ab_1 = \overline{a_1 b_1} + a a_1 = s_1 + \frac{H \zeta''_1}{\rho''},$$

то

$$\sigma = ab_2 = s_1 + \frac{H \zeta''_1}{\rho''} - \frac{s_1^2}{6 R_0 \rho''} (2\zeta''_1 + \zeta''_2).$$

Но

$$\overline{ab} = \overline{ab}_2 - b b_2 = \overline{ab}_2 - \frac{H}{\rho''} \zeta''_2,$$

поэтому

$$\overline{ab} = s_1 - \frac{H}{\rho''} (\zeta''_2 - \zeta''_1) - \frac{s_1^2}{6 R_0 \rho''} (2\zeta''_1 + \zeta''_2);$$

$$\overline{ab} = s - \frac{H}{R_1} s - \frac{H}{\rho''} (\zeta''_2 - \zeta''_1) + \frac{H^2}{R_1^2} s - \frac{s_1^2}{6 R_0 \rho''} (2\zeta''_1 + \zeta''_2).$$

Далее имеем

$$s_0 = \widetilde{a_0 b_0} = \widetilde{ab} - \frac{\widetilde{ab} h_r}{R_0} + \frac{\widetilde{ab_1} h_r^2}{R_0^2};$$

$$s_0 = s - \frac{H}{R_1} s - \frac{H}{\rho''} (\zeta''_2 - \zeta''_1) + \frac{H^2}{R_1^2} s - \frac{s^2_1}{6R_0 \rho''} (2\zeta''_1 + \zeta''_2) - \frac{sh_r}{R_0} +$$

$$+ \frac{H h_r}{R_1 R_0} s + \frac{H h_r}{\rho'' R_0} (\zeta''_2 - \zeta''_1) - \frac{h_r H^2}{R_0 R_1^2} s + \frac{h_r^2}{R_0^2} s -$$

$$- \frac{H h_r^2}{R_1 R_0^2} s + \dots \quad (580)$$

Отброшенные в (580) члены:  $\frac{h_r s^2_1}{6\rho'' R_0^2} (2\zeta''_1 + \zeta''_2)$ ,  $\frac{H}{\rho''} (\zeta''_2 - \zeta''_1) \frac{h_r^2}{R_0^2}$ ,  $\frac{H^2 h_r^2}{R_1^2 R_0^2} s$  так как  $h_r$  вообще менее  $1/3$  км, а  $2\zeta''_1 + \zeta''_2 < 60''$ , при  $H = 2$  км каждый дадут менее  $1 : 10^{11}$  в длине базиса.

Из черт. 92 мы имеем

$$C_0 + \zeta_1 = C_1 + \zeta_2,$$

понимая под  $C_0$  угол  $AC_0B$ , под  $C_1$  угол  $AC_1B$ .

С другой стороны

$$C_0 = \frac{s\rho''}{R_0 + h_r + H}; \quad C_1 = \frac{s\rho''}{R_1 + H} \left( \text{точнее, } C_0 = \frac{R_1 s\rho''}{(R+H)(R_0+h_r)} \right);$$

$$\frac{H}{\rho''} (\zeta''_2 - \zeta''_1) = Hs \left\{ \frac{1}{R_0 + h_r + H} - \frac{1}{R_1 + H} \right\} = \frac{Hs(R_1 - R_0 - h_r)}{(R_0 + h_r + H)(R_1 + H)}.$$

В (580)

$$-\frac{Hs}{R_1} = -\frac{Hs}{R_0 - (R_0 - R_1)} = -\frac{Hs}{R_0 \left(1 - \frac{R_0 - R_1}{R_0}\right)} =$$

$$= -\frac{Hs}{R_0} - \frac{Hs(R_0 - R_1)}{R_0^2}; \quad (581)$$

$R_0 - R_1$  может выражаться десятками километров, например достичь 50 км. Но все-таки (581) имеет ошибку, составляющую менее  $1 : 60\,000\,000$  от  $s$ . С пренебрегаемой ошибкой, меньшей  $1 : 10^8$ , можем считать

$$Hs \frac{R_1 - R_0 - h_r}{(R_0 + h_r + H)(R_1 + H)} = Hs \frac{R_1 - R_0 - h_r}{R_0^2}.$$

Далее, в (580) с совершенно пренебрегаемой ошибкой можно принять

$$\frac{Hh_r}{R_1 R_0} s = \frac{Hh_r}{R_0^2} s; \quad \frac{Hh_r}{\rho'' R_0} (\zeta''_2 - \zeta''_1) = 0; \quad \frac{h_r H^2}{R_0 R_1^2} s = 0; \quad \frac{Hh_r^2}{R_1 R_0^2} s = 0.$$

Таким образом, сохраняя высокую точность, перепишем (580) так

$$s_0 = s - \frac{Hs}{R_0} - \frac{Hs(R_0 - R_1)}{R_0^2} + \frac{Hs(R_0 - R_1)}{R_0^2} + Hs \frac{h_r}{R_0^2} + \frac{H^2}{R_0^2} s -$$

$$- \frac{s^2}{6R_0 \rho''} (2\zeta''_1 + \zeta''_2) - \frac{sh_r}{R_0} + \frac{Hh_r}{R_0^2} s + \frac{h_r^2}{R_0^2} s;$$

$$s_0 = s - \frac{H + h_r}{R_0} s + \frac{(H + h_r)^2}{R_0^2} s - \frac{s^2}{6R_0 \rho''} (2\zeta''_1 + \zeta''_2). \quad (582)$$

В (582) величина  $h_r$  представляет высоту геоида над референц-эллипсоидом для конца базиса  $A$ . Мы имеем

$$\begin{aligned} dh &= \sin \zeta \, ds_1; \\ \zeta &= \zeta_1 + k s_1^{(n)}; \quad \zeta_2 = \zeta_1 + k s_1; \\ \zeta &= \zeta_1 + \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{s} s_1^{(n)} \dots s = \widetilde{AB}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$dh = \zeta_1 \, ds_1 + \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{s} s_1^{(n)} \, ds_1$$

и, понимая под  $h_m$  значение  $h$  для середины кривой  $a_1b_1$ , получаем

$$h_m = \zeta_1 \frac{s}{2} + \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{s} \frac{s^2}{8} = \frac{s}{2} \left( \zeta_1 + \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{4} \right) = \frac{s}{8} (3\zeta_1 + \zeta_2).$$

Называя через  $h_r^m$  значение  $h_r$  для той же средней точки на кривой  $a_1b_1$ , напомним

$$h_r = h_r^m - \frac{s}{8\rho''} (3\zeta''_1 + \zeta''_2);$$

вводя это  $h_r^m$  в (582), будем иметь

$$s_0 = s - \frac{(H + h_r^m)}{R_0} s + \frac{(H + h_r^m)^2}{R_0^2} s + \frac{s^2}{24R_0 \rho''} (\zeta''_1 - \zeta''_2) \dots \text{(при } h_m > 0).$$

При  $s=30$  км вряд ли  $\zeta_1 - \zeta_2$  \* более 5'' и поэтому член  $\frac{s^2}{24R_0 \rho''} (\zeta''_1 - \zeta''_2)$  дает в  $s$  долю, меньшую 1 : 200 000 000! Понятно, что при знакопеременном нарастании  $\zeta$  на дуге  $a_1b_1$  это влияние было бы еще меньшим. Таким образом, окончательно

$$s_0 = s - \frac{(H + h_r^m)}{R_0} s + \frac{(H + h_r^m)^2}{R_0^2} s. \quad (583)$$

Для правильного отнесения длины базиса (или выходной стороны) к референц-эллипсоиду необходимо знать для базиса высоту  $h_r$  геоида над эллипсоидом, и, конечно, с ошибкой, не превышающей 2—3 м.

В триангуляции I класса нужно иметь материал, позволяющий вывести эти высоты  $h_r$  с указанной точностью. Это достигается выполнением или астрономо-гравиметрического нивелирования, или астрономического нивелирования, или, в крайнем случае, учащением астрономических пунктов на рядах триангуляции I класса. Эти методы определения  $h_r$  мы рассмотрим в следующих параграфах.

Обычно в геодезии пользуются для приведения базиса к уровню океана формулой

$$s'_0 = s - \frac{sH}{R} + \frac{sH^2}{R^2}, \quad (584)$$

при этом определяют длину дуги  $a_1b_1$  с использованием вместо  $R$  радиуса кривизны  $R_0$  референц-эллипсоида. Не трудно видеть, что собственно по формуле (584) определяют длину дуги  $ab$ , которая отличается

\* Поскольку в нашем выводе имеем право считаться лишь с правильным нарастанием  $\zeta$ .

от проекции  $a_1b_1$  базиса на уровень океана (отвесными линиями) на величину  $\frac{H(\zeta''_2 - \zeta''_1)}{\rho''}$ , что составит при  $H = 2$  км и при  $\zeta''_2 - \zeta''_1 = 10''$  в длине базиса 0,10 м и 0,025 м при  $H = 0,5$  км. Конечно, это *непренебрегаемые* величины. Если мы желаем правильно отнести измеренную длину базиса на *поверхность геоида*, то, очевидно, нужно применить формулу

$$s_1 = s - \frac{sH}{R_0} + \frac{sH^2}{R_0^2} + \frac{H(\zeta''_2 - \zeta''_1)}{\rho''}, \quad (585)$$

в которой  $\zeta''_2$  и  $\zeta''_1$  должны быть определены таким образом: на точках  $A$  и  $B$  должно выполнить астрономические определения их широт и долгот; имея отсюда  $\xi_1$ ,  $\eta_1$ ,  $\xi_2$  и  $\eta_2$  пишем

$$u_1 = \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}; \quad \text{tg } \Theta_1 = \frac{\eta_1}{\xi_1}; \quad u_2 = \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2}; \quad \text{tg } \Theta_2 = \frac{\eta_2}{\xi_2}.$$

Называя теперь азимут базиса с  $A$  на  $B$  через  $A_{1,2}$  и азимут базиса с  $B$  на  $A$  через  $A_{2,1}$ , имеем

$$\zeta_1 = u_1 \cos(A_{1,2} - \Theta_1); \quad \zeta_2 = u_2 \cos(A_{2,1} - \Theta_2).$$

По (585) мы получим проекцию базиса отвесными линиями на *поверхность геоида* или на *уровень океана*. Если же вычисляем

$$s_0 = s - s \frac{H}{R_0} + \frac{sH^2}{R_0^2}, \quad (586)$$

как это и делают в производственной геодезии, то получаем проекцию базиса на уровень океана, но *не отвесными линиями, а нормальми к референц-эллипсоиду*, и получаем в результате *величину какого-то промежуточного значения* (на черт. 92 это будет дуга  $ab_3$ ).

Величины  $h_r$  для СССР для эллипсоида Бесселя на Дальнем Востоке доходили до 350 м, а для Средней Сибири — до 100 м. Конечно, ясно, что величина базиса, вычисляемая по (586), будет различаться с его же величиной, даваемой формулой (583), на более чем ощутимые величины, *доходящие до 1 : 18 000 длины базиса!*

Настоящий математический подход к обработке триангуляции требует ее проектирования на поверхность референц-эллипсоида, т. е. надлежит применять именно формулу (583), а не (586), с определением  $h_r$  с ошибкой не более 3 м. Допустим, что мы блестяще разрешили задачу определения размеров и сжатия референц-эллипсоида и самым лучшим образом установили его ориентировку. Но для такой большой страны, как СССР, отступления по высоте геоида и от такого эллипсоида будут выражаться средней величиной не менее  $\pm 20$  м, достигая в некоторых местах нашей территории значения до 60—80—100 м. Понятно, так как мы можем пренебрегать лишь такими  $h_r$ , которые менее 3 м, то и в указанном случае очень удачного установления референц-эллипсоида надлежит применять формулу (583) и озаботиться получением величин  $h_r$ .

## § 77. Определение высот геоида над референц-эллипсоидом из астрономического нивелирования

Допустим, что имеем две близкие точки земной поверхности  $A$  и  $B$ : пусть точки  $a$  и  $b$  будут проекциями их на поверхность референц-эллипсоида  $EE$ , нормальми к ней (черт. 94); точки  $a_1$  и  $b_2$  суть проекции точек  $A$  и  $B$  на поверхность геоида, а точка  $c$  есть проекция  $B$  на

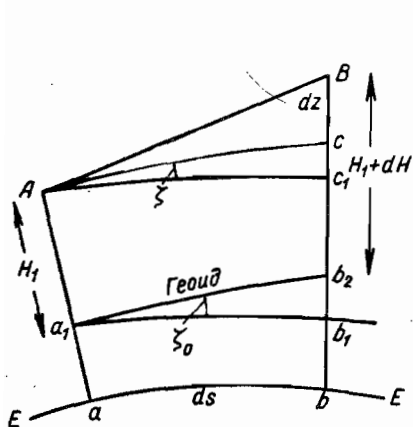
уровенную поверхность точки  $A$ ; элементы  $Ac_1$  и  $a_1b_1$  параллельны элементу  $ab = ds$  поверхности референц-эллипсоида. Уровенная поверхность  $Ac$  будет, конечно, непараллельна уровенной поверхности  $a_1b_2$  геоида. Назовем:  $a_1a$  через  $N_1$ ,  $bb_2$  через  $N_1 + dN$ ;  $Aa_1$  через  $H_1$ ;  $Bb_2$  через  $H_1 + dH$ ,  $Bc$  через  $dz$ . Пусть угол между элементами  $a_1b_2$  и  $a_1b_1$  равен  $\zeta_0$ ; угол между элементами  $Ac$  и  $Ac_1$  пусть равен  $\zeta$ . Мы имеем

$$dN = ds \zeta_0 = ds \zeta + (\zeta_0 - \zeta) ds = ds \zeta - (\zeta - \zeta_0) ds.$$

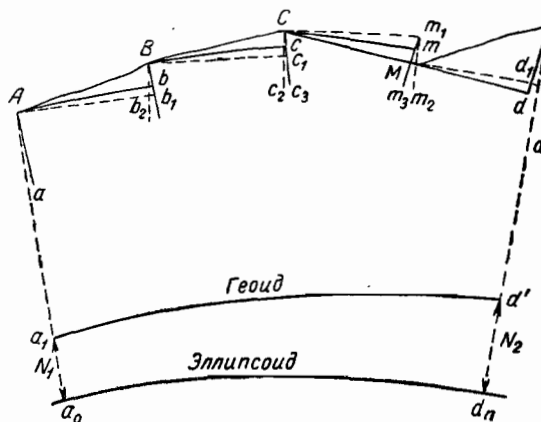
Если точка  $D$  земной поверхности находится на расстоянии  $S$  от  $A$ , высота ее над геоидом есть  $H_2$ , а  $N$  для нее имеет значение  $N_2$ , то

$$N_2 - N_1 = \int \zeta dS - \int (\zeta - \zeta_0) dS = \int \zeta dS - E. \quad (587)$$

Следовательно,  $E$  есть поправка к  $\int \zeta dS$  при вычислении  $N_2 - N_1$  и именно поправка за непараллельность уровенных поверхностей, проводимых между  $A$  и  $D$ , с поверхностью геоида.



Черт. 94



Черт. 95

На черт. 95:  $ABCMD$  — профиль земной поверхности в плоскости нормального сечения  $DAa_0$ , проходящего через нормаль  $Aa_0$  к референц-эллипсоиду;  $a_0d_0$  — нормальное сечение поверхности этого эллипсоида той же плоскостью. Кривые  $Ab_1$ ,  $Bc_1$ ,  $Cm_1$ ,  $Md_1$ , обозначенные пунктиром, параллельны кривой  $a_0d_0$  (т. е. имеют над ней каждая постоянную высоту); кривые  $Ab$ ,  $Bc$ ,  $Cm$ ,  $Md$  — кривые от сечения уровенных поверхностей в  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $M$  той же плоскостью  $DAa_0$ . Горизонтальные расстояния  $Ab$ ,  $Bc$ ,  $Cm$ ,  $Md$  назовем соответственно через  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$ ,  $s_4 \dots$ . Нормали  $Aa_0$ ,  $Bb_2$ ,  $Cc_2$ ,  $Mm_2$ ,  $Dd_2$  к поверхности референц-эллипсоида на черт. 95 обозначены пунктирными прямыми, а отвесные линии в  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $M$ ,  $D$  представлены сплошными прямыми  $Aa$ ,  $Bb$ ,  $Cc$ ,  $Mm$ ,  $Dd$ . Углы  $a_0Aa$ ,  $b_0Bb$ ,  $c_0Cc$ ,  $m_0Mm$ ,  $d_0Dd$  назовем соответственно через  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$ ,  $\zeta_3$ ,  $\zeta_4$ ,  $\zeta_5$ . Имея в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $M$ ,  $D$  астрономические широты и долготы и полагая, что эти точки одновременно являются геодезически определенными, мы, конечно, рассчитаем величины  $\zeta$  по формулам

$$u = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}; \quad \operatorname{tg} \Theta = \frac{\eta}{\xi}; \quad -\zeta^* = u \cos (A - \Theta),$$

\* Знак  $\zeta$ , обратный знаку  $Z - z$ , вычисляемому по формуле (579).

где  $A$  — азимут сечения  $a_0 d_0$ . Предположим теперь, что расстояния  $s_1, s_2, s_3, \dots$  настолько невелики, что в пределах каждого участка  $AB, BC, CM, \dots$  величины  $\zeta$  изменяются линейно. Тогда, очевидно,

$$\int_A^D \zeta ds = \frac{\zeta''_1 + \zeta''_2}{2\rho''} s_1 + \frac{\zeta''_2 + \zeta''_3}{2\rho''} s_2 + \frac{\zeta''_3 + \zeta''_4}{2\rho''} s_3 + \dots \quad (588)$$

Таким образом, по формуле (588) будет получен член  $\int \zeta dS$  в формуле (587).

Назовем теперь через  $H_1$  и  $H_2$  высоты точек  $A$  и  $D$  над уровнем океана (над поверхностью геоида). Из черт. 94 имеем

$$\begin{aligned} c_1 b_1 &= H_1; & c_1 b_2 &= H_1 - \zeta_0 ds; \\ cb_2 &= H_1 - \zeta_0 ds + \zeta ds; \\ Bb_2 &= H_1 + dH = H_1 - \zeta_0 ds + \zeta ds + dz; \\ dH &= (\zeta - \zeta_0) ds + dz, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} H_2 - H_1 &= \int (\zeta - \zeta_0) ds + \int dz = E + \int dz, \\ E &= H_2 - H_1 - \int dz. \end{aligned} \quad (589)$$

Конечно, величины  $dz$  определяются геометрическим нивелированием. Называя через  $W$  потенциал силы тяжести и через  $g$  — ускорение силы тяжести, мы имеем

$$dW = -g dz.$$

Если через  $W_2$  и  $W_1$  обозначим значения потенциала силы тяжести в точках  $A$  и  $D$ , то

$$\begin{aligned} W_2 - W_1 &= - \int g dz = - \int (g_m + g - g_m) dz = \\ &= -g_m \int dz - \int (g - g_m) dz. \end{aligned} \quad (590)$$

В последнем уравнении через  $g_m$  названо некоторое среднее значение ускорения силы тяжести  $g$  в точках  $A, B, C, M, D$  профиля между  $A$  и  $D$  (черт. 95). Из (590) получаем

$$- \int dz = \frac{W_2 - W_1}{g_m} + \int \frac{g - g_m}{g_m} dz$$

и, следовательно, по (589)

$$E = H_2 - H_1 + \frac{W_2 - W_1}{g_m} + \int \frac{g - g_m}{g_m} dz. \quad (591)$$

Обозначим через  $W_0$  значение потенциала силы тяжести на поверхности геоида. Тогда из (591)

$$\begin{aligned} E &= H_2 - H_1 - \frac{W_0 - W_2}{g_m} + \frac{W_0 - W_1}{g_m} + \int \frac{g - g_m}{g_m} dz; \\ E &= \int \frac{g - g_m}{g_m} dz + \left( H_2 - \frac{W_0 - W_2}{g_m} \right) - \left( H_1 - \frac{W_0 - W_1}{g_m} \right). \end{aligned} \quad (592)$$

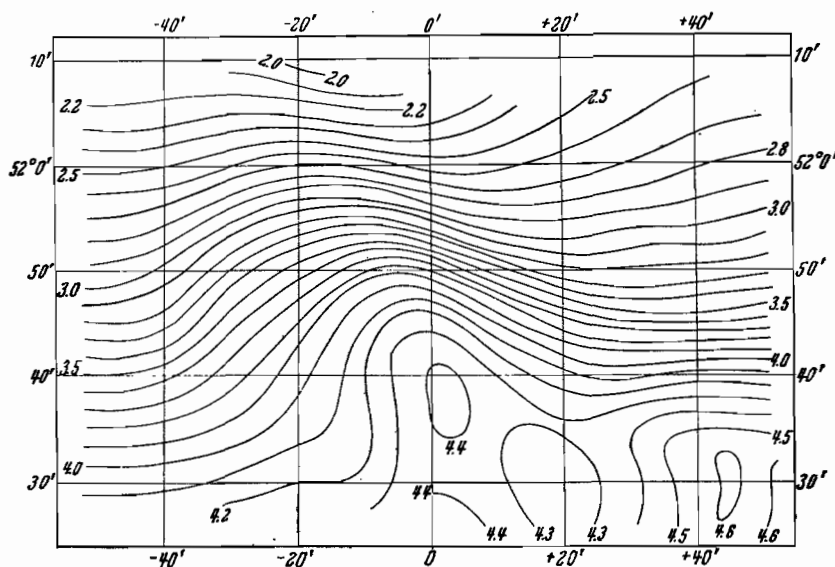
Назовем теперь через  $\bar{g}_2$  и  $\bar{g}_1$  значения ускорения силы тяжести в точках, лежащих по середине отрезков  $Aa_1$  и  $Dd'$  (черт. 95), т. е. на высотах  $\frac{H_1}{2}$  и  $\frac{H_2}{2}$  над уровнем океана.

Предполагая равномерность изменения силы тяжести с высотой над уровнем океана в рассматриваемом районе между точками  $A$  и  $B$ , мы напишем

$$W_0 - W_2 = H_2 \bar{g}_2; \quad W_0 - W_1 = H_1 \bar{g}_1;$$

и далее, из (592)

$$E = \int \frac{g - g_m}{g_m} dz + H_2 \frac{g_m - \bar{g}_2}{g_m} - H_1 \frac{g_m - \bar{g}_1}{g_m}. \quad (593)$$



Черт. 96

Если мы назовем через  $\gamma_0$  нормальное значение ускорения силы тяжести, то

$$\left. \begin{aligned} \bar{g}_1 &= g_1 + \frac{H_1}{R} \gamma_{0,1} - \frac{3}{2} \frac{D}{D_m} \frac{H_1}{R} \gamma_{0,1} \left(1 - \frac{H_1}{2a}\right) \\ \bar{g}_2 &= g_2 + \frac{H_2}{R} \gamma_{0,2} - \frac{3}{2} \frac{D}{D_m} \frac{H_2}{R} \gamma_{0,2} \left(1 - \frac{H_2}{2a}\right) \end{aligned} \right\} \quad (594)$$

В (594):  $a$  — радиус цилиндра при вычислении поправки Буге\*;  $g_1$  и  $g_2$  — наблюдаемые значения ускорения силы тяжести в точках  $A$  и  $D$ ;  $D$  — плотность земной коры,  $D_m$  — средняя плотность земного шара;  $\gamma_{0,1}$  и  $\gamma_{0,2}$  — нормальные значения силы тяжести в  $A$  и  $D$ ;  $R$  — радиус кривизны сечения  $a_0 d_0$ . Формулы (594) предполагают, что плотность земной коры на протяжении отрезков  $Aa_1$  и  $Dd'$  (черт. 96) постоянна;

\* См. А. А. Михайлов, «Курс гравиметрии и фигуры Земли», изд. 1939 г., § 38 и 39, стр. 144—147.

с другой стороны, они предполагают, что земная поверхность вокруг точки  $A$  и точки  $D$  может быть принята за поверхность, совпадающую с уровнями поверхностями в тех же точках. Конечно, эти предположения не имеют места в действительности. Но исследования Нитхаммера при применении астрономического нивелирования в районе Симплонского тоннеля показали, что влияние неверности первого предположения скажется в  $\bar{g}$ , даже в такой местности, как Альпы, всего в 1—2 миллигала, и даже при высотах  $H = 3000$  м это даст в  $E$  влияние, всегда меньшее 6 мм. Второе из сделанных предположений равносильно невведению в ускорение силы тяжести поправки «за рельеф». Мы имеем

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 &= g + \frac{2H}{R} \gamma_0 - \frac{3}{2} \frac{D}{D_m} \frac{H}{R} \gamma_0 \left(1 - \frac{H}{2a}\right) + \Delta g'' \\ \gamma_0 &= \bar{g} + \frac{H}{R} \gamma_0 + \Delta g''_{\frac{H}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (595)$$

В (595):  $\bar{g}$  — ускорение силы тяжести на глубине  $\frac{H}{2}$ ;  $\Delta g''$  — поправка за рельеф для станции на земной поверхности;  $\Delta g''_{\frac{H}{2}}$  — поправка за рельеф для точки на одной отвесной линии со станцией, но лежащей ниже ее на  $\frac{H}{2}$ . Из (595)

$$\left. \begin{aligned} \bar{g}_1 &= g_1 + \frac{H_1}{R} \gamma_{0,1} - \frac{3}{2} \frac{D}{D_m} \frac{H_1}{R} \left(1 - \frac{H_1}{2a}\right) \gamma_{0,1} + \Delta g''_1 - \Delta g''_{\frac{H_1}{2}} \\ \bar{g}_2 &= g_2 + \frac{H_2}{R} \gamma_{0,2} + \frac{3}{2} \frac{D}{D_m} \frac{H_2}{R} \left(1 - \frac{H_2}{2a}\right) \gamma_{0,2} + \Delta g''_2 - \Delta g''_{\frac{H_2}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (596)$$

В горных районах при вычислении  $\Delta g''$  и в особенности  $\Delta g''_{\frac{H}{2}}$  учитывают влияние изменения плотностей пород с высотой, и поэтому поправка  $\Delta g''_{\frac{H}{2}}$  (и в малой степени  $\Delta g''$ ) не совпадает собственно с поправкой за рельеф, как последнюю понимают в гравиметрии.

Поправка  $\Delta g''$  всегда положительна; поправка  $\Delta g''_{\frac{H}{2}}$  может иметь разные знаки. В местностях равнинных обе поправки ничтожны, но в местностях с крупным рельефом они достаточно ощутимы, а в горных районах приобретают крупные значения. Так, в Альпах для некоторых точек  $\Delta g''$  равны: +29,0; +36,4; +68,7 миллигал, а соответственные значения  $\Delta g''_{\frac{H}{2}}$  равны: —33,5; —34,4; —40,2 миллигал. Таким образом, в Альпах ( $\Delta g'' - \Delta g''_{\frac{H}{2}}$ ) может достичь 110 миллигал и при  $H = 2000$  м может дать в (593) влияние в 20 см!

Теперь остановимся на перечне действий и на программе работ по астрономическому нивелированию. По некоторому профилю мы должны достаточно часто определить геодезические точки, на каждой из которых должно затем выполнить тщательные определения астрономических широт и долгот. В равнинных местностях расстояния между этими точками должны быть не более 15 км, а вернее — не более 8—10 км. В горных районах расстояние между такими геодезическими пунктами, на которых выполнены астрономические определения широт и долгот, должно быть значительно уменьшено — здесь, вероятно, придется это расстояние брать



всего в 3—4 км. По профилю должно быть выполнено геометрическое нивелирование с связью его с марками государственного нивелирования но точность этого нивелирования может быть очень низкой; представляется, что оно может быть заменено нивелированием тахеометрическим или геодезическим — при расстояниях между станциями не более 3 км если вертикальный круг дает ошибку отсчета по нему порядка  $\pm 15''$ .

Далее, вдоль профиля должны быть расположены гравиметрические станции, частота которых вполне зависит от рельефа местности. Наконец для вычисления  $\Delta g''$  и  $\Delta g''_{\frac{H}{2}}$  должна быть в распоряжении топографическая карта местности, охватывающая — в горных районах — весь горный район и прилегающие предгорья; в горных районах нужны и геологические разрезы местности.

Выведя по (588)  $\int \zeta ds$ , далее выводим  $g_m$  и с ним

$$\int \frac{g - g_m}{g_m} dz = \sum \frac{g - g_m}{g_m} dz,$$

причем при вычислении  $\sum \frac{g - g_m}{g_m} dz$  величины  $dz$  несколько выравниваются чтобы получить по таким  $\frac{dz}{g_m}$  некоторую плавную кривую. Затем при помощи топографической карты рассчитываем  $\Delta g''$  и  $\Delta g''_{\frac{H}{2}}$ ; далее вычисляем по (596)  $\bar{g}_1$  и  $\bar{g}_2$ , и наконец, по (593) — величину  $E$ . Окончательно выводим по (587)

$$N_2 - N_1 = \int \zeta ds - E$$

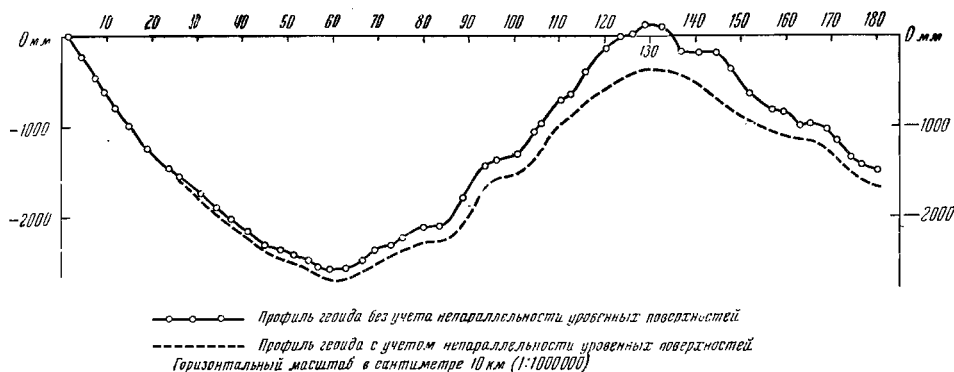
и, зная  $N_1$ , отсюда получаем  $N_2$ . Конечно, в начальной точке астрономического нивелирования высота  $N_1$  должна быть известна: она устанавливается из условий ориентирования референц-эллипсоида по высоте например для референц-эллипсоида, принятого в геодезических работах в СССР, высота  $N_1$  в Пулкове равна нулю, так как принято, что референц-эллипсоид касается геоида в Пулкове.

Отрезки  $AD$ , на которых применяются уравнения (596) и (587), берут между точками, в коих нужно определить высоты  $N$  геоида на эллипсоидом, т. е. эти отрезки берут вообще небольшими, так как местные волны геоида могут сменяться достаточно прихотливо, — в этом вопросе получают прочные указания из рассмотрения хода изменения величин  $\zeta$ .

Поправка  $E$  за непараллельность уровенных поверхностей очень невелика: на профиле Сен-Готтардского меридиана (в Альпах), на протяжении 185 км, ее значение не превышает 43 см. Точность астрономического нивелирования должна быть признана высокой: на том же профиле (Сен-Готтард) накопление ошибок в  $N$  на протяжении 185 км характеризуется средней ошибкой  $\pm 34$  мм. Конечно, эта высокая точность обусловлена очень частым расположением астрономических пунктов на изучаемом профиле.

Очевидно, астрономическое нивелирование является методом достаточно тяжелым: на его применение можно рассчитывать лишь на сравнительно небольших профилях и при изучении фигуры геоида на сравнительно небольших площадях. Примеры применения этого метода мы имеем:

- 1) на меридиане Сен-Готтарда, на протяжении 185 км — работа Швейцарской геодезической комиссии;
- 2) в Вюртемберге, вдоль меридиана с восточной долготой  $9^{\circ}$ ;
- 3) в Гарце (Германия) — с охватом площади в виде прямоугольника: 65 км по меридиану и 130 км по параллели; на этой площади были астрономическим нивелированием получены 11 профилей по меридианам и один, связывающий эти меридианные профили, по средней параллели; в результате получилась возможность представить поверхность геоида изогипсами, проведенными через 0,1 м.



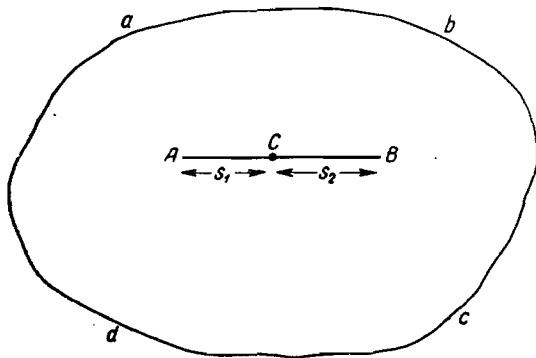
Черт. 97

На черт. 96 и 97 мы приводим изображение в изогипсах поверхности геоида в Гарце и профиль геоида по Сен-Готтардскому меридиану.

### § 78. Определение высот геоида над референц-эллипсоидом из астрономо-гравиметрического нивелирования

Идея этого нивелирования была выдвинута Ф. Н. Красовским в 1934 г.; она была затем разработана в ЦНИИГАиК нашим молодым ученым М. С. Молоденским, уже много сделавшим в области научной работы.

Представим себе, что точки  $A$  и  $B$  (черт. 98) являются геодезическими пунктами, на которых выполнены тщательно определения астрономических широт и долгот; при помощи этих астрономических данных мы можем вывести с хорошей точностью в точках  $A$  и  $B$  слагающие *относительных* уклонений отвеса  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  в вертикальной плоскости, проходящей через  $A$  и  $B$ . Понятно, эти величины  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  будут отнесены именно к тому референц-эллипсоиду, к которому относятся и геодезические координаты точек  $A$  и  $B$ . Далее представим себе, что на территории, ограниченной контуром  $abcd$  (черт. 98), выполнена с той или другой степенью



Черт. 98

густоты сплошная гравиметрическая съемка и получены для гравиметрических станций этой съемки аномалии силы тяжести. О размерах этой территории, которую назовем через  $\Sigma$ , будет сказано ниже. Всю остальную поверхность земного шара, лежащую за контуром  $abcd$ , назовем через  $\sigma$ . Применяя теперь теорию Стокса и формулы Венинг-Мейнеса, выведем по аномалиям силы тяжести, полученным на территории  $\Sigma$ , слагающие «гравиметрических» уклонений отвеса в вертикальной плоскости  $AB$  для точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ , которые назовем через  $\zeta_1^g$ ,  $\zeta_2^g$  и  $\zeta_3^g$ . Точка  $C$  лежит на прямой  $AB$  и задана ее расстояниями  $s_1$  и  $s_2$  от  $A$  и  $B$ ; астрономо-геодезическое значение  $\zeta$  для  $C$  назовем через  $\zeta_3$ . Назовем через  $(\zeta_1^g)$ ,  $(\zeta_2^g)$  и  $(\zeta_3^g)$  те «гравиметрические» уклонения отвеса, которые мы имели бы соответственно в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ , если бы имели гравиметрическую изученность всего земного шара, и при применении теории Стокса для вывода гравиметрических уклонений отвеса использовали бы аномалии силы тяжести не только в пределах площади  $\Sigma$ , а по всей поверхности земного шара  $\Sigma + \sigma$ . Мы имеем

$$\left. \begin{aligned} (\zeta_1^g) &= \zeta_1^g + \delta\zeta_1 \\ (\zeta_2^g) &= \zeta_2^g + \delta\zeta_2 \\ (\zeta_3^g) &= \zeta_3^g + \delta\zeta_3 \end{aligned} \right\} \quad (597)$$

При достаточном удалении всех точек контура  $abcd$  от точек  $A$  и  $B$ , величины  $\delta\zeta$  будут изменяться вместе с перемещением точки  $C$  по линии  $AB$  линейно, т. е. пропорционально  $s_1$  или  $s_2$ . Другими словами,

$$\begin{aligned} \delta\zeta_3 &= \frac{(\zeta_2 - \delta\zeta_1) s_1}{s_1 + s_2} + \delta\zeta_1 = \delta\zeta_2 + \frac{(\delta\zeta_1 - \delta\zeta_2) s_2}{s_1 + s_2}, \\ \delta\zeta_3 &= \frac{\delta\zeta_2 s_1 + \delta\zeta_1 s_2}{s_1 + s_2}. \end{aligned} \quad (598)$$

С другой стороны, различия  $(\zeta_1^g)$ ,  $(\zeta_2^g)$ ,  $(\zeta_3^g)$  соответственно от астрономо-геодезических  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  и  $\zeta_3$  обусловлены только различием гравиметрического эллипсоида, к которому отнесены величины  $(\zeta^g)$ , от референц-эллипсоида, к которому отнесены величины  $\zeta$ , — в отношении его ориентировки и сжатия. Но при известной незначительности расстояния  $AB$ ; эти различия  $\zeta$  и  $(\zeta^g)$  будут изменяться при перемещении точки  $C$  вдоль прямой  $AB$  также линейно, т. е. пропорционально расстояниям  $s_1$  или  $s_2$ . Таким образом, мы можем написать

$$\zeta_3 - (\zeta_3^g) = \frac{[\zeta_2 - (\zeta_2^g)] s_1 + [\zeta_1 - (\zeta_1^g)] s_2}{s_1 + s_2}. \quad (599)$$

Или, пользуясь (598) и (597)

$$\begin{aligned} \zeta_3 - \zeta_3^g - \frac{\delta\zeta_2 s_1 + \delta\zeta_1 s_2}{s_1 + s_2} &= \frac{(\zeta_2 - \zeta_2^g) s_1 + (\zeta_1 - \zeta_1^g) s_2}{s_1 + s_2} - \frac{\delta\zeta_2 s_1 + \delta\zeta_1 s_2}{s_1 + s_2}, \\ \zeta_3 - \zeta_3^g &= \frac{(\zeta_2 - \zeta_2^g) s_1 + (\zeta_1 - \zeta_1^g) s_2}{s_1 + s_2}, \end{aligned} \quad (600)$$

$$\zeta_3 = \zeta_3^g + \frac{(\zeta_2 - \zeta_2^g) s_1 + (\zeta_1 - \zeta_1^g) s_2}{s_1 + s_2}. \quad (601)$$

\* Надлежит помнить, что знаки  $\zeta$  обратны  $\mu \cos(A - \theta)$ .

По формуле (601) мы получаем так называемое *интерполированное* уклонение  $\zeta_s$  в  $C$ , отнесенное к референц-эллипсоиду. Исследования М. С. Молоденского показали, что в сравнительно равнинных местностях расстояние  $AB$  может быть взято от 70 до 100 км, а контур  $abcd$  должен быть удален от любых точек на линии  $AB$  не менее, чем на 110—120 км; тогда будут выполнены те два условия, которые положены в основу линейного интерполирования величин  $\delta\zeta$  и  $\zeta - (\zeta^s)$ . Что касается густоты гравиметрической изученности в пределах территории  $\Sigma$ , то она должна вообще отвечать густоте общей гравиметрической съемки, т. е. на 1000 кв. км один гравиметрический пункт, однако непосредственно прилегающая к прямой  $AB$  площадь должна быть гравиметрически изучена значительно более детально — здесь нужно определить ряд добавочных гравиметрических пунктов в зависимости от хода изоаномалий силы тяжести.

Таким образом, мы получаем возможность для любой точки на линии  $AB$ , задаваясь лишь расстоянием ее от  $A$  или  $B$ , вычислить астрономо-геодезическое уклонение отвеса  $\zeta$ , применяя уравнение (601) и выведя предварительно по формулам Венинг-Мейнеса  $\zeta_1^s$ ,  $\zeta_s^s$  и  $\zeta_2^s$  на основании карты аномалий силы тяжести для территории  $\Sigma$ . Очевидно, что метод астрономо-гравиметрического нивелирования позволяет получить астрономо-геодезические уклонения отвеса  $\zeta$  в вертикальной плоскости  $AB$  для какого угодно числа точек на линии  $AB$ , и, конечно, взяв эти точки достаточно часто, мы переходим к материалу — тому самому, который является исходным в астрономическом нивелировании. Следовательно, после расчета по уравнению (601) величин  $\zeta$  для ряда точек на линии  $AB$ , мы затем применим (588), (596), (593) для вычисления  $E$  и, наконец, (587)

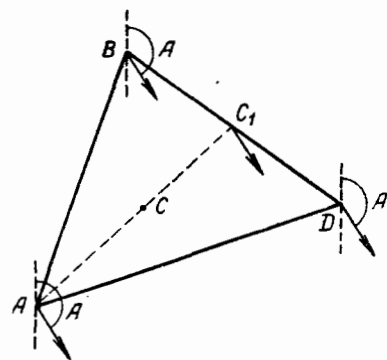
$$N_2 - N_1 = \int \zeta ds - E.$$

Конечно, за  $N_2$  мы можем принимать высоту  $N$ , относящуюся к любой точке на линии  $AB$ , в том числе и к точке  $B$ . Следовательно, мы можем получить: детальный профиль геоида, высоты точек геоида над референц-эллипсоидом и уклонения отвеса  $\zeta$  в любой точке линии  $AB$ . Средняя ошибка астрономо-геодезического *интерполированного* значения величины  $\zeta$  оказывается равной  $\pm 0'',5-0'',6$ , т. е. точность этих интерполированных  $\zeta$  является вполне достаточной. Но очевидно, что указанным методом можно получить в точке  $C$  значение  $\zeta$ , отнесенное не только к плоскости вертикала прямой  $AB$ , а к любой вертикальной плоскости. Тогда только в (601) все  $\zeta$  заменятся величинами  $\zeta_A$ , отнесенными к плоскости, имеющей в  $A$  азимут  $A$  (а не азимут линии  $AB$ ).

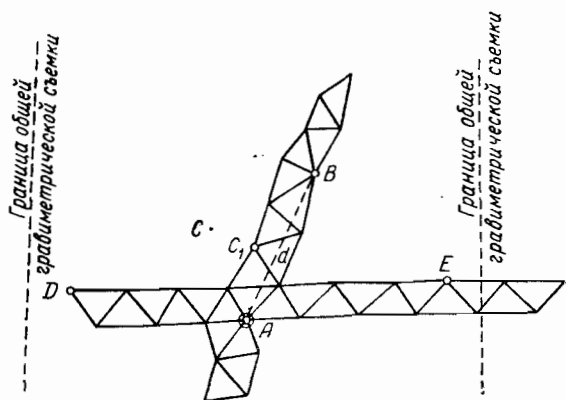
Этим же методом можно определить  $\zeta$  для точки  $C$ , и не лежащей на прямой  $AB$ , и притом  $\zeta_A$ , т. е. отнесенное к произвольному азимуту: для этого нужно лишь иметь не менее трех геодезических точек, расположенных на территории  $\Sigma$ , для которых известны их астрономические широты и долготы. Черт. 99 поясняет эту задачу: точки  $A$ ,  $B$  и  $D$  суть геодезические пункты, для которых мы имеем полученные из наблюдений их астрономические широты и долготы; в точке  $C$  желаем получить интерполированное  $\zeta_A$ . Мы выводим астрономо-геодезические значения  $\zeta_A$  для точек  $A$ ,  $B$  и  $D$ ; далее по карте аномалий силы тяжести вычисляем значения  $\zeta_A^s$  для точек  $A$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $C$  и  $C_1$ , причем точка  $C_1$  лежит в пересечении прямой  $BD$  с продолжением прямой  $AC$ . Применяя сперва (601) к прямой  $BD$  и точке  $C_1$ , получим астрономо-геодезическое  $\zeta_A$  для  $C_1$ ; теперь останется применить (601) для точек  $C_1$ ,  $C$  и  $A$ .

В действительности следует применять способ вычисления  $\zeta_A$  для точек  $C$  (черт. 99), указанный М. С. Молоденским в его статье: «Определение фигуры геоида при совместном использовании астрономо-геодезических уклонений отвеса и карты аномалий силы тяжести» (Труды ЦНИИГАиК, выпуск 17, 1937 г.). Однако, отметив принципиальную возможность вычисления  $\zeta_A$  в точке  $C$ , не лежащей на прямой  $AB$ , должно указать, что при расположении рядов триангуляции I класса через 200—250 км, практической возможности решения этой задачи не будет, что ясно из черт. 100: для возможности использования пунктов  $E$  или  $D$ , необходимо значительно отодвинуть от  $E$  и  $D$  границу гравиметрической съемки, и, кроме того, около  $E$  и  $D$  сгустить станции этой съемки.

Впрочем, эти трудности вовсе не относятся к получению  $\zeta_A$  для точек самого триангуляционного ряда  $AB$ , вдоль которого выполнено астрономо-гравиметрическое нивелирование: в точке  $C_1$  (черт. 100) значение величины  $\zeta_A - \zeta_A^s$  будет отличаться от значения этой же величины для точки  $d$  вообще меньше чем на  $0''{,}1$ .



Черт. 99

Точки  $A, B, C, D, E$  — астрономические пункты триангуляции I класса

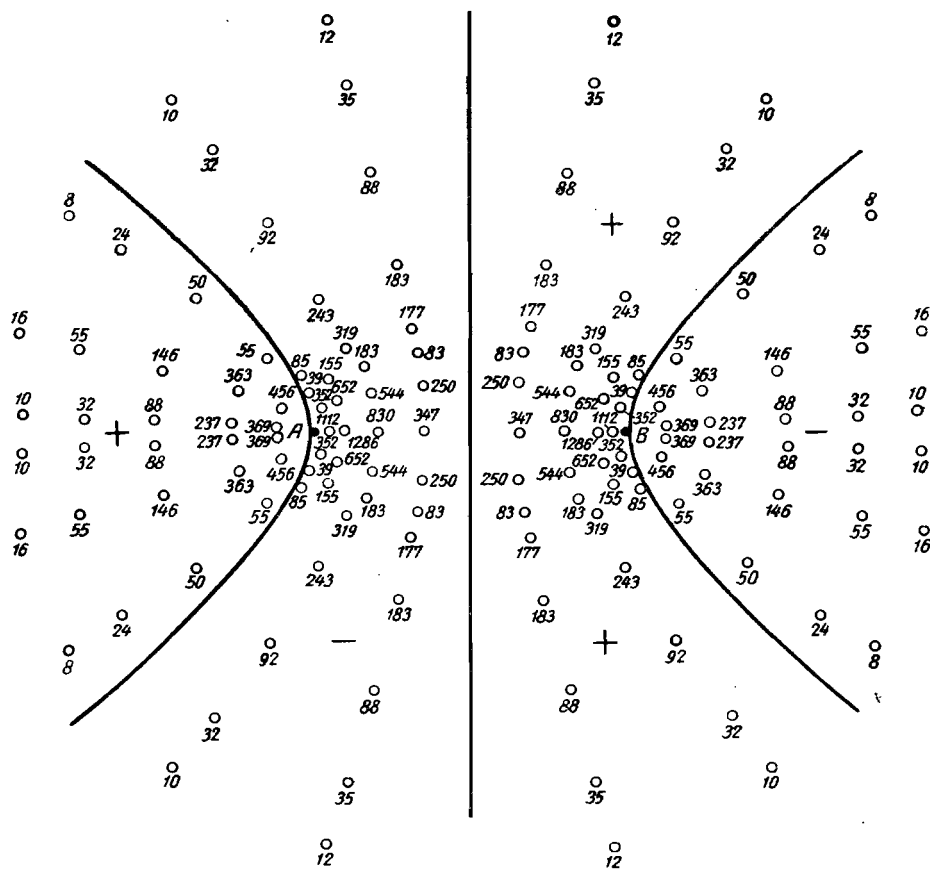
Черт. 100

Необходимо подчеркнуть, что астрономо-гравиметрическое нивелирование требует добавления к общей гравиметрической съемке страны в виде сгущения гравиметрических станций вблизи и кругом точек  $A$  и  $B$  и тех точек на линии  $AB$ , для которых будут выводиться величины  $\zeta^s$ . Но все-таки это добавление невелико по объему работ, и во всяком случае метод астрономо-гравиметрического нивелирования позволяет очень быстро продвигаться и давать профили геоида и высоты его над референц-эллипсоидом на значительных протяжениях рядов триангуляции I класса. В той же статье М. С. Молоденский дает еще методику вывода высот  $N$  геоида над референц-эллипсоидом в астрономических точках  $A$  и  $B$ , минуя вычисления уклонений отвеса на профиле между  $A$  и  $B$ . Именно, мы имеем такую формулу Молоденского

$$\rho'' \frac{N_2 - N_1}{2s} = \frac{1}{2} (\zeta''_1 + \zeta''_2) + 0''{,}0076 s \left[ \left( \frac{\partial \Delta g}{\partial x} \right)_1 + \left( \frac{\partial \Delta g}{\partial x} \right)_2 \right] + \Sigma A_i \Delta g_i \quad (602)$$

В формуле (602):  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  — астрономо-геодезические значения слагающей уклонения отвеса в плоскости  $AB$  для точек  $A$  и  $B$ , взятые с

обратным знаком;  $\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial x}\right)_1$  и  $\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial x}\right)_2$  — горизонтальные градиенты аномалии силы тяжести в  $A$  и в  $B$  по оси  $x$ , совпадающей с прямой  $AB$ ; величины  $A_i$  — вычисленные заранее коэффициенты, на которые нужно множить аномалии силы тяжести  $\Delta g_i$  в соответствующих точках территории  $\Sigma$ , чтобы получить  $A_i \Delta g_i$  в сотых долях секунды;  $s$  — расстояние между  $A$  и  $B$ . Для вычисления  $\sum A_i \Delta g_i$  Молоденским М. С. построена палетка, приводимая на черт. 101; на этой палетке при точках, обозначенных малыми кружочками, подписаны значения коэффициентов  $A_i$ ; точки  $A$  и  $B$  палетки совмещают с астрономическими точками  $A$  и  $B$  на



Черт. 101

карте, на которой нанесены аномалии силы тяжести  $\Delta g_i$ ; так как отрезок  $AB$  палетки вообще будет иной длины, чем тот же отрезок на карте аномалий силы тяжести, то палетку проектируют на карту проекционным фонарем. Далее дело сводится к выписке с карты значений  $\Delta g$ , приходящихся на точки палетки, и к перемножениям этих  $\Delta g$  на цифры (коэффициенты  $A_i$ ), подписанные на палетке при соответствующих точках. Так просто дело обстоит с получением разностей высот  $N_2 - N_1$  в геодезических точках, для которых имеются астрономические определения широты и долготы. Средняя ошибка  $(N_2 - N_1)$  не более  $\pm 0,25$  м при  $AB = 100$  км.

Таким образом, применяя метод Молоденского по рядам триангуляции I класса, на которых астрономические пункты расположены через 70—100 км, мы для всех этих точек получим с хорошей точностью и с затратой малого вычислительного труда высоты геоида над эллипсоидом, причем передача этих высот на длину ряда в 2500 км выполнится с средней ошибкой не более  $\pm 1,25$  м. Мы не приводим вывода уравнения (602) и не раскрываем значения коэффициентов  $A_i$ , считая, что это относится к гравиметрии. Очевидно, сгущение гравиметрических станций нужно вблизи астрономических пунктов  $A$  и  $B$ , если мы ограничиваем задачу выводом высот только для астрономических пунктов, определенных по рядам триангуляции I класса.

Делая передачу высот из астрономо-гравиметрического нивелирования по рядам триангуляции I класса, мы придем к высотным замыканиям полигонов этой триангуляции и получим высотные невязки, хорошо характеризующие точность метода астрономо-гравиметрического нивелирования. Приводим здесь таблицу 4, извлеченную из статьи в трудах ЦНИИГАиК (Сборник № 3, 1939 г.), которая дает в сантиметрах невязки полигонов триангуляции I класса в Европейской части СССР.

Таблица 4

Периметр полигона в километрах	Невязка в метрах
709	0,64
994	1,19
942	1,60
791	0,62
1045	0,73
452	0,49
1530	0,57
1057	1,45
301	0,29
1800	0,06

Нужно отметить, что в приведенных в таблице 4 полигонах I класса гравиметрический материал по целому ряду сторон этих полигонов (т. е. по целому ряду звеньев триангуляции I класса) не вполне отвечает требованиям астрономо-гравиметрического нивелирования — ни по своей точности, ни по расположению станций, ни по густоте станций вблизи астрономических пунктов. Тем не менее результаты, даваемые методом астрономо-гравиметрического нивелирования даже в этих условиях, являются вполне приемлемыми и очень важными для ряда задач геодезии.

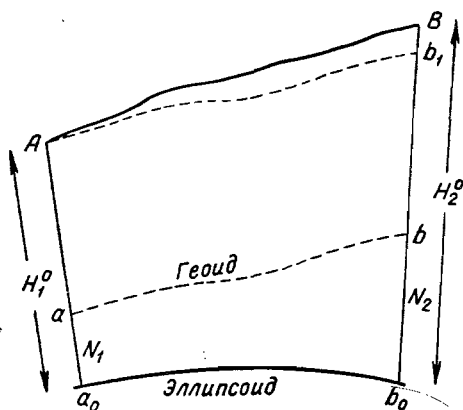
В наших климатических условиях говорить о широком применении астрономического нивелирования не приходится; при нашей огромной территории, кроме того, затраты на это нивелирование будут громадными, а продвижение с работой — очень медленным. Наоборот, при планомерном и неотступном проведении общей гравиметрической съемки страны, добавочные работы по астрономо-гравиметрическому нивелированию вообще будут малыми и даже ничтожными — в особенности, когда сгущение гравиметрической сети будет выполняться гравиметрами.

Очевидно, это — метод, при помощи которого с наибольшей быстротой, при наименьших затратах и при достижении хорошей точности, будет осуществлено изучение фигуры геоида на огромных территориях. Опыты ЦНИИГАиК по астрономо-гравиметрическому нивелированию были проведены в 1935 г. по дуге меридиана Пулково — Орша и в 1936 г. — по дуге 54-й параллели Орша — Челябинск; в 1935 г. пройдено около 600 км, в 1936 г. — около 2400 км, причем в 1936 г. работало всегда два гравиметрических отряда и один астрономический. Это уже показывает, насколько быстро может идти выполнение астрономо-гравиметрического нивелирования, если, конечно, сузить его задачу выводом высот  $N$  для астрономических пунктов по рядам триангуляции I класса, расположенных через 70—100 км друг от друга.

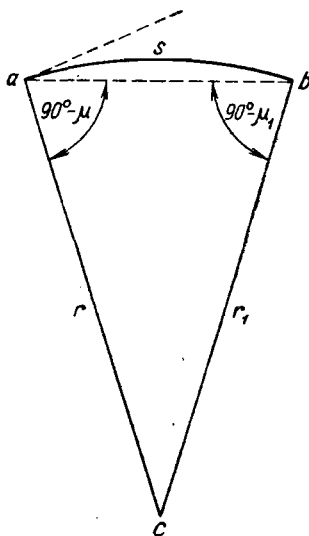
Астрономо-гравиметрическое нивелирование, соответственно поставленное, является методом изучения геоида на территориях порядка континентов. Надлежит пожелать, чтобы в СССР работы по проведению этого нивелирования так же успешно развивались в дальнейшем, как они были успешно начаты в 1935 г.

§ 79. О влиянии уклонений отвесных линий на результаты тригонометрического нивелирования. Выводы высот геоида над эллипсоидом посредством результатов тригонометрического нивелирования и из астрономических определений широт и долгот на пунктах триангуляции

Пусть пункты  $A$  и  $B$  (черт. 102) суть два смежных пункта триангуляции, на которых в результате тригонометрического нивелирования получены зенитные расстояния  $z_1$  и  $z_2$ ; на этих же геодезических пунктах  $A$  и  $B$  пусть выполнены определения астрономических широт и долгот. Азимут в  $A$  на  $B$  назовем через  $A$ , а в  $B$  азимут на  $A$  будем считать равным  $A \pm 180^\circ$ . На черт. 102 поверхность референц-эллипсоида представлена кривой  $a_0b_0$ , поверхность геоида — кривой  $ab$ , уровенная поверхность точки  $A$  — кривой  $Aa_1$ . Высоты  $A$  и  $B$  над уровнем океана, т. е. отрезки  $Aa$  и  $Bb$ , назовем соответственно через  $H_1$  и  $H_2$ ; высоты точек  $A$  и  $B$  над поверхностью референц-эллипсоида назовем соответственно через  $H_1^o = Aa_0$  и  $H_2^o = Bb_0$ ; наконец, высоты геоида над эллипсоидом для  $A$  и  $B$ , т. е. отрезки  $aa_0$  и  $bb_0$ , назовем соответственно



Черт. 102



Черт. 103

через  $N_1$  и  $N_2$ . В теории тригонометрического нивелирования кривая  $ab$  принимается за дугу окружности, имеющей радиус, равный радиусу кривизны дуги  $a_0b_0$  в ее середине. Если бы кривая  $ab$  была дугой эллипса, то мы провели бы предварительно следующее исследование. На черт. 103 прямые  $aC$  и  $bC$  — нормали к кривой  $ab$ ; они вообще не пересекаются, но угол между нормальными плоскостями  $baC$  и  $Cab$  при  $s < 30$  км будет так ничтожен, что конечно в вопросе определения высот



мы можем считать эти плоскости сливающимися. Далее, по (86) мы получим

$$\begin{cases} \mu = \frac{s}{2N} + \frac{\eta^2 s}{2N} \cos^2 A_{ab} - \frac{\eta_1^2 s^2}{2N^2} \operatorname{tg} B_1 \cos A_{ab} \\ \mu_1 = \frac{s}{2N_1} + \frac{\eta_1^2 s}{2N_1} \cos^2 A_{ba} - \frac{\eta_1^2 s^2}{2N_1^2} \operatorname{tg} B_2 \cos A_{ba} \end{cases} \begin{cases} \angle baC = 90^\circ - \mu \\ \angle abC = 90^\circ - \mu_1 \end{cases} \quad (603)$$

Здесь  $N$  и  $N_1$  — радиусы кривизны первого вертикала в  $a$  и  $b$ ;  $B_1$  и  $B_2$  — широты точек  $a$  и  $b$ ;  $A_{ab}$  и  $A_{ba}$  — азимуты с  $A$  на  $B$  и с  $B$  на  $A$ . Так как

$$\frac{1}{N_1} = \frac{1}{N} \left( 1 - \frac{\eta^2 t s \cos A_{ab}}{M} \right),$$

$$\eta_1^2 = \eta^2 - 2 \frac{s}{M} \eta^2 t \cos A_{ab},$$

то получаем

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{s}{2N} - \frac{\eta^2 t s^2 \cos A_{ab}}{2MN} + \frac{\eta^2 s}{2N} \cos^2 A_{ba} - \\ &- \frac{\eta^2 s^2}{2N^2} \operatorname{tg} B_2 \cos A_{ba} + \frac{\eta^2 s^2}{MN} t \cos^3 A_{ba} + \dots; \\ \mu_1 &= \frac{s}{2N} - \frac{\eta^2 t \cos A_{ab} s^2}{2N^2} + \frac{\eta^2 s}{2N} \cos^2 A_{ab} - \frac{\eta^2 s^2}{N^2} t \sin^2 A_{ab} \cos A_{ab} + \\ &+ \frac{\eta^2 s^2}{2N^2} t \cos A_{ab} - \frac{\eta^2 s^2}{N^2} t \cos^3 A_{ab}; \\ \mu - \mu_1 &= + \frac{\eta^2 t s^2 \cos A_{ab}}{2N^2} - \frac{\eta^2 s^2}{N^2} t \cos A_{ab} + \frac{\eta^2 s^2}{N^2} t \sin^2 A_{ab} \cos A_{ab} + \\ &+ \frac{\eta^2 s^2}{N^2} t \cos^3 A_{ab}; \\ \mu - \mu_1 &= \frac{\eta^2 t s^2}{2N^2} \cos A_{ab}. \end{aligned} \quad (604)$$

Теперь из треугольника  $abC$  (черт. 103), в котором назовем

$$aC = r, \quad bC = r_1, \quad \overline{ab} = k,$$

мы напишем

$$\begin{aligned} r &= k \frac{\cos \mu_1}{\sin (\mu + \mu_1)}; \quad r_1 = k \frac{\cos \mu}{\sin (\mu + \mu_1)}; \\ r - r_1 &= k \frac{\cos \mu - \cos \mu_1}{\sin (\mu + \mu_1)} = -k \frac{\sin \frac{\mu - \mu_1}{2}}{\cos \frac{\mu + \mu_1}{2}}; \end{aligned}$$

или с достаточной точностью и используя (604)

$$\begin{aligned} r - r_1 &= -\frac{\mu - \mu_1}{2} k = -\frac{\mu - \mu_1}{2} 2N \sin \frac{s}{2N}; \\ r - r_1 &= -\frac{\mu - \mu_1}{2} s = -\frac{\eta^2 t s^3 \cos A_{ab}}{4N^2}. \end{aligned} \quad (605)$$

При  $s = 30$  км

$$r - r_1 < 0,6 \text{ мм!}$$

Таким образом, если бы дуга  $ab$  (черт. 102) была эллиптической, то мы имели бы право при вычислении высот из тригонометрического нивелирования принимать ее за дугу *сферическую*, но только радиус ее  $r$  может заметно отличаться от радиуса  $R$  дуги  $a_0b_0$  в ее середине. В самом деле, допустим, что разность уклонений отвесных линий в точках  $A$  и  $B$  составляет  $5''$ , тогда при  $s = 30$  км это вызовет отличие кривизны дуги  $ab$  от кривизны дуги  $a_0b_0$  на  $\frac{dC}{C} R$ , причем под  $C$  понимается угол  $aCb$  (черт. 103) или  $\frac{s}{R}$ . При  $s = 30$  км:  $C = 1000''$ ,  $\frac{dC}{C} R = \frac{1}{200} R$  или изменение радиуса составит 30 км. В формулы *одностороннего* тригонометрического нивелирования входит член  $\frac{1-k}{2R} s^2$ , который, очевидно, изменится на  $-\frac{s^2 dR}{2R^2}$ , и при  $dC = 5''$  будем иметь

$$\frac{s^2 dR}{2R^2} = \frac{1 \cdot 30000}{80000} = \frac{3}{8} \text{ м} = 0,37 \text{ м.}$$

Следовательно, при *одностороннем* нивелировании влияние уклонения отвеса прежде всего сказывается в том, что мы ошибочно берем радиус  $R$  при вычислении поправки за кривизну Земли и рефракцию, причем это влияние следует считать пренебрегаемым лишь при  $s < 15$  км.

В формулу *двустороннего* нивелирования входит поправка  $\frac{k_1 - k_2}{4R} s^2$ , причем  $(k_1 - k_2)$  есть разность рефракций при наблюдениях зенитных расстояний в  $A$  и  $B$ . Полагая среднее значение  $k_1 - k_2$  равным  $\pm 0,06$ , получим при  $dC = 5''$  и  $s = 30$  км

$$\frac{k_1 - k_2}{4R^2} dR s^2 = \frac{0,06 \cdot 30000}{4 \cdot 40000} \approx 0,01 \text{ м.}$$

Другими словами, в *двустороннем* нивелировании указанное влияние исчезает.

Но обратим внимание на то, что кривую  $ab$  нельзя принимать за эллиптическую, потому что изменения уклонений отвесных линий на ней будут происходить неравномерно. Если мы от эллипса  $a_0b_0$  переходим к эллипсу  $ab$ , имеющему другую полуось  $a$  и другое сжатие  $\alpha$ , то, как видно из формул (554) и (555) и из предыдущих дифференциальных формул *первого рода*, широта и долгота точки кривой  $ab$  отличались бы от широты и долготы *соответствующей* точки кривой  $a_0b_0$  на величину, пропорциональную расстоянию  $s_1$  рассматриваемой точки от начала кривой плюс уклонение отвеса (по широте или соответственно по долготу) в начальной точке кривой, т. е. в случае эллиптичности кривой  $ab$  мы имеем

$$\zeta = \zeta_1 + s_1 k, \quad (606)$$

причем под  $\zeta$  понимается слагающая уклонения отвеса в плоскости  $AaB$  в точке кривой  $ab$ , отстоящей от  $a$  на расстояние  $s_1$ ; под  $\zeta_1$  понимается слагающая уклонения отвеса в точке  $a$ , а под  $k$  — коэффициент пропорциональности. Если значение  $\zeta$  для точки  $b$ , которое назовем через  $\zeta_2$ , известно, то конечно

$$k = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{s}. \quad (607)$$

и

$$\zeta = \zeta_1 + \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{s} s_1.$$

Все вышеизложенное можно представить такими заключениями:

а) если слагающая уклонения отвеса изменяется вдоль дуги  $ab$  (или вдоль дуги  $Ab_1$ ) (черт. 102) линейно, т. е. согласно условию (606), то тогда эти дуги являются эллиптическими, которые на основании (605) можно считать при выводе разности высот за дуги сферическими;

б) тогда, т. е. при соблюдении (606), обычная формула двустороннего нивелирования

$$H_2 - H_1 = s \left( 1 + \frac{H_2 + H_1}{2R} \right) \operatorname{tg} \frac{z_2 - z_1}{2} + \frac{s^2}{4R} (k_2 - k_1) - \frac{a_2 + i_2}{2} + \frac{a_1 + i_1}{2} \quad (608)$$

даст правильные результаты, если пренебречь непараллельностью уровенных поверхностей  $Ab_1$  и  $ab$ . Последнее влияние, однако, дает при  $H = 2000$  м и при  $s = 30$  км всего 0,07 м, т. е. может быть в тригонометрическом нивелировании пренебрегаемо;

в) при соблюдении того же условия (606), в результате одностороннего нивелирования будет входить добавочная погрешность из-за неверности принимаемой кривизны уровенной поверхности; эта погрешность может иметь среднее значение около  $\pm 0,4$  м при  $s = 30$  км.

В действительности условие линейного изменения  $\zeta$  выполняется далеко не всегда даже в равнинных районах, в районах же с крупным рельефом и в особенности в горных районах оно всегда не имеет места и грубо нарушается. Оценить влияние несоблюдения условия (606) на вывод высот  $H_2$  и  $H_1$  над уровнем моря из тригонометрического нивелирования очень затруднительно, но несомненно, что это влияние будет более крупным (почти в два раза) при нивелировании *одностороннем*, чем при *двустороннем*. Мы можем лишь сказать, что:

г) влияние уклонений отвесных линий, и именно влияние неравномерного изменения величины  $\zeta$  вдоль линии  $AB$ , может заметно понизить точность результатов из тригонометрического нивелирования, внося в эти результаты, даже при двустороннем нивелировании, добавочную погрешность может быть порядка (в среднем) 0,5—1,0 м.

В § 75 мы имеем формулу (579)

$$Z - z = \xi \cos A + \eta \sin A.$$

Применяя эту формулу к точкам  $A$  и  $B$ , мы получим в них  $Z_1$  и  $Z_2$ , т. е. зенитные расстояния, отнесенные к нормальям к поверхности референц-эллипсоида. Поэтому с полной строгостью напомним

$$H^{\circ}_2 - H^{\circ}_1 = s \left( 1 + \frac{H^{\circ}_2 + H^{\circ}_1}{2R} \right) \operatorname{tg} \frac{Z_2 - Z_1}{2} + s^2 \frac{k_2 - k_1}{4R} - \\ - \frac{a_2 + i_2}{2} + \frac{a_1 + i_1}{2}. \quad (609)$$

Следовательно, вычитая (608) из (609), получили бы

$$(H^{\circ}_2 - H^{\circ}_1) - (H_2 - H_1) = s \left( 1 + \frac{H_2 + H_1}{2R} \right) \left\{ \operatorname{tg} \frac{Z_2 - Z_1}{2} - \operatorname{tg} \frac{z_2 - z_1}{2} \right\}, \\ N_2 - N_1 = s \frac{(Z_2 - z_2)'' - (Z_1 - z_1)'',}{2\rho''},$$

$$N_2 - N_1 = \frac{s}{2\rho''} [-\eta_2 \sin A_{ab} - \xi_2 \cos A_{ab} - \eta_1 \sin A_{ab} - \xi_1 \cos A_{ab}], \quad (610)$$

причем в (610) принято

$$A_{ba} = A_{ab} \pm 180^{\circ}$$

или окончательно

$$N_2 - N_1 = -\frac{s}{2\rho''} [(\eta_2 + \eta_1)'' \sin A_{ab} + (\xi_1 + \xi_2)'' \cos A_{ab}]. \quad (611)$$

Формула (611) получена, конечно, при предположении, что условие (606) выполнено. Понятно, что вследствие несоблюдения этого условия в действительности,  $N_2 - N_1$  будет получено с довольно крупной ошибкой — именно, может быть порядка  $\pm 0,5$ — $1,0$  м.

Формула (611) представляет, тем не менее, определенный интерес: она является формулой, дающей превышения геоида над референц-эллипсоидом из астрономических определений на пунктах триангуляции, с пренебрежением поправкой  $E$  за непараллельность уровенных поверхностей  $Ab_1$  и  $ab$ . Точность результатов, даваемых формулой (611), конечно, можно назвать грубой по сравнению с точностью, даваемой астрономическим нивелированием или астрономо-гравиметрическим нивелированием при надлежащем проведении этих двух методов.

Далее, следует отметить, что малые сравнительно накопления величин  $(N_2 - N_1)$  обуславливаются довольно заметными нарушениями правильности строения земной коры; об этом говорилось уже в § 74: весь массив Кавказского хребта обуславливает накопление  $N_2 - N_1$  около 25—30 м; подземные залегания в подмосковном районе дают накопление  $N_2 - N_1$  всего в 1,5 м. Другими словами, ряд запросов геологии, геофизики и самой геодезии требует весьма тщательного определения изменений величины  $N$ , точного выявления мелких волн геоида. С точки зрения этих запросов, ошибочность результатов, даваемых формулой (611), будет совсем неприемлемой. Однако изучение геоида в общем и целом, а также запросы геодезии в отношении точной обработки больших триангуляций (см. главу XI), удовлетворятся и точностью результатов по формуле (611).

Отсюда вытекает, что при отсутствии возможностей выполнения по рядам триангуляции астрономического нивелирования или астрономо-гравиметрического нивелирования явится очень полезным и важным определение астрономических широт и долгот на пунктах триангуляции I класса — примерно через 30 км по ряду триангуляции. Тогда, применяя (611), мы получим высоты геоида над референц-эллипсоидом, дающие

форму геоида, хотя и с некоторыми недочетами, но на значительной территории, что является очень важным с общенаучной точки зрения; кроме того, получим высоты  $N$ , нужные для надлежащей обработки триангуляции, что уже было видно из § 76. Мы приводим в табл. 5 результаты астрономо-гравиметрического нивелирования, исполненного по ряду Пулково — Орша, и результаты применения формулы (611) по тому же ряду, с расстояниями между смежными астрономическими пунктами в среднем через 40—50 км; основные данные таблицы 5 заимствованы из статьи М. С. Молоденского «Астрономо-гравиметрическое нивелирование по 51-й и 55-й параллелям от 30-го до 56-го меридиана» (ЦНИИГАиК, Сборник № 3, Исследования по гравиметрии, 1939 г.).

Таблица 5

Звено	Астрономо-гравиметрические ( $N_2 - N_1$ ) см	$(N_2 - N_1)$ по (611)	Разность в сантиметрах	Высоты, отнесенные к пункту 16	
				астрономо-гравиметрические в сантиметрах	по (611) в сантиметрах
16—255	— 58	— 43	— 15	— 58	— 43
255—257	— 66	— 62	— 4	— 124	— 105
257—259	— 16	+ 5	— 21	— 140	— 100
259—261	+136	+ 99	+ 37	— 4	— 1
261—263	+ 87	+ 94	— 7	+ 83	+ 93
263—265	+ 63	+ 71	— 8	+ 146	+ 164
265—253	+ 14	+ 5	+ 9	+ 160	+ 169
253—251	— 11	— 15	+ 4	+ 149	+ 154
251—249	— 17	— 16	— 1	+ 132	+ 138
		Сумма	— 6		

Как видно из таблицы 5, погрешность  $N$ , выведенного по формуле (611), не превышает 0,4 м. Конечно, это объясняется довольно плавным профилем геоида на этом участке Пулково — Орша. Однако все-таки приведенный материал показывает, что в ряде случаев применения формулы (611), т. е. вывод высот геоида из результатов определения астрономических широт и долгот на пунктах триангуляционных рядов может приводить к хорошим результатам. Во всяком случае, этот метод должен быть признан актуальным при проложении рядов триангуляции I класса в Сибири, т. е. по рекам Оби, Енисею, Лене, Колыме, и между этими реками.

Отметим здесь, что по (587)

$$N_2 - N_1 = \int \zeta ds - E.$$

Если мы примем, что уравнение (606) имеет место, то

$$\int \zeta ds = \zeta_1 s + \frac{s^2}{2} k$$

или, подставляя  $k$  по (607), получим

$$\int \zeta ds = \zeta_1 s + \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} s = \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2} s.$$

Таким образом,

$$N_2 - N_1 = s \frac{\zeta''_1 + \zeta''_2}{2\rho''} - E. \quad (612)$$

Если пренебречь величиной  $E$ , то мы получили в (612) полное совпадение с (610) и (611), так как

$$\zeta_1 = -(\eta_1 \sin A_{ab} + \xi_1 \cos A_{ab}),$$

$$\zeta_2 = -(\eta_2 \sin A_{ab} + \xi_2 \cos A_{ab}).$$

Этим подтверждается правильность вывода (610) и (611) и неучет в них величины  $E$ .

Так как

$$N_2 - N_1 = (H^\circ_2 - H_2) - (H^\circ_1 - H_1) = (H^\circ_2 - H^\circ_1) - (H_2 - H_1), \quad (613)$$

то, определив  $(H^\circ_2 - H^\circ_1)$  по формуле (609)

$$\begin{aligned} H^\circ_2 - H^\circ_1 = s \left( 1 + \frac{H^\circ_2 + H^\circ_1}{2R} \right) \operatorname{tg} \frac{Z_2 - Z_1}{2} + \\ + s^2 \frac{k_2 - k_1}{4R} - \frac{a_2 + i_2}{2} + \frac{a_1 + i_1}{2}, \end{aligned}$$

мы можем определить  $N_2 - N_1$ , если допустим, что  $H_2$  и  $H_1$  определены из геометрического нивелирования — точного или высокоточного. Конечно,  $H^\circ_2 - H^\circ_1$  будет искажено тем, что в формуле (609) мы, как это делают всегда при тригонометрическом двустороннем нивелировании, положим  $k_2 = k_1$  и вовсе отбросим член  $s^2 \frac{k_2 - k_1}{4R}$ ; средняя ошибка  $(H^\circ_2 - H^\circ_1)$  будет из-за этого порядка  $\pm 2$  м при  $s = 30$  км. Эта ошибка будет вообще крупнее ошибочности формулы (611) из-за невыполнения условия (606).

Применение формул (613) и (609) для исследования фигуры геоида заключается в следующем:

1) на пунктах триангуляции I класса, и именно на каждом пункте, определяются астрономические широты и долготы;

2) все пункты триангуляции I класса связываются геометрическим нивелированием;

3) по всем сторонам треугольников триангуляции выполняются измерения зенитных расстояний, и именно выполняется двустороннее тригонометрическое нивелирование;

4) выполняются гравиметрические определения в размере, необходимом для надежного определения ортометрических поправок нивелировки, или, что все равно, для учета влияния непараллельности уровней поверхностей на результаты геометрического нивелирования.

Выполнение пункта «1» приводит к возможности вывести величины  $Z$  по формуле

$$Z = z + \eta \sin A + \xi \cos A.$$

Выполнение пункта «3» завершается вычислением  $H^\circ_2 - H^\circ_1$  по формуле (609). Выполнение пунктов «2» и «4» приводит к получению

$H_2 - H_1$ , после чего получается возможность вывода  $N_2 - N_1$  по формуле (613). Если референц-эллипсоид выведен в отношении размеров и сжатия, а также ориентировки по широте и азимуту, как *наилучше подходящий к геоиду в данной стране* (см. главу X), то приняв в некоторой точке  $K$ , как *неизвестное*, высоту  $H_K^\circ$ , получаем

$$N_K = H_K^\circ - H_K \quad (614)$$

Имея  $(N_2 - N_1)$  и исходя из  $N_K$ , получаем суммированием все  $N$ , которые выразятся через неизвестное  $H_K^\circ$ , по формуле

$$N_P = (H_K^\circ - H_K) + \left( \sum (N_2 - N_1) \text{ по ходу от } K \text{ до } P \right) \quad (615)$$

Положив для всех точек триангуляции

$$\Sigma N = 0,$$

из этого уравнения выведем  $H_K^\circ$ , и после этого окончательно получим все величины  $N$ .

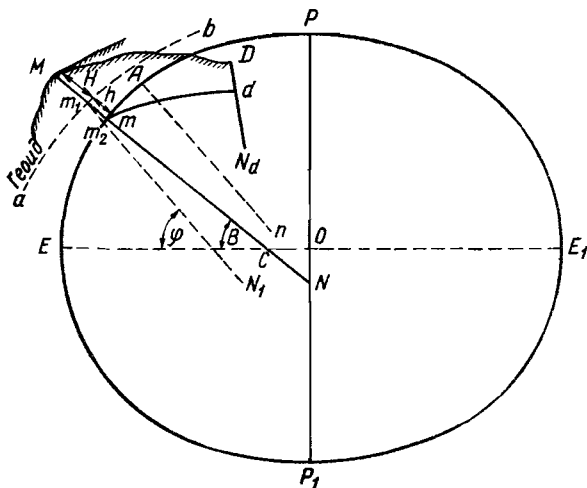
Если референц-эллипсоид взят более или менее произвольно, то, пользуясь астрономическими определениями в триангуляции, предполагаемой распространяющейся на значительную территорию, переходим от этого эллипсоида к эллипсоиду, наилучше подходящему к геоиду для данной страны (этот вопрос рассматривается в главе X), и только после этого делаем вычисления  $Z$  и вычисления по формуле (609). Представляется, что этот очень громоздкий метод вывода величин  $N$  сопровождается ошибками из-за неправильных предположений о действии рефракции в двустороннем тригонометрическом нивелировании, *большими*, чем ошибки формулы (611) из-за неверности предположения, что отклонения отвеса вдоль стороны триангуляции изменяются линейно. При определении астрономических широт и долгот на каждом пункте триангуляции, мы, конечно, по методу, представленному формулой (611), выведем величину  $(N_2 - N_1)$  точнее, без притягивания к этому тригонометрического нивелирования и точного нивелирования; при этом влияние непараллельности  $E$  уровнейных поверхностей можно учесть так, как это делается при обработке точного нивелирования, т. е. принимая во внимание только изменения нормальной силы тяжести с широтой и высотой. После получения  $(N_2 - N_1)$  применим (614) и (615), если за референц-эллипсоид при выводе  $(N_2 - N_1)$  был принят наиболее подходящий к геоиду в данной стране эллипсоид (и по размерам и по его ориентировке). Иначе придется, до вывода  $(N_2 - N_1)$  по (611), сделать вывод такого референц-эллипсоида, как изложено в главе X.

Понятно, что для получения представления о форме геоида нам необязательно величины  $N$  относить к наилучше подходящему эллипсоиду. Поэтому действия по применению формул (614) и (615) могут остаться и без выполнения.

## § 80. Об ориентировании референц-эллипсоида по астрономическим данным

Этот вопрос уже излагался в Руководстве по высшей геодезии, часть I. Однако и для удобства пользования книгой и для добавочного освещения некоторых частей вопроса, следует этот вопрос изложить вновь. Допустим, что на черт. 104 точка  $M$  — геодезическая точка, принадлежащая земной поверхности и принимаемая за начальную при вычислении триангуляции данной страны;  $EPE_1$  — сечение *общего* земного эллипсоида меридианной плоскостью точки  $M$ ;  $PP_1$  — малая ось

этого эллипсоида;  $MN$  — нормаль в  $M$  к поверхности общего земного эллипсоида; прямая  $EE_1$  — пересечение экватора эллипсоида с плоскостью меридиана  $PMP_1N$ ; угол  $MCE$  равен, конечно, геодезической широте точки  $M$ , отнесенной к общему земному эллипсоиду; эту геодезическую широту, которую можно назвать *истинной*, обозначим через  $B$ . Сперва мы предположим, что отвесная линия точки  $M$  находится в плоскости геодезического меридиана  $PEP_1$ , т. е. предположим, что отклонение отвеса по долготе или в плоскости первого вертикала точки  $M$  равно нулю. Пусть точка  $m$  будет проекцией точки  $M$  на поверхность эллипсоида  $PEP_1$  нормалью к ней  $MN$ . Сечение геоида меридианной плоскостью  $PMN$  пусть будет представлено кривой  $am_1b$ , причем  $m_1$  находится в пересечении геоида нормалью  $MN$ . Назовем высоту  $Mm_1$  точки  $M$  над уровнем



Черт. 104

океана через  $H$ , отрезок  $m_1m$  — через  $h$ . Высоту  $H$  будем считать известной. Проведем в  $m_1$  отвесную линию  $m_1N_1$ ; астрономическую широту  $m_1$ , предполагаемую известной, обозначим через  $\varphi$ , которая, очевидно, и будет *приведенной* к уровню океана астрономической широтой точки  $M$ . Точка  $D$  (черт. 104) является смежной с  $M$  точкой триангуляции; проекция  $D$  на поверхность эллипсоида  $EPE_1$  нормалью к ней  $DN_d$  представляется точкой  $d$ ; в  $M$  на  $D$  определен астрономический азимут  $\alpha_{MD}$ ; кривая  $md$  есть нормальное сечение эллипсоида  $PEP_1$  плоскостью  $DMN$ . Азимут в  $m$  кривой  $md$  будет вычисляться по формуле (240)

$$\alpha'_{MD} = \alpha_{MD} + \frac{H_d}{M_1} \eta^2 \sin \alpha_{MD} \rho'' \left( \cos \alpha_{MD} - \frac{s}{2N_1} \operatorname{tg} B_m \right),$$

причем  $H_d$  — высота  $D$  над эллипсоидом  $PEP_1$ ;  $s$  — длина дуги  $md$ ;  $B_m$  — среднее из широт точек  $M$  и  $D$ ;  $M_1$  — меридианный радиус в  $m$ . Эллипсоид  $PEP_1$  нам неизвестен; однако для вычисления редукии азимута  $\alpha_{MD}$  за высоту  $H_d$  мы можем принять  $Dd$  не отличающимся от высоты точки  $D$  над уровнем океана — из-за этого сделаем в  $H_d$  ошибку, не превышающую  $\pm 50$  м, так как считаем  $M$  находящимся в обычном, не горном районе; эта ошибка приведет к ошибке в  $\alpha'$ , меньшей  $0'',003$ . Далее  $M_1$  можем взять по аргументу  $\varphi$  для эллипсоида Красовского и можем, кроме того, положить  $\operatorname{tg} B_m = \operatorname{tg} \varphi$ ;  $s$  будет длина стороны  $md$ , определенная из триангуляции

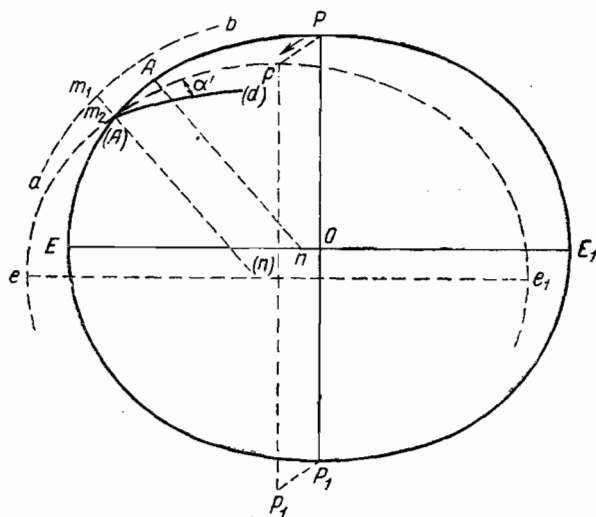


Допустим теперь, что выбранный нами референц-эллипсоид имеет размеры и сжатие, в точности совпадающие с таковыми же для общего земного эллипсоида, но *ориентирование его мы производим при помощи астрономической широты  $\varphi$  точки  $m_1$ , астрономического азимута  $\alpha'_{MD}$  и высоты  $H$  точки  $M$  над уровнем моря*; широту  $\varphi$  точки  $m_1$  можем считать совпадающей с астрономической широтой точки  $m_2$ , так как  $h$  — малая величина.

Отметим на меридианном эллипсе  $PEP_1$  точку  $A$ , геодезическая широта которой на общем земном эллипсоиде была бы равна астрономической широте  $\varphi$  точки  $m_2$ ; эта точка  $A$  будет удалена от  $m_2$  на меридианную дугу  $m_2A$ , длиной  $\frac{(\varphi - B)''}{\rho''} M_1 = -\frac{\xi'' M_1}{\rho''}$ , причем под  $M_1$  понимается, конечно, меридианный радиус в  $m_2$  (отношение  $\frac{M_1}{\rho''}$  равно примерно 31 м).

Если референц-эллипсоид ориентируется по *астрономической широте  $\varphi$* , то на нем геодезическая широта точки  $m_2$  должна быть равна этой астрономической широте  $\varphi$  точки  $m_2$ . Другими словами, на этом эллипсоиде с точкой  $m_2$  должна совпасть та его точка ( $A$ ), в которой нормаль к его поверхности делает с плоскостью его экватора угол, равный  $\varphi$ . Очевидно, мы для перехода от общего земного эллипсоида к референц-эллипсоиду должны вообразить *поступательное* перемещение первого эллипсоида по направлению  $Am_2$  и на величину хорды  $m_2A = \frac{\xi''}{\rho''} M_1$ . На черт. 105 пунктиром показано положение  $pee_1$  референц-эллипсоида, получающееся именно в результате поступательного перемещения эллипсоида  $PEP_1$  по направлению  $Am_2$  на величину хорды (или дуги)  $Am_2$ ; полюсы референц-эллипсоида находятся в  $p$  и  $p_1$ , причем  $Pp \nparallel P_1p_1 \nparallel Am_2$ . С точкой  $m_2$  совпадет указанная выше точка ( $A$ ) референц-эллипсоида или после сдвига эллипсоида  $PEP_1$  — точка  $A$  последнего; нормаль к референц-эллипсоиду в  $m_2$  совпадет с отвесной линией  $Mm_1m_2$  ( $n$ ). Для того чтобы меридианная плоскость точки ( $A$ ) на референц-эллипсоиде совпала с плоскостью астрономического меридиана точки  $M$  (черт. 104), которую мы приняли совпадающей с плоскостью геодезического меридиана точки  $M$  на общем земном эллипсоиде  $PEP_1$ , достаточно потребовать, чтобы *геодезический азимут* в  $M$  на точку  $D$  на референц-эллипсоиде был равен астрономическому азимуту  $\alpha_{MD}$ . Другими словами, нормальная плоскость ( $d$ ) ( $A$ ) ( $n$ ) на референц-эллипсоиде, имеющая на его поверхности в ( $A$ ) геодезический азимут  $\alpha'_{MD}$  (черт. 105), должна быть совмещена с вертикальной плоскостью  $dm_2N_1$  (черт. 104). Обычно при ориентировке референц-эллипсоида по *астрономическим* данным требуют, чтобы он касался в исходной точке  $m$  поверхности геоида. Очевидно, для этого придется дать эллипсоиду  $pee_1$  еще новое поступательное перемещение на величину  $h = m_2m_1$  вверх по отвесной линии  $m_2(n)$  или  $m_2N_1$ , после чего мы и получим окончательное положение референц-эллипсоида в земном теле. Понятно, что это положение будет вполне определенным, и притом при любых размерах референц-эллипсоида. В самом деле, на некотором (произвольном) меридианном эллипсе референц-эллипсоида, которому мы припишем геодезическую долготу, равную астрономической долготе  $\lambda$  точки  $M$ , положение точки ( $A$ ) и нормали в ней ( $A$ ) ( $n$ ) к этому референц-эллипсоиду вполне определяются заданной астрономической широтой  $\varphi$ . Совместив ( $A$ ) с  $m_2$  и ( $A$ ) ( $n$ ) с  $MN_1$ , мы, конечно, оставляем еще возможными произвольные

повороты референц-эллипсоида около прямой  $MN$ , как около оси. Однако требование равенства геодезического азимута в  $M$  точки  $D$  на этом референц-эллипсоиде и астрономического азимута  $\alpha_{MD}$  той же линии, приводит к требованию совмещения нормальной плоскости  $(A)(n)(d)$  референц-эллипсоида с вертикальной плоскостью  $dm_2N_1$ , после чего уже всякая свобода вращения референц-эллипсоида около вертикальной линии  $Mm_2N_1$  прекращается; точное выполнение указанного требования равенства азимутов выполняется, однако после поступательного движения референц-эллипсоида по нормали  $m_2(n)$  или, все равно, по отвесной линии  $MN_1$  на отрезок  $h = m_2m_1$ . В результате мы имеем: 1) определенную точку  $(A)$  референц-эллипсоида совмещенной с известной нам в земном теле проекцией  $m_1$  точки  $M$  на уровень океана (точка  $M$  известна, отвесная линия в ней — также, и отрезок  $Mm_1 = H$  определен из нивелировок); 2) определенную вполне нормаль  $(A)(n)$



Черт. 105

к референц-эллипсоиду совмещенной с отвесной линией  $MN_1$ ; 3) определенную вполне плоскость геодезического меридиана на референц-эллипсоиде в точке  $(A)$ , совмещенной с плоскостью истинного или астрономического меридиана точки  $M$ , устанавливаемой астрономическими наблюдениями. Таким образом, одна точка  $(A)$  референц-эллипсоида, нормаль в ней  $(A)(n)$  к его поверхности, и плоскость меридианного эллипса в этой же точке  $(A)$  совпадают с данной точкой  $m_1$  Земли, ее отвесной линией  $m_1N_1$  и известной плоскостью астрономического меридиана точки  $m_1$  или, что все равно, точки  $M$ ; очевидно, положение референц-эллипсоида в земном теле после этого вполне закреплено и известно — мы могли бы инструментально его поверхность проложить в земном теле.

Понятно, что малая ось  $pp_1$  референц-эллипсоида будет параллельна оси вращения Земли, но центр этого эллипсоида не совпадет с центром тяжести Земли или с центром общего земного эллипсоида: расстояние между этими центрами двух эллипсоидов (референц и общего) обусловлено размерами смещений  $m_2A$  и  $m_2m_1$ , т. е. абсолютным уклонением  $\xi$  отвеса в меридиане и отступлением по высоте геонда от общего земного эллипсоида в точке  $M$ . Черт. 105 дает понятие о характере смещений

референц-эллипсоида относительно общего земного эллипсоида — на них мы еще остановимся в следующем параграфе.

Мы предполагали, что в точке  $M$  абсолютное уклонение отвеса по долготе или в первом вертикале равно нулю. В действительности это не имеет места и поэтому отвесная линия  $MN_1$  (черт. 104) не лежит в плоскости меридиана  $Pm_1EP_1$  общего земного эллипсоида. В этом общем случае, мы должны точку  $A$  черт. 104 переместить по сечению ее первого вертикала в положение  $A_1$  на величину  $\frac{\eta N_1}{\rho''}$ , где  $\eta$  — абсолютное уклонение отвеса в первом вертикале для точки  $M$ , а  $N_1$  — радиус первого вертикала в  $m_2$ . Следовательно, для перехода от общего эллипсоида к референц-эллипсоиду мы должны вообразить поступательное перемещение эллипсоида  $PEP_1$  по направлению хорды  $A_1m_2$  на величину

$\sqrt{\left(\frac{\xi''}{\rho''}\right)^2 M_1^2 + \left(\frac{\eta''}{\rho''}\right)^2 N_1^2}$ . Тогда плоскость меридиана общего земного эллипсоида, имеющая на нем геодезическую долготу  $\lambda + \eta \sec \varphi$ , совместится с плоскостью астрономического меридиана точки  $M$ , а нормаль в  $A_1$  к перемещенному общему эллипсоиду совместится с отвесной линией  $MN_1$ . Таким образом, референц-эллипсоид в точке  $m_1$  будет смещен по отношению к общему эллипсоиду: по высоте — на  $h = m_1m_2$ ; в плоскости меридиана  $M$ , по направлению горизонтальной линии в ней, — на  $-\frac{\xi''}{\rho''} M_1$ , в плоскости первого вертикала точки  $M$ , по направлению

горизонтальной линии в ней, — на  $-\frac{\eta}{\rho''} N_1$ . Так как на референц-эллипсоиде в  $M$  геодезические азимуты равны астрономическим, то, следовательно, слагающая  $\eta$  относительного уклонения отвеса в точке  $M$  будет равна нулю, а поэтому, как следствие, геодезическая долгота в  $M$  на референц-эллипсоиде должна быть равной астрономической долготы.

Допустим, что в исходной широте  $\varphi$  и в исходном азимуте  $\alpha_{MD}$  имеем погрешности  $\delta\varphi$  и  $\delta\alpha$ ; как эти погрешности скажутся на ориентировании референц-эллипсоида? Напишем соотношения

$$B = \varphi + \delta\varphi - \xi,$$

$$A_{MD} = \alpha_{MD} - \eta \operatorname{tg} \varphi + \delta\alpha,$$

в которых под  $B$  и  $A_{MD}$  будем понимать истинные, т. е. отнесенные к поверхности общего эллипсоида и свободные притом от погрешностей, широту и азимут. Неучитываемое  $\delta\varphi$ , очевидно, перекладывается на  $\xi$ ; другими словами, сдвиг референц-эллипсоида в направлении горизонтальной прямой в  $M$ , лежащей в плоскости ее меридиана, будет не  $\frac{\xi''}{\rho''} M_1$ , а  $\frac{(\xi'' - \delta\varphi)}{\rho''} M_1$ . После этого сдвига нормаль к эллипсоиду в  $M$  не совпадет с отвесной линией  $MN_1$  (черт. 104) на угол  $\delta\varphi$ , и, очевидно, принятое нами в дальнейшем равенства геодезической широты в  $M$  с наблюдаемой астрономической широтой  $\varphi$  в этой точке равносильно добавочному повороту референц-эллипсоида около точки  $M$  и в плоскости меридиана точки  $M$  на угол  $\delta\varphi$ , так что параллельность малой оси референц-эллипсоида и оси вращения Земли в этой меридианной плоскости будет нарушена на угол  $\delta\varphi$ . Аналогично будет влияние ошибки  $\delta\alpha$  в азимуте: поступательный сдвиг референц-эллипсоида относительно общего эллипсоида по направлению горизонтальной прямой в плоскости первого вертикала точки  $M$  будет не  $\frac{\eta N_1}{\rho''}$ , а  $\frac{(\eta - \delta\alpha \operatorname{ctg} \varphi) N_1}{\rho''}$ ,

и, кроме того, наличие  $\delta\alpha$  вызовет поворот меридианной плоскости

референц-эллипсоида точки  $M$  на угол  $\delta\alpha$  около отвесной линии  $MM_1$ , так что совпадение этой плоскости с плоскостью астрономического меридиана  $M$  вызовет угол между малой осью эллипсоида и осью вращения Земли, лежащей в плоскости, перпендикулярной к меридиану точки  $M$ , и равный  $\delta\alpha \cos \varphi$ . Следовательно, ошибки определений астрономических элементов в исходном пункте  $M$  обуславливают некоторую (небольшую) непараллельность малой оси референц-эллипсоида с осью вращения Земли. Очевидно, что эти астрономические элементы должны быть определены с величайшей точностью, если мы ориентируем по одним этим астрономическим элементам триангуляцию в некотором исходном пункте ее. Если исходный пункт совмещается с некоторой астрономической обсерваторией, то это требование выполняется в отношении широты  $\varphi$ , но условия определения азимута как раз на астрономических обсерваториях нередко совсем не обеспечивают хорошей точности вывода азимута.

В зависимости от того, каковы размеры абсолютного уклонения отвеса в выбранном исходном пункте, будут велики или малы сдвиги референц-эллипсоида относительно общего земного эллипсоида, а следовательно, — в целом и от геоида. Нужно помнить, что при  $\xi'' = 5''$  или  $\eta'' = 5''$  эти сдвиги будут равны 150 м; вблизи точки  $M$  они не вызовут смещения референц-эллипсоида по высоте, но для точек, отстоящих на  $90^\circ$  на земном шаре от точки  $M$ , сдвиг референц-эллипсоида по высоте достигает в меридиане точки  $M$  значения  $+\frac{\xi'' M_1}{\rho''}$  и  $-\frac{\xi'' M_1}{\rho''}$ ,

а в первом вертикале этой точки  $+\frac{\eta'' N_1}{\rho''}$  и  $-\frac{\eta'' N_1}{\rho''}$ , т. е. высотные сдвиги нашего референц-эллипсоида от общего эллипсоида или от геоида в целом могут из-за неудачного выбора точки  $M$  доходить до 150—200 м. Если в точке  $M$  высота геоида над общим эллипсоидом достаточно велика, то, конечно, условие касания в точке  $M$  референц-эллипсоида с геоидом вызовет заметное неверное положение по высоте референц-эллипсоида, которое может быть вообще порядка нескольких десятков метров. Таким образом, следует ожидать, что рассматриваемое ориентирование референц-эллипсоида может обуславливать заметное неверное положение его относительно геоида. Неверность принятых размеров и сжатия референц-эллипсоида будут в свою очередь вызывать заметные отступления его поверхности от поверхности общего земного эллипсоида или в целом от геоида. Об этих отступлениях мы будем говорить в следующем параграфе. Важно отметить, что два референц-эллипсоида, имеющие одну и ту же большую полуось и одну и то же сжатие, но установленные по астрономическим данным в двух различных пунктах  $M$  и  $Q$ , будут занимать различные положения в теле Земли; различие положений этих эллипсоидов будет обусловлено различием сдвигов того и другого из них относительно общего земного эллипсоида, обусловленных абсолютными уклонениями отвеса в точках  $M$  и  $Q$  и высотами  $h$  геоида над общим эллипсоидом в тех же точках, и, кроме того, различием размеров и сжатия этих референц-эллипсоидов и таковых же общего земного эллипсоида, а также различием широт точек  $M$  и  $Q$ . Так как малые оси обоих референц-эллипсоидов между собой параллельны оси вращения Земли, то для совпадения положения этих эллипсоидов в теле Земли, или просто для их совпадения, достаточно было бы потребовать совпадения их центров.

Возьмем систему прямоугольных осей координат с началом в центре общего земного эллипсоида, с осью  $z$ , направленной по оси вращения

Земли, с плоскостью  $zox$ , проходящей через точку  $M$ . Мы могли бы в этой системе координат (см. следующий параграф) написать уравнения для координат центра  $x_1, y_1, z_1$  референц-эллипсоида, установленного по астрономическим данным в точке  $M$ , причем получили бы

$$\begin{aligned}x_1 &= f_1(\xi_1, \eta_1, h_1, \Delta a, \Delta \alpha); \\y_1 &= f_2(\xi_1, \eta_1, h_1, \Delta a, \Delta \alpha); \\z_1 &= f_3(\xi_1, \eta_1, h_1, \Delta a, \Delta \alpha),\end{aligned}$$

причем в этих уравнениях  $\xi_1, \eta_1, h_1$  относятся к точке  $M$ , а  $\Delta a$  и  $(\Delta \alpha)$  представляют различия соответственно большой полуоси и сжатия общего эллипсоида от таковых же для нашего референц-эллипсоида. В той же системе для координат  $x_2, y_2, z_2$  центра эллипсоида, установленного по астрономическим данным в точке  $Q$ , мы могли бы составить уравнения

$$\begin{aligned}x_2 &= \varphi_1(\xi_2, \eta_2, h_2, \Delta a, \Delta \alpha); \\y_2 &= \varphi_2(\xi_2, \eta_2, h_2, \Delta a, \Delta \alpha); \\z_2 &= \varphi_3(\xi_2, \eta_2, h_2, \Delta a, \Delta \alpha).\end{aligned}$$

Выполнение условий

$$\begin{aligned}x_1 &= x_2, \\y_1 &= y_2, \\z_1 &= z_2\end{aligned}$$

приводило бы к совпадению центров обоих референц-эллипсоидов и установило бы связь между  $\xi_1, \eta_1, h_1, \xi_2, \eta_2, h_2$  через  $\Delta a$  и  $(\Delta \alpha)$ . Пользуясь тремя условиями, мы получили бы

$$\left. \begin{aligned}\xi_2 &= \psi_1(\xi_1, \eta_1, h_1, \Delta a, \Delta \alpha) \\ \eta_2 &= \psi_2(\xi_1, \eta_1, h_1, \Delta a, \Delta \alpha) \\ h_2 &= \psi_3(\xi_1, \eta_1, h_1, \Delta a, \Delta \alpha)\end{aligned} \right\}. \quad (616)$$

Но слагающие  $\xi_2$  и  $\eta_2$  абсолютного отклонения отвеса в точке  $Q$ , равно как и  $h_2$ , никак не могут быть функциями произвольных  $\Delta a$  и  $(\Delta \alpha)$ , которые непременно войдут в написанные выше функции  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ , следовательно, уравнения (616) *удовлетворяться не могут*. Величины  $\xi_2, \eta_2, h_2$  имеют в точке  $Q$  определенные, конечно, значения, как и  $\xi_1, \eta_1$  и  $h_1$  в точке  $M$ ; связь между теми и другими вообще можно было бы установить, если бы мы могли аналитически представить уравнение геоида. Но, конечно, нельзя эту связь устанавливать из условия совпадения центров двух эллипсоидов, притом с произвольно выбранными размерами и сжатием. Таким образом, *два наших референц-эллипсоида неизбежно занимают различные положения в теле Земли*. Важно также еще отметить, что различие геодезических координат некоторой точки  $T$  земной поверхности относительно двух референц-эллипсоидов, имеющих одну и ту же большую полуось и одно и то же сжатие, но ориентированных по астрономическим данным в различных исходных пунктах  $M$  и  $Q$ , будет также обусловлено действием величин  $\xi_1, \eta_1, h_1, \xi_2, \eta_2, h_2$  и различием большой полуоси и сжатия этих эллипсоидов от соответственно

большой полуоси и сжатия общего земного эллипсоида. Если назовем эти различия в большой полуоси через  $\Delta a$  и в сжатии — через  $(\Delta \alpha)$ , то

$$\left. \begin{aligned} \Delta B_T^M &= \left( \frac{dB}{da} \right)^{M.T} \Delta a + \left( \frac{dB}{d\alpha} \right)^{M.T} (\Delta \alpha) \\ \Delta L_T^M &= \left( \frac{dL}{da} \right)^{M.T} \Delta a + \left( \frac{dL}{d\alpha} \right)^{M.T} (\Delta \alpha) \end{aligned} \right\}, \quad (617)$$

причем под  $\Delta B_T^M$  и  $\Delta L_T^M$  понимаются различия геодезических координат в  $T$ , отнесенных к референц-эллипсоиду, установленному по астрономическим данным в точке  $M$ , и к общему эллипсоиду; эти различия учитывают только влияние  $\Delta a$  и  $(\Delta \alpha)$ , полагая, следовательно,  $\xi_1 = 0$ ,  $\eta_1 = 0$ ,  $h_1 = 0$ . Коэффициенты  $\left( \frac{dB}{da} \right)^{M.T}$ ,  $\left( \frac{dL}{da} \right)^{M.T}$ ,  $\left( \frac{dB}{d\alpha} \right)^{M.T}$ ,  $\left( \frac{dL}{d\alpha} \right)^{M.T}$  относятся к геодезической линии  $MT$ , направленной от  $M$  к  $T$ ; при расстоянии  $MT$ , не превышающем 1000 км, их можно взять по формулам (554) и (555) до 0",01.

Далее мы можем написать

$$\left. \begin{aligned} \Delta B_T^Q &= \left( \frac{dB}{da} \right)^{Q.T} \Delta a + \left( \frac{dB}{d\alpha} \right)^{Q.T} (\Delta \alpha) \\ \Delta L_T^Q &= \left( \frac{dL}{da} \right)^{Q.T} \Delta a + \left( \frac{dL}{d\alpha} \right)^{Q.T} (\Delta \alpha) \end{aligned} \right\}, \quad (618)$$

причем в (618) под  $\Delta B_T^Q$  и  $\Delta L_T^Q$  понимаются различия геодезических координат в  $T$ , отнесенных к референц-эллипсоиду, ориентированному по точке  $Q$ , и к общему земному эллипсоиду, учитывая при этом лишь влияние  $\Delta a$  и  $(\Delta \alpha)$ , и полагая, следовательно,  $\xi_2 = 0$ ,  $\eta_2 = 0$ ,  $h_2 = 0$ ; коэффициенты  $\left( \frac{dB}{da} \right)^{Q.T}$ ,  $\left( \frac{dL}{da} \right)^{Q.T}$ ,  $\left( \frac{dB}{d\alpha} \right)^{Q.T}$  и  $\left( \frac{dL}{d\alpha} \right)^{Q.T}$  относятся к геодезической линии  $QT$ , направленной от  $Q$  к  $T$ . Вычитая из  $\Delta B_T^M$  величину  $\Delta B_T^Q$ , получим различие широты точки  $T$ , отнесенной к эллипсоиду, ориентированному по точке  $M$ , от широты той же точки, отнесенной ко второму референц-эллипсоиду; разность  $\Delta L_T^M$  и  $\Delta L_T^Q$  даст различие геодезических долгот точки  $T$ , отнесенных к тому и другому референц-эллипсоиду. По формулам (617) и (618) мы можем оценить величины  $\Delta B_T$  и  $\Delta L_T$  только тогда, когда знаем  $\Delta a$  и  $(\Delta \alpha)$ , т. е. когда уже располагаем надежно выведенными размерами и сжатием общего земного эллипсоида, но, конечно, в действительности эта оценка  $\Delta B_T$  и  $\Delta L_T$  будет всегда в той или иной степени искажена ошибками  $\Delta a$  и  $\Delta \alpha$ . Так, применяя вывод общего эллипсоида, сделанный проф. Ф. Н. Красовским, будем иметь  $\Delta B_T$  и  $\Delta L_T$  с ошибками порядка 1:100 000 от величин  $B_T - B_M$ ,  $L_T - L_M$ ,  $B_T - B_Q$ ,  $L_T - L_Q$ .

Только тогда, когда геодезическая сеть, вычисленная от исходного пункта  $M$ , приходит в соединение с геодезической сетью, вычисленной от исходного пункта в  $Q$ , мы получаем возможность по разности координат ряда *общих двум таким сетям* пунктов сообразить положение одного эллипсоида относительно другого, однако пренебрегая влиянием высот геоида над общим эллипсоидом в точках  $M$  и  $Q$ .

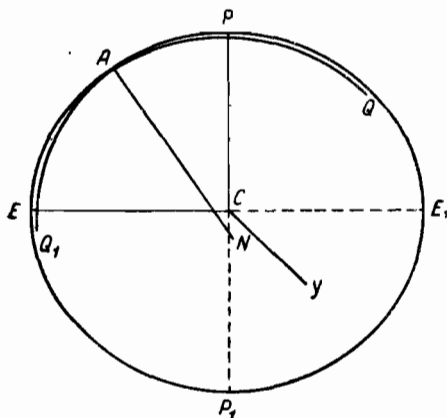
Отнесение различных частей государственной триангуляции к референц-эллипсоидам, имеющим одну и ту же большую полуось и одно и то же сжатие, но ориентированным по астрономическим данным в разных

исходных пунктах, равносильно введению в одном государстве *различных систем геодезических координат*. О последствиях существования таких различных систем координат уже было сказано в § 2; различие координат *общих пунктов* в этих различных системах может достигать нескольких сот метров, достигая даже и тысячи метров; очевидно, это различие систем будет сильно сказываться при смыканиях топографических съемок, когда рамки планшетов одной системы окажутся смещенными относительно рамок планшетов другой системы на несколько сот метров.

Понятно, что ориентирование эллипсоида, принимаемого для геодезических работ в данной обширной стране, должно выполняться не только по астрономическим данным в *каком-либо исходном пункте*. Этот вопрос будет рассмотрен в главе о градусных измерениях.

### § 81. Взаимное расположение наилучше подходящего эллипсоида и референц-эллипсоида, ориентированного по астрономическим данным

Допустим, что в данной стране при обработке триангуляций принят в качестве референц-эллипсоида эллипсоид  $PEP_1E$  (черт. 106) с большой полуосью  $a$  и малой полуосью  $b = a\sqrt{1-e^2}$ . Пусть этот референц-эллипсоид ориентирован в теле Земли при помощи астрономических данных в точке  $A$ , т. е. с принятием равенства геодезической широты, долготы и азимута соответственно астрономическим широте  $\varphi$ , долготе  $\lambda_0$  и астрономическому азимуту  $\alpha_0$  в точке  $A$ . Погрешности определения  $\varphi_0$ ,  $\lambda_0$  и  $\alpha_0$  будем считать равными нулю.



Черт. 106

В точке  $A$  пусть поверхность эллипсоида  $PEP_1E$  касается поверхности геоида. Эллипсоидом, наиболее подходящим к геоиду в пределах данной страны, будет называться такой, который при параллельности его малой оси с осью

вращения Земли дает наименьшую сумму квадратов отклонений по высоте его поверхности от поверхности геоида для нашей страны. Размеры полуосей этого эллипсоида назовем через

$$a_1 = a + \Delta a; \quad b_1 = b + \Delta b; \quad b_1 = a_1 \sqrt{1 - e_1^2}.$$

Взяв эллипсоид  $QAQ_1$  (черт. 106) с размерами полуосей  $a_1$  и  $b_1$ , ориентируем его в теле Земли по тем же данным  $\varphi_0$ ,  $\lambda_0$  и  $\alpha_0$  как и референц-эллипсоид  $PEP_1E$  с касанием его поверхности в  $A$  к поверхности геоида. Конечно, малая ось эллипсоида  $QAQ_1$  будет параллельна оси вращения Земли и параллельна оси  $PP_1$  референц-эллипсоида.

Возьмем начало координат в центре  $C$  эллипсоида  $PEP_1E$ . Направим ось  $x$  по большой оси  $CE$  меридианного эллипса  $PAPE_1$ , ось  $z$  — по малой его оси  $CP$ , а ось  $y$  — в плоскости экватора эллипсоида  $PEP_1E$  по перпендикуляру в  $C$  к плоскости меридиана точки  $A$ . Напишем еще

$$\left. \begin{aligned} e^2 &= 2(\alpha) - (\alpha)^2, & e_1^2 &= e^2 + 2(\alpha_1) - 2(\alpha) - [(\alpha_1)^2 - (\alpha)^2] \\ e_1^2 &= 2(\alpha_1) - (\alpha_1)^2, & ede &= (\Delta\alpha)[1 - (\alpha)] \end{aligned} \right\} \quad (619)$$

причем очевидно, что  $(\Delta\alpha)$  можно принять за поправку сжатия референц-эллипсоида.

Для точки  $A$ , отнесенной к эллипсоиду  $PEP_1E_1$ , имеем

$$x_A = \frac{a \cos \varphi_0}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}}; \quad y_A = 0; \quad z_A = \frac{a(1 - e^2) \sin \varphi_0}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}}.$$

Центр  $C_1$  эллипсоида  $QAQ_1$  будет лежать в той же плоскости  $PAEP_1$  и будет иметь такие координаты относительно осей  $x, y, z$

$$\begin{aligned} x_{c_1} &= - \left\{ \frac{\Delta a \cos \varphi_0}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}} + \frac{a \sin^2 \varphi_0 \cos \varphi_0}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_0)^{3/2}} [1 - (\alpha)] (\Delta\alpha) \right\}; \\ z_{c_1} &= - \left\{ \frac{\Delta a (1 - e^2) \sin \varphi_0}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}} - \frac{2a \sin \varphi_0}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}} \Delta\alpha + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a \sin^3 \varphi_0 (1 - e^2) [1 - (\alpha)]}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_0)^{3/2}} (\Delta\alpha) \right\}. \end{aligned}$$

Полагая

$$k_0 = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0},$$

напишем еще

$$\left. \begin{aligned} -x_{c_1} &= \frac{\Delta a \cos \varphi_0}{k_0} + \frac{a \sin^2 \varphi_0 \cos \varphi_0}{k_0^3} [1 - (\alpha)] (\Delta\alpha) \\ y_{c_1} &= 0 \\ -z_{c_1} &= \frac{(1 - e^2) \sin \varphi_0}{k_0} \Delta a - \frac{a \sin \varphi_0}{k_0^3} (1 + \cos^2 \varphi_0 - \\ &\quad - e^2 \sin^2 \varphi_0) [1 - (\alpha)] (\Delta\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (620)$$

Уравнение эллипсоида  $QAQ_1$  относительно осей  $x, y, z$  с началом координат в точке  $C$  напишется так

$$\frac{(x - x_{c_1})^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_1^2} + \frac{(z - z_{c_1})^2}{b_1^2} = 1. \quad (621)$$

Координаты некоторой точки  $B$  эллипсоида  $PEP_1E_1$ , имеющей широту  $B$  и долготу  $\omega$  относительно меридиана точки  $A$ , напишутся так

$$x_B = \frac{a \cos B \cos \omega}{k}, \quad y_B = \frac{a \cos B \sin \omega}{k}, \quad z_B = \frac{a(1 - e^2) \sin B}{k},$$

где

$$k = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}.$$

Если возьмем точку  $B'$ , принадлежащую эллипсоиду  $QAQ_1$  и лежащую на продолжении нормали в  $B$  к эллипсоиду  $PEP_1E_1$  в расстоянии от  $B$  по этой нормали, равном  $h'$ , то координаты  $B'$  будут равны

$$\left. \begin{aligned} x_{B'} &= x_B + h' \cos B \cos \omega \\ y_{B'} &= y_B + h' \cos B \sin \omega \\ z_{B'} &= z_B + h' \sin B \end{aligned} \right\} \quad (622)$$

В (622) величина  $h'$  положительна, если  $B'$  выше  $B$ .



Подставляя (622) в (621), получим

$$\frac{(x_B + h' \cos B \cos \omega - x_{c_1})^2}{a_1^2} + \frac{(y_B + h' \cos B \sin \omega)^2}{a_1^2} + \frac{(z_B + h' \sin B - z_{c_1})^2}{b_1^2} = 1.$$

Отсюда

$$(x_B + h' \cos B \cos \omega - x_{c_1})^2 + (y_B + h' \cos B \sin \omega)^2 + \frac{(a + \Delta a)^2}{(b + \Delta b)^2} (z_B + h' \sin B - z_{c_1})^2 = a^2 + 2a \Delta a + \Delta a^2.$$

Пренебрегая в дальнейшем вторыми степенями  $\Delta a$ ,  $h'$ ,  $x_c$ ,  $y_c$  и при изведениях  $h'x_{c_1}$ ,  $h'z_{c_1}$ , получим

$$x_B^2 + 2h' x_B \cos B \cos \omega - 2x_B x_{c_1} + y_B^2 + 2h' y_B \cos B \sin \omega + \frac{1}{1 - e^2} (z_B^2 + 2h' z_B \sin B - 2z_B z_{c_1}) = a^2 + 2a \Delta a.$$

Но

$$\frac{1}{1 - e^2} = \frac{1}{1 - e^2 - 2[1 - (\alpha)](\Delta \alpha)} = \frac{1}{1 - e^2} + \frac{2(\Delta \alpha)}{(1 - e^2)^2} [1 - (\alpha)],$$

$$x_B^2 + y_B^2 + \frac{z_B^2}{1 - e^2} = a^2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & h' x_B \cos B \cos \omega - x_B x_{c_1} + h' y_B \cos B \sin \omega + \frac{h' z_B \sin B}{1 - e^2} - \\ & - \frac{z_B z_{c_1}}{1 - e^2} + \frac{z_B^2 [1 - (\alpha) \Delta \alpha]}{(1 - e^2)^2} = a \Delta a; \\ & \frac{h' a \cos^2 B \cos^2 \omega}{k} + \frac{a \Delta a \cos \varphi_0 \cos B \cos \omega}{k_0} + \\ & + \frac{a^2 \sin^2 \varphi_0 \cos \varphi_0 \cos B \cos \omega}{k_0^3 k} [1 - (\alpha)] (\Delta \alpha) + \frac{h' a \cos^2 B \sin^2 \omega}{k} + \\ & + \frac{h' a \sin^2 B}{k} + \frac{a \Delta a \sin B \sin \varphi_0}{k k_0} (1 - e^2) - \frac{a^2 \sin \varphi_0 \sin B}{k k_0^3} (1 + \cos^2 \varphi_0 - \\ & - e^2 \sin^2 \varphi_0) \times [1 - (\alpha)] (\Delta \alpha) + \frac{a^2 \sin^2 B}{k^2} [1 - (\alpha)] (\Delta \alpha) = a \Delta a. \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} & \frac{h'}{k} + \frac{\Delta a}{k k_0} (\cos \varphi_0 \cos B \cos \omega + \sin B \sin \varphi_0 - e^2 \sin B \sin \varphi_0 - k k_0) + \\ & + \frac{a \sin^2 \varphi_0}{k k_0^3} \left[ \cos \varphi_0 \cos B \cos \omega - \frac{\sin B}{\sin \varphi_0} (1 + \cos^2 \varphi_0 - e^2 \sin^2 \varphi_0) + \right. \\ & \left. + \frac{\sin^2 B}{\sin^2 \varphi_0} \frac{k_0^3}{k} \right] [1 - (\alpha)] (\Delta \alpha) = 0. \end{aligned}$$

Наконец

$$h' = \frac{\Delta a}{k_0} [k k_0 - (\sin B \sin \varphi_0 + \cos B \cos \varphi_0 \cos \omega) + e^2 \sin B \sin \varphi_0] - \\ - \frac{a \sin^2 \varphi_0}{k_0^3} \left[ (\cos B \cos \varphi_0 \cos \omega + \sin B \sin \varphi_0) + e^2 \sin B \sin \varphi_0 - \right. \\ \left. - 2 \frac{\sin B}{\sin \varphi_0} + \frac{k_0^3}{k} \frac{\sin^2 B}{\sin^2 \varphi_0} \right] [1 - (\alpha)] (\Delta \alpha). \quad (623)$$

Вводя обозначение

$$\cos \psi = \sin B \sin \varphi_0 + \cos B \cos \varphi_0 \cos \omega, \quad (624)$$

напишем окончательно

$$h' = \left[ k - \frac{\cos \psi}{k_0} + e^2 \sin B \sin \varphi_0 \right] \Delta a - \frac{a \sin^2 \varphi_0}{k_0^3} \left[ \cos \psi + \right. \\ \left. + e^2 \sin B \sin \varphi_0 - \frac{\sin B}{\sin \varphi_0} \left( 2 - \frac{k_0^3}{k} \frac{\sin^2 B}{\sin^2 \varphi_0} \right) \right] [1 - (\alpha)] (\Delta \alpha). \quad (625)$$

Теперь допустим, что исходные в  $A$  координаты  $\varphi_0$  и  $\lambda_0$  должны иметь при переходе к наилучше подходящему эллипсоиду поправки  $\delta\varphi_0$  и  $\delta\lambda_0$ . Увеличение широты  $\varphi_0$  на  $\delta\varphi_0$  вызовет поступательный сдвиг эллипсоида  $PEP_1E_1$  на величину  $\frac{M_0 \delta\varphi_0}{\rho''}$  по направлению касательной в  $A$  к эллипсу  $PEP_1$  (черт. 106).

При этом координаты центра  $C$  изменятся на

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_0 &= + M_0 \sin \varphi_0 \frac{\delta\varphi_0''}{\rho''} \\ \Delta y_0 &= 0 \\ \Delta z_0 &= - M_0 \cos \varphi_0 \frac{\delta\varphi_0''}{\rho''} \end{aligned} \right\}. \quad (626)$$

Увеличение долготы на  $\delta\lambda_0$  обусловит поступательное движение эллипсоида  $PEP_1E_1$  на величину  $N_0 \cos \varphi_0 \frac{\delta\lambda_0''}{\rho''}$  по направлению касательной к эллипсоиду, лежащей в плоскости первого вертикала точки  $A$ , т. е. параллельно оси  $y$ -ков, но к западу.

Изменения координат точки  $C$ , обусловленные этим движением, будут

$$\begin{aligned} \Delta x'_0 &= 0, \\ \Delta y'_0 &= - N_0 \cos \varphi_0 \frac{\delta\lambda_0''}{\rho''}, \\ \Delta z'_0 &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в результате изменения  $\varphi_0$  и  $\lambda_0$ , новые координаты центра  $C_1$  эллипсоида будут

$$\begin{aligned} x_{c_1} &= M_0 \sin \varphi_0 \frac{\delta\varphi_0''}{\rho''}, \\ y_{c_1} &= - N_0 \cos \varphi_0 \frac{\delta\lambda_0''}{\rho''}, \\ z_{c_1} &= - M_0 \cos \varphi_0 \frac{\delta\varphi_0''}{\rho''}. \end{aligned}$$

Поэтому уравнение эллипсоида, отнесенного к прежним осям  $x, y, z$  с началом в точке  $C$ , но иначе ориентированного, напишется так

$$\frac{\left(x - M_0 \sin \varphi_0 \frac{\delta \varphi''_0}{\rho''}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(y + N_0 \cos \varphi_0 \frac{\delta \lambda''_0}{\rho''}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(z + M \cos \varphi_0 \frac{\delta \varphi''_0}{\rho''}\right)^2}{b^2} = 1. \quad (627)$$

Берем опять-таки две точки  $B$  и  $B'$ , принадлежащие одна эллипсоиду  $PAEP_1E_1$ , а другая — эллипсоиду, дающему (черт. 106) для  $A$  координаты  $\varphi_0 + \delta \varphi_0$  и  $\lambda_0 + \delta \lambda_0$ , причем  $BB' = h''$ , и  $B'$  лежит на нормали точки  $B$ ; тогда от (627) перейдем к следующему уравнению

$$\frac{\left(x_B + h'' \cos B \cos \omega - M_0 \sin \varphi_0 \frac{\delta \varphi''_0}{\rho''}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(y_B + h'' \cos B \sin \omega + N_0 \cos \varphi_0 \frac{\delta \lambda''_0}{\rho''}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(z_B + h'' \sin B + M_0 \cos \varphi_0 \frac{\delta \varphi''_0}{\rho''}\right)^2}{a^2(1 - e^2)} = 1.$$

Отсюда

$$2h'' x_B \cos B \cos \omega - 2x_B M_0 \sin \varphi_0 \frac{\delta \varphi''_0}{\rho''} + 2h'' y_B \cos B \sin \omega + 2N_0 y_B \cos \varphi_0 \frac{\delta \lambda''_0}{\rho''} + \frac{2h'' z_B \sin B + 2M_0 z_B \cos \varphi_0 \frac{\delta \varphi''_0}{\rho''}}{1 - e^2} = 0.$$

Или, подставляя значения  $x_B, y_B$  и  $z_B$ , выраженные через  $B$  и  $\omega$  получим

$$\frac{h'' \cos^2 B \cos^2 \omega}{k} - \frac{M_0 \sin \varphi_0 \cos B \cos \omega}{\rho'' k} \delta \varphi''_0 + \frac{h'' \cos^2 B \sin^2 \omega}{k} + \frac{N_0 \cos B \cos \varphi_0 \sin \omega}{\rho'' k} \delta \lambda''_0 + \frac{h'' \sin^2 B}{k} + \frac{M_0 \sin B \cos \varphi_0}{\rho'' k} \delta \varphi''_0 = 0;$$

$$h'' - \frac{M_0}{\rho''} (\sin \varphi_0 \cos B \cos \omega - \sin B \cos \varphi_0) \delta \varphi''_0 + \frac{N_0}{\rho''} \cos B \cos \varphi_0 \sin \omega \delta \lambda''_0 = 0. \quad (628)$$

Называя через  $A$  азимут с исходной точки  $A$  на точку с координатами  $B$  и  $\omega$ , напишем еще

$$h'' = -\frac{M_0}{\rho''} \sin \psi \cos A \delta \varphi''_0 - \frac{N_0 \cos \varphi_0}{\rho''} \sin \psi \sin A \delta \lambda''_0. \quad (629)$$

При этом  $\psi$  в (629) вычисляется по (624).

Если мы зададимся задачей определения эллипсоида, наилучшим образом подходящего к геоиду, то в исходном пункте  $A$  этот эллипсоид должен иметь некоторую надлежаще подобранную высоту  $h_0$  относительно  $A$ .

Перемещая поступательно эллипсоид  $PEP_1E_1$  на  $h_0$  (вверх) по направлению нормали  $NA$ , мы получим координаты его центра  $C_1$

$$x_{c_1} = h_0 \cos \varphi_0,$$

$$y_{c_1} = 0,$$

$$z_{c_1} = h_0 \sin \varphi_0.$$

Следовательно, уравнение сдвинутого по высоте эллипсоида в прежней системе координат будет таково

$$\frac{(x - h_0 \cos \varphi_0)^2 + y^2}{a^2} + \frac{(z - h_0 \sin \varphi_0)^2}{a^2 (1 - e^2)} = 1.$$

Применяя прежние рассуждения, напомним, обозначая через  $h'''$  сдвиг по высоте точки  $B$  с координатами  $B$  и  $\omega$ ,

$$\begin{aligned} \frac{(x_B + h''' \cos B \cos \omega - h_0 \cos \varphi_0)^2}{a^2} + \frac{(y_B + h''' \cos B \sin \omega)^2}{a^2} + \\ + \frac{(z_B + h''' \sin B - h_0 \sin \varphi_0)^2}{a^2 (1 - e^2)} = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h''' x_B \cos B \cos \omega - h_0 x_B \cos \varphi_0 + h''' y_B \cos B \sin \omega + \\ + \frac{h''' z_B \sin B}{(1 - e^2)} - \frac{h_0 z_B \sin \varphi_0}{1 - e^2} = 0; \end{aligned}$$

$$h''' - h_0 (\cos B \cos \varphi_0 \cos \omega + \sin B \sin \varphi_0) = 0;$$

$$h''' = \cos \psi h_0. \quad (630)$$

Складывая (625), (629) и (630), мы получим в виде суммы

$$h_r = h' + h'' + h'''$$

высоту точки наилучше подходящего к геоиду эллипсоида (и притом надлежаще ориентированного) над поверхностью референц-эллипсоида. Эта высота будет отличаться от высоты геоида над поверхностью референц-эллипсоида на величину  $\delta h$ , представляющую уклонение поверхности геоида от поверхности наилучше подходящего эллипсоида.

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} h_r = \left[ k - \frac{\cos \psi}{k_0} + e^2 \sin B \sin \varphi_0 \right] \Delta a - \frac{a_0 \sin^3 \varphi_0}{k_0^3} \left[ \cos \psi - \right. \\ \left. - \frac{\sin B}{\sin \varphi_0} \left( 2 - \frac{k_0^3}{k} \frac{\sin B}{\sin \varphi_0} \right) + e^2 \sin B \sin \varphi_0 \right] [1 - (\alpha)] (\Delta \alpha) - \\ - \frac{M_0}{\rho''} \sin \psi \cos A \delta \varphi_0 - \frac{N_0}{\rho''} \cos \varphi_0 \sin \psi \sin A \delta \lambda''_0 + \cos \psi h_0. \quad (631) \end{aligned}$$

Использование формулы (631) может прежде всего пойти по линии подсчета ожидаемых величин  $h_r$ , соответствующих ожидаемым значениям величин  $\Delta a$ ,  $(\Delta \alpha)$ ,  $\delta \varphi_0$ ,  $\delta \lambda_0$  и  $h_0$ , и, конечно, здесь можно прийти

к небезинтересным выводам. Так, мы теперь знаем, что эллипсоид Бесселя, ориентированный по Пулкову, имел большую полуось, уменьшенную на 800 м и даже несколько более. Принимая  $(\Delta\alpha)$ ,  $\delta\varphi_0$ ,  $\delta\lambda_0$  и  $h_0$  все равными нулю и  $\Delta a = 800$  м, мы получим

для районов Дальнего Востока при  $B = 50^\circ$  и  $\omega = 120^\circ$  . . .  $h^r = 390$  м.

для Южного Урала при  $B = 50^\circ$  и  $\omega = 30^\circ$  . . .  $h^r = 39$  м.

При  $\delta\lambda_0 = -4''$ ,  $\varphi_0 = 60^\circ$ ,  $\varphi = 52^\circ$  и  $\omega = 90^\circ$  значение члена  $-\frac{N_0}{\rho''} \cos \varphi_0 \sin \psi \sin A \delta\lambda''_0$  равно 38 м!

Таким образом, отклонение отвеса в Пулкове вызывает отступления по высоте референц-эллипсоида, если он ориентируется по астрономическим данным в Пулкове, от наилучшего эллипсоида на десятки метров в Восточной Сибири и на Дальнем Востоке. Погрешность в большой полуоси этого эллипсоида, очевидно, делает то, что он везде располагается *ниже* наилучше подходящего эллипсоида и именно уже на 40 м на южном Урале, и на огромную величину почти в 400 м на Дальнем Востоке. Отсюда, думается, уже можно получить основание для вывода о непригодности такого референц-эллипсоида для геодезических работ в такой обширной стране, как СССР.

Формула (631) была выведена проф. Ф. Н. Красовским в 1934 г. Принимая, что геоид в общем совпадает с общим земным эллипсоидом, можем по этой формуле, зная  $\Delta a$  и  $\Delta\alpha$ ,  $\delta\varphi_0$  и  $\delta\lambda_0$ , предвычислить с ошибкой  $\pm 25$  м высоты геоида над нашим референц-эллипсоидом, учитывая при оценке этой ошибки только колебания высот геоида; при ошибочности  $\Delta a$  на  $\pm 50$  м средняя ошибка этих расчетов возрастет до  $\pm 35$ —40 м для Дальнего Востока. Эти приближенные расчеты, хотя и грубые, могут быть полезны при предварительных соображениях величин редукций базисов и направлений, измеренных в триангуляции, при отнесении их на поверхность референц-эллипсоида.

Из астрономо-гравиметрического нивелирования, а также по методу, изложенному в § 79, мы получаем высоты  $N$  геоида над принятым в геодезических работах референц-эллипсоидом. По установлении наилучше подходящего для СССР (или всякой другой страны) эллипсоида, когда будут известны  $\Delta a$ ,  $(\Delta\alpha)$ ,  $\delta\varphi_0$  и  $\delta\lambda_0$ , мы, применяя формулу (631), можем пересчитать эту систему высот  $N$  на систему высот  $N'$ , отнесенных уже к наилучше подходящему эллипсоиду.

Если вместо  $h_r$  в левую часть уравнения (631) мы подставим найденную из астрономо-гравиметрического нивелирования и другими методами величину  $N$  (без перечисления на систему величин  $N'$ ) плюс  $\delta N$ , понимая под  $\delta N$  *случайные* отступления геоида от наилучше подходящего эллипсоида, то, взяв эти уравнения (631) для многих точек, распределенных по значительной территории, и решая их систему под условием минимума  $\Sigma \delta N^2$ , мы можем вывести из этого материала  $\Delta a$ ,  $(\Delta\alpha)$ ,  $\delta\varphi''_0$  и  $\delta\lambda_0$ .

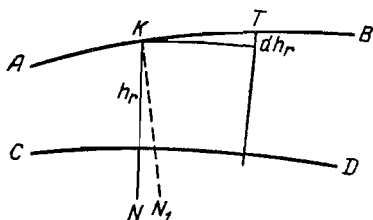
Другими словами, уравнение (631) можно рассматривать, как новый вид уравнений градусных измерений. Однако нужно оговориться, что здесь открывается возможность нового подхода к выводу наилучше подходящего эллипсоида, которая нами еще не испытана в вычислениях и не оценена еще с точки зрения надежности даваемых ею результатов. Наконец, формула (631) приводит к новым дифференциальным формулам, вывод которых мы и даем в следующем параграфе.

## § 82. Дифференциальные формулы проф. Ф. Н. Красовского

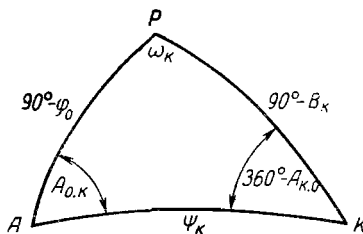
На чертеже 107 кривая  $AB$  — сечение некоторой нормальной плоскостью поверхности наилучше подходящего эллипсоида; кривая  $CD$  — сечение той же плоскостью референц-эллипсоида;  $KN$  — нормаль к референц-эллипсоиду;  $KN_1$  — нормаль к наилучшему эллипсоиду; в точке  $K$  имеем высоту  $h_r$  эллипсоида  $AB$  над эллипсоидом  $CD$ ; в бесконечно близкой точке  $T$ , удаленной от  $K$  на  $ds$ , имеем высоту  $h_r + dh_r$ . Очевидно,

$$\left. \begin{aligned} B_K^\circ - B_K &= \left( \frac{\partial h_r}{\partial B} \right)_K \frac{1}{M_K} = -dB_K \\ L_K^\circ - L_K &= -dL_K = \left( \frac{\partial h_r}{\partial L} \right)_K \frac{1}{N_K \cos^2 B_K} \end{aligned} \right\}, \quad (632)$$

причем в (632) под  $B_K^\circ$  и  $L_K^\circ$  понимаются широта и долгота точки  $K$ , отнесенные к референц-эллипсоиду, а под  $B_K$  и  $L_K$  — широта и долгота



Черт. 107



Черт. 108

точки  $K$ , отнесенные к наилучше подходящему эллипсоиду. Величина  $\psi$  в § 81 определялась из формулы

$$\cos \psi_K = \sin \varphi_0 \sin B_K + \cos \varphi_0 \cos B_K \cos \omega_K, \quad (624)$$

которая соответствует вычислению  $\psi$  из сферического треугольника  $APK$ , изображенного на черт. 108. В этом треугольнике:  $A$  — исходная точка, по астрономическим данным в которой ориентирован референц-эллипсоид;  $P$  — полюс эллипсоида,  $K$  — рассматриваемая точка с координатами  $B_K^\circ$  и  $L_K^\circ$  на референц-эллипсоиде, причем разность долгот этой точки и точки  $A$  названа через  $\omega_K$ . На черт. 108 легко видеть, что  $d\psi_K$ , соответствующее изменению только  $B_K$  на  $dB_K$ , определяется так

$$d\psi_K^\varphi = -dB_K \cos A_{K.O}.$$

Точно так же, изменение  $d\psi_K^\lambda$ , соответствующее изменению только одной долготы точки  $K$ , определяется так

$$d\psi_K^\lambda = -dL_K \cos B_K \sin A_{K.O}.$$

Отсюда

$$dB_K = - \left( \frac{\partial h_r}{\partial B_K} \right)_K \frac{1}{M_K} = + \left( \frac{\partial h_r}{\partial \psi} \right)_K \frac{\cos A_{K.O}}{M_K}.$$

Находим  $\frac{\partial h}{\partial \psi}$  из уравнения (631) и получаем

$$\begin{aligned}
 dB_K = & \frac{e^2 \cos B_K \rho''}{M_K} \left( \frac{\sin B_K}{k_K} - \sin \varphi_0 \right) \Delta \alpha + \frac{\sin \psi_K \cos A_{K \cdot O}}{k_0} \frac{\Delta a}{M_K} \rho'' + \\
 & + \frac{a \sin^2 \varphi \rho''}{M_K k_0^3} \left[ \sin \psi_K \cos A_{K \cdot O} - \frac{2 \cos B_K (\sin \varphi_0 - \sin B_K)}{\sin^2 \varphi_0} \right] (\Delta \alpha) + \\
 & + \frac{e^2 a \rho''}{M_K} \left[ \cos B_K (\sin \varphi_0 - \sin B_K) (\sin^2 \varphi_0 - 2 \sin \varphi_0 \sin B_K + \cos 2 B_K) - \right. \\
 & \left. - \frac{\sin \psi_K \cos A_{K \cdot O} \sin^2 \varphi_0}{2} \right] \Delta \alpha - \frac{M_0}{M_K} \cos \psi_K \cos A_{K \cdot O} \cos A_{O \cdot K} \delta \varphi''_0 - \\
 & - \frac{N_0}{M_K} \cos \varphi_0 \cos \psi_K \cos A_{K \cdot O} \sin A_{O \cdot K} \delta \lambda''_0 - \\
 & - \sin \psi_K \cos A_{K \cdot O} \frac{h_0}{M_K} \rho'' - \frac{M_0}{M_K} \sin A_{K \cdot O} \sin A_{O \cdot K} \delta \varphi''_0 + \\
 & + \frac{N_0}{M_K} \cos \varphi_0 \cos A_{O \cdot K} \sin A_{K \cdot O} \delta \lambda''_0. \quad (633)
 \end{aligned}$$

Последние два слагаемых в только что написанном уравнении появились вследствие изменения  $A_{O \cdot K}$  вместе с изменением широты  $B_K$ , причём

$$\frac{\partial A_{O \cdot K}}{\partial B_K} = \frac{\sin A_{K \cdot O}}{\sin \psi_K}.$$

Введем вспомогательные величины  $\nu_K$ ,  $p_K$  и  $q_K$ , определяемые уравнениями

$$\cos \nu_K = \sin A_{O \cdot K} \sin A_{K \cdot O} + \cos A_{O \cdot K} \cos A_{K \cdot O} \cos \psi_K; \quad (634)$$

$$- \sin \nu_K \cos q_K = \cos A_{O \cdot K} \sin A_{K \cdot O} - \sin A_{O \cdot K} \cos A_{K \cdot O} \cos \psi_K; \quad (635)$$

$$\sin \nu_K \cos p_K = \sin A_{O \cdot K} \cos A_{K \cdot O} - \cos A_{O \cdot K} \sin A_{K \cdot O} \cos \psi_K. \quad (636)$$

Тогда уравнение (633) перепишется так

$$\begin{aligned}
 dB_K = & \frac{\cos A_{K \cdot O} \sin \psi_K \rho''}{M_K} \left\{ \frac{\Delta a}{k_0} + \frac{a \sin^2 \varphi_0}{k_0^3} (\Delta \alpha) - h_0 \right\} + \\
 & + \frac{e^2 \cos B_K \rho''}{M_K} \left( \frac{\sin B_K}{k_K} - \sin \varphi_0 \right) \Delta \alpha + \frac{2 \cos B_K a_0}{M_K k_0^3} (\sin B_K - \sin \varphi_0) \rho'' (\Delta \alpha) + \\
 & + \frac{e^2 a \rho''}{M_K} \left[ \cos B_K (\sin \varphi_0 - \sin B_K) (\sin^2 \varphi_0 - 2 \sin \varphi_0 \sin B_K + \cos 2 B_K) - \right. \\
 & \left. - \frac{\sin \psi_K \cos A_{K \cdot O} \sin^2 \varphi_0}{2} \right] \Delta \alpha - \frac{M_0}{M_K} \cos \nu_K \delta \varphi''_0 - \\
 & - \frac{N_0}{M_K} \cos \varphi_0 \sin \nu_K \cos q_K \delta \lambda''_0. \quad (637)
 \end{aligned}$$

Переходим теперь к получению  $dL_K$ . Мы имеем

$$dL_K = - \left( \frac{\partial h_r}{\partial L_K} \right)_K \frac{1}{N_K \cos^2 B_K}$$

и далее

$$dL_K = - \left( \frac{\partial h_r}{\partial \psi_K} \right) \left( \frac{\partial \psi_K}{\partial L} \right)_K \frac{1}{N_K \cos^2 B_K};$$

$$\left( \frac{\partial \psi_K}{\partial L} \right)_K = - \cos B_K \sin A_{K \cdot O};$$

$$dL_K = \left( \frac{\partial h_r}{\partial \psi_K} \right) \cos B_K \sin A_{K \cdot O} \frac{1}{N_K \cos^2 B_K} = \left( \frac{\partial h_r}{\partial \psi_K} \right) \frac{\sin A_{K \cdot O}}{N_K \cos B_K};$$

$$\cos B_K dL_K = \frac{\sin \psi_K}{k_0} \frac{\sin A_{K \cdot O}}{N_K} \rho'' \Delta \alpha +$$

$$+ \frac{a \sin^2 \varphi_0 \rho''}{N_K k_0^3} \sin \psi_K \sin A_{K \cdot O} \left( 1 - \frac{e^2}{2} \right) (\Delta \alpha) -$$

$$- \sin \psi_K \sin A_{K \cdot O} \frac{h_0}{N_K} - \frac{M_0}{N_K} \cos \psi_K \sin A_{K \cdot O} \cos A_{O \cdot K} \delta \varphi''_0 -$$

$$- \frac{N_0}{N_K} \cos \varphi_0 \cos \psi_K \sin A_{O \cdot K} \sin A_{K \cdot O} \delta \lambda'' +$$

$$+ \frac{M_0 \sin A_{O \cdot K} \cos A_{K \cdot O} \cos B_K}{N_K \cos B_K} \delta \varphi''_0 - \frac{N_0 \cos \varphi_0 \cos A_{O \cdot K} \cos A_{K \cdot O} \cos B_K}{N_K \cos B_K} \delta \lambda''_0.$$

Последние два слагаемых в только что написанном уравнении появились вследствие изменения  $A_{O \cdot K}$  вместе с изменением долготы  $L_K$ , причем

$$\frac{\partial A_{O \cdot K}}{\partial L_K} = - \frac{\cos B_K \cos A_{K \cdot O}}{\sin \psi_K}.$$

Пользуясь (636), окончательно напишем

$$\begin{aligned} \cos B_K dL_K &= \frac{\sin \psi_K \sin A_{K \cdot O} \rho''}{N_K} \left[ \frac{\Delta \alpha}{k_0} + \frac{a_0 \sin^2 \varphi_0}{k_0^3} \left( 1 - \frac{e^2}{2} \right) (\Delta \alpha) - h_0 \right] + \\ &+ \frac{M_0}{N_K} [\sin A_{O \cdot K} \cos A_{K \cdot O} - \cos A_{O \cdot K} \sin A_{K \cdot O} \cos \psi_K] \delta \varphi''_0 - \\ &- \frac{N_0}{N_K} \cos \varphi_0 [\cos A_{O \cdot K} \cos A_{K \cdot O} + \sin A_{O \cdot K} \sin A_{K \cdot O} \cos \psi_K] \delta \lambda''_0; \\ \cos B_K dL_K &= \frac{\sin \psi_K \sin A_{K \cdot O} \rho''}{N_K} \left[ \frac{\Delta \alpha}{k_0} + \frac{a_0 \sin^2 \varphi_0}{k_0^3} \left( 1 - \frac{e^2}{2} \right) (\Delta \alpha) - h_0 \right] + \\ &+ \frac{M_0}{N_K} \sin \psi_K \cos \psi_K \delta \varphi''_0 + \frac{N_0}{N_K} \cos \varphi_0 \cos \omega_K \delta \lambda''_0. \end{aligned} \quad (638)$$

Формулы (637) и (638) дают изменения геодезической широты и геодезической долготы в зависимости от переменных: большой полуоси референц-эллипсоида на  $\Delta a$ ; его сжатия на  $(\Delta \alpha)$ ; высоты над геоидом



в исходном пункте триангуляции на  $h_0$ ; широты в том же исходном пункте на  $\delta\varphi_0''$  и долготы на  $\delta\lambda_0''$ . Если назовем слагающие отклонения отвеса относительно эллипсоида с размерами  $a_0 + \Delta a$  и  $a_0 + (\Delta a)$  в исходном пункте  $A$  через  $\xi_0$  и  $\eta_0$ , то  $\delta\varphi_0'' = -\xi_0$  и  $\delta\lambda_0'' \cos \varphi_0 = -\eta_0$ . Обычно в (637) и (638) вводят именно  $-\xi_0$  и  $\eta_0$  вместо  $\delta\varphi_0''$  и  $\delta\lambda_0''$ .

Согласно предположению, сделанному в начале § 81, в формулах (637) и (638) отсутствуют члены, выражающие влияние погрешностей величин  $\varphi_0$ ,  $\lambda_0$  и  $A_0$ . Эти влияния могут быть представлены с небольшой неточностью формулами (536), (537), с заменой в них  $dB_1$  и  $dA_{1,2}$  соответственно через  $\Delta\varphi_0$  и  $\Delta A_0$ , т. е. через погрешности определенных астрономических широт и азимута в точке  $A$  (исходной).

Дифференциальные формулы (637) и (638) точнее аналогичных формул, данных ранее в главе VIII; они позволяют вычислять  $dB_K$  и  $dL_K$  при расстояниях между исходной точкой  $A$  триангуляции и точкой  $K$  в несколько тысяч километров, полагая до 6000 км, в то время как радиус действия прежних формул (Гельмерта) ограничивается, при определении  $dB_K$  и  $dL_K \cos \varphi_K$  до  $0''{,}01$ , только 600—800 километрами. Таким образом, эти формулы необходимы при обработке очень больших триангуляций и при составлении уравнений градусных измерений из обширных астрономо-геодезических сетей, например охватывающих всю территорию СССР. При обеспечении хорошей точности при очень значительных удалениях точки  $K$  от  $A$ , эти формулы дают  $dB_K$  и  $dL_K$  несравненно проще, чем ранее выведенные формулы в главе VIII — это будет видно в главе X о градусных измерениях.

### § 83. Влияние отклонений отвесных линий и отступлений геоида от эллипсоида на постановку основных астрономо-геодезических работ, на постановку и результаты топографических и картографических работ

В этом параграфе дадим некоторую сводку выводов, уже полученных в предыдущих параграфах, а также дадим некоторые новые заключения, вытекающие из ранее изложенного.

1. Отступления геоида от эллипсоида вынуждают нас, прежде всего, вводить при геодезических работах некоторый *референц-эллипсоид*. Ориентирование этого эллипсоида по астрономическим данным в некотором исходном пункте и по высоте этого исходного пункта над уровнем Океана может сопровождаться заметными сдвигами референц-эллипсоида от нормального его положения. Мы можем с известной приближенностью определить слагающие абсолютного отклонения отвеса  $\xi_0^g$  и  $\eta_0^g$  в исходном пункте *гравиметрически*, и именно, со средней ошибкой  $\pm 1''{,}5 - 2''{,}0$ , если с достаточной густотой распределим гравиметрические станции на территории вокруг исходного пункта в радиусе около 1500 км. Нужно прямо сказать, что *если референц-эллипсоид ориентируется по данным в одном исходном пункте, то надлежит вокруг него выполнить в указанном размере гравиметрическую съемку и за исходные координаты и азимут принять*

$$B = \varphi - \xi_0^g,$$

$$L = \lambda - \eta_0^g \sec \varphi,$$

$$A_{1,2} = \alpha_{1,2} - \eta_0^g \operatorname{tg} \varphi.$$

Этим самым широтная и азимутальная ориентировки будут делаться уже не вслепую, а достаточно обоснованно, хотя и без контроля

в отношении азимутальной ориентировки. С другой стороны, высотная ориентировка будет оставлена совершенно произвольной.

Понятно, что *следует ориентировку эллипсоида производить не по одному исходному пункту, а по всей системе астрономических пунктов в триангуляции, используя при этом, кроме обширного астрономо-геодезического материала, и имеющиеся гравиметрические материалы.* Задача ориентировки референц-эллипсоида или задача установления исходных геодезических дат (широты, долготы, азимута и высоты) есть прямое следствие отступлений геоида от эллипсоида, она решается всегда в связи с определением наилучших размеров и сжатия эллипсоида; решение этой задачи будет изложено в главе X о градусных измерениях.

2. Введение в разных частях обширного государства референц-эллипсоидов, ориентированных по астрономическим данным в разных исходных пунктах, приводит к введению в одном и том же государстве *разных систем геодезических координат*, что ведет в дальнейшем к беспорядку и затруднениям в пользовании геодезической основой и к заметным расхождениям рамок планшетов и листов государственной съемки. Необходимо иметь одни исходные геодезические даты для всего государства, и для этого решить поставленную в конце п. 1 настоящего параграфа задачу их определения со всей тщательностью.

3. Даже при наилучше ориентированном референц-эллипсоиде и при наилучше подобранных его размерах, отступления от него геоида могут достигать в обширной стране нескольких десятков метров, а широкие волны геоида могут сопровождаться уклонениями отвеса *систематического характера*; с другой стороны, в ряде районов, по преимуществу горных, мы можем иметь заметные местные уклонения отвеса, достигающие 10"—20"—30". Строгая обработка геодезических сетей требует учета влияния отступлений геоида от референц-эллипсоида по высоте и уклонений отвесных линий. Поэтому *необходимо редуцировать измеренные базисы и углы в триангуляции не на поверхность геоида, как это обычно до сих пор делают, а на поверхность референц-эллипсоида* — по правилам и формулам, указанным в § 75 и 76. Поэтому обработка обширной геодезической сети должна совершаться несколько иначе, чем до сих пор это делается в геодезии — о чем будет изложено в главе XI.

4. Осуществление требований, выдвинутых в разделе 3, приводит к необходимости знать высоты  $N$  геоида над референц-эллипсоидом, по крайней мере в местах расположения базисов триангуляции, и относительные уклонения отвеса во многих пунктах триангуляции. Это же приводит к включению в *производственную программу астрономо-геодезических работ, выполнения по рядам триангуляции I класса, отстоящим друг от друга на 600—800 км, астрономо-гравиметрического нивелирования и выполнения астрономических определений на остальных рядах триангуляции через 40—50 км*; при наличии общей гравиметрической съемки последнее требование может быть сведено к требованию давать астрономические пункты по рядам триангуляции I класса через 70—100 км. *Правильная обработка обширной астрономо-геодезической сети СССР диктует именно только что указанную программу астрономических и гравиметрических работ в этой сети*, которая и принята у нас и планомерно выполняется, преследуя, конечно, одновременно и иные цели. Для получения нужных астрономо-геодезических уклонений отвеса, задача определения размеров и сжатия референц-эллипсоида и ориентирования этого эллипсоида должна быть решена до приступа к окончательной обработке триангуляции.

5. Уклонения отвеса делают мало пригодным использование астрономических азимутов, определенных на разных пунктах триангуляции, для контроля угловых измерений в триангуляции и для устранения накоплений ошибок в азимутальной ориентировке звеньев большой триангуляции. Мы должны отрицать непосредственное использование для этих целей астрономических азимутов. Но, приняв за правило на каждом пункте, где определен астрономический азимут, определять еще *точно и астрономическую долготу* этого пункта, мы, пользуясь выведенным отсюда уклонением отвеса по долготе, перечисляем астрономический азимут в *лапласов азимут*, и получаем в виде этих азимутов Лапласа ценнейшее и надежнейшее средство для контроля угловых измерений в триангуляции, для повышения точности результатов по отдельному звену триангуляции, а главное—для сохранения высокой точности ориентирования всех звеньев обширнейшей триангуляции. Мы получаем здесь пример отрицания: уклонения отвеса заставляют нас отрицать астрономические азимуты; определения астрономических долгот позволяют эти же астрономические азимуты, пользуясь уклонениями отвеса по долготе, обратить в ценнейший материал в астрономо-геодезической сети. *Непременное условие определения астрономических долгот там, где определены астрономические азимуты*, — вот как отражается в программе основных астрономо-геодезических работ существование уклонений отвесных линий. *Обращение геодезической сети в астрономо-геодезическую* — вот следствие отступлений геоида от эллипсоида в постановке производственных основных геодезических работ.

6. Уклонения отвеса понижают точность результатов из двустороннего тригонометрического нивелирования, внося добавочную ошибку в разность высот порядка 0,5—1,0 м при расстоянии между пунктами в 15—30 км.

7. Надлежаще точный учет непараллельности уровенных поверхностей в высокоточном нивелировании требует определения кривизны силовой (отвесной) линии из соответственно собранного гравиметрического материала.

8. Более или менее детальное выяснение изменений в направлении и размерах уклонений отвесных линий путем создания достаточно густой сети астрономических пунктов, совпадающих с геодезически определенными пунктами, может служить для обнаружения местных подземных залегающих и для достаточного указания центров или центральных линий этих залегающих. Эти возможности, конечно, могут значительно повысить значение результатов основных астрономо-геодезических работ, делая их ценными для геологии и геологоразведки.

9. Имея гравиметрические станции, расположенные в некотором радиусе вокруг астрономического пункта, мы можем, применяя формулы Венинг Мейнеса, вывести слагающие уклонения отвеса  $\xi^s$  и  $\eta^s$  для этого астрономического пункта. Конечно, при малом радиусе охвата территории гравиметрическими определениями, выведенные величины  $\xi^s$  и  $\eta^s$  будут отражать в себе лишь местные влияния, но и это было бы, конечно, весьма ценно, если бы  $\xi^s$  и  $\eta^s$  определились с достаточной точностью.

Представим себе, что в радиусе 16—20 км вокруг астрономического пункта выполнена гравиметрическая съемка с расстояниями между гравиметрическими станциями в 8—10 км и с числом, следовательно, этих станций на рассматриваемой (прилегающей к астрономическому пункту) территории около 16—18; за этой центральной территорией пусть имеем выполненную гравиметрическую съемку с расстояниями между ее станциями около 35 км, причем такая съемка пусть распространяется равно-

мерно во все стороны от астрономического пункта на 200 км. Тогда, по исследованиям ЦНИИГАиК, точность вывода из указанного гравиметрического материала величин  $\xi^g$  и  $\eta^g$  будет характеризоваться средней ошибкой  $\pm 0'',5$ , конечно, не учитывая при этом влияния всех зон, лежащих за радиусом 200 км. По исследованиям ассистента кафедры высшей геодезии в МИИГАиК Седельникова А. А., ошибка в  $\xi^g$  или  $\eta^g$  была бы  $\pm 1'',5-1'',8$ , если бы не было никакого сгущения гравиметрической съемки в радиусе 20 км, а вокруг астрономического пункта в радиусе 200 км была бы выполнена только общая гравиметрическая съемка с расстоянием между ее станциями около 35 км; если же расстояние между станциями общей съемки взять в 70 км, то тогда средняя ошибка  $\xi^g$  или  $\eta^g$  оказалась бы равной  $\pm 2'',3$ . Эти результаты, полученные А. А. Седельниковым, относятся к местности равнинной, немного всхолмленной, и достаточно удаленной от горных хребтов.

Представим себе, что астрономические пункты расположены друг от друга через 70—80 км; далее допустим, что на каждом астрономическом пункте сделано определение силы тяжести и определения силы тяжести выполнены на 3—4 пунктах вблизи каждого астрономического пункта, на расстояниях от него 10—15 км, и на расстояниях около 20 км друг от друга. Тогда ошибку в  $\xi^g$  и  $\eta^g$  следует оценивать в  $\pm 1,8-2'',0$ , опять-таки не учитывая влияния далеких зон. Применяя именно указанную схему астрономических и гравиметрических работ, мы, следовательно, величины

$$\begin{aligned} B' &= \varphi - \xi^g, \\ L' &= \lambda - \eta^g \sec \varphi \end{aligned}$$

определим со средней ошибкой вообще меньшей  $\pm 2'',0$  для  $B'$  и меньшей  $\pm 2'' \sec \varphi$  для  $L'$ , если сами  $\varphi$  и  $\lambda$  определены с ошибкой около  $\pm 0'',6$  в  $\varphi$  и около  $\pm 1'',0$  в  $\lambda$ . Учет местных влияний в величинах  $B'$  и  $L'$  с такой точностью, очевидно, дает обоснование использовать их в качестве исходных координат при установке рамок соответствующих планшетов при съемке в масштабе 1 : 100 000, и, кроме того, эти величины, полученные по разным астрономическим пунктам, могут быть использованы и при увязке ходов рабочего обоснования, если съемка ведется в масштабе 1 : 100 000 в необжитых районах, причем при этой увязке полезно ввести, в качестве неизвестных, с соответственными весами и поправки величин  $B'$  и  $L'$ .

Конечно, система полученных значений  $B'$  и  $L'$  не будет отнесена к системе геодезических координат государственной триангуляции, а при отсутствии в данной области широкой волны геоида — к системе, близко соответствующей общему земному эллипсоиду; при наличии такой волны — к некоторому местному эллипсоиду, близко подходящему к геоиду в этой области.

Нам представляется, что система астрономических пунктов, расположенных друг от друга в среднем на 70 км, и сеть гравиметрических пунктов, образованная гнездами, с определением в каждом гнезде силы тяжести на самом астрономическом пункте и на 3—4 пунктах вблизи него на площади около 800 кв. км — вот схема, наиболее приемлемая в настоящее время для обоснования съемок в масштабах 1 : 100 000 и 1 : 200 000 в северных необжитых районах Азиатской части СССР, за исключением, конечно, предгорных и горных районов.

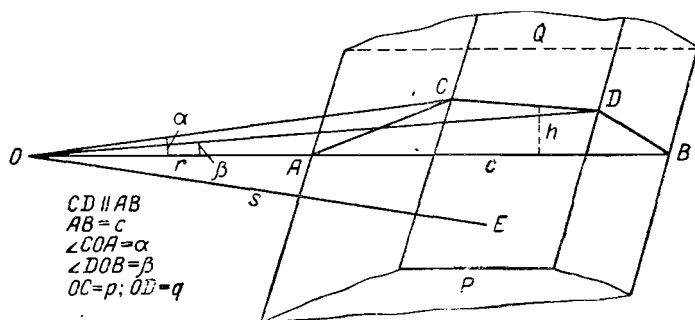
Если район съемок заключен в рамку полигона триангуляции II класса, с размерами сторон полигона в 500—600 км, то астрономические

определения через 100 км по звеньям этой триангуляции и выполнение вдоль этих звеньев общей гравиметрической съемки в полосе шириной хотя бы в 150 км, с сгущением этой съемки вблизи астрономических пунктов триангуляции, позволят отнести  $B'$  и  $L'$  к системе принятых геодезических координат с средней ошибкой, которую можно оценить в  $\pm 2'',0$ . Эту задачу мы не излагаем, относя ее к курсу гравиметрии.

#### § 84. Вычисление уклонений отвесных линий, вызываемых действием топографического рельефа. Притяжение хребта

В вопросах об уклонениях отвесных линий сам собой напрашивается учет местных притяжений, вызывающих эти уклонения. Естественно сперва обратиться к учету местных притяжений, обусловленных видимыми причинами, т. е. в первую очередь горными хребтами.

Пусть горный хребет  $PQ$  (черт. 109) имеет вид призмы. Точка  $O$  находится в плоскости нижней грани этой призмы, против середины ее



Черт. 109

длины. Найдем горизонтальную слагающую притяжения хребтом точки  $O$ , лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси хребта. Для этого проведем в  $O$  плоскость, перпендикулярную к ребрам призмы; в сечении получим трапецию  $ABCD$  с основанием  $AB = c$ , углами  $CAB = A$  и  $DBA = B$  и высотой  $h$ .

Внутри хребта возьмем произвольную точку  $E$ ; систему прямоугольных координат изберем так: начало ее в  $O$ , ось  $x$ -ов — по линии  $OB$ , ось  $z$  — в плоскости  $OCDB$ ; пусть для  $E$  прямоугольные координаты суть  $x, y, z$ . Расстояние  $OE$  назовем через  $s$ , длину хребта — через  $l$ , отрезок  $OA$  — через  $r$ .

Для слагающей  $F$  притяжения в направлении  $OA$ , имеем

$$F = f \int \frac{dm}{s^2} \cos(s, x) = f \int \frac{dm}{s^2} \frac{x}{s},$$

где  $f$  — постоянное ньютонова притяжения, а  $dm$  — элемент массы в  $E$ . Называя плотность хребта через  $\delta$ , напишем

$$dm = \delta \, dx \, dy \, dz; \quad s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$F = f\delta \int_{x_1 - \frac{l}{2}}^{x_1 + \frac{l}{2}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_0^h \frac{x \, dx \, dy \, dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Пределы интеграции:

для  $z \dots 0$  и  $h$ ;

для  $y \dots -\frac{l}{2}$  и  $+\frac{l}{2}$ , понимая под  $l$  — длину хребта;

для  $x \dots x_1 = r + z \operatorname{ctg} A$  и  $x_2 = r + c - z \operatorname{ctg} B = R - z \operatorname{ctg} B$ ;

причем

$$R = r + c.$$

Интегрирование по  $y$  дает

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \left| \frac{y}{(x^2 + z^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right|_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} =$$

$$= \frac{2}{(x^2 + z^2) \sqrt{1 + \frac{4(x^2 + y^2)}{l^2}}}.$$

Полагая, что ширина хребта и удаление от него  $O$  незначительны, по сравнению с  $l$ , можно пренебречь в только что полученном выражении величиной  $\frac{4(x^2 + z^2)}{l^2}$  и тогда для  $F$  написать

$$F = 2f\delta \int_0^h dz \int_{x_1}^{x_2} \frac{x dx}{x^2 + z^2} = f\delta \int_0^h \ln \frac{(R - z \operatorname{ctg} B)^2 + z^2}{(r + z \operatorname{ctg} A)^2 + z^2} dz,$$

$$F = f\delta \left\{ \int_0^h \ln [(R - z \operatorname{ctg} B)^2 + z^2] dz - \int_0^h \ln [(r + z \operatorname{ctg} A)^2 + z^2] dz \right\},$$

причем под  $\ln$  понимается неперов логарифм.

Интегрируя по частям и пользуясь при этом известными формулами

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + 2mx + n^2} dx = \frac{1}{2} M \ln (x^2 + 2mx + n^2) -$$

$$- \frac{Mm - N}{\sqrt{n^2 - m^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{m + x}{\sqrt{n^2 - m^2}};$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{arc} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\alpha \pm \beta}{1 \mp \alpha\beta},$$

получим

$$F = f\delta \left\{ h \ln \frac{(R - h \operatorname{ctg} B)^2 + h^2}{(r + h \operatorname{ctg} A)^2 + h^2} - \right.$$

$$- R \sin B \cos B \ln \left( 1 - \frac{2h}{R} \operatorname{ctg} B + \frac{h^2}{R^2 \sin^2 B} \right) -$$

$$- r \sin A \cos A \ln \left( 1 + \frac{2h}{r} \operatorname{ctg} B + \frac{h^2}{r^2 \sin^2 A} \right) +$$

$$+ 2R \sin^2 B \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{h}{R - h \operatorname{ctg} B} - 2r \sin^2 A \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{h}{r + h \operatorname{ctg} A} \left. \right\}. \quad (639)$$

Вводя обозначения

$$\left. \begin{aligned} OC &= p, & \angle COA &= \alpha \\ OD &= q, & \angle DOB &= \beta \end{aligned} \right\}, \quad (640)$$

имеем

$$\begin{aligned} p^2 &= (r + h \operatorname{ctg} A)^2 + h^2 = r^2 + 2rh \operatorname{ctg} A + h^2 \operatorname{cosec}^2 A, \\ q^2 &= (R - h \operatorname{ctg} B)^2 + h^2 = R^2 - 2Rh \operatorname{ctg} B + h^2 \operatorname{cosec}^2 B \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} F &= f\delta \left\{ h \ln \left( \frac{q}{p} \right)^2 - R \sin B \cos B \ln \left( \frac{q}{R} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - r \sin A \cos A \ln \left( \frac{p}{r} \right)^2 + 2R\beta \sin^2 B - 2r\alpha \sin^2 A \right\}. \end{aligned} \quad (641)$$

Чтобы перейти от  $F$  к отклонению отвеса  $u$ , соображаем так:  $F$  есть добавочная горизонтальная составляющая, которая заставляет направление отвесной линии  $ON$  (черт. 110) перейти в направление  $ON_1$ , причем  $\angle NON_1 = u$ . Отложив по  $ON$  силу земного притяжения, мы из треугольника  $NON_1$ , в котором  $NN_1 = F$ , найдем  $u$ . Ввиду малости  $u$ , мы можем земное притяжение  $ON = F_0$  вычислять грубо, именно

$$F_0 = \frac{4}{3} \pi R_0^3 \frac{f\delta_0}{R_0^2} = \frac{4}{3} f\delta_0 \pi R_0,$$

здесь  $R_0$  — земной радиус в километрах,  $\delta_0$  — средняя плотность Земли.

Итак

$$u'' = \frac{F\varphi''}{F_0}.$$

Обозначая

$$\gamma = \frac{3}{4} \frac{\delta}{\delta_0} \frac{\rho''}{\pi R_0} \quad (642)$$

и принимая  $\frac{\delta}{\delta_0} = \frac{1}{2}$ , найдем

$$\gamma = 4'', 123.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} u'' &= \gamma'' \left\{ \ln \left[ \left( \frac{q}{p} \right)^{2h} \left( \frac{r}{p} \right)^r \sin 2A \left( \frac{R}{q} \right)^R \sin 2B \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2(R\beta \sin^2 B - r\alpha \sin^2 A) \right\}. \end{aligned} \quad (643)$$

Если сечение хребта прямоугольное, т. е.  $A = B = 90^\circ$ , то отклонение отвеса в точке  $O$ , лежащей вне хребта прямоугольного сечения,

$$u'' = 2\gamma \left\{ \ln \left( \frac{q}{p} \right)^h + R\beta - r\alpha \right\}. \quad (644)$$

Если сечение хребта треугольное, то

$$p = q, \quad \alpha = \beta.$$

Поэтому для отклонения отвеса в точке  $O$ , лежащей вне хребта треугольного сечения, имеем

$$u'' = \gamma \left\{ \ln \left[ \left( \frac{r}{p} \right)^r \sin 2A \left( \frac{R}{p} \right)^R \sin 2B \right] + 2\alpha (R \sin^2 B - r \sin^2 A) \right\}. \quad (645)$$

Чтобы вычислить уклонение отвеса у подошвы хребта в точках  $A$  и  $B$ , надо в формулах (643), (644) и (645) положить  $r = 0$ ,  $R = c$  и  $\alpha = A$ . В случае хребта с сечением в виде трапеции, для точки  $A$  будем иметь

$$u'' = \gamma \left\{ \ln \left[ \left( \frac{p}{q} \right)^{2h} \left( \frac{c}{q} \right)^c \sin 2B \right] + 2c \beta \sin^2 B \right\}. \quad (646)$$

$$p = AC; \quad q = AD; \quad \beta = \angle DAB$$

Для точки  $B$  будет служить та же формула по замене в ней:  $q$  — через  $BC$ ;  $p$  — через  $BD$ ;  $\beta$  — через  $\angle CBA$  и угла  $B$  — через угол  $A$ .

Так как  $r \ln r$  при  $r = 0$  равно нулю, то в случае хребта треугольного сечения для точки  $A$

$$u'' = \gamma \left\{ \ln \left( \frac{c}{p} \right)^c \sin 2B + 2Ac \sin^2 B \right\}. \quad (647)$$

Для точки  $B$  в этом случае будет та же формула при замене в ней  $p$  через длину наклонной стороны, примыкающей к  $B$ , и при замене  $B$  — через  $A$  и  $A$  — через  $B$ . Чтобы вывести уклонение отвесной линии в точке  $M$  (черт. 111), находящейся на скате хребта  $ACB$  треугольного сечения, проведем через  $M$  прямую  $MN$ , параллельную  $AB$ ; тогда вопрос сведется к суммированию уклонений, вызванных притяжением хребта с сечением в виде трапеции  $MABN$ , и хребта с треугольным сечением  $MCN$ .

Положим в (646):  $c = t = MN$ ;  $p = p' = AM$ ;  $q = MB$  (черт. 111);  $\beta = \angle MBA$ ; и заменим в ней  $\angle B$  через  $(180^\circ - B)$  и  $h$  через  $z = p' \sin A$  положим также в (647)  $p = b - p'$  и  $c = t$ .

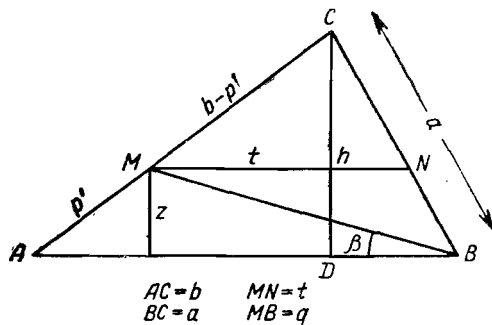
Тогда для  $M$

$$u'' = \gamma \left\{ 2z \ln \left( \frac{q}{p} \right) + t \sin 2B \ln \left( \frac{q}{b - p'} \right) + 2t (A + \beta) \sin^2 B \right\}. \quad (648)$$

Если  $M$  совпадет с  $C$ , то  $p = b = AC$ ;  $z = h = CD$  (черт. 111);  $t = 0$  и  $q = a = CB$ ; тогда  $u$  для гребня хребта

$$u'' = 2\gamma h \ln \frac{a}{b}. \quad (649)$$

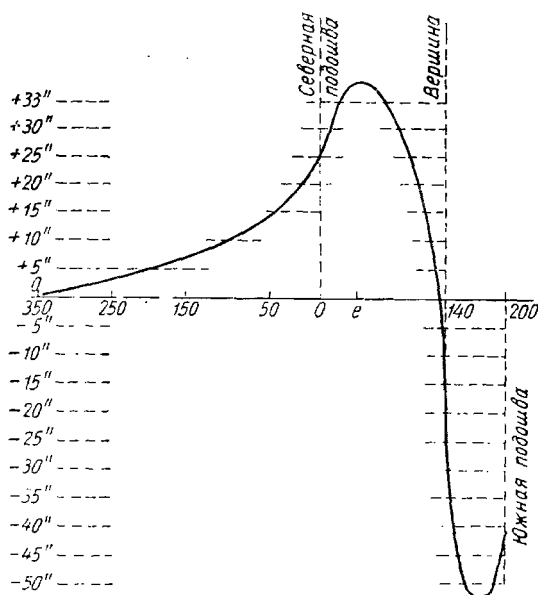
При получении формул (643) — (649) использована «Практическая геодезия» Витковского.



Черт. 111



Исследование выведенных формул показывает, что притяжение значительного хребта, например Кавказского, сказывается весьма далеко, — значение  $u$ , близкое к  $1''$ , будет в точках, удаленных от подошвы хребта (по перпендикуляру к его середине) на 200—300 км. По мере приближения к хребту уклонение  $u$  непрерывно возрастает и достигает наибольшей величины для хребта треугольного сечения в точке на скате, лежащей примерно на 0,3 высоты хребта; с дальнейшим подъемом по скату  $u$  непрерывно убывает, и в точке, близкой к гребню или на самом гребне, если  $A = B$ , обращается в нуль. На другом скате вблизи гребня будут малые отрицательные значения  $u$ , которые будут абсолютно возрастать вплоть до точки на скате, лежащей примерно на 0,3 высоты хребта, затем последует непрерывное убывание абсолютных величин  $u$ .



Черт. 112

имеющих противоположный знак со знаком уклонений для первого ската хребта.

Для иллюстрации, приводим на черт. 112 ход уклонения отвесной линии главного Кавказского хребта (без Малого Кавказа). Для этого хребта, обобщая, берем треугольное сечение  $u$  с углами при основании

$$A = 1^{\circ}17'20''; \quad B = 2^{\circ}34'36''.$$

Высоту хребта принимаем в 3 км, основание  $C = 200$  км; сторона  $AC = b = 135$  км;  $BC = 65$  км. Как видно: наибольшее уклонение на северном скате достигает  $+38''$  на высоте около 0,9 км; наибольшее уклонение на южном скате примерно на той же высоте достигает  $-51''$ ; на гребне хребта уклонение  $u = -9''$ ; в расстоянии 150 км от северной подошвы  $u = +7''$ ; в расстоянии 250 км  $u = +4''$  и в расстоянии 350 км от северной подошвы  $u = +1''$ . Отсюда ясно, что действие таких хребтов, как Кавказский, могло бы сказываться на значительные расстояния от него, вообще в несколько сот километров. Понятно, что в действительности влияние хребта в известной степени компенсируется строением

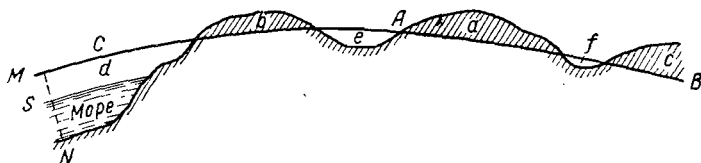
подземных масс, и действительные уклонения отвеса для того же Кавказа заметно меньшие, чем указанные выше.

Во всяком случае этот пример показывает, что уклонения отвесных линий, вызываемые даже небольшими горными хребтами, будут ощущаться на значительных сравнительно расстояниях от оси хребта.

Для значительной по протяжению и глубине впадины будем иметь ту же картину изменения уклонения отвесной линии, но знак уклонения  $u$  будет обратный. Примером такой впадины служит озеро Байкал, имеющее длину около 600 км и достигающее местами ширины около 90 км; максимальные глубины озера около 1500 м, средняя его глубина около 700 м. Уклонения отвеса на берегах Байкала, вызванные впадиной этого озера, достигают 30".

### § 85. Вычисление уклонений отвесных линий, вызываемых действием топографического рельефа, по формулам Хуттона

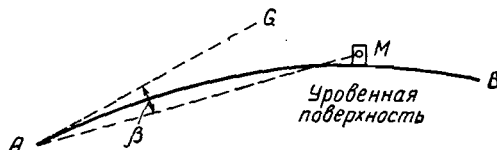
Если в точке  $A$  (черт. 113) мы желаем вычислить уклонение отвеса, обусловленное прилегающими к ней наружными массами, то, проведя уровенную поверхность  $CAB$ , можем считать, что уклонение отвесной линии в  $A$  сделалось бы равным нулю, если бы мы устранили массы



Черт. 113

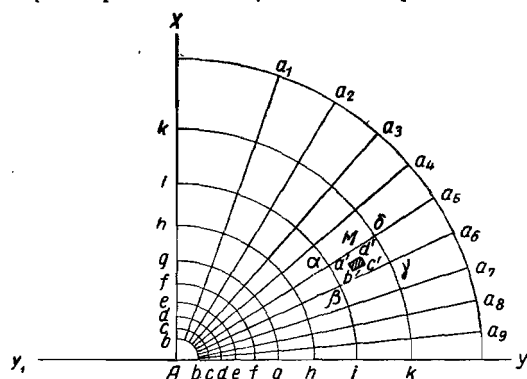
$a, b, c$ , возвышающиеся над поверхностью  $CAB$ , и если бы, с другой стороны, заполнили веществом, имеющим плотность пород земной коры, впадины  $d, e, f$ . Следовательно, обратно, для вычисления в  $A$  уклонения отвесной линии нужно сообразить влияние масс  $a, b, c$ , как избыточных, и, с другой стороны, нужно вычислить влияние недостатка притяжения массами  $e, d, f$ , причем недостаток оценивается при условии заполнения  $e, d, f$  веществом, плотность которого дополняет недостающую в  $e, d, f$  плотность до плотности коры Земли.

Применяя в данной задаче способ Хуттона, будем пренебрегать влиянием кривизны Земли в том отношении, что при вычислении горизонтальной составляющей притяжения точки  $A$  массой, сосредоточенной в точке  $M$  (черт. 114), будем пренебрегать влиянием малого угла  $\beta$  между горизонтом  $AG$  точки  $A$  и направлением прямой  $AM$ , или будем принимать уровенную поверхность  $AB$  за плоскость. Это возможно для расстояний  $AM$ , не превышающих 600 км. В настоящем параграфе мы и предполагаем, что оцениваем действие топографического рельефа на направление отвеса в точке  $A$  в пределах территории, для которой  $A$  является центром и границы которой есть окружность с радиусом, не превышающим 600 км. Пусть эта территория в плане представлена на черт. 115. Проведем через  $A$  (черт. 115) систему вертикальных плоскостей, которые пусть в сечении с плоскостью ее горизонта дадут прямые



Черт. 114

$Aa_1, Aa_2, Aa_3 \dots, Aa_9$ ; далее, построим в  $A$  систему круговых цилиндров с общей их осью, совпадающей с отвесной линией в  $A$ ; сечения этих цилиндров плоскостью  $XAY$  горизонта в  $A$  будут окружностями  $bb, cc, dd, \dots, hh, \dots$ . Ось  $AX$  направим по меридиану  $A$ . Такими плоскостями и цилиндрами мы разобьем рельеф вокруг точки  $A$  на ряд призм: каждая призма будет иметь основание  $\alpha\beta\gamma\delta$ , две боковые ее грани будут вертикальными плоскостями, две другие боковые грани будут принадлежать цилиндрическим поверхностям, а верхняя ее грань будет принадлежать физической поверхности Земли. При надлежаще выбранных размерах трапеции  $\alpha\beta\gamma\delta$  можно при вычислении местного притяжения вер-



Черт. 115

нюю грань призмы считать трапецией, совершенно совпадающей по очертаниям и размерам с трапецией  $\alpha\beta\gamma\delta$  и лежащей в плоскости, параллельной плоскости  $XAY$  на расстоянии от последней, равном средней высоте рельефа, заключенного между плоскостями  $Aa_6$  и  $Aa_5$  и между цилиндрами  $ii$  и  $kk$ , над горизонтом точки  $A^*$ . Эту среднюю высоту  $h$  рельефа в пределах каждой призмы, на которые разбится рельеф, определяют по планам и картам, с нанесенными на них изогипсами и высотами. Подсчитаем притяжение  $F$  призмы с основанием  $\alpha\beta\gamma\delta$ . Для этого в точке  $M$  рельефа выделим бесконечно малую призму с основанием  $a'b'c'd'$ , для которой напишем

$$dF = f\delta \frac{s \, dA \, ds \, h}{s^2}.$$

Здесь:  $f$  — постоянное ньютонова притяжения;  $\delta$  — плотность породы;  $s$  — расстояние элемента  $a'b'c'd'$  от  $A$ ;  $A$  — азимут направления  $AM$ ;  $ds = a'd' = b'c'$ ;  $dA = \angle a'Ab'$ ;  $h$  — средняя высота рельефа призмы  $\alpha\beta\gamma\delta$ ;  $sdA$  представляет объем призмы, имеющей основание  $a'b'c'd'$ . Пренебрегая наклоном прямых, соединяющих притягивающие элементы с точкой  $A$  к горизонту последней, будем вычислять проекцию  $F$  на плоскость меридиана  $A$ , которую назовем через  $F_x$ . Тогда

$$dF_x = f\delta h \frac{ds}{s} dA \cos A,$$

$$F_x = f\delta h \int_{r_i}^{r_k} \frac{ds}{s} \int_{A_{n-1}}^{A_n} \cos A \, dA.$$

Здесь  $A_{n-1}$  и  $A_n$  — азимуты направлений  $A_4$  и  $A_5$ , а  $r_i$  и  $r_k$  — радиусы окружностей  $ii$  и  $kk$ .

Интегрирование дает

$$F_x = f\delta h (\sin A_n - \sin A_{n-1}) \ln \frac{r_k}{r_i}. \quad (650)$$

\* Вернее, над уровнем поверхности  $A$ .

Здесь  $\ln \frac{r_k}{r_i}$  взят в системе Непера.

Если взять радиусы  $r$  так, чтобы они составляли геометрическую прогрессию, а азимуты — так, чтобы синусы их составляли арифметическую прогрессию, то величины  $K$  и  $L$ , определяемые уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \sin A_n - \sin A_{n-1} &= L \\ \ln \frac{r_k}{r_i} &= K \end{aligned} \right\}, \quad (651)$$

будут постоянными для всех призм, и для  $F_x$  напомним

$$F_x = f \delta KL h. \quad (652)$$

Примем Землю за шар, радиус которого равен 6370 км; через  $\delta_0$  назовем среднюю плотность Земли и через  $d_x$  — уклонение отвесной линии в плоскости меридиана, вызываемое призмой  $\alpha\beta\gamma\delta$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} d''_x &= \frac{F_x \rho''}{\frac{4}{3} f \delta_0 \pi R} = \frac{3}{4} \frac{\delta}{\delta_0} \frac{\rho''}{\pi R} KL h \\ d''_x &= 7'',733 \frac{\delta}{\delta_0} KL h \end{aligned} \right\}, \quad (653)$$

если  $h$  выражать в километрах, или

$$d''_x = 0'',00773 \frac{\delta}{\delta_0} KL h, \quad (654)$$

если  $h$  выражать в метрах.

Назовем через  $\xi_n$  уклонение отвеса в  $A$ , вызываемое в плоскости ее меридиана всеми призмами, лежащими к северу от линии  $Y_1AY$  (т. е. в северо-восточной и северо-западной четвертях).

Очевидно,

$$-\xi''_n = 0'',00773 \frac{\delta}{\delta_0} KL \Sigma h_n, \quad (655)$$

т. е. после выбора постоянных  $K$  и  $L$  и соответствующего им подразделения местности на призмы остается лишь для каждой призмы определить среднюю высоту  $h_n$ . При оценке уклонения отвеса  $\xi_s$  в плоскости меридиана  $A$  призмами, лежащими к югу от линии  $Y_1AY$  (т. е. в юго-восточной и юго-западной четвертях), мы поступаем точно так же и пишем

$$-\xi''_s = 0'',00773 \frac{\delta}{\delta_0} KL \Sigma h_s,$$

где  $h_s$  — высоты призм в юго-восточной и юго-западной четвертях. Полное уклонение отвеса в меридиане, которое мы теперь будем называть через  $D$ , получится по формуле

$$D = \xi_s - \xi_n.$$

Если, оставив прежнюю систему цилиндров, построим новую систему вертикальных плоскостей в  $A$  так, чтобы косинусы их азимутов состав-

ляли арифметическую прогрессию с разностью  $L$ , то, определив средние высоты для каждой из новых призм, получим

$$-\eta_0 = 0'',00773 \frac{\delta}{\delta_0} KL \sum h_0,$$

$$-\eta_w = 0'',00773 \frac{\delta}{\delta_0} KL \sum h_w,$$

где  $h_0$  — высоты рельефа призм (новых), лежащих к востоку от меридиана  $A$ ; а  $h_w$  — высоты для призм, лежащих к западу от меридиана точки  $A$ ;  $\eta_0$  — слагающая уклонения отвеса в плоскости первого вертикала, обусловленная рельефом местности, лежащей к востоку от меридиана точки  $A$ ;  $\eta_w$  — слагающая уклонения отвеса в плоскости первого вертикала, обусловленная рельефом местности, лежащей к западу от  $A$ .

Полная слагающая уклонения по первому вертикалу будет

$$D' = \eta_w - \eta_0.$$

Для применения этого метода достаточно построить на прозрачной бумаге (или на целлулоиде) в масштабе карты диаграмму, подобную черт. 115, но с охватом на ней всех четырех четвертей, т. е. в виде полных окружностей, причем при построении диаграммы задаются значением  $L$ , значением  $K$  и тем наименьшим радиусом  $Ab$ , в пределах окружности которого не будет применяться изложенный метод. Совместив сперва ось  $X$  диаграммы с меридианом точки  $A$ , подсчитывают средние высоты для всех призм, но суммируют их отдельно для призм, лежащих к северу от  $A$ , и для призм, лежащих к югу от  $A$ . Затем следуют подсчеты  $\xi_n$  и  $\xi_s$  и вывод  $D$ .

Для определения  $D'$  нужно ту же диаграмму повернуть на  $90^\circ$ , т. е. ось  $X$  совместить с первым вертикалом точки  $A$ , и затем сделать подсчет средних высот призм — отдельно для призм к востоку от  $A$  и отдельно для призм к западу от  $A$ . Далее вычисляем  $\eta_0$  и  $\eta_w$  и выводим  $D'$ .

Числа  $h$  выражают превышение в метрах рельефа призмы над  $A^*$ ; следовательно, для участков, лежащих ниже  $A$ , величины  $h$  отрицательны. Если участок включает в себе океанические пространства, то нужно принять в расчет притяжение толщи воды от ее уровня до дна, глубина которого оценивается по изобатам. В этом случае для соответствующих призм высоту  $h = MN$  (черт. 113) нужно разбить на две части:  $h_1 = MS$ , равное высоте пункта  $A$  над уровнем океана, и  $h_2 = NS$ , равное глубине океана, а в формулу для  $\eta$  или  $\xi$  ввести вместо  $h = MN$  величину

$$h_1 + h_2 \frac{\delta - 1,03}{\delta},$$

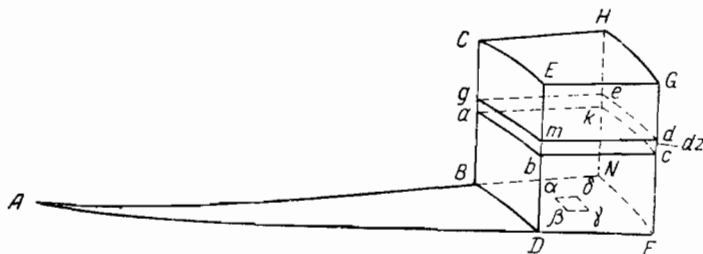
где  $1,03$  есть плотность морской воды (конечно, и  $h_1$  и  $h_2$  будут взяты со знаком минус).

Уже приходилось указывать, что район, непосредственно прилегающий к  $A$  и ограниченный окружностью радиуса  $bb$ , в вычисление по приведенным выше формулам не вводится; конечно, это можно делать только при достаточной малости этого радиуса  $bb$ , которая обеспечивает пренебрегаемость притяжений в пределах окружности  $bb$ . С другой стороны, при малых радиусах первых колец  $ccbb$ ,  $ddcc$ , нужно учитывать влияние наклона линии  $AM$  (черт. 114), если в этих кольцах встречается значительный рельеф (например, значительной глубины обрывы). Этот вопрос рассматривается в следующем параграфе.

\* Над уровнем поверхности  $A$ .

### § 86. Уклонение отвеса, вызываемое действием значительного, но близкого рельефа

В этом случае, как было уже указано в § 85, мы не можем пренебрегать наклоном линии  $AM$  к горизонту точки  $A$ . Пусть плоскость горизонта точки  $A$  на черт. 116 представлена плоскостью  $NAF$ . Построим в  $A$  две вертикальные плоскости с азимутами  $A_{n+1}$  и  $A_n$ , которые в плоскости горизонта точки  $A$  дают прямые  $AN$  и  $AF$ ; далее построим два круговых цилиндра, имеющих общей осью отвесную линию в  $A$ ; радиусы оснований цилиндров пусть будут  $r_i = AB = AD$  и  $r_k = AN = AF$ ; в плоскости горизонта точки  $A$  пусть эти два цилиндра дают концентрические

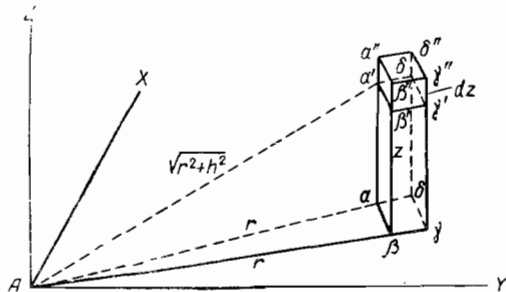


Черт. 116

окружности  $BD$  и  $NF$ . На основании  $BDNF$  построим призму с вертикальными ребрами  $BC = DE = GF = HN = h$ , причем под  $h$  будем понимать высоту рельефа, или высоту дневной поверхности Земли над уровенной поверхностью точки  $A$ . Очевидно, эта призма  $BCHNFGED$  высекается из земной коры двумя вертикальными плоскостями с азимутами  $A_{n+1}$  и  $A_n$ , двумя цилиндрами с радиусами их оснований  $r_i$  и  $r_k$ , плоскостью горизонта точки  $A$  (вернее, уровенной поверхностью этой точки) и верхней поверхностью земной коры, предполагаемой параллельной уровенной поверхности Земли. Возьмем систему прямоугольных координат с началом в точке  $A$ , с осью  $X$ , направленной по горизонтальной прямой в плоскости меридиана точки  $A$  и с осью  $Z$  — по вертикальной линии точки  $A$  кверху.

Выделим из нашей призмы элементарную призму  $abckedmg$ , имеющую высоту  $dz$  (черт. 116), и ординату  $z = bD = cF$ . Пусть элемент  $\alpha\beta\gamma\delta$  выделен в плоскости горизонта точки  $A$  двумя радиальными прямыми

$A\beta$  и  $A\gamma$  с азимутами  $A$  и  $A + dA$ , и двумя окружностями с общим центром в  $A$  и с радиусом  $r$  и  $r + dr$ ; площадь  $dp$  этого элемента будет, конечно, равна  $r \cdot dr \cdot dA$ . Двумя вертикальными плоскостями  $\alpha'\alpha A$  и  $\beta'\beta A$  с азимутами  $A$  и  $A + dA$  и двумя цилиндрами с радиусами их оснований  $r$  и  $r + dr$  выделим из элементарной призмы  $abckedmg$  призмочку  $\alpha''\delta''\gamma''\beta''\beta'\gamma'\delta'\alpha'$  (черт. 117), верхняя грань которой совпадает с плоскостью  $gedm$  (черт. 116), а нижняя — с плоскостью  $akcb$  (черт. 116). Объем этой призмочки равен  $dv =$



Черт. 117

Очевидно, эта призма  $BCHNFGED$  высекается из земной коры двумя вертикальными плоскостями с азимутами  $A_{n+1}$  и  $A_n$ , двумя цилиндрами с радиусами их оснований  $r_i$  и  $r_k$ , плоскостью горизонта точки  $A$  (вернее, уровенной поверхностью этой точки) и верхней поверхностью земной коры, предполагаемой параллельной уровенной поверхности Земли.

$= dz dp = r dr dA dz$ ; притягательное действие ее  $dF$  на точку  $A$  будет равно

$$dF = f\delta \frac{r dr dA dz}{r^2 + z^2},$$

причем  $f$  — коэффициент ньютонова притяжения,  $\delta$  — средняя плотность земной коры, а через  $z$  обозначен отрезок  $bD = cF = \beta'\beta = \gamma'\gamma$ .

Проекция  $dF$  на ось  $X$ , которую мы назовем через  $dF_x$ , получится так

$$\begin{aligned} dF_x &= f\delta \frac{r dr dA dz r \cos A}{(r^2 + z^2) \sqrt{r^2 + z^2}} = f\delta \cos A dA \frac{r^2 dr dz}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= f\delta \cos A dA \frac{dr dz}{r \left(1 + \frac{z^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Обозначим угол  $\alpha'Aa$  через  $x$ ; мы имеем

$$\operatorname{tg} x = \frac{z}{r}; \quad 1 + \frac{z^2}{r^2} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

при постоянном  $r$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{dz}{r}; \quad dz = \frac{r dx}{\cos^2 x}.$$

Поэтому

$$dF_x = f\delta \cos A dA dr \cos x dx. \quad (656)$$

Интегрирование последнего уравнения по переменному  $x$  в пределах от  $z = 0$  до  $z = h$  или от  $x = 0$  до  $x = \arcsin \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}}$  даст нам  $dF'_x$  для призмы, имеющей основанием элемент  $\alpha\beta\gamma\delta$  (черт. 116) и высоту  $h = BC = ED = GF$ . Для такой призмы мы получим из уравнения (656)

$$\begin{aligned} dF'_x &= f\delta \cos A dA dr \int_0^{\arcsin \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}}} \sin x = \\ &= f\delta \cos A dA \frac{h dr}{\sqrt{h^2 + r^2}}. \end{aligned} \quad (657')$$

Интегрируя уравнение (657') сперва по  $r$  в пределах  $r_i$  и  $r_k$  (при постоянном  $h$ ), а затем по  $A$ , мы получим действие всей призмы  $BCHNFGED$ , которое назовем через  $F_x$ . При вычислении  $\int \frac{dr}{\sqrt{h^2 + r^2}}$  используем такую подстановку

$$\begin{aligned} y &= r + \sqrt{h^2 + r^2}, \\ dy &= dr + \frac{r dr}{\sqrt{h^2 + r^2}} = \frac{y dr}{\sqrt{h^2 + r^2}}, \\ \frac{dr}{\sqrt{h^2 + r^2}} &= \frac{dy}{y}. \end{aligned}$$

В результате получим

$$F_x = f \delta (\sin A_{n+1} - \sin A_n) h \cdot \ln y, \quad \left| \begin{array}{l} r_k + \sqrt{r_k^2 + h^2} \\ r_i + \sqrt{r_i^2 + h^2} \end{array} \right.$$

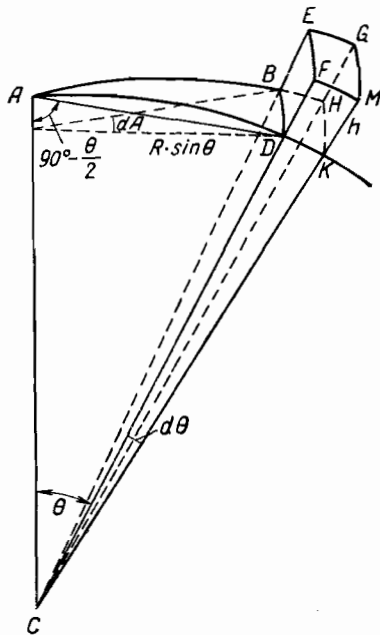
$$F_x = f \varepsilon h (\sin A_{n+1} - \sin A_n) \ln \frac{r_k + \sqrt{r_k^2 + h^2}}{r_i + \sqrt{r_i^2 + h^2}}. \quad (657)$$

Уравнение (657) и решает поставленный в настоящем параграфе вопрос. При вычислениях по формуле (650) те сравнительно близкие к  $A$  призмы, в которых имеется значительный рельеф (значительные высоты или значительные глубины), должны быть выделены, и действие их следует отдельно учитывать по формуле (657). Как перейти от  $F_x$  к соответствующему уклонению отвесной линии — это было указано ранее, в § 84 и 85.

### § 87. Вычисление уклонов отвесной линии, обусловливаемых топографическим рельефом в далеких зонах

Если учет действия рельефа на направление отвесной линии в точке  $A$  мы распространяем на территории, удаленные от  $A$  более, чем на 600 км, то надлежит учитывать влияние кривизны Земли, и именно влияние угла  $\beta$  (черт. 114) между горизонтом точки  $A$  и прямой  $AM$ , по которой действует сила притяжения вещества, находящегося в  $M$  (в величинах  $h$ , которые мы берем из топографических материалов, уже отражается, конечно, влияние кривизны Земли, но неполностью). Пусть (черт. 118)  $AC$  отвесная линия и  $C$  — центр земного шара. Построим в  $A$  две вертикальные плоскости  $BAC$  и  $DAC$  с азимутами  $A_{n-1}$  и  $A_n$ ; пусть эти плоскости пересекут уровенную поверхность  $A$  по большим кругам  $HBA$  и  $KDA$ . Далее вообразим круговые конусы  $BDC$  и  $HKC$ , с вершиной в  $C$  и с общей осью по прямой  $AC$ ; эти конусы пересекают уровенную поверхность точки  $A$  по малым кругам  $BD$  и  $HK$ . Углы  $ACD = ACB$  назовем через  $\theta_i$ ; углы  $ACH$  и  $ACK$  назовем через  $\theta_k$ ; радиус сферы  $AC = DC = CK$  назовем через  $R$ . Указанные вертикальные плоскости, два конуса, уровенная поверхность точки  $A$  и дневная поверхность Земли вырежут призму  $EBDFMKHG$  (черт. 118), в которой верхняя грань принимается параллельной нижней грани и имеющей высоту  $h = DF = MK$  над уровенной поверхностью точки  $A$ , равной средней высоте рельефа на площади  $EFGM$ . Если представим себе сперва элементарную призму с значениями углов конусов  $\theta$  и  $\theta + d\theta$ , и с азимутами боковых граней ее  $A$  и  $A + dA$ , то легко получим, что площадь  $dp$  основания такой элементарной призмы равна

$$dp = R^2 \sin \theta d\theta dA.$$



Черт. 118



Расстояние основания этой элементарной призмы от  $A$  будет равно  $2R \sin \frac{\theta}{2}$ , а угол наклона прямой, соединяющей основание ее с точкой  $A$  к горизонту последней, будет  $\frac{\theta}{2}$ . Таким образом, горизонтальная слагающая притягательного действия нашей элементарной призмы, спроектированная на плоскость меридиана точки  $A$ , будет вычисляться так

$$dF_x = f\delta h \frac{R^2 \sin \theta d\theta dA \cos A}{4R^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2}, \quad (658)$$

причем в уравнении (658) мы, очевидно, пренебрегаем изменением угла  $\frac{\theta}{2}$ , выражающего наклон вектора притяжения к плоскости горизонта точки  $A$ , вместе с перемещением притягивающего элемента по вертикали  $DF$  (черт. 118). Это обосновывается тем соображением, что даже рельеф высотой в 3 км, при удалении притягивающей призмы от  $A$  на расстояние, большее 600 км, даст амплитуду наклона хорды  $AD$  менее  $17'$ , и что непринятие во внимание этой амплитуды не повлияет на результаты вычислений по формуле (658).

Интегрируя уравнение (658), мы напишем

$$\begin{aligned} F_x &= f\delta h \int_{A_{n-1}}^{A_n} \cos A dA \int_{\theta_i}^{\theta_k} \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \frac{d\theta}{2} = \\ &= f\delta h \int_{A_{n-1}}^{A_n} \cos A dA \int_{\theta_i}^{\theta_k} \left\{ \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} - \sin \frac{\theta}{2} \right\} d\frac{\theta}{2}; \\ F_x &= f\delta h (\sin A_n - \sin A_{n-1}) h \left( \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta_k}{4}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_i}{4}} + \cos \frac{\theta_k}{2} - \cos \frac{\theta_i}{2} \right); \quad (659) \end{aligned}$$

$\theta_k$  или  $\theta_i$  могут быть до  $38^\circ$ , поэтому  $\frac{\theta}{4}$  мы в (659) можем считать не большими, и применить разложение  $\operatorname{tg} \frac{\theta}{4}$  в ряд Маклорена. Мы имеем

$$\begin{aligned} F_x &= f\delta h (\sin A_n - \sin A_{n-1}) \left[ \ln \left( \frac{\frac{\theta_k}{4} + \frac{\theta_k^3}{192}}{\frac{\theta_i}{4} + \frac{\theta_i^3}{192}} \right) - 2 \sin \frac{\theta_k - \theta_i}{4} \sin \frac{\theta_k + \theta_i}{4} \right]; \\ F_x &= f\delta h (\sin A_n - \sin A_{n-1}) \left\{ \ln \frac{\theta_k}{\theta_i} + \frac{\theta_k^2 - \theta_i^2}{48} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \sin \frac{\theta_k - \theta_i}{4} \sin \frac{\theta_k + \theta_i}{4} \right\}. \quad (660) \end{aligned}$$

Обозначая горизонтальные расстояния (по уровенной поверхности) от  $A$  через  $r$ , будем иметь

$$r_k = R\theta_k; \quad \theta_k = \frac{r_k}{R};$$

$$r_i = R\theta_i; \quad \theta_i = \frac{r_i}{R}.$$

Поэтому (660) перепишем еще так

$$F_x = f \delta h (\sin A_n - \sin A_{n-1}) \left\{ \ln \frac{r_k}{r_i} + \frac{r_k^2 - r_i^2}{48R^2} - \right. \\ \left. - 2 \sin \frac{\Theta_k - \Theta_i}{4} \sin \frac{\Theta_k + \Theta_i}{4} \right\}. \quad (661)$$

Формула (661) была дана знаменитым английским геодезистом Кларком. В ней всегда можно  $R$  не различать от радиуса земного шара. Понятно, что формула

$$- \xi'' = \frac{3}{4} \frac{\delta}{\delta_0} \frac{\zeta''}{\pi R} h (\sin A_n - \sin A_{n-1}) \left\{ \ln \frac{r_k}{r_i} + \frac{r_k^2 - r_i^2}{48R^2} - \right. \\ \left. - 2 \sin \frac{\Theta_k - \Theta_i}{4} \sin \frac{\Theta_k + \Theta_i}{4} \right\} \quad (662)$$

дает вызываемое рассматриваемой призмой уклонение отвеса  $\xi$  в меридиане точки  $A$ , причем разность  $(\sin A_n - \sin A_{n-1})$  принимается всегда положительной. Формулы (657) и (662) мы используем в главе о градусных измерениях именно при применении теории изостатической компенсации к обработке материалов по градусным измерениям.

Следует помнить, что результаты вычислений по формулам Хуттона и по формулам (657) и (662) дают ту часть уклонения отвесной линии, которая обусловлена действием топографического рельефа, т. е. неправильностями дневной поверхности Земли. Эти результаты очень далеки от действительных значений уклонений отвесных линий, вследствие компенсации действия топографического рельефа, вызываемой распределением плотностей в слоях Земли, лежащих ниже уровня Океана.

## § 88. Примеры местных уклонений отвесных линий

Значительные уклонения отвесных линий имеют место, как общее правило, в районах горных хребтов.

На меридианном профиле Сен-Готтарда в Альпах величина  $\xi$  относительного уклонения отвеса в меридиане колеблется от  $-15'',09$  до  $+20'',77$ ; следовательно, амплитуда изменения уклонения отвеса в меридиане, — все равно — абсолютного или относительного, достигает почти  $36''$ ; эта амплитуда приходится на расстояние в 90 км. Любопытно, что вблизи некоторых высоких точек этого профиля изменения величины  $\xi''$  достигают  $18''$  на расстоянии 5 км,  $12''$  — на расстоянии 5,5 км,  $11''$  — на расстоянии 3 км,  $9''$  — на расстоянии 2,6 км.

На Западном Кавказе величины  $\xi$ , отнесенные к эллипсоиду Бесселя, ориентированному в Пулково, колеблются от  $+27''$  (широта  $44^\circ$ ) до  $-20''$  (широта около  $43^\circ$ ); абсолютные уклонения, соответствующие им, будут, вероятно,  $+20''$  и  $-27''$ . На меридианном профиле через Орджоникидзе уклонения отвеса по широте достигают  $+35''$  в Орджоникидзе ( $\varphi = 43^\circ 1'$ ) и  $-18''$  в Душете ( $\varphi = 42^\circ 5'$ ); но, очевидно, колебания  $\xi$  на этом профиле лежат в больших пределах, чем  $53''$ .

Конечно, значительные уклонения отвеса мы должны иметь на некоторых островах и вблизи больших озер вулканического происхождения. Так на Сандвичевых островах, на Гавай, где находится вулкан Мауна-Кеа, разность уклонений отвесных линий на северном и южном побережье острова достигает  $97'',6$  на расстоянии 120 км (т. е. в среднем и

приближенно уклонение отвеса, обусловленное этим вулканом и действием глубины океана, около  $48''$ ).

Вблизи нашего огромного Байкальского озера, имеющего максимальные глубины до 1500 м и среднюю глубину около 700 м, должны быть значительные уклонения отвеса, тем более, что это озеро окружено хребтами довольно значительной высоты (до 2400 м для отдельных вершин хребтов, примыкающих к восточному берегу озера, и до 1600 м для некоторых вершин хребтов, примыкающих к западному берегу). В районе Байкала имеем пункты, расположенные на разных берегах озера, для которых разности уклонений в них отвесных линий достигают значений более  $40''$ . Но иногда и на совершенно равнинной местности или на местности с малым рельефом имеют место довольно заметные уклонения отвеса. Замечательным примером является район города Москвы и его окрестностей. «Местная Московская аттракция» была установлена еще в 60-х годах прошлого столетия профессором Московского межевого института и Московского университета Б. Я. Швейцером. В эту эпоху исследование этого явления было выполнено под руководством Швейцера межевыми инженерами, состоявшими сотрудниками кафедры высшей геодезии и астрономии в Межевом институте. В результате была получена детальная картина распределения уклонений отвеса по широте на площади около 9000 км между параллелями  $52^{\circ}20'$  и  $56^{\circ}00'$  и между меридианами  $36^{\circ}50'$  и  $38^{\circ}20'$ .

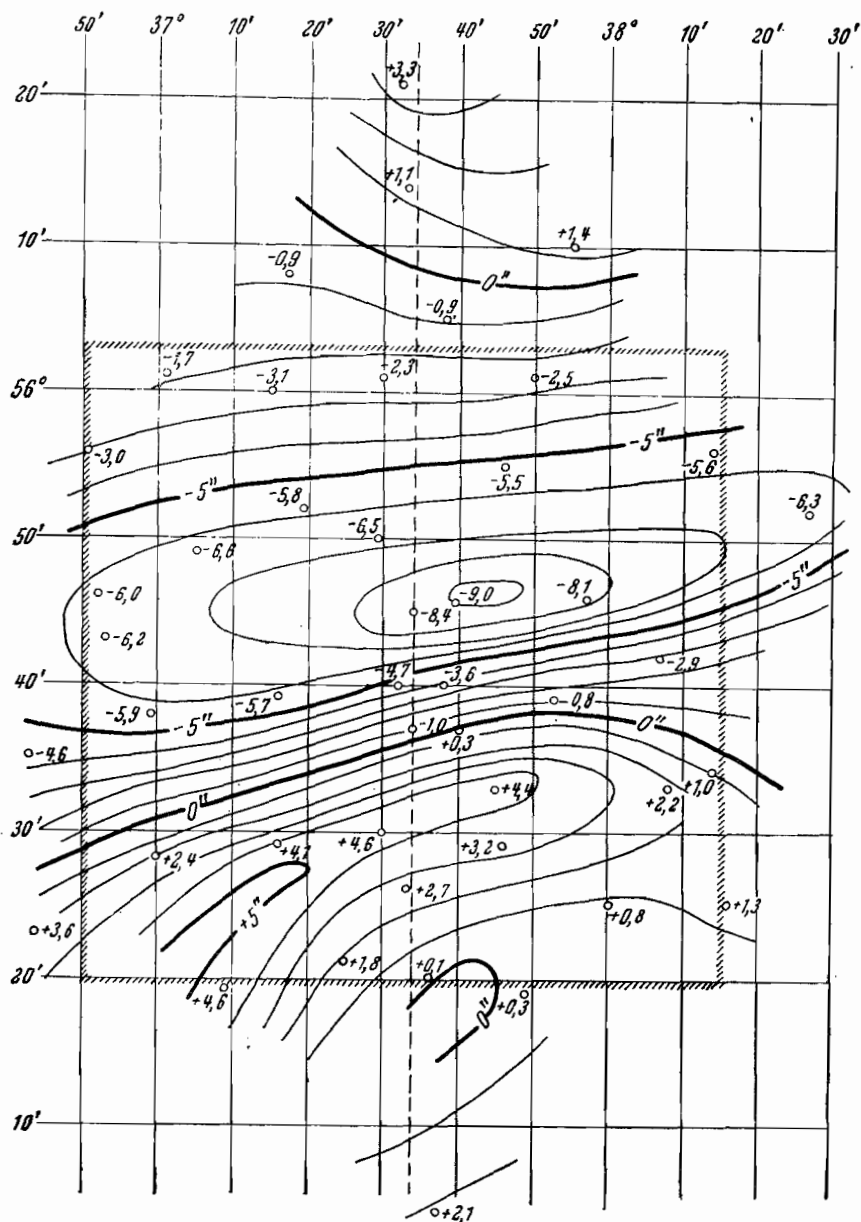
Приведем один из результатов этой работы, именно значения  $\xi = \varphi - B$  на профиле по меридиану Ивана Великого.

Троицкое . . . . .	к северу от Ивана Великого на 21 км . . .	$\xi = -0'',6$
Останкино . . . . .	„ „ „ 8 „ . . .	$\xi = -5'',1$
Иван Великий . . . . .	— — — — —	$\xi = -7'',5$
Коломенское . . . . .	к югу „ „ „ 9 „ . . .	$\xi = 0'',0$
Суханово . . . . .	„ „ „ 25 „ . . .	$\xi = +8'',1$
Матвеевское . . . . .	„ „ „ 47 „ . . .	$\xi = 0'',0$

Кроме того, отметим, что для Московской астрономической обсерватории (Красная Пресня)  $\xi$  получилось равным  $-10'',6$ , а для Ленино (бывш. Царицыно)  $\xi = 0'',0$ . Таким образом, на меридиане Ивана Великого  $\xi$  изменяется на  $15'',6$  на расстоянии 25 км, а на меридиане Московской обсерватории  $\xi$  изменяется на  $10'',6$  на расстоянии 14 км!

Фундаментальное исследование «местной Московской аттракции» и в отношении уклонений отвесных линий и в отношении распределения аномалий силы тяжести выполнил в 1932 и 1933 гг. ЦНИИГАиК. Результаты этих исследований, в которых господствовал гравиметрический метод исследования местной фигуры геоида, опубликованы ЦНИИГАиК в 1936 г. В статье проф. И. А. Казанского «Исследования по геодезической гравиметрии» впервые дана на солидном материале методика вывода уклонений отвесных линий на основании определений силы тяжести в некотором районе. Результаты, полученные ранее Швейцером, подтвердились в отношении величин  $\xi$ ; средняя квадратическая разность « $\xi$  по Швейцеру минус  $\xi$ , гравиметрически определенное», получилась равной  $+1'',0$ . На черт. 119 мы приводим карту линий равных уклонений отвеса в Московском районе. Как видно, наиболее сильно выраженное действие «Московской аттракции» имеет место на меридиане Ивана Великого; к востоку и к югу от него оно медленно ослабевает; на меридианах, лежащих к востоку и к западу от Ивана Великого на 40 км, величина  $\xi$  изменяется соответственно от  $-6'',3$  до  $+1'',3$  и от  $-6'',7$  до  $+3'',6$ ;

затухание явления нужно ожидать только на меридианах, удаленных от центра Москвы на 60 км к востоку и к западу. Отрицательные максимальные значения  $\xi$  располагаются в полосе, имеющей направление с

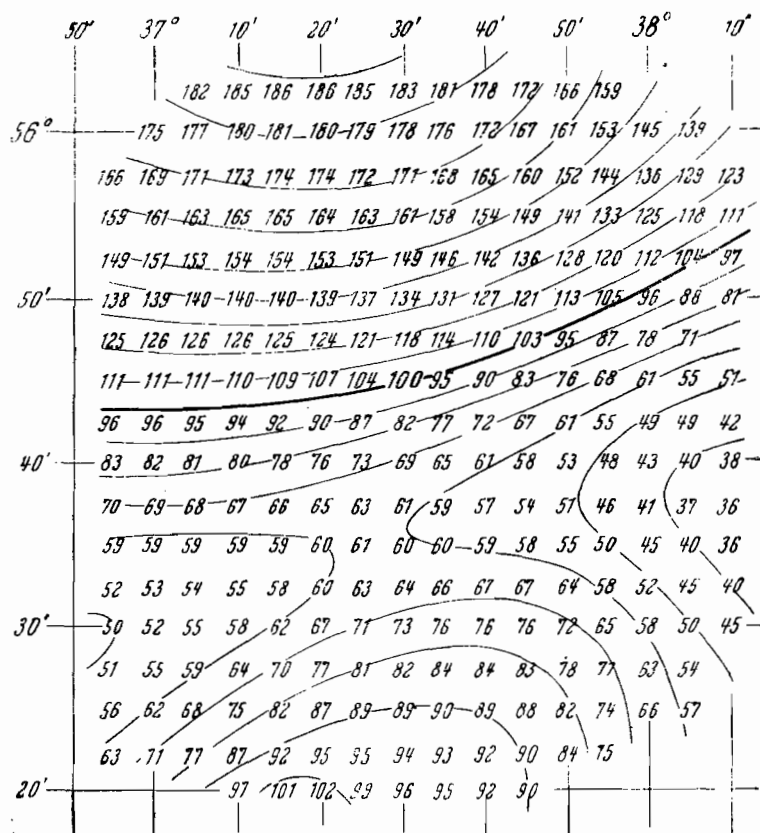


Черт. 119

юго-запада на северо-восток под румбом  $75^\circ$  и ширину около 20 км; к северу от нее, и именно в 40 км от центра Москвы, по параллели тянется узкая полоса нулевых значений  $\xi$ , после чего далее к северу располагается зона слабых положительных значений  $\xi$ . Вторая зона нулевых

уклонений располагается к югу от Москвы: эта полоса нулевых уклонений имеет в среднем румб  $CB: 70^\circ$  и в средней своей части располагается в 14 км от центра Москвы. Далее к югу следует зона положительных  $\xi$ , ось которой заметно искривлена; эта зона имеет свою центральную часть максимальных  $\xi$ , смещенную заметно от меридиана Ивана Великого на запад и простирающуюся видимо довольно далеко к юго-западу от Москвы.

Описанный ход уклонений отвеса в Московском районе следует приписать подземным залеганиям пород с плотностью, заметно меньшей



Черт. 120

средней плотности земной коры. Это, думается, достаточно подтверждается и картой высот геоида над нормальным сфероидом в районе Московской аномалии, составленной проф. Казанским и приводимой на черт. 120.

На протяжении территории СССР имеется ряд районов, где, благодаря подземным залеганиям, на местности с слабым рельефом наблюдаются заметные отклонения отвесных линий. Является, конечно, крайне интересным определенные из астрономо-геодезических работ отклонения отвесных линий и собранные из гравиметрических работ аномалии силы тяжести использовать в направлении выяснения соответствующих подземных залеганий — как в отношении оконтуривания районов таких залеганий, так и в отношении предположений о плотности этих залега-

ний и глубине их. Задача эта по существу неопределенная — конфигурация, плотность и глубина залегания возмущающих масс определяются многозначно при одной и той же системе уклонений отвеса и аномалий силы тяжести. Однако в действительности нередко границы этой неопределенности значительно суживаются: плотность может быть предопределена с некоторой уверенностью на основании геологических изысканий и методов геофизической разведки; разнообразие возможных конфигураций сводится в ряде случаев к двум-трем формам, которые и дают два-три варианта решения задачи. Конечно, в этой задаче исследования подземных залеганий центр тяжести работы переносится на детальное исследование распределения силы тяжести в данном районе, т. е. на работы *гравиметрические*.

---

## Глава X

### ГРАДУСНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

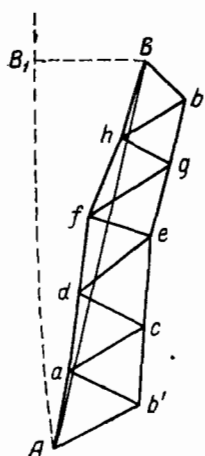
#### § 89. Градусное измерение по меридиану

В настоящем параграфе мы изложим вопрос так, как он ставился еще во времена Струве, т. е. примерно 100 лет тому назад. Это является полезным в методическом отношении; в последующем будет указано то решение вопроса, которое обычно применяется в настоящее время.

Представим себе, что имеем некоторую цепь  $AB$  треугольников триангуляции (черт. 121), имеющую направление, близкое к меридианному.

Пусть в точках  $A$  и  $B$  определены астрономические широты и астрономические азимуты сторон  $Aa$  и  $Bb$ ; цепь  $AB$  заключена между двумя базисами  $Aa$  и  $Bb$ . Обработка геодезических материалов прежде всего заключалась в уравнивании углов треугольников за условия фигур и за базисное условие, далее следовало вычисление сторон треугольников и вычисление полярных координат по методу и формулам, указанным в главе VIII. В результате получались из полярных координат длина  $D$  геодезической линии  $AB$  и азимуты  $\alpha_1$  в  $A$  на  $B$  и  $\alpha_2$  — в  $B$  на  $A$ . Так как при вычислении полярных координат размеры Земли входят лишь в определение сферических избытков треугольников, то мы имеем право заключить, что длина  $D$  получена *независимо* от каких-либо предположений о размерах и сжатии земного эллипсоида; эту длину можно рассматривать, как определенную как будто непосредственными измерениями на поверхности гоида. Точно так же азимуты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  должно отнести к

разряду азимутов *астрономических*, а не геодезических, так как вывод этих азимутов совсем не зависит от отнесения триангуляции к тому или другому эллипсоиду. Эти азимуты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  будут искажены влиянием уклонений отвеса в первом вертикале в точках  $A$  и  $B$ . При расстоянии  $AB \leq 200$  км, мы на основании подсчетов и формул, приведенных в Руководстве по высшей геодезии, части I, заключаем, что средняя ошибка величины  $D$  около  $\pm 0,7$  м, при средней ошибке измеренного угла в треугольнике триангуляции около  $\pm 0'',7$ . Средняя ошибка направления  $AB$ , поскольку она обусловлена только ошибками углов треугольников ряда  $AB$ , будет около  $\pm 0'',6$ .



Черт. 121

Следующей задачей, по получении длины  $D$  дуги  $AB$  и азимутов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в ее конечных точках, является получение расстояния  $S = AB_1$  (черт. 121) по меридиану точки  $A$  между параллелями точек  $A$  и  $B$ . Воспользуемся здесь формулами

$$b'' = (1)_m D \cos \alpha_m \left[ 1 + \frac{(5)}{\mu} l''^2 \cos^2 B_m + \frac{(6)}{\mu} b''^2 \right], \quad (280)$$

$$(5) = \frac{\mu (2 + 3t^2 + 2\eta^2)}{24\rho''^2}, \quad (6) = \frac{\mu}{8\rho''^2} \eta^2 \frac{t^2 - 1 - \eta^2 - 4\eta^2 t^2}{V^4},$$

в применении их в геодезической линии  $AB$ . Воспользуемся также формулой

$$S = \frac{b''}{(1)_m} \left[ 1 + \frac{e^2}{8} \frac{b''^2}{\rho''^2} \cos 2B_m \right]. \quad (56)$$

Из сравнения значений  $b''$ , даваемых той и другой формулой, получаем

$$S = D \cos \alpha_m \left[ 1 + \frac{2 + 3t^2 + 2\eta^2}{24\rho''^2} l''^2 \cos^2 B_m + \right. \\ \left. + \frac{\eta^2}{8\rho''^2} \frac{(t^2 - 1 - \eta^2 - 4\eta^2 t^2)}{V^4} b''^2 - \frac{e^2 b''^2}{8\rho''^2} \cos 2B_m \right].$$

Пренебрегая в последнем уравнении членами с  $\eta^4 b''^3$ , как не имеющими никакого значения в вопросе о градусных измерениях (это будет видно из последующего), и не различая по той же причине  $e'^2$  от  $e^2$ , напишем

$$S = D \cos \alpha_m \left\{ 1 + \frac{2 + 3t^2 + 2\eta^2}{24\rho''^2} l''^2 \cos^2 B_m \right\}. \quad (663)$$

Величину  $l$ , стоящую в поправочном члене, достаточно рассчитать по формуле

$$l'' = (2)_m D \sin \alpha_m \sec B_m,$$

причем понимаем:  $B_m = \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}$ ;  $\alpha_m = \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}$ ;  $\varphi_2$  — астрономическая широта точки  $B$  и  $\varphi_1$  — астрономическая широта точки  $A$ . Конечно,  $\eta^2$ , стоящая в множителе при  $l^2$ , и величина  $(2)_m$ , используемая при определении  $l$ , зависят от размеров и сжатия земного эллипсоида. Однако эти величины входят лишь в малый член 3-го порядка, который особенно мал в случае градусного измерения по меридиану. Поэтому влияние размеров и сжатия земного эллипсоида, принимаемых при вычислении поправочного члена в формуле (663), на определение  $S$  также ничтожно, как ничтожно влияние размеров и сжатия эллипсоида при вычислении сферического избытка треугольника триангуляции. Другими словами, мы можем утверждать, что дуга меридиана  $S$  получается *независимо* от размеров и сжатия земного эллипсоида. Формула (663) соответствует получению этой дуги  $S$  как будто из *непосредственного измерения вдоль меридиана дуги  $AB_1$*  (черт. 121), расположенной на поверхности океана. Если в главном члене формулы (663) мы  $\alpha_m$  возьмем как среднее из астрономических азимутов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , то, конечно, в  $S$  войдет ошибка, обусловленная отклонениями отвеса в точках  $A$  и  $B$  и ошибками



астрономических азимутов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Ошибку в  $\alpha_m$ , обусловленную ошибками астрономических азимутов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , определяем так

$$m_{\alpha_m} = \sqrt{\frac{m^2}{2} + m_q^2}.$$

Здесь  $m$  — ошибка вывода наблюдаемого астрономического азимута в  $A$  или в  $B$  для направлений  $Aa$  или  $Bb$  (черт. 121);  $m_q$  — влияние поперечного сдвига триангуляции;  $m_{\alpha_m}$  примерно будет равно  $\pm 0'',7$ . Так как мы предполагаем дугу  $AB$  отнесенной к поверхности геоида и находим дугу  $S$  на той же поверхности геоида, то влияние уклонений отвеса на азимут мы должны учитывать постольку, поскольку форма геоида на нашем участке  $BB_1A$  не может быть представлена формой эллипсоида вращения, потому что и формула (280) и формула (56), из которых как следствие получилась формула (663), отнесены к поверхности эллипсоида. Другими словами, мы должны иметь в виду уклонения отвеса по первому вертикалу в точках  $A$  и  $B$  от некоторого эллипсоида, наилучше подходящего к геоиду на участке  $ABB_1$ . Эти уклонения будут чисто местного характера, и в обычной местности (не горной) мы можем принять среднее искажение астрономического азимута этими уклонениями отвеса в первом вертикале равным  $\pm 3'' \operatorname{tg} \varphi$ . Искажение  $\alpha_m$  этими причинами будет  $\pm \frac{3''}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \varphi$ . Мы примем искажение  $\delta \alpha_m$ , обусловленное местными уклонениями отвеса относительно эллипсоида, наилучше подходящего к данному участку геоида, равным  $\pm 5''$ . Тогда обусловленное этой погрешностью  $\alpha_m$  искажение в  $S$  вычислится так

$$\Delta S = -D \sin \alpha_m \frac{1}{40\,000}.$$

Обычно  $\alpha_m$  не превышает, в случае градусного измерения по меридиану,  $7^\circ$ ; положив  $\sin \alpha_m$  равным  $1:8$ , мы получим

$$\Delta S = -D \frac{1}{320\,000} \text{ и при } D = 200 \text{ км. } \Delta S = 0,62 \text{ м.}$$

Поэтому мы можем считать, что полная средняя ошибка в  $S$ , обусловленная и ошибкой длины  $D$  и ошибкой азимута  $\alpha_m$ , не превышает  $\pm 1$  м. Как увидим в дальнейшем, эту ошибку в  $S$  можно считать пренебрегаемой при обработке градусных измерений. Чем меньше  $\alpha_m$ , тем слабее влияют ошибки азимутов на определение длины дуги по меридиану. Теперь переходим к составлению уравнения градусного измерения по меридиану. Мы имели формулу (53)

$$S = a \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \left\{ 1 - \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2B_m \right) e^2 - \left( \frac{3}{64} e^4 + \frac{3}{16} \cos 2B_m - \frac{15}{64} \cos 4B_m \right) e^4 + \frac{e^2 (B_2 - B_1)''^2}{8 \rho''^2} \cos 2B_m \right\}. \quad (53)$$

Здесь  $B_2$  и  $B_1$  — геодезические широты точек  $B$  и  $A$ , отнесенные к определяемому из градусного измерения эллипсоиду, большая полуось которого есть  $a$ , эксцентриситет которого есть  $e$ . Пусть  $a = a_0 + \Delta a$  и  $e^2 = e_0^2 + \Delta e^2$ . Раскладывая правую часть (53) в ряд Тейлора, напомним

$$\begin{aligned}
S = & a_0 \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \left\{ 1 - \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2B_m \right) e^2_0 - \right. \\
& - \left( \frac{3}{64} + \frac{3}{16} \cos 2B_m - \frac{15}{64} \cos 4B_m \right) e^4_0 \left. \right\} + a_0 \frac{e^2_0 (B_2 - B_1)''^3}{8 \rho''^3} \cos 2B_m + \\
& + \Delta a \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \left\{ 1 - \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2B_m \right) e^2_0 - \right. \\
& - \left( \frac{3}{64} + \frac{3}{16} \cos 2B_m - \frac{15}{64} \cos 4B_m \right) e^4_0 \left. \right\} + \Delta a \frac{e^2_0 (B_2 - B_1)''^3}{8 \rho''^3} \cos 2B_m - \\
& - a_0 \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \left\{ \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2B_m \right) + \right. \\
& + \left( \frac{3}{32} + \frac{3}{8} \cos 2B_m - \frac{15}{32} \cos^4 B_m \right) e^2_0 \left. \right\} \Delta e^2. \quad (664)
\end{aligned}$$

В уравнении (664) отброшен член  $a_0 \frac{(B_2 - B_1)''^3}{8 \rho''^3} \cos 2B \Delta e^2$ , как влияющий пренебрегаемо мало на результат ( $e^2 = \frac{1}{150}$ , а  $\Delta e^2$  обычно менее 1 : 5000). Из уравнения

$$M^o_m = a_0 (1 - e^2_0) (1 - e^2_0 \sin^2 B_m)^{-\frac{3}{2}}$$

мы получим

$$\begin{aligned}
M^o_m &= a_0 (1 - e^2_0) \left( 1 + \frac{3}{2} e^2_0 \sin^2 B_m + \frac{15}{8} e^4_0 \sin^4 B_m \right) = \\
&= a_0 \left( 1 + \frac{3}{2} e^2_0 \sin^2 B_m - e^2_0 + \frac{15}{8} e^4_0 \sin^4 B_m - \frac{3}{2} e^4_0 \sin^2 B_m \right).
\end{aligned}$$

Заменяя здесь  $\sin^2 B_m$  и  $\sin^4 B_m$  по формулам

$$\begin{aligned}
\sin^2 B_m &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2B_m, \\
\sin^4 B_m &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2B_m + \frac{1}{8} \cos 4B_m,
\end{aligned}$$

получим далее

$$\begin{aligned}
M^o_m &= a_0 \left\{ 1 - \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2B_m \right) e^2_0 - \left( \frac{3}{64} + \frac{3}{16} \cos 2B_m - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{15}{64} \cos 4B_m \right) e^4_0 \right\}.
\end{aligned}$$

Очевидно,  $M_m^\circ$  — радиус меридиана на референц-эллипсоиде с размерами  $a_0$  и  $e_0^2$  для средней широты  $B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}$ . Разделим уравнение (664) на  $M_m^\circ$ , и тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{S\rho''}{M_m^\circ} = & (B_2 - B_1)'' \left[ 1 + \frac{e_0^2 (B_2 - B_1)''^2}{8 \rho''^2} \cos 2B_m \right] + \\ & + (B_2 - B_1)'' \frac{\Delta a}{a_0} \left[ 1 + \frac{e_0^2 (B_2 - B_1)''^2}{8 \rho''^2} \cos 2B_m \right] - \\ & - (B_2 - B_1)'' \frac{\left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2B_m \right) + \left( \frac{3}{32} + \frac{3}{8} \cos 2B_m - \frac{15}{32} \cos 4B_m \right) e_0^2}{1 - \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2B_m \right) e_0^2} \Delta e^2, \quad (665) \end{aligned}$$

причем в (665) пренебрегли членами порядка  $(B_2 - B_1) e^4 \cdot \Delta e^2$ , как не имеющими значения.

Допустим, что мы на референц-эллипсоиде отложили дугу  $S$  по меридиану и вычислили разность широт, соответствующую этой дуге. Назвав эту разность широт через  $B_2^\circ - B_1^\circ$ , мы при ее вычислении применим, очевидно, формулу (56) и напишем

$$B_2^\circ - B_1^\circ = \frac{S\rho''}{M_m^\circ} \left( 1 - \frac{e_0^2 (B_2^\circ - B_1^\circ)''^2}{8 \rho''^2} \cos 2B_m \right). \quad (666)$$

Но уравнение (665) мы можем переписать еще так

$$\begin{aligned} \frac{S\rho''}{M_m^\circ} \left( 1 - \frac{e_0^2 (B_2^\circ - B_1^\circ)''^2}{8 \rho''^2} \cos 2B_m \right) = & (B_2 - B_1)'' + (B_2 - B_1)'' \frac{\Delta a}{a_0} - \\ & - (B_2 - B_1)'' \frac{\left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2B_m \right) + \left( \frac{3}{32} + \frac{3}{8} \cos 2B_m - \frac{15}{32} \cos 4B_m \right) e_0^2}{1 - \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2B_m \right) e_0^2} \Delta e^2, \quad (667) \end{aligned}$$

причем пренебрегли величиной порядка  $\frac{e^2 (B_2^\circ - B_1^\circ)''^3}{\rho''^3} \Delta e^2$ .

Сопоставление (666) и (667) приводит нас к уравнению

$$\begin{aligned} (B_2^\circ - B_1^\circ) = & (B_2 - B_1)'' + (B_2 - B_1)'' \frac{\Delta a}{a_0} - \\ & - (B_2 - B_1)'' \left\{ \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2B_m \right) + \left( \frac{3}{32} + \frac{3}{8} \cos 2B_m - \frac{15}{32} \cos 4B_m \right) e_0^2 + \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2B_m \right)^2 e_0^2 \right\} \Delta e^2. \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} (B_2^\circ - B_1^\circ)'' = & (B_2 - B_1)'' + (B_2 - B_1)'' \frac{\Delta a}{a_0} - \\ & - (B_2 - B_1)'' \left\{ \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2B_m \right) + \right. \\ & + \left( \frac{3}{32} + \frac{3}{8} \cos 2B_m - \frac{15}{32} \cos 4B_m + \frac{1}{16} \right) e_0^2 + \\ & \left. + \left( \frac{3}{8} \cos 2B_m + \frac{9}{16} \frac{1 + \cos 4B_m}{2} \right) e_0^2 \right\} \Delta e^2; \end{aligned}$$

$$(B^{\circ}_2 - B^{\circ}_1)'' = (B_2 - B_1)'' + (B_2 - B_1)'' \frac{\Delta a}{a_0} - (B_2 - B_1)'' \left\{ \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2B_m \right) + \right. \\ \left. + \frac{e^2_0}{16} (7 + 12 \cos 2B_m - 3 \cos 4B_m) \right\} \Delta e^2; \quad (668)$$

$B_2$  и  $B_1$  в уравнении (668) являются геодезическими широтами точек  $A$  и  $B$  на искомом эллипсоиде. Мы имеем

$$B_1 = \varphi_1 - \xi_1,$$

$$B_2 = \varphi_2 - \xi_2,$$

причем под  $\xi_1$  и  $\xi_2$  понимаются слагающие уклонения отвеса в меридиане в точках  $A$  и  $B$  по отношению к искомому эллипсоиду ( $a = a_0 + \Delta a$  и  $e^2 = e^2_0 + \Delta e^2$ ). Помня еще, что

$$e^2 = 2(\alpha) - (\alpha^2),$$

$$\Delta e^2 = 2(\Delta \alpha) - 2(\alpha)(\Delta \alpha),$$

уравнение (668) перепишем так

$$\xi''_2 = (\varphi_2 - \varphi_1)'' - (B^{\circ}_2 - B^{\circ}_1)'' + \xi''_1 + (B^{\circ}_2 - B^{\circ}_1)'' \frac{\Delta a}{a_0} - \\ - (B^{\circ}_2 - B^{\circ}_1)'' \left\{ \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos 2B^{\circ}_m \right) + \right. \\ \left. + \frac{(\alpha_0)}{4} (5 + 6 \cos 2B^{\circ}_m - 3 \cos 4B^{\circ}_m) \right\} (\Delta \alpha). \quad (669)$$

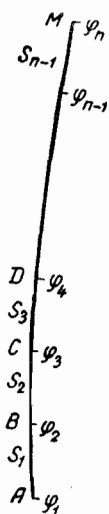
Это и есть окончательный вид уравнения градусного измерения по дуге  $AB$ ; при получении его в коэффициентах при неизвестных широтах  $B_m$  заменена через  $B^{\circ}_m$ , а величина  $(B_2 - B_1)''$  — через  $(B^{\circ}_2 - B^{\circ}_1)''$ . Очевидно, эти замены не ведут ни к каким ощутимым погрешностям.

Важно иметь в виду, что в свободном члене уравнения (669) величина  $(B^{\circ}_2 - B^{\circ}_1)''$  определяется по формуле (666), т. е.  $(B^{\circ}_2 - B^{\circ}_1)''$  есть разность геодезических широт, вычисляемая на референц-эллипсоиде с большой полуосью  $a_0$  и сжатием  $\alpha_0$  по дуге  $S$ , относящейся, однако, к геоиду или к эллипсоиду с размерами  $a$  и  $\alpha$ . Очевидно, что  $B^{\circ}_2 - B^{\circ}_1$  не представляет собой разность геодезических широт точек  $A$  и  $B$ , перенесенных на референц-эллипсоид нормальными к его поверхности. Но в геодезическом производстве укоренилось вычисление геодезических координат на референц-эллипсоиде с длинами геодезических линий, относящимися к поверхности геоида без всякого их исправления за переход от геоида к референц-эллипсоиду. При составлении уравнения (669) этот прием не приводит ни к какой погрешности в этом уравнении, если только не считаться с отступлениями геоида от искомого эллипсоида. Но при получении геодезических координат в производстве, понятно, не следовало бы применять метод *развертывания* длин, полученных на геоиде, на поверхности референц-эллипсоида, а от  $S$  следовало бы переходить сперва к ее проекции на референц-эллипсоид нормальными в  $A$  и в  $B$  к его поверхности, а затем уже эту проекцию ставить *вместо*  $S$  в формуле

(666). Тогда действительно были бы получены на референц-эллипсоиде геодезические координаты.

### § 90. Решение уравнений градусных измерений по меридиану

Обычно градусное измерение по меридиану распространяется на большую меридианную дугу (черт. 122)  $AM$ , длиной в 1000—2000—3000 км; на такой дуге астрономические пункты определяют через некоторый, приближенно постоянный, интервал; пусть, например, астрономические широты определены в точках  $A, B, C, D, \dots$ , через расстояния 200 км. Во времена Струве астрономические пункты  $A, B, C, D, \dots$



отстояли друг от друга примерно на  $2^\circ$  по широте, впоследствии начали брать эти астрономические пункты чаще, доводя расстояние между ними до 100 км и даже до 50 км. Дуги  $AB, BC, CD, \dots$ , заключенные между двумя смежными астрономическими пунктами, назовем *частными дугами*. Астрономические широты точек  $A, B, C, D, \dots, M$  назовем соответственно через  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$  и будем считать, что на дуге  $AM$  имеется  $n$  астрономических пунктов.

Уравнение (669) является по существу уравнением погрешностей; в него следовало бы вместо  $\varphi_2$  и  $\varphi_1$  ввести  $\varphi_2 + \delta\varphi_2$  и  $\varphi_1 + \delta\varphi_1$ , понимая под  $\delta\varphi_2$  и  $\delta\varphi_1$  погрешности астрономических широт. Однако в эти уравнения, составленные для разных частных дуг, войдут, кроме основных неизвестных  $\Delta a$  и  $(\Delta\alpha)$ , еще неизвестные  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ . В дальнейшем эти величины сами или их поправки  $\delta\xi_1, \delta\xi_2, \dots, \delta\xi_n$  принимаются, как погрешности уравнений, причем среднее квадратическое значение  $\xi$  оказывается около  $\pm 3'',5$ , а при тех способах обработки, в которых имеют дело с поправками  $\delta\xi$ , среднее квадратическое значение  $\delta\xi$  оказывается не менее  $\pm 2''$ . По сравнению с этими величинами средняя ошибка  $\varphi$  в  $\pm 0'',2$  является ничтожной, и поэтому ошибки широт вовсе и не вводят в уравнения типа (669). Тем более не приходится считаться с ошибкой в  $(B_2 - B_1)$ , которая не превышает нескольких сотых долей секунд.

Черт. 122

Обозначим в уравнении (669)

$$\left. \begin{aligned} (\varphi_2 - \varphi_1) - (B_2^\circ - B_1^\circ) &= l \\ (B_2^\circ - B_1^\circ)'' &= p \\ -(B_2^\circ - B_1^\circ)'' \left\{ \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos 2B_m^\circ \right) + \right. & \\ \left. + \frac{(\alpha_0)}{4} (5 + 6 \cos 2B_m^\circ - 3 \cos 4B_m^\circ) \right\} &= q \\ B_m^\circ &= \frac{B_2^\circ + B_1^\circ}{2} \end{aligned} \right\} \quad (670)$$

Тогда имеем

$$\xi_2 = l + \xi_1 + p \frac{\Delta a}{\alpha_0} + q (\Delta\alpha). \quad (671)$$



Уравнение (675) представляет собой среднее арифметическое из всех уравнений системы (674). Обозначим

$$\sum_{i=1}^{n-1} L = L_m; \quad \sum_{i=1}^{n-1} P = P_m; \quad \sum_{i=1}^{n-1} Q = Q_m \quad (676)$$

и напомним (675) в таком виде

$$\sum_{i=1}^n \xi = L_m + P_m \frac{\Delta a}{a_0} + Q_m (\Delta \alpha) + \xi_1. \quad (677)$$

В дальнейшем применим так называемую «астрономо-геодезическую» обработку уравнений, доставляемых частными дугами нашей меридианной дуги  $AM$ . Другими словами, не будем использовать при этом никаких материалов, кроме астрономо-геодезических по нашей дуге. Тогда вывод из уравнений (672) величины  $\Delta a$  и  $\Delta \alpha$  может быть сделан только при рассматривании величин  $\xi$ , как *случайных* и именно, как случайных ошибок астрономических широт  $\varphi$ , вызываемых, однако, не ошибками астрономических наблюдений, а местными, случайными волнами геоида. Считая величины  $\xi$  как бы случайными погрешностями широт  $\varphi$ , мы, однако, не можем к системе уравнений (672) применить способ наименьших квадратов — погрешности уравнений этой системы *зависимы* друг от друга. Отсюда и явилась необходимость к переходу от системы (672) к системе уравнений (674): в последней системе погрешности уравнений *независимы друг от друга*, если величину  $\xi_1$  отнести к числу определяемых из этих уравнений неизвестных  $\frac{\Delta a}{a_0}$  и  $(\Delta \alpha)$ . Появление третьего неизвестного в виде  $\xi_1$  делается понятным, если учесть, что при отыскании эллипсоида, наилучшего подходящего к геоиду, нужно определить не только его размеры и сжатие, но и его *ориентировку*, или положение его относительно геоида, что при пользовании меридианным профилем обеспечивается определением величины  $\xi$  хотя бы в одной астрономической точке этого профиля. Конечно, должна была бы входить еще и высотная ориентировка искомого эллипсоида, но пренебрежение редукциями элементов дуги геоида на поверхность искомого эллипсоида при получении дуги  $S$  делает излишним введение в уравнения (672) или (674) этой неизвестной высоты геоида над искомым эллипсоидом: фактически как бы принимается, что сумма высот геоида над эллипсоидом, взятых для всех  $n$  астрономических пунктов, равна нулю.

Уравнения (674) мы можем решать по способу наименьших квадратов. Рассматривая уравнения (674), как обычные уравнения погрешностей способа наименьших квадратов, переходим от них к трем нормальным уравнениям с неизвестными  $\xi_1$ ,  $\frac{\Delta a}{a_0}$  и  $(\Delta \alpha)$ . Определив эти неизвестные, подставим их обратно в уравнения (674), и тогда выведем все вели-

чины  $\xi$ . Очевидно,  $\xi = \sqrt{\frac{\sum \xi^2}{n-3}}$  будет ошибкой единицы веса и одновременно средним квадратическим значением случайного местного отклонения отвесной линии в меридиане. Понятно, что указанное решение уравнений (674) приводит к определению эллипсоида, наилучшего подходящего к геоиду по меридианной дуге  $AM$  (черт. 122).

Но укажем еще прием Струве решения уравнений (674). В уравне-

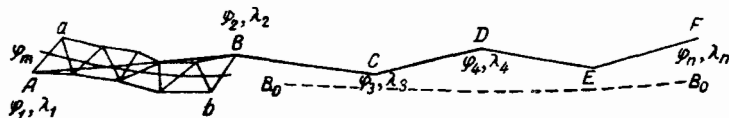
нии (677) Струве полагает  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i = 0$ . Вычитая после этого уравнение (677) из каждого из уравнений (674), мы получаем

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= -L_m - P_m \frac{\Delta a}{a_0} - Q_m (\Delta \alpha) \\ \xi_2 &= (L_1 - L_m) + (P_1 - P_m) \frac{\Delta a}{a_0} + (Q_1 - Q_m) (\Delta \alpha) \\ \xi_3 &= (L_2 - L_m) + (P_2 - P_m) \frac{\Delta a}{a_0} + (Q_2 - Q_m) (\Delta \alpha) \\ &\dots \dots \dots \\ \xi_n &= (L_{n-1} - L_m) + (P_{n-1} - P_m) \frac{\Delta a}{a_0} + (Q_{n-1} - Q_m) (\Delta \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (678)$$

Остается от этих уравнений перейти по правилам способа наименьших квадратов к двум нормальным уравнениям для определения  $\frac{\Delta a}{a_0}$  и  $(\Delta \alpha)$ .

### § 91. Градусное измерение по параллели

Пусть *частные* дуги, образующие градусное измерение по параллели, суть геодезические линии  $AB, BC, CD, \dots, EF$  (черт. 123); каждая из



Черт. 123

этих геодезических линий имеет азимуты, близкие к 90 и 270°. На астрономических точках градусного измерения, т. е. на точках  $A, B, C, \dots, F$  определены астрономические широты  $\varphi$  и астрономические долготы  $\lambda$ , и конечно, на каждой из этих точек определен астрономический азимут некоторого бока триангуляции. Каждое звено триангуляции, диагональ которого служит геодезическая линия  $AB$  или  $BC$  или  $CD$ , заключено между двумя базисами (на черт. 123 базисы звена  $AB$  суть стороны  $Aa$  и  $Bb$ ). Обработка начинается с уравнивания углов треугольников каждого звена в отдельности за условия фигур и за условия базисов. Конечно, раз имеются долготы  $\lambda$ , то можно было бы в точках  $A, B, C, D, \dots$  получить лапласовы азимуты и затем к условиям фигур и базисов по каждому звену присоединить еще азимутальное условие по тому же звену и уравнивать углы треугольников за условия фигур, условие базисов и условие азимутальное. Однако в практике градусных измерений по параллели этого никогда не делалось, возможно потому, что в прежних градусных измерениях по параллелям всегда свободные члены азимутальных уравнений получались слишком крупными, причина чего указана в историческом очерке о градусных измерениях.



После уравнивания треугольников звена за условия фигур и базисов, следовало вычисление длин сторон треугольников, а затем — вычисление полярных координат. В результате получались длины  $D$  геодезических линий  $AB, BC, CD, DE, EF, \dots$  и астрономические азимуты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  каждой геодезической линии в ее конечных точках. После этого выполнялось определение длины  $S$  дуги  $A_1B_1$  (черт. 124) параллели между меридианами точек  $A$  и  $B$  на широте *средней* между широтами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  точек  $A$  и  $B$ . Для решения этой задачи используем формулу (280)

$$l'' = (2)_m D \sin \alpha_m \sec \varphi_m \left[ 1 + \frac{l''^2 \sin^2 \varphi_m}{24 \rho''^2} - \frac{1 + \eta^2 - 9\eta^2 t^2}{24 V^4 \rho''^2} b''^2 \right]; \quad (280)$$

с другой стороны,

$$l'' = (2)_m S \sec \varphi_m; \quad \varphi_m = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

Поэтому

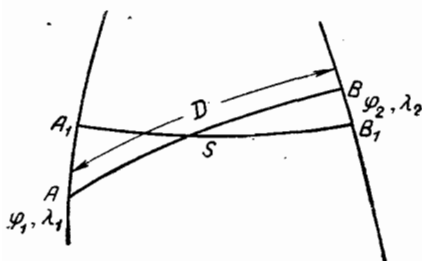
$$S = D \sin \alpha_m \left[ 1 + \frac{l''^2 \sin^2 \varphi_m}{24 \rho''^2} - \frac{1 + \eta^2 - 9\eta^2 t^2}{24 V^4 \rho''^2} b''^2 \right]. \quad (679)$$

В формуле (679) в поправочных членах можем взять

$$l = \lambda_2 - \lambda_1,$$

$$b = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Другими словами, только для вычисления коэффициента  $\frac{1 + \eta^2 - 9\eta^2 t^2}{24 V^4 \rho''^2}$  придется взять сжатие Земли, но, очевидно, влияние ошибки того



Черт. 124

или другого принятого при этом сжатия Земли будет ничтожно и пренебрегаемо мало сказываться на величине  $S$ , в особенности мало потому, что  $b$  для градусного измерения по параллели всегда мало (даже приняв  $\eta = 0$ , мы имели бы в  $S$  относительную ошибку всего около 1 : 300 000). Таким образом, мы можем считать, что  $S$  по формуле (679) определяется *независимо* от установления размеров и сжатия определяемого из градусного измерения эллипсоида. Мы можем считать, что  $S$  как бы получено из *непосредственного измерения* дуги  $A_1B_1$  в натуре.

Применяя те же рассуждения, которые уже были приведены в § 89 относительно искажения азимута  $\alpha_m = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$  мы из (679) имеем

$$\Delta S = D \cos \alpha_m \delta \alpha_m,$$

$$\frac{\Delta S}{S} = \operatorname{ctg} \alpha_m \delta \alpha_m$$

и, полагая  $\delta \alpha_m = 5''$  и  $\alpha_m = 83^\circ$ , получим

$$\frac{\Delta S}{S} < 1 : 280\,000.$$

Мы можем считать, что при  $S \leq 200$  км средняя ошибка в  $S$ , обусловленная и ошибками триангуляции, и ошибками азимутов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , не превышает  $\pm 1$  м, а это позволяет в дальнейшем длину  $S$  считать просто безошибочной.

Отметим теперь, что обычно относят все  $S$ , полученные по каждой частной дуге для средней ее широты  $\varphi_m$ , на общую параллель, имеющую широту  $B_0$ , округленную до полуградуса и ближайшую к широтам  $\varphi_m$  для всех частных дуг. Поэтому приходится дуги  $S$  перечислить по такой формуле

$$\frac{S'}{S} = \frac{N_0 \cos B_0}{N \cos \varphi_m} = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_m}}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_0}} \frac{\cos B_m}{\cos \varphi_m}. \quad (680)$$

В эту формулу (680) входит неизвестное  $e^2$  для искомого эллипсоида, однако, принимая  $e^2$  по выводам из современных градусных измерений, мы внесем в  $S'$  ошибку, вообще меньшую 1 : 1 200 000 и именно вследствие близости  $\varphi_m$  и  $B_0$ .

Переходим теперь к составлению уравнения градусного измерения по параллели. Мы имеем

$$S' = N \frac{(L_2 - L_1)''}{\rho''} \cos B_0, \quad (681)$$

причем под  $L_2$  и  $L_1$  понимаются геодезические долготы точек  $A$  и  $B$ , отнесенные к определяемому из градусного измерения эллипсоиду. Назовем через  $N_0$  значение  $N$  для эллипсоида с большой полуосью  $a_0$  и сжатием  $(\alpha_0)$ , причем для определяемого эллипсоида имеем

$$a = a_0 + \Delta a, \\ (\alpha) = (\alpha_0) + (\Delta \alpha).$$

Мы можем теперь переписать уравнение (681) так

$$S' = N_0 \frac{(L_2 - L_1)''}{\rho''} \cos B_0 + \left( \frac{\partial N}{\partial a} \right) \frac{(L_2 - L_1)''}{\rho''} \cos B_0 \Delta a + \\ + \left( \frac{\partial N}{\partial e^2} \right) \cos B_0 \frac{(L_2 - L_1)''}{\rho''} \Delta e^2,$$

причем под  $N_0$  понимается значение  $N$  под широтой  $B_0$  на эллипсоиде с размерами  $a_0$  и  $e_0$ . Далее напомним

$$S' = N_0 \frac{(L_2 - L_1)''}{\rho''} \cos B_0 + \frac{N_0}{a_0} \frac{(L_2 - L_1)''}{\rho''} \cos B_0 \Delta a + \\ + \frac{a_0 \sin^2 B_0 \cos B_0}{2 \sqrt{(1 - e_0^2 \sin^2 B_0)^3}} \frac{(L_2 - L_1)''}{\rho''} \Delta e^2; \\ \frac{S' \rho''}{N_0} = (L_2 - L_1)'' \cos B_0 + (L_2 - L_1)'' \cos B_0 \frac{\Delta a}{a_0} + \\ + \frac{\sin^2 B_0 \cos B_0}{2(1 - e_0^2 \sin^2 B_0)} (L_2 - L_1)'' \Delta e^2. \quad (682)$$

Очевидно, если дугу  $S'$  отложим по параллели с широтой  $B_0$  на референц-эллипсоиде с размерами  $a_0$  и  $e_0^2$ , то

$$\frac{S' \rho''}{N_0 \cos B_0} = (L_2^\circ - L_1^\circ)'' \quad (683)$$



коэффициентов при  $(\Delta\alpha)$  и  $\Delta a$  во всех уравнениях (686) остается постоянным. Это, конечно, становится очевидным и потому, что из измерений по дуге окружности, каковой является земная параллель, можно определить лишь радиус этой окружности.

Применяя астрономо-геодезический метод, мы могли бы поставить требование минимума суммы  $\eta^2$ , но решение под этим условием уравнений (686) будет только тогда вполне определенным, когда мы заранее в этих уравнениях примем известным или  $(\Delta\alpha)$ , или  $\Delta a$ . Чтобы вывести и  $\Delta a$  и  $(\Delta\alpha)$  из градусных измерений по параллелям, необходимо иметь хотя бы две дуги (образованные каждая, конечно, из ряда частных дуг), расположенные в заметно различных широтах.

## § 92. О точности и значении выводов из отдельных дуг по меридианам и по параллелям. Выгодное географическое распределение градусных измерений

Будем считать, что сжатие искомого эллипсоида установлено; тогда в уравнениях (678) мы отнесем члены с  $(\Delta\alpha)$  в состав свободных членов этих уравнений. Далее допустим, что астрономические пункты на дуге меридиана расположены через постоянный интервал  $\Delta\varphi''$  по широте. Тогда коэффициенты  $P$  в уравнениях (678) при  $n-1$  частных дугах и при  $n$  нечетном будут таковы

$$\begin{aligned}
 & -\frac{n-1}{2} \Delta\varphi, \\
 & -\left(\frac{n-1}{2} - 1\right) \Delta\varphi, \\
 & -\left(\frac{n-1}{2} - 2\right) \Delta\varphi, \\
 & -\left(\frac{n-1}{2} - 3\right) \Delta\varphi, \\
 & \dots \dots \dots \\
 & -2 \Delta\varphi, \\
 & -\Delta\varphi, \\
 & 0, \\
 & +\Delta\varphi, \\
 & +2 \Delta\varphi, \\
 & \dots \dots \dots \\
 & \left(\frac{n-1}{2} - 2\right) \Delta\varphi, \\
 & \left(\frac{n-1}{2} - 1\right) \Delta\varphi, \\
 & \frac{n-1}{2} \Delta\varphi.
 \end{aligned}$$

Другими словами, сумма квадратов коэффициентов при  $\frac{\Delta a}{a_0}$  в уравнениях (678) представляет собой сумму квадратов целых чисел от 1 до  $\frac{n-1}{2}$ , умноженную на  $2\Delta\varphi^2$ . Поэтому имеем, что эта сумма равна

$$2\Delta\varphi^2 \frac{(n-1+1) \left(\frac{n-1}{2} + 1\right) \left(\frac{n-1}{2}\right)}{6} = \frac{(n+1)n(n-1)}{12} \Delta\varphi^2.$$

Следовательно, вес вывода  $\frac{\Delta a}{a_0}$  (при заданном  $(\alpha)$ ) из дуги меридиана, имеющей  $n$  астрономических пунктов, равен

$$P_a = \frac{(n+1)n(n-1)}{12} \Delta\varphi^2.$$

Средняя ошибка величины  $a$  будет равна

$$m_a = \frac{\mu}{\sqrt{\frac{(n+1)n(n-1)}{12}}} \frac{a_0}{\Delta\varphi}. \quad (687)$$

В (687) ошибка единицы веса есть среднее квадратическое значение местного уклонения отвесной линии, которое следует принять равным  $\pm 3''$ . Для дуги Струве мы имеем  $\Delta\varphi = 7200''$  и  $n = 13$ . Поэтому для этой дуги имеем

$$m_a = \frac{1}{2400 \sqrt{14,13}} a_0 = \frac{a_0}{32400} = \pm 197 \text{ м.}$$

В действительности эта дуга, проходящая по очень благоприятной местности, имеет  $\mu = \pm 2''$  и, следовательно, для нее правильнее считать  $m_a = \pm 131 \text{ м.}$  Возьмем еще дугу с  $n = 2$  и  $\Delta\varphi = 7200''$ ; мы получаем

$$m_a = \sqrt{2} \frac{\mu}{\Delta\varphi} a_0 = \sqrt{2} \frac{3}{7200} a_0 = \frac{a_0}{1714} = \pm 3715 \text{ м!}$$

Эти числа показывают убедительно, насколько грубо мы определяем большую полуось из коротких меридианных дуг, и осуждают старую практику градусных измерений, когда оперировали именно с дугами длиной в  $2^\circ$  и даже в  $1^\circ$ , а также и последующую практику, когда при выводе  $a$  и  $(\alpha)$  к новым длинным дугам присоединяли короткие старые дуги, геодезически не связанные с этими длинными дугами. Нужно взять около 300 меридианных дуг, геодезически между собой не связанных и имеющих каждая протяжение в  $2^\circ$ , чтобы получить  $a$  с точностью, обеспечиваемой одной дугой Струве! Совершенно очевидно, что следует иметь достаточно длинные меридианные дуги, оснащенные рядом астрономических пунктов. Возьмем далее две меридианные дуги, геодезически между собой не связанные: первая дуга имеет конечные широты  $\varphi_2$  и  $\varphi_1$ , вторая — конечные широты  $\varphi_4$  и  $\varphi_3$ . Для этих дуг напомним такие уравнения

$$\begin{aligned} \xi_2 - \xi_1 &= l_1 + (\varphi_2 - \varphi_1)'' \frac{\Delta a}{a_0} - \\ &- (\varphi_2 - \varphi_1)'' \left\{ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos 2\varphi'_m \right\} (\Delta \alpha) \dots \varphi'_m = \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}, \end{aligned}$$

$$\xi_4 - \xi_3 = l_2 + (\varphi_4 - \varphi_3)'' \frac{\Delta a}{a_0} -$$

$$- (\varphi_4 - \varphi_3)'' \left\{ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos 2\varphi_m'' \right\} (\Delta \alpha) \dots \varphi_m'' = \frac{\varphi_4 + \varphi_3}{2},$$

пренебрегая при этом различием  $\Delta e$  от  $2(\Delta \alpha)$ .

Исключая неизвестное  $\frac{\Delta a}{a_0}$ , получаем

$$(\varphi_4 - \varphi_3)'' (\xi_2 - \xi_1) = l_1 (\varphi_4 - \varphi_3) - (\varphi_2 - \varphi_1) (\varphi_4 - \varphi_3) \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos 2\varphi_m' \right) (\Delta \alpha) +$$

$$+ \frac{\Delta a}{a_0} (\varphi_2 - \varphi_1) (\varphi_4 - \varphi_3);$$

$$(\varphi_2 - \varphi_1) (\xi_4 - \xi_3) = l_2 (\varphi_2 - \varphi_1) - (\varphi_2 - \varphi_1) (\varphi_4 - \varphi_3) \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos 2\varphi_m'' \right) (\Delta \alpha) +$$

$$+ \frac{\Delta a}{a_0} (\varphi_2 - \varphi_1) (\varphi_4 - \varphi_3);$$

$$(\varphi_2 - \varphi_1) (\varphi_4 - \varphi_3) \frac{3}{2} (\cos 2\varphi_m'' - \cos 2\varphi_m') (\Delta \alpha) + l_1 (\varphi_4 - \varphi_3) - l_2 (\varphi_2 - \varphi_1) =$$

$$= (\varphi_4 - \varphi_3) (\xi_2 - \xi_1) - (\varphi_2 - \varphi_1) (\xi_4 - \xi_3).$$

Отсюда средняя ошибка в  $(\Delta \alpha)$  получается так

$$m_a = \frac{\sqrt{2} \mu \sqrt{(\varphi_4 - \varphi_3)^2 + (\varphi_2 - \varphi_1)^2}}{3 (\varphi_2 - \varphi_1) (\varphi_4 - \varphi_3) \sin (\varphi_m' - \varphi_m'') \sin (\varphi_m' + \varphi_m'')},$$

$$m_a = \frac{\sqrt{2}}{3} \mu \frac{\sqrt{\frac{1}{(\varphi_2 - \varphi_1)^2} + \frac{1}{(\varphi_4 - \varphi_3)^2}}}{\sin (\varphi_m' - \varphi_m'') \sin (\varphi_m' + \varphi_m'')}. \quad (688)$$

Из (688) очевидно, что наименьшее  $m_a$  получается тогда, когда  $\varphi_m'$  и  $\varphi_m''$  будут дополнять друг друга до  $90^\circ$ , и когда  $\varphi_m''$  будет близко к нулю. Два не связанные между собой меридианные градусные измерения — одно располагающееся вблизи экватора, а другое — вблизи полюса Земли, дают наивыгоднейшее определение земного сжатия. Именно эти соображения были руководящими при организации парижской Академией Наук в 1735 г. двух экспедиций для измерения градусов по меридиану: одного в Перу, на экваторе, и другого — в Лапландии.

Положим в (688):  $\varphi_m' = 90^\circ$ ;  $\varphi_m'' = 0$ ;  $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_4 - \varphi_3 = 7200''$ ;  $\mu = \pm 3''$ ; тогда

$$m_a = \frac{2.3}{3.7200} = \frac{1}{3600}.$$

Изменению знаменателя сжатия на одну единицу соответствует изменение самого сжатия на  $1 : 90\,000$  (приближенно); поэтому  $m_a = \frac{1}{3600}$  соответствует изменению знаменателя сжатия на  $\pm 25$  единиц. Очевидно, что короткие меридианные дуги дают грубый и неприемлемый результат для определения сжатия  $(\alpha)$ .

Нужно амплитуду и северной, и южной дуги довести до  $16^\circ$ , чтобы иметь  $m_\alpha$  около  $\pm 3$  единиц в знаменателе сжатия, но наличие промежуточных астрономических пунктов на этих длинных дугах, конечно, заметно еще повлияет на уменьшение средней ошибки в  $m_\alpha$ . Приведем теперь выведенные проф. Ф. Н. Красовским формулы для оценки точности выводов из градусных измерений по меридианам и по параллелям. Мы имеем, опять-таки не различая  $\Delta e^2$  от  $2\Delta\alpha$ :

1) при определении и полуоси, и сжатия из отдельной дуги меридиана

$$\left. \begin{aligned} P_a &= \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{20} \Delta\varphi^4 \sin^2 2\Phi \times \\ &\times \frac{1}{(1+3\cos 2\Phi)^2 + \frac{3}{2}(n-2)\Delta\varphi^2 \left[ \frac{n-1}{2} + \frac{n-3}{5} \cos 2\Phi + \frac{n-13}{10} \cos 4\Phi \right]} \\ P_\alpha &= \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{80} \Delta\varphi^4 \sin^2 2\Phi \end{aligned} \right\}, \quad (689)$$

где  $\Phi$  — средняя широта дуги,  $n$  — число астрономических пунктов на дуге;

$\Delta\varphi$  — разность широт двух смежных астрономических пунктов,

$P_a, P_\alpha$  — веса определения полуоси  $a$  и сжатия ( $\alpha$ );

2) при определении одной полуоси из отдельной дуги по меридиану

$$P_a = \frac{(n+1)n(n-1)}{12} \Delta\varphi^2; \quad (690)$$

3) при определении одной полуоси из отдельной дуги по параллели

$$P_a = \frac{(n+1)n(n-1)}{12} \Delta\lambda^2 \cos^2 \varphi, \quad (691)$$

где  $\Delta\lambda$  — долготный интервал любой частной дуги;

4) при определении и полуоси, и сжатия из двух не связанных между собой меридианных дуг под средними широтами  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$

$$\left. \begin{aligned} P_a &= \frac{3(n+1)n(n-1)}{4} \times \frac{(\cos 2\Phi_1 - \cos 2\Phi_2)^2 \Delta\varphi^2}{2+6(\cos 2\Phi_1 + \cos 2\Phi_2) + 9(\cos^2 2\Phi_2 + \cos^2 2\Phi_1)} \\ P_\alpha &= \frac{3}{32} (n+1)n(n-1) (\cos 2\Phi_1 - \cos 2\Phi_2)^2 \Delta\varphi^2. \end{aligned} \right\} \quad (692)$$

Число  $n$  астрономических пунктов считается в (692) одинаковым для обеих дуг, а  $\Delta\varphi$  считается одним и тем же для каждой дуги. При пользовании (692) предполагается, что  $\Phi_2 - \Phi_1$  довольно значительно, так что по сравнению с ним  $\Delta\varphi$  является малой величиной.

Приведем несколько числовых расчетов. Для дуги Струве имеем по (689):  $n = 13$ ;  $\Delta\varphi = 7200''$ ;  $\Phi = 58^\circ$ ;

$$\begin{aligned} m_a &= \pm 184 \text{ м}, & \mu &= \pm 2'' \\ m_\alpha &= \pm 12; \end{aligned}$$

Для дуги Западно-Европейского меридиана

$$n = 34; \quad \Phi = 47^{\circ}19'; \quad \Delta\varphi = 2950'', \quad \mu = \pm 4'';$$

$$m_a = \pm 352 \text{ м};$$

$$m_\alpha = \pm 11,4.$$

Для дуги Струве и Главной Индийской дуги, полагая  $n = 13$ ,  $\Delta\varphi = 7200''$ ,  $\Phi_2 = 58^{\circ}$ ,  $\Phi_1 = 18^{\circ}$ , по формуле (692) получаем при  $\mu = \pm 3''$ :  $m_a = \pm 177 \text{ м}$ ;  $m_\alpha = 1 : 42\,960$  или в единицах знаменателя сжатия  $\pm 2,05$ .

Эти подсчеты показывают, что из общей обработки четырех меридианных дуг, построенных по типу дуги Струве, мы могли бы получить большую полуось с средней ошибкой всего в  $\pm 90 \text{ м}$ , а из двух пар меридианных дуг, типа пары «Струве — Индия», определили бы земное сжатие со средней ошибкой всего в  $\pm 1,5$  единицы в знаменателе сжатия. Однако эти благоприятные выводы далеко не совсем правильны. Нужно помнить, что обработка отдельной дуги по способу наименьших квадратов, т. е. под условием минимума  $\sum \xi^2$  или  $\sum \eta^2$ , приводит нас, как уже было указано выше, к выводу *местного эллипсоида, наилучше подходящего к местной фигуре геоида на протяжении этой рассматриваемой дуги*. Данные по редким астрономическим пунктам, взятых на данной дуге меридиана (или на дуге параллели), могут быть искажены значительными местными влияниями; увеличение числа  $n$  астрономических пунктов на дуге ведет к повышению точности вывода местного эллипсоида, но вряд ли в той степени, как это указывается формулами (689), потому что распределение местных притяжений по данной дуге градусного измерения вовсе, конечно, не подчиняется законам распределения случайных ошибок в данном ряде наблюдений. Поэтому на правильность выводов по формулам (689) или (690) и (691) мы не можем вполне полагаться и совсем не можем полагаться в горных районах и в районах значительных дислокаций земной коры. Но нужно иметь в виду, что эти формулы относятся, кроме того, к выводу *местного эллипсоида*, соответствующего тому или иному градусному измерению. Соединяя вместе уравнения градусных измерений типа уравнений (678) по разным, геодезически не связанным меридианным дугам, числом  $k$ , и решая эти уравнения все вместе под условием минимума суммы квадратов величин  $\xi$ , относящихся ко всем астрономическим точкам этих  $k$  меридианных дуг, мы в результате определяем *не один, а  $k$  эллипсоидов*: все эти эллипсоиды будут иметь одну и ту же большую полуось и одно и то же сжатие, каждый из них будет иметь малую ось, параллельную оси вращения Земли, но положение этих  $k$  эллипсоидов будет все-таки различно в теле Земли. Иначе вышло бы, что не имея геодезической связи между  $k$  дугами, мы эту связь получили бы, в отношении правда только геодезических широт, из нашей обработки  $k$  градусных измерений. Будут ли  $a$  и  $\alpha$  для эллипсоида, выведенного из  $k$  градусных измерений, наилучше подходящими для каждой отдельной из этих  $k$  дуг? Конечно, нет — потому что в общем выводе местные особенности геоида по каждой дуге будут как-то смешиваться.

Задача определения эллипсоида, характеризующего геоид (его профиль) в пределах данного отдельного градусного измерения, решается значительным учащением астрономических пунктов вдоль дуги этого градусного измерения и целесообразным использованием материала по этому большому числу астрономических пунктов вдоль дуги, которое вовсе не сводится к механическому включению данных по всем этим



астрономическим пунктам в уравнения (678): здесь придется применить тот или другой отбор астрономических пунктов, который должен основываться на правильном учете *чисто местных притяжений*, и вряд ли в этом отборе можно будет обойтись без гравиметрического материала.

Когда мы выполняем общую обработку  $k$  меридианных дуг, между собой геодезически не связанных, или общую обработку  $k$  меридианных дуг и  $p$  дуг параллелей, также не связанных геодезически друг с другом, то по существу цель задачи можно формулировать, как отыскание размеров и сжатия общего земного эллипсоида, но, конечно, только в предположении, что геоид не имеет *широких волн, волн общего значения*, а поверхность его в отношении поверхности общего земного эллипсоида представляется рядом *мелких волн случайного характера*. Только при условии правильности такого предположения мы имели бы некоторое основание для заключения, что средняя ошибка в  $a$  и средняя ошибка в  $\alpha$ , полученные по способу наименьших квадратов из общего решения всех уравнений по  $k$  меридианным дугам и по  $p$  дугам параллелей, указывают *степень приближения* нашего вывода к определению элементов *общего эллипсоида*. Другими словами, тогда вывод из  $k$  меридианных дуг одинаковой длины, одинаково оснащенных астрономическими пунктами, одинаково расположенных по широте и лишь находящихся на разных меридианах, приводил бы к большему в  $\sqrt{k}$  раз приближению полученных из этих дуг значений  $a$  и  $\alpha$  к значениям  $a$  и  $\alpha$  для *общего земного эллипсоида*, по сравнению с выводом этих же величин из *одной* такой же меридианной дуги. Но при определении из  $k$  дуг не одного, а  $k$  эллипсоидов, хотя бы и с одними и теми же значениями  $a$  и  $\alpha$ , не приходится, строго рассуждая, говорить о выводе *общего земного эллипсоида*, или нужно предполагать, что сдвиги этих  $k$  эллипсоидов относительно друг друга ничтожны, и с ними как бы можно не считаться. Нужно, однако, иметь в виду, что существование широких волн геоида сохраняющих свои числовые характеристики на площадях порядка континентов, достаточно доказано. Поэтому выводы размеров и сжатия эллипсоида из различных отдельных градусных измерений различаются друг от друга *не случайно, а систематически*. *Никакой связи вывода из отдельного градусного измерения с подходом к определению общего земного эллипсоида мы не имеем*. Применение способа наименьших квадратов к выводу *общего эллипсоида* из  $k$  градусных измерений, геодезически между собой не связанных, также ни на чем не основано при существовании *общих отступлений геоида от эллипсоида*.

Приближение к получению элементов именно *общего земного эллипсоида* будет возрастать вовсе не в  $\sqrt{k}$  раз вместе с увеличением обрабатываемого материала в  $k$  раз. Общие волны геоида могут быть как долготными, так и широтными, но главными, видимо, являются долготные волны. Только при удачном размещении градусных измерений относительно этих волн мы могли бы надеяться на исключение их влияния при общей обработке градусных измерений на вывод элементов общего земного эллипсоида; но поскольку размещение этих волн остается неизвестным, постольку и размещение градусных измерений делается *слепую*, и применяя выводы по способу наименьших квадратов, мы при оценке точности этих выводов можем впасть в грубые ошибки, получая нередко сильно преувеличенную точность определения эллипсоида из комплекса градусных измерений. Бессель приписал выведенной им полуоси  $a$  среднюю ошибку в  $\pm 210$  м, тогда как в действительности она ошибочна на 800 м. Кларк приписал своему выводу сжатия среднюю ошибку  $\pm 1,1$ , тогда как эта ошибка в действительности более 5. Благо-

даря влиянию *общих волн геоида*, элементы эллипсоида, выводимые из различных больших дуг меридианов и параллелей, могут заметно различаться друг от друга — например, до 800 м в полуоси и на 8—10 единиц в знаменателе сжатия; наибольшее различие элементов эллипсоида, выводимых из отдельной дуги, от соответствующих элементов общего земного эллипсоида, составляет половину указанных выше, т. е. до 400 м в полуоси и до 4—5 единиц в знаменателе сжатия. Конечно, при большом числе меридианных дуг и дуг параллелей, распределенных в разных частях земного шара с известной равномерностью, причем в каждой части должны быть и дуги меридианов, и дуги параллелей, мы несомненно в общем выводе получаем известную компенсацию влияния общих волн геоида и приближаемся в результате к установлению элементов именно общего земного эллипсоида, но оценивать степень этого приближения по способу наименьших квадратов все-таки не приходится. Итак, описанный в § 90 и 91 астрономо-геодезический метод обработки отдельного градусного измерения имеет достаточно определенную задачу в смысле установления эллипсоида, соответствующего геоиду в районе этого градусного измерения; при этом учащением астрономических пунктов и их надлежащим использованием следует устранить или ослабить в выводе этого эллипсоида влияние чисто местных притяжений, перейти как бы к выравненному геоиду, имеющему иную кривизну на этом участке по сравнению с общим земным эллипсоидом лишь вследствие *волн геоида общего характера*. Этот эллипсоид мы тем не менее называем *местным* как в отличие от общего земного эллипсоида, так и потому, что он отражает *волну геоида на данной территории*, хотя и входящую в состав *общих волн геоида*.

При применении того же астрономо-геодезического метода к обработке комплекса градусных измерений, геодезически между собой не связанных или связанных только по отдельным странам, мы по существу решаем задачу на основании неправильного предположения, самая задача имеет при этом некоторую геометрическую неопределенность; в результате мы получаем выводы, точность которых устанавливаем формально, не имея собственно средств к правильному установлению этой точности. *Только при том или другом учете влияния общих волн геоида эта задача сделается вполне определенной и решение ее пойдет по правильному пути.*

Понятно, что если на данной территории мы имеем комплекс градусных измерений по меридианам и по параллелям, которые все геодезически связаны, то эллипсоид, выводимый астрономо-геодезическим путем из такого материала, будет наилучше подходящим к геоиду в пределах рассматриваемой страны.

Остановимся теперь на выгоднейшем географическом размещении градусных измерений, предполагая, что отступления геоида от общего земного эллипсоида имеют характер случайных местных волн. Хотя это предположение и неверно, но при условии учета влияния общих волн геоида на результат градусных измерений, наши соображения, вытекающие из формул (689), (690) и (692) будут, однако, правильными и будут иметь определенное значение. Если мы возьмем малую меридианную дугу, то можно поставить вопрос: при какой широте  $\varphi_m$  значение члена

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos 2\varphi_m$$

в уравнении (669) делается равным нулю? Это будет при  $\varphi_m = 54^\circ 45'$ . Короткие дуги, расположенные под этой широтой, не могут использо-

ваться для вывода земного сжатия; они определяют лишь большую полуось  $a$ . Однако большая меридианная дуга, составленная из ряда частных дуг, наилучшим образом дает вывод сжатия вместе с выводом большой полуоси  $a$  уже при  $\Phi = 45^\circ$ , что видно из формулы (689). Наилучшим же образом большая меридианная дуга может быть использована для вывода большой полуоси при  $\Phi$ , промежуточном между  $45$  и  $54^\circ$ . Нужно, впрочем, иметь в виду, что и при  $\Phi = 45^\circ$  вывод сжатия из меридианной дуги будет совершаться с крупной средней ошибкой. Поэтому, очевидно, надежное определение сжатия из меридианных дуг требует использования не одной или нескольких дуг, лежащих в выгоднейшей средней широте  $45^\circ$ , а меридианных дуг, лежащих под сильно разнящимися широтами  $\Phi$ .

Из формулы (692) вытекает, что для определения и полуоси, и сжатия выгодно брать одни меридианные дуги под широтой  $\Phi$  около  $55-60^\circ$ , а другие меридианные дуги под широтой  $\Phi$  около  $25^\circ$ .

По смыслу формулы (689), меридианные дуги под широтой  $\Phi = 0^\circ$ , т. е. расположенные близ экватора, не могут быть использованы ни для вывода большой полуоси, ни для вывода сжатия. Это объясняется тем, что для этих дуг в уравнении (669) коэффициент при  $(\Delta\alpha)$  очень мало (совсем ничтожно) изменяется с широтой  $\varphi_m$ , и поэтому в системе уравнений (674) сохраняется пропорциональность между коэффициентами  $P$  и  $Q$ , что, как и в случае дуг по одной параллели, приводит к невозможности из этих уравнений определить и  $\Delta a$  и  $\Delta\alpha$ .

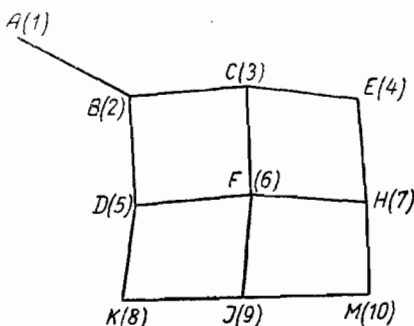
Очевидно, дуги по параллелям на экваторе приводят к надежному определению одной большой полуоси и вовсе не имеют значения для вывода сжатия. Под широтой  $55^\circ$  дуги параллелей при заданной большой полуоси будут наиболее выгодны для вывода сжатия.

Мы делаем из изложенного такое заключение. При условии учета влияний общих волн геоида для вывода общего земного эллипсоида следует располагать такими материалами: большими меридианными дугами, имеющими  $\Phi$  около  $55^\circ$ ; большими меридианными дугами, имеющими  $\Phi$  около  $25^\circ$ ; дугами параллелей в близэкваториальной зоне; дугами параллелей под широтами около  $55^\circ$ . Конечно, отступления от этих правил могут быть очень значительными.

### § 93. Вывод размеров и сжатия эллипсоида и исходных геодезических дат из астрономо-геодезической сети. Метод площадей

На черт. 125 изображена некоторая астрономо-геодезическая сеть: в ней точки  $A, B, C, D, \dots, I, M$  являются астрономическими пунктами государственной триангуляции, причем на некоторых из них определены широта, долгота и азимут, а на некоторых — только широта и азимут. Допустим, что мы вычислили геодезические координаты и азимуты этой системы точек  $A, B, C, D, \dots, I, M$  на некотором референц-эллипсоиде с большой полуосью  $a_0$  и сжатием  $\alpha_0$ , причем в качестве исходных приняли в точке  $A$  геодезическую широту  $B^0$ , геодезическую долготу  $L^0$  и геодезический азимут  $A^0$  по некоторой стороне триангуляции, исходящей из  $A$ . Заметим, что при вычислениях геодезических координат и азимутов из государственной триангуляции обычно применяют «развертывание» элементов геодезической сети, отнесенных к поверхности геоида, на поверхности референц-эллипсоида с размерами  $a_0$  и  $\alpha_0$ , ориентированного в точке  $A$  по принятым в ней  $B^0$ ,  $L^0$  и  $A^0$ . Это «развертывание» характеризуется тем, что длины геодезических линий

$AB, BC, CE, \dots, IM$  (черт. 125) переносят на референц-эллипсоид без всякого их изменения; точно так же углы  $DBC, CFD$  переносят такими, какими они получились из обработки государственной триангуляции, без всякого их изменения. Другими словами, считают, что при сохранении длин при развертывании геоида на референц-эллипсоиде углы между геодезическими линиями искажаются пренебрегаемо. Конечно, это положение вообще неправильно, но на вопросе — насколько эта неправильность отражается на выводах размеров и сжатия эллипсоида из астрономо-геодезической сети, остановимся в главе об обработке значительных триангуляций. Теперь же обозначим для какой-нибудь точки  $K$  ее геодезические координаты, вычисленные при применении этого метода развертывания, через  $B^\circ_K$  и  $L^\circ_K$ , а вычисленный геодезический азимут с точки  $K$  на  $I$  через  $A^\circ_{K-I}$ .



Черт. 125

Поставим задачу использовать нашу астрономо-геодезическую сеть для вывода из нее эллипсоида, наилучшего подходящего по своим размерам и ориентировке к геоиду в пределах территории, покрытой рассматриваемой астрономо-геодезической сетью. Большую полуось этого эллипсоида назовем через  $a_0 + \Delta a$ , его сжатие — через  $(\alpha_0) + (\Delta \alpha)$ , геодезические координаты в точке  $A$  на этом эллипсоиде обозначим через  $B_1, L_1$ , и азимут — через  $A_1$ ; геодезические координаты и азимут в точке  $K$  на этом же эллипсоиде назовем через  $B_K, L_K$  и  $A_{K-I}$ . Астрономические координаты и азимуты будем называть, как всегда, через  $\varphi, \lambda$  и  $\alpha$  с приписыванием внизу индекса, соответствующего названию точки.

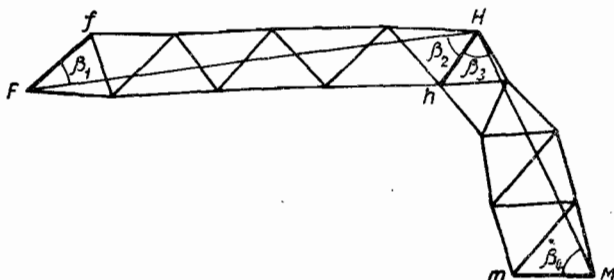
Представим себе, что общее уравнивание нашей астрономо-геодезической сети предшествовало решению поставленной задачи отыскания наилучших размеров и ориентировки эллипсоида. Будем в дальнейшем иметь дело с геодезическими линиями  $AB, BC, CE, \dots, IM$ , заменяющими систему треугольников триангуляции по каждому ее звену. После уравнивания и окончательного вычисления триангуляции мы можем из звена  $HF$  вывести длину  $s_{FH}$  диагонали  $FH$  (черт. 126) и геодезические азимуты  $A^\circ_{FH}$  и  $A^\circ_{HF}$ . Для этого можем применить или вычисление полярных координат по формулам Струве, данным в § 73 главы VIII, беря в качестве исходных азимутов при этом геодезические (а не астрономические) азимуты выходных сторон  $Ff$  и  $Hh$ , или можем применить решение обратной геодезической задачи по данным  $B^\circ_H, L^\circ_H, B^\circ_F$  и  $L^\circ_F$  используя формулы с средней широтой и средним азимутом для расстояний порядка 200—250 км.

Пренебрегая ошибками определения из наблюдений астрономических широт  $\varphi$ , астрономических долгот  $\lambda$  и астрономических азимутов  $\alpha$ , точно так же пренебрегая ошибками геодезически вычисленных  $B^\circ, L^\circ, A^\circ$ , поскольку эти ошибки обусловлены ошибками измеренных величин в триангуляции и погрешностями, вносимыми методом «развертывания» геоида на нашем референц-эллипсоиде, напишем следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= B_1^\circ + dB_1 = \varphi_1 - \xi_1 \\ L_1 &= L_1^\circ + dL_1 = \lambda_1 - \eta_1 \sec \varphi_1 \\ A_1 &= A_1^\circ + dA_1 = \alpha_1 - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 \end{aligned} \right\}, \quad (693)$$

$$\left. \begin{aligned} B_K &= B_K^\circ + dB_K = \varphi_K - \xi_K \\ L_K &= L_K^\circ + dL_K = \lambda_K - \eta_K \sec \varphi_K \\ A_{K,I} &= A_{K,I}^\circ + dA_{K,I} = \alpha_{K,I} - \eta_K \operatorname{tg} \varphi_K \end{aligned} \right\} \quad (694)$$

В этих уравнениях  $\xi$  и  $\eta$  — составляющие уклонения отвеса по отношению к *искомому эллипсоиду*, наилучше подходящему по своим размерам, сжатию и ориентировке к геоиду. Через  $dB$ ,  $dL$  и  $dA$  в уравнениях (693) и (694) мы понимаем поправки геодезических координат и



Черт. 126

азимута при переходе от системы геодезических координат на референц-эллипсоиде к системе геодезических координат на *искомом эллипсоиде*; очевидно, эти величины  $dB$ ,  $dL$  и  $dA$  обусловлены различием размеров и сжатия *искомого эллипсоида* и *референц-эллипсоида* и различием ориентировок этих двух эллипсоидов. Поэтому мы имеем

$$\left. \begin{aligned} dB_K &= \left( \frac{\partial B_K^\circ}{\partial B_1^\circ} \right) dB_1 + \left( \frac{\partial B_K^\circ}{\partial A_1^\circ} \right) dA_1 + \left( \frac{\partial B_K^\circ}{\partial a} \right) \Delta a + \left( \frac{\partial B_K^\circ}{\partial \alpha} \right) (\Delta \alpha) \\ dL_K &= dL_1 + \left( \frac{\partial l_{1,K}^\circ}{\partial B_1^\circ} \right) dB_1 + \left( \frac{\partial l_{1,K}^\circ}{\partial A_1^\circ} \right) dA_1 + \left( \frac{\partial l_{1,K}^\circ}{\partial a} \right) \Delta a + \\ &\quad + \left( \frac{\partial l_{1,K}^\circ}{\partial \alpha} \right) (\Delta \alpha) \\ dA_{K,I} &= \left( \frac{\partial A_{K,I}^\circ}{\partial B_1^\circ} \right) dB_1 + \left( \frac{\partial A_{K,I}^\circ}{\partial A_1^\circ} \right) dA_1 + \left( \frac{\partial A_{K,I}^\circ}{\partial a} \right) \Delta a + \\ &\quad + \left( \frac{\partial A_{K,I}^\circ}{\partial \alpha} \right) (\Delta \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (695)$$

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B_K^\circ}{\partial B_1^\circ} &= p_1^{1,K}; & \frac{\partial B_K^\circ}{\partial A_1^\circ} &= p_4^{1,K}; & \frac{\partial B_K^\circ}{\partial a} &= p_5^{1,K}; & \frac{\partial B_K^\circ}{\partial (\alpha)} &= p_6^{1,K} \\ \frac{\partial l_{1,K}^\circ}{\partial B_1^\circ} &= q_1^{1,K}; & \frac{\partial l_{1,K}^\circ}{\partial A_1^\circ} &= q_4^{1,K}; & \frac{\partial l_{1,K}^\circ}{\partial a} &= q_5^{1,K}; & \frac{\partial l_{1,K}^\circ}{\partial (\alpha)} &= q_6^{1,K} \\ \frac{\partial A_{K,I}^\circ}{\partial B_1^\circ} &= r_1^{1,K}; & \frac{\partial A_{K,I}^\circ}{\partial A_1^\circ} &= r_4^{1,K}; & \frac{\partial A_{K,I}^\circ}{\partial a} &= r_5^{1,K}; & \frac{\partial A_{K,I}^\circ}{\partial (\alpha)} &= r_6^{1,K} \end{aligned} \right\} \quad (696)$$

Дифференциальные коэффициенты (696) будем, конечно, считать известными; об их вычислении по тем или иным формулам, или тем или иным порядком, будет сказано ниже. Из (693) мы имеем

$$\left. \begin{aligned} dB_1 &= \varphi_1 - B_1^\circ - \xi_1 \\ dL_1 &= \lambda_1 - L_1 - \eta_1 \sec \varphi_1 \\ dA_1 &= \alpha_1 - A_1^\circ - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 \end{aligned} \right\}. \quad (697)$$

Подставляя в (695) значения  $dB_1$ ,  $dL_1$ , и  $dA_1$  по (697), а  $dB_K, dL_K, dA_{K/I}$  — по (695) и (696), напомним (694) в таком виде

$$\begin{aligned} B_K^\circ + dB_K &= B_K^\circ + p_1^{1K}(\varphi_1 - B_1^\circ - \xi_1) + p_4^{1K}(\alpha_1 - A_1^\circ - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1) + \\ &+ p_5^{1K} \Delta a + p_6^{1K}(\Delta \alpha) = \varphi_K - \xi_K; \\ L_K^\circ + dL_K &= L_K^\circ + (\lambda_1 - L_1^\circ - \eta_1 \sec \varphi_1) + q_1^{1K}(\varphi_1 - B_1^\circ - \xi_1) + \\ &+ q_4^{1K}(\alpha_1 - A_1^\circ - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1) + q_5^{1K} \Delta a + q_6^{1K}(\Delta \alpha) = \lambda_K - \eta_K \sec \varphi_K; \\ A_{K/I}^\circ + dA_{K/I} &= A_{K/I}^\circ + r_1^{1K}(\varphi_1 - B_1^\circ - \xi_1) + r_4^{1K}(\alpha_1 - A_1^\circ - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1) + \\ &+ r_5^{1K} \Delta a + r_6^{1K}(\Delta \alpha) = \alpha_{K/I} - \eta_K \operatorname{tg} \varphi_K. \end{aligned}$$

Отсюда получаем окончательно

$$\left. \begin{aligned} \xi_K &= \varphi_K - B_K^\circ - p_1^{1K}(\varphi_1 - B_1^\circ) - p_4^{1K}(\alpha_1 - A_1^\circ) + p_1^{1K} \xi_1 + \\ &+ p_4^{1K} \operatorname{tg} \varphi_1 \eta_1 - p_5^{1K} \Delta a - p_6^{1K}(\Delta \alpha) \\ \eta_K \sec \varphi_K &= (\lambda_K - L_K^\circ) - (\lambda_1 - L_1^\circ) - q_1^{1K}(\varphi_1 - B_1^\circ) - \\ &- q_4^{1K}(\alpha_1 - A_1^\circ) + q_1^{1K} \xi_1 + \eta_1 \sec \varphi_1 [1 + q_4^{1K} \sin \varphi_1] - \\ &- q_5^{1K} \Delta a - q_6^{1K}(\Delta \alpha) \\ \eta_K \sec \varphi_K &= (\alpha_{K/I} - A_{K/I}^\circ) \operatorname{cosec} \varphi_K - r_1^{1K} \operatorname{cosec} \varphi_K (\varphi_1 - B_1^\circ) - \\ &- r_4^{1K} \operatorname{cosec} \varphi_K (\alpha_1 - A_1^\circ) + r_1^{1K} \operatorname{cosec} \varphi_K \xi_1 + \\ &+ r_4^{1K} \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{cosec} \varphi_K \eta_1 - r_5^{1K} \operatorname{cosec} \varphi_K \Delta a - r_6^{1K} \operatorname{cosec} \varphi_K (\Delta \alpha) \end{aligned} \right\}. \quad (698)$$

Уравнения типа (698) составляются для каждого астрономического пункта астрономической сети. В новой астрономо-геодезической сети СССР, построенной начиная с 1924 г., на каждом ее астрономическом пункте определены астрономическая широта, астрономическая долгота и астрономический азимут. Поэтому каждый астрономический ее пункт доставляет все три уравнения (698). В астрономических сетях иных государств нередки случаи, когда на астрономическом пункте определены только астрономическая широта и астрономический азимут; в астрономо-геодезической сети США, составленной до 1910 г., на огромном большинстве астрономических пунктов были определены астрономически только широта и азимут. В таких сетях отсутствие астрономических долгот не позволяет получить азимут  $A_{K/I}^\circ$  (за исключением немногих пунктов, где имеется определение астрономической долготы), как *лапласов*

азимут, и этот азимут  $A_{KI}^\circ$  получается геодезическими передачами посредством углов треугольников триангуляции. Понятно, что в таких случаях вес определения свободного члена в третьем из уравнений (698) значительно меньше веса определения свободного члена в уравнении втором из уравнений (698); ошибка  $A_{KI}^\circ$  может для обширной триангуляции достигать при указанных обстоятельствах значения в 5—7".

Почти всегда референц-эллипсоид ориентируется в исходном пункте  $A$  по астрономическим данным; тогда  $B_1^\circ = \varphi_1$ ;  $L_1^\circ = \lambda_1$  и  $A_1^\circ = \alpha_1$ . Поэтому почти всегда уравнения (698) принимают более простой вид

$$\left. \begin{aligned} \xi_K &= (\varphi_K - B_K^\circ) + p_1^{1,K} \xi_1 + p_4^{1,K} \operatorname{tg} \varphi_1 \eta_1 - p_5^{1,K} \Delta a - p_6^{1,K} (\Delta \alpha) \\ \eta_K \sec \varphi_K &= (\lambda_K - L_K^\circ) + q_1^{1,K} \xi_1 + \eta_1 \sec \varphi_1 [1 + q_4^{1,K} \sin \varphi_1] - \\ &\quad - q_5^{1,K} \Delta a + q_6^{1,K} (\Delta \alpha) \\ \eta_K \sec \varphi_K &= (\alpha_{KI} - A_{KI}^\circ) \operatorname{cosec} \varphi_K + r_1^{1,K} \operatorname{cosec} \varphi_K \xi_1 + \\ &\quad + r_4^{1,K} \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{cosec} \varphi_K \eta_1 - r_5^{1,K} \operatorname{cosec} \varphi_K \Delta a - \\ &\quad - r_6^{1,K} \operatorname{cosec} \varphi_K (\Delta \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (699)$$

Каждое из уравнений (698) или (699) отнесено к исходной точке, и коэффициенты  $p$ ,  $q$  и  $r$  соответствуют геодезическим линиям, соединяющим каждую из точек  $B$ ,  $C$ ,  $E$ ,  $D$ ,  $F$ ,  $H$ ,  $K$ ,  $I$ ,  $M$ , ... (черт. 125) с исходным пунктом  $A$ .

Если на пункте  $K$  исполнены определения астрономических широты, долготы и азимута, то из трех уравнений (698) или (699) по этому пункту используют только два — именно «широтное уравнение», определяющее  $\xi_K$ , и «долготное уравнение», определяющее  $\eta_K$  по различию разностей долгот  $(\lambda_K - L_K^\circ)$  и  $(\lambda_1 - L_1^\circ)$  (второе из уравнений (698) или (699)). Это объясняется тем, что в этом случае  $A_{KI}^\circ$  будет представлять собой *лапласов* азимут, полученный по уравнению

$$A_{KI}^\circ = \alpha_{KI} - (\lambda_K - L_K^\circ) \sin \varphi_K;$$

вследствие этого свободные члены во втором и третьем из уравнений (699) будут совпадать, так как оба выразятся величиной  $(\lambda_K - L_K^\circ)$ . Другими словами, *азимутальное уравнение* для  $\eta_K \sec \varphi_K$  будет в этом случае просто *следствием долготного уравнения для той же величины*. Составив уравнения (698) или (699) для всех астрономических пунктов астрономо-геодезической сети, при применении чисто астрономо-геодезического метода решают их далее по способу наименьших квадратов, т. е. под условием минимума  $\sum \xi^2 + \sum \eta^2$ . Очевидно, при таком решении отклонения отвеса рассматриваются, как случайные, и отступление геоида от искомого эллипсоида, отыскиваемого на основании решения системы уравнений (699), рассматриваются так же, как случайные. Определению подлежат *четыре величины*:  $\Delta a$ ,  $(\Delta \alpha)$ ,  $\xi_1$  и  $\eta_1$ ; величины  $\xi_1$  и  $\eta_1$  устанавливают ориентировку искомого эллипсоида. Очевидно, рассматриваемая задача, при указанном методе ее решения, не стоит ни в какой связи с определением общего земного эллипсоида, точно так же, как и задача вывода эллипсоида из комплекса градусных измерений по дугам меридианов и параллелей, при решении ее астрономо-геодезическим методом.

Мы получаем в результате решения задачи эллипсоид, *наилучший подходящий к геоиду в пределах территории, покрытой используемой астрономо-геодезической сетью*, причем это обуславливается как подбором  $a = a_0 + \Delta a$  и  $(\alpha) = \alpha_0 + (\Delta \alpha)$ , так и ориентировкой этого эллипсоида. Мы получаем эллипсоид, представляющий хорошо местную форму геоида. Конечно, чем больше территория, охватываемая астрономо-геодезической сетью, тем более вероятность, что величины  $a_0 + \Delta a$  и  $(\alpha_0) + (\Delta \alpha)$  будут более близки к таковым же для общего земного эллипсоида, но в какой степени будет нарастать эта близость — остается неизвестным. Об этом мы должны судить вовсе не по уменьшению средней ошибки в  $\Delta a$  и средней ошибки в  $(\Delta \alpha)$ , определяемым в результате решения уравнений (699) по способу наименьших квадратов. Эти средние ошибки характеризуют лишь близость выведенного эллипсоида *с местной формой геоида*. Правильное суждение о близости выведенного эллипсоида к общему земному эллипсоиду мы получим лишь тогда, когда сумеем учесть влияние на вывод  $a$  и  $(\alpha)$  *общих волн* геоида; когда, хотя бы приближенно, будем знать распределение и величину этих волн. Вывод эллипсоида из обширной астрономо-геодезической сети США характеризуется средней ошибкой в полуоси  $a$  около  $\pm 30$  м, в то время, как искажение этого вывода, по отношению к большой полуоси общего эллипсоида вследствие влияния широких волн геоида, может оцениваться величиной порядка 150 м!

Исходные геодезические даты устанавливаются, конечно, по уравнениям

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \varphi_1 - \xi_1 \\ L_1 &= \lambda_1 - \eta_1 \sec \varphi_1 \\ A_1 &= \alpha_1 - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 \end{aligned} \right\} \quad (700)$$

Очевидно определенный из уравнений (699) эллипсоид, при установлении его ориентировки согласно уравнениям (700), будет иметь малую ось, располагающуюся параллельно оси вращения Земли. Следует отметить, что точка  $A$  взята нами произвольно; мы могли бы роль точки  $A$  отвести точке  $M$  (черт. 125), и тогда уравнения (699) были бы отнесены не к точке  $A$ , а к точке  $M$ , и в качестве неизвестных мы в уравнениях (699) имели бы  $\Delta a$ ,  $(\Delta \alpha)$ ,  $\xi_M$  и  $\eta_M$ . Но определение неизвестных  $\Delta a$ ,  $(\Delta \alpha)$ ,  $\xi_1$  и  $\eta_1$  и неизвестных  $(\Delta \alpha)$ ,  $\Delta a$ ,  $\xi_M$  и  $\eta_M$  будет происходить, однако, из *одного и того же материала*, доставляемого данной астрономо-геодезической сетью. Другими словами, оба решения должны будут совпасть. Это выразится тем, что из обоих решений мы получим одни и те же значения для  $\Delta a$ ,  $n$   $(\Delta \alpha)$  и, кроме того, что когда мы во втором решении подставим найденные  $\Delta a$ ,  $(\Delta \alpha)$ ,  $\xi_M$  и  $\eta_M$  в уравнения (699) для точки  $A$ , то мы получим для  $\xi_1$  и  $\eta_1$  те же самые значения, какие для них получились из первого решения, когда эти  $\xi_1$  и  $\eta_1$  входили в состав неизвестных. Понятно, что в уравнения (699) должны входить и уравнения для точки  $A$ , выражающиеся так

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1, \\ \eta_1 \sec \varphi_1 &= \eta_1 \sec \varphi_1. \end{aligned}$$

Если в сети СССР точка  $A$  совпадает с центром круглого зала Пулковской обсерватории, то будет неправильным утверждать, что наилучше подходящий эллипсоид для СССР, выведенный из обработки уравнений (699) для астрономо-геодезической сети СССР, ориентирован «по Пулкову»: его ориентировка получена *в отношении широты и азимута*



по всем точкам астрономо-геодезической сети, использовавшимся при составлении уравнений (699), что отражается на выводе  $\xi$  и  $\eta$  для Пулково; в этой ориентировке Пулково играло совершенно такую же роль, как и любая иная астрономическая точка сети СССР.

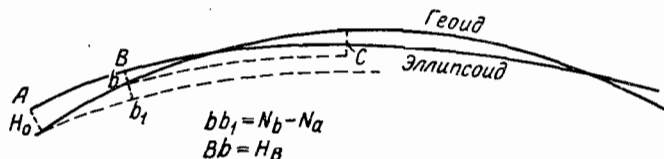
Нужно отметить, что установив  $\xi_1$  и  $\eta_1$ , мы оставляем еще неопределенной установку нашего эллипсоида по высоте. Этот вопрос мы уже затрагивали в § 79. Имея  $(\Delta x)$ ,  $\Delta a$ ,  $\xi_1$  и  $\eta_1$  и делая их подстановку в уравнения (699) или (698), мы получим для всех астрономических пунктов величины  $\xi$  и  $\eta$ , отнесенные к эллипсоиду с размерами  $a = a_0 + \Delta a$  и  $(x) = (x_0) + (\Delta x)$ . Тогда, применяя формулу (611)

$$N_2 - N_1 = -\frac{s}{2\rho''} [(\eta_2 + \eta_1)'' \sin A_{1,2} + (\xi_1 + \xi_2)'' \cos A_{1,2}],$$

мы получим в виде  $N_2 - N_1$  нарастание высоты геоида над нашим эллипсоидом между двумя смежными астрономическими пунктами. Приняв в  $A$  (черт. 127) высоту эллипсоида над геоидом равной  $H_0$ , мы напишем

$$\left. \begin{aligned} H_A &= H_0 \\ H_B &= H_0 - (N_B - N_A) \\ H_C &= H_B - (N_C - N_B) = H_0 - [(N_B - N_A) + (N_C - N_B)] \\ H_D &= H_0 - [(N_B - N_A) + (N_C - N_B) + (N_D - N_C)] \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\}, \quad (701)$$

Ставя условие, чтобы  $\Sigma H = 0$ , из уравнений (701) выведем неизвестное  $H_0$ . Конечно, по тем рядам триангуляции, по которым выполнено



Черт. 127

астрономо-гравиметрическое нивелирование, надлежит  $N_2 - N_1$  определять не по формуле (611), а по формуле (587); точно так же, по тем рядам триангуляции I класса, по которым не имеется астрономо-гравиметрического нивелирования, но которые проходят по районам, сплошь покрытым общей гравиметрической съемкой страны, следует использовать этот гравиметрический материал, пренебрегая его неполнотой по оси нивелирования и используя его методом астрономо-гравиметрического нивелирования с применением при этом интерполирования аномалий силы тяжести. Полученные результаты будут заметно меньшей точности, чем при наличии добавочного гравиметрического материала вблизи астрономических пунктов и по оси нивелирования, требуемого надлежащим выполнением астрономо-гравиметрического нивелирования; однако эти результаты будут значительно точнее получаемых при применении формулы (611) при расстоянии между астрономическими пунктами в 70—100 км и вполне будут соответствовать поставленной задаче вывода  $H_0$ . К осуществлению указанной программы действий по надежному выводу  $H_0$  мы в астрономо-геодезической сети СССР имеем все возможности, но пока эта задача в нашем основном геодезическом производстве еще не ставилась; она, правда, не ставилась и в других странах, но там нет и достаточного материала для ее решения.

Вывод эллипсоида из астрономо-геодезической сети получил у американцев название «*метода площадей*» в градусных измерениях, в противоположность «*методу дуг*», когда этот вывод выполняется не на основании сети дуг, связанных все между собой и покрывающих с достаточной густотой значительную территорию *в виде астрономо-геодезической сети*, а на основании дуг меридианов и параллелей, связанных или даже не связанных между собой, но не покрывающих *никакой площади*. Если мы возьмем дугу Западно-Европейского меридиана, дугу Струве и дугу 52-й параллели в пределах Западной Европы, то хотя эти три дуги геодезически между собой и связаны, но, конечно, вывод эллипсоида из этих трех дуг будет относиться к выводам «по методу дуг», а не к выводу «по методу площадей», так как, конечно, эти три дуги *никакой площади* геоида и формы геоида на целой площади не характеризуют. Возможность вырисовать форму геоида на определенной территории и есть основное требование «*метода площадей*» в отличие от *метода дуг*, когда задача ограничивается получением профилей геоида по направлениям измеренных дуг. Несомненно, когда мы ставим задачу изучения формы геоида на определенной территории, то следует иметь сечения геоида по взаимно перпендикулярным направлениям, совпадающим примерно с главными сечениями на поверхности геоида. Другими словами, мы естественно приходим к мысли, что необходимо для изучения *поверхности геоида* из градусных измерений иметь астрономо-геодезическую сеть из триангуляционных рядов, направленных по меридианам и по параллелям; при достаточной густоте этих триангуляционных рядов, оснащенных каждый надлежащим количеством астрономических пунктов, мы в результате и приходим к выводу эллипсоида «*по методу площадей*».

Какая же густота рядов отвечает «*методу площадей*»? Достаточная густота получится при расстоянии между триангуляционными рядами в 200—300 км. Оптимальное расстояние между астрономическими пунктами, определенными каждый по широте и по долготе, около 70 км (не принимая, конечно, в расчет горных районов). Думается, легко видеть, что при выводе эллипсоида по методу площадей, когда в нашем распоряжении имеется целая система связанных между собой профилей геоида по меридианам и по параллелям, влияние чисто местных уклонов и отвесных линий будет значительно ослаблено и в заметно большей степени, чем при выводе эллипсоида по методу дуг при таком же числе астрономических пунктов.

*Но не нужно забывать, что влияние общего отступления геоида от общего земного эллипсоида на той территории, на которой применяется метод площадей, целиком скажется на выводе эллипсоида, и ослабление чисто местных влияний будет играть в вопросе приближения к выводу общего земного эллипсоида весьма второстепенную роль.* Об этом, однако, видимо забывают те ученые, которые провозглашают, что следует применять только метод площадей и совсем оставить метод дуг. Проложение большой меридианной дуги в Африке, проложение большой дуги по экватору, проложение трех-четырёхградусных измерений по меридианам в Сибири от Сибирской магистрали до Ледовитого Океана, конечно, доставит ценнейший материал для вывода общего земного эллипсоида.

Отметим, что пролагаемая в СССР астрономо-геодезическая сеть отвечает требованиям метода площадей во всей Европейской части Союза и в Азиатской части — южнее 55-й параллели.

Теперь остановимся на получении коэффициентов  $p$ ,  $q$  и  $r$  в уравнениях (699). Так как в современных работах на каждом астрономическом пункте определяются  $\varphi$  и  $\lambda$ , то всего лучше — и в смысле простоты

вычислений, и точности их результата — воспользоваться дифференциальными формулами, приведенными в под номерами (637) и (638). В этих формулах  $h_0$  придется положить равным нулю;  $\Delta\lambda_0 \cos \varphi_0$  заменить через  $\eta_1$ ;  $\delta\varphi_0$  — через  $\xi_1$ ;  $dB_K$  и  $dL_K \cos B_K$ , стоящие в левых частях этих формул (637) и (638), приравнять после этого  $dB_K$   $dL_K \cos B_K$ , входящим в уравнения (694). Мы, конечно, имеем

$$\left. \begin{aligned} p_1^{1,K} &= -\frac{M_1}{M_K} \cos \nu_K; & p_4^{1,K} &= -\frac{N_1}{M_K} \frac{\sin \nu_K \cos q_K}{\operatorname{tg} \varphi_1} \\ p_5^{1,K} &= \left\{ \frac{\cos A_{K-1} \sin \psi_K}{k_1} + e^2 \cos B_K \left( \frac{\sin B_K}{k_K} - \sin \varphi_1 \right) \right\} \frac{\rho''}{M_K} \\ p_6^{1,K} &= \{ \cos A_{K-1} \sin \psi_K \sin^2 \varphi_1 + \\ &+ 2 \cos B_K (\sin B_K - \sin \varphi_1) + e^2 \sigma \} \frac{a_0 \rho''}{M_K k_1^3} \end{aligned} \right\}, \quad (702)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \cos B_K \sin \varphi_1 - \sin B_K (\sin^2 \varphi_1 - 2 \sin \varphi_1 \sin B_K + \cos 2 B_K) - \\ &\quad - \frac{\sin \psi_K \cos A_{K-1} \sin^2 \varphi_1}{2} \\ q_1^{1,K} &= \frac{M_1}{N_K} \frac{\sin \nu_K \cos p_K}{\cos B_K}; & q_4^{1,K} &= \left( \frac{N_1}{N_K} \frac{\cos \omega_K}{\operatorname{tg} \varphi_1 \cos B_K} - \frac{1}{\sin \varphi_1} \right) \\ q_6^{1,K} &= \frac{a_0 \sin \psi_K \sin A_{K-1} \sin^2 \varphi_1}{N_K k_1^3 \cos B_K} [1 - (\alpha)] \rho''; & q_5^{1,K} &= \frac{\sin A_{K-1} \sin \psi_K}{\cos B_K N_K k_1} \rho'' \end{aligned} \right\}. \quad (703)$$

В (702) и (703) производные  $p_4$  и  $q_4$  рассчитываются на основании таких соображений: 1) в (637) член  $-\frac{N_1}{M_K} \cos \varphi_1 \sin \nu_K \cos q_K \delta\lambda''_1$  дает изменение  $B_K$ , обусловленное изменением азимута в точке  $A$  на  $\delta\lambda_1 \sin \varphi_1$  откуда

$$\frac{dB_K}{dA_1} = -\frac{N_1}{M_K} \cos \varphi_1 \sin \nu_K \cos q_K \frac{1}{\sin \varphi_1};$$

2) в (639) член  $\frac{N_1}{N_K} \cos \varphi_1 \cos \omega_K \delta\lambda_1$  представляет собой влияние на  $dL_K \cos B_K$  изменения азимута в точке  $A$  на  $\delta\lambda_1 \sin \varphi_1$  и долготы точки  $A$  на  $\delta\lambda_1$ ; поэтому

$$\frac{dL_K}{dA_1} = +\frac{N_1}{N_K} \cos \omega_K \frac{\cos \varphi_1}{\sin \varphi_1 \cos B_K} - \frac{\cos B_K}{\sin \varphi_1 \cos B_K}.$$

Пользуясь (637) и (638), мы можем уравнения (699) сразу, без величин  $p$  и  $q$ , написать в таком виде

$$\begin{aligned} \xi_K &= (\varphi_K - B_K^\circ) - \frac{M_1}{M_K} \cos \nu_K \xi_1 - \frac{N_1}{M_K} \sin \nu_K \cos q_K \eta_1 - \\ &- \left[ \frac{\cos A_{K-1} \sin \psi_K \rho''}{M_K k_1} + \frac{e^2 \cos B_K \rho''}{M_K} \left( \frac{\sin B_K}{k_K} - \sin \varphi_1 \right) \right] \Delta a - \\ &- \frac{a_0 \rho''}{M_K k_1^3} [\cos A_{K-1} \sin \psi_K \sin^2 \varphi_1 + 2 \cos B_K (\sin B_K - \sin \varphi_1) + e^2 \sigma] (\Delta \alpha); \end{aligned} \quad (704)$$

$$\eta_K = (\lambda_K - L_K^\circ) \cos B_K^\circ + \frac{M_1}{N_K} \sin \nu_K \cos p_K \xi_1 + \frac{N_1}{N_K} \cos \omega \eta_1 -$$

$$- \frac{\sin \psi_K \sin A_{K-1}}{N_K k_1} \rho'' \Delta a - \frac{\sin \psi_K \sin A_{K-1} a_0 \sin^2 \varphi_1}{N_K k_1^3} [1 - (\alpha)] (\Delta \alpha). \quad (705)$$

К этому добавим

$$\left. \begin{aligned} \cos \nu_K &= \sin A_{1-K} \sin A_{K-1} + \cos A_{1-K} \cos A_{K-1} \cos \psi_A \\ - \sin \nu_K \cos q_K &= \cos A_{1-K} \sin A_{K-1} - \sin A_{1-K} \cos A_{K-1} \cos \psi_K \\ \sin \nu_K \cos p_K &= \sin A_{1-K} \cos A_{K-1} - \cos A_{1-K} \sin A_{K-1} \cos \psi_K \\ \cos \psi_K &= \sin \varphi_1 \sin B_K + \cos \varphi_1 \cos B_K \cos \omega_K \\ \omega_K &= L_K^\circ - L_1^\circ \end{aligned} \right\} \quad (706)$$

$A_{1-K}$  и  $A_{K-1}$  должны быть вычислены из сферического треугольника, изображенного на черт. 108, по данным  $\omega_K$ ,  $\varphi_1$  и  $B_K$  (т. е. из обратной геодезической задачи на сфере). Указанный путь, заключающийся прямо в составлении уравнений (704) и (705) с предварительным вычислением для всех геодезических линий  $AB$ ,  $AC$ ,  $AE$ ,  $AI$ ,  $AN$ ,  $AM$ , ... (черт. 125) вспомогательных величин по формулам (706), и следует применять в использовании современных астрономо-геодезических сетей в целях градусных измерений или в целях, вернее, определения эллипсоида, наилучшее подходящего к геоиду на данной территории.

Другой путь определения величин  $p_1^{1,K}$ ,  $p_4^{1,K}$ ,  $p_5^{1,K}$ ,  $p_6^{1,K}$ ,  $q_1^{1,K}$ ,  $q_4^{1,K}$ ,  $q_5^{1,K}$ ,  $q_6^{1,K}$ ,  $r_1^{1,K}$ ,  $r_4^{1,K}$ ,  $r_5^{1,K}$ ,  $r_6^{1,K}$  основывается на использовании дифференциальных формул (541), (554) и (555), приведенных в VIII главе, в § 69 и 71. Точность этих формул обеспечивает  $0'',0001$  в отдельных слагаемых уравнений (699) для  $\xi_K$  и  $\eta_K$  при расстояниях от точки  $A$  около 200 км, т. е. около  $\pm 0'',0002 - \pm 0'',0003$  в самих  $\xi_K$  и  $\eta_K$ , но ошибки формул возрастают быстро вместе с возрастанием расстояния.

Вряд ли следует формулы Гельмерта для  $p_1^{1,K}$ ,  $q_1^{1,K}$  и  $r_1^{1,K}$  применять для расстояний  $s_{1-K}$ , больших 800 км. При значительных размерах астрономо-геодезической сети применяют не прямой, а косвенный путь составления уравнений (699), описание которого здесь и приводится.

Напишем уравнения (699) для геодезической линии, соединяющей точку 1 с точкой 2

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= (\varphi_2 - B_2^\circ) + p_1^{1,2} \xi_1 + p_4^{1,2} \operatorname{tg} \varphi_1 \eta_1 - p_5^{1,2} \Delta a - p_6^{1,2} (\Delta \alpha) \\ \eta_2^\lambda &= (\lambda_2 - L_2^\circ) \cos \varphi_2 + q_1^{1,2} \xi_1 \cos \varphi_2 + \eta_1 \sec \varphi_1 \cos \varphi_2 [1 + q_4^{1,2} \sin \varphi_1] - \\ &\quad - q_5^{1,2} \cos \varphi_2 \Delta a - q_6^{1,2} \cos \varphi_2 (\Delta \alpha) \\ \eta_2^\alpha &= (\alpha_{2,1} - A_{2,1}^\circ) \operatorname{ctg} \varphi_2 + r_1^{1,2} \operatorname{ctg} \varphi_2 \xi_1 + r_4^{1,2} \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{ctg} \varphi_2 \eta_1 - \\ &\quad - r_5^{1,2} \operatorname{ctg} \varphi_2 \Delta a - r_6^{1,2} \operatorname{ctg} \varphi_2 (\Delta \alpha) \end{aligned} \right\}; \quad (707)$$

$$\Delta^{1,2} = \eta_2^\lambda - \eta_2^\alpha. \quad (707')$$

Напишем далее уравнения (698) для геодезической линии, соединяющей точку 2 с точкой 3

$$\left. \begin{aligned} \xi_3 &= (\varphi_3 - B_3^\circ) - p_1^{2.3}(\varphi_2 - B_2^\circ) - p_4^{2.3}(\alpha_{2.3} - A_{2.3}^\circ) + p_1^{2.3}\xi_2 + \\ &\quad + p_4^{2.3}\operatorname{tg} \varphi_2 \eta_2 - p_6^{2.3}\Delta a - p_6^{2.3}(\Delta \alpha); \\ \eta_3^\lambda &= \{(\lambda_3 - L_3^\circ) - (\lambda_2 - L_2^\circ)\} \cos \varphi_3 - q_1^{2.3}(\varphi_2 - B_2^\circ) \cos \varphi_3 - \\ &\quad - q_4^{2.3} \cos \varphi_3 (\alpha_{2.3} - A_{2.3}^\circ) + q_1^{2.3} \cos \varphi_3 \xi_2 + \\ &\quad + \sec \varphi_2 \cos \varphi_3 [1 + q_4^{2.3} \sin \varphi_2] \eta_2 - q_5^{2.3} \cos \varphi_3 \Delta a - q_6^{2.3} \cos \varphi_3 (\Delta \alpha) \\ \eta_3^\alpha &= (\alpha_{3.2} - A_{3.2}^\circ) \operatorname{ctg} \varphi_3 - r_1^{2.3} \operatorname{ctg} \varphi_3 (\varphi_2 - B_2^\circ) - \\ &\quad - r_4^{2.3} \operatorname{ctg} \varphi_3 (\alpha_{2.3} - A_{2.3}^\circ) + r_1^{2.3} \operatorname{ctg} \varphi_3 \xi_2 + r_4^{2.3} \operatorname{tg} \varphi_2 \operatorname{ctg} \varphi_3 \eta_2 - \\ &\quad - r_6^{2.3} \operatorname{ctg} \varphi_3 \Delta a - r_6^{2.3} \operatorname{ctg} \varphi_3 (\Delta \alpha); \end{aligned} \right\}; \quad (708)$$

$$J^{2.3} = \eta_3^\lambda - \eta_3^\alpha. \quad (708')$$

Представим себе теперь, что, пользуясь первым из уравнений (707), мы исключаем  $\xi_2$  во всех трех уравнениях (708), подставляя, конечно, в эти уравнения вместо  $\xi_2$  правую часть первого уравнения (707). Далее, вместо  $\eta_2$  во всех трех уравнениях (708) и (708') подставляем  $\eta_2^\alpha$ , определяемое правой частью *третьего* из уравнений (707). К правым частям преобразованных таким образом уравнений для  $\eta_3^\lambda$  и (708') прибавляем правую часть уравнения (707'). Указанный порядок обусловлен следующим: 1) члены с  $\eta_2$  в первом и третьем из уравнений (708) обусловлены *переменной азимута* геодезической линии 2.3, и в них  $\eta_2$  заменяется через  $\eta_2^\alpha$  как выражающее через изменение азимута  $\alpha_{2.1}$  слагающую уклонения отвеса в пункте 2; 2) во втором из уравнений (708) слагаемое с  $q_4^{2.3}$ , а в (708') такое же слагаемое и еще слагаемое с  $r_4^{2.3}$  обусловлены *переменной азимута* линии 2.3; но члены  $\eta_2 \sec \varphi_2 \cos \varphi_3$  обусловлены в том и другом уравнении *переменной долготы* точки 2; прибавляя  $\eta_2^\lambda - \eta_2^\alpha \sec \varphi_2 \cos \varphi_2$  к преобразованному уравнению  $\eta_3^\lambda$  и к (708'), мы тем самым в члене  $\eta_2 \sec \varphi_2 \cos \varphi_3$  восстанавливаем влияние перемены долготы и аннулируем влияние перемены азимута.

По исключении указанным образом  $\eta_2$  и  $\xi_2$  из уравнений (708), мы получим выражения  $\xi_2$ ,  $\eta_3^\lambda$  и  $\eta_3^\alpha$  через  $\xi_1$  и  $\eta_1$ ; написав теперь уравнения (699) для геодезической линии 3.4, мы получим сперва  $\xi_4$ ,  $\eta_4^\lambda$  и  $\eta_4^\alpha$ , выраженными через  $\xi_3$  и  $\eta_3$ ; эти  $\xi_3$  и  $\eta_3$  исключаем при помощи преобразованных уравнений (708) для  $\xi_3$  и  $\eta_3^\alpha$  и дважды преобразованных уравнений для  $\eta_3^\lambda$  и уравнения (708'). Поступая таким образом, выразим  $\xi_K$  и  $\eta_K$  для любой точки  $K$  только через  $\xi_1$  и  $\eta_1$ , с исключением постепенным всех  $\xi$  и  $\eta$  для промежуточных точек в цепи геодезических линий, связывающих точку  $K$  с исходным пунктом  $A$ . Конечно, этот путь постепенных исключений  $\xi$  и  $\eta$  очень длинный и в значительной астрономо-геодезической сети приводит к большой вычислительной работе; при этом неизбежно накопление ошибок вычислений. Формулы (704) и (705), предлагаемые проф. Ф. Н. Красовским, до сих пор, однако, не применялись

Приведем теперь в заключение параграфа формулы Гельмерта для  $p$ ,  $q$  и  $r$  по геодезической линии  $IK$

$$\begin{aligned}
 p_1^{i,K} &= \frac{M_I}{M_K} \cos(L_K^\circ - L_I^\circ); & p_4^{i,K} &= \frac{m_{I,K}}{M_K} \sin A_{K,I}^\circ \\
 p_5^{i,K} &= \frac{s_{I,K} \cos A_{K,I}^\circ}{a_0 M_K} \rho''; \\
 p_6^{i,K} &= \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ 2(B_K^\circ - B_I^\circ)'' - \right. \\
 &\quad - \frac{3(1-e^2)}{1-e^2 \sin^2 \frac{B_I^\circ + B_K^\circ}{2}} (B_K^\circ - B_I^\circ)'' \sin^2 \frac{B_K^\circ + B_I^\circ}{2} + \\
 &\quad \left. + \frac{(L_K^\circ - L_I^\circ)''^2}{\rho''} \sin^3 \frac{B_K^\circ + B_I^\circ}{2} \cos \frac{B_K^\circ + B_I^\circ}{2} \right\} \\
 q_1^{i,K} &= \frac{M_I}{N_K} \sin(L_K^\circ - L_I^\circ) \operatorname{tg} B_K; & q_4^{i,K} &= -\frac{m_{I,K} \cos A_{K,I}^\circ}{N_K \cos B_K^\circ} \\
 q_5^{i,K} &= \frac{s_{I,K} \sin A_{K,I}^\circ}{a_0 N_K \cos B_K^\circ} \rho''; \\
 q_6^{i,K} &= -\frac{\sqrt{1-e_0^2}}{1-e_0^2 \sin^2 B_I} \frac{\cos B_I}{\cos B_K} (L_K^\circ - L_I^\circ)'' \sin^2 B_I \\
 r_1^{i,K} &= \frac{\sin(L_K^\circ - L_I^\circ)}{\cos B_K^\circ} (1 - e_0^2 \sin^2 B_K^\circ \cos^2 B_K^\circ) \\
 r_4^{i,K} &= \cos \frac{s_{I,K}}{R} - \frac{m_{I,K}}{N_K} \cos A_{K,I}^\circ \operatorname{tg} B_K^\circ \\
 r_5^{i,K} &= \frac{s_{I,K} \sin A_{K,I}^\circ}{a_0 N_K} \operatorname{tg} B_K^\circ \rho'' \\
 r_6^{i,K} &= -(L_K^\circ - L_I^\circ)'' \cos B_I^\circ \left[ \sin^2 B_I^\circ \operatorname{tg} B_K^\circ - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(B_K - B_I)''}{\rho''} \cos^2 B_I \right] \frac{\sqrt{1-e_0^2}}{1-e_0^2 \sin^2 B_I}
 \end{aligned} \quad (709)$$

Как уже указано в начале настоящего параграфа, в уравнениях (704) и (705) мы не учитываем членов, обусловленных погрешностями в астрономических широтах, долготах и азимутах. Ошибки  $\varphi$  и  $\lambda$  всегда малы и влиянием их следует пренебречь в поставленной задаче. Но возможны случаи ненадежности исходного азимута  $\alpha_1$ . Называя ошибку  $\alpha_1$  через  $\delta\alpha_1$ , мы можем в правые части уравнений (704) и (705) ввести соответственно добавочные части  $\frac{m_{I,K}}{M_K} \sin A_{K,I}^\circ \delta\alpha_1$  и  $-\frac{m_{I,K}}{N_K} \cos A_{K,I}^\circ \delta\alpha_1$  согласно уравнению (536).

#### § 94. Применение теории изостазии к обработке градусных измерений Гипотезы Пратта и Эри

До сих пор мы имели дело с обработкой градусных измерений «астрономо-геодезическим методом», т. е. определяли большую полуось и сжатие эллипсоида  $\alpha$  под условием минимума суммы квадратов слагающих  $\xi$  и  $\eta$  уклонений отвеса относительно этого определяемого эллипсоида. Значение получаемых из такой обработки выводов достаточно выяснено в предыдущих параграфах.

Представим себе теперь, что тем или иным путем мы определили независимо от астрономо-геодезических материалов, абсолютные уклонения отвеса в астрономических точках наших градусных измерений или астрономо-геодезических сетей. Если мы теперь от астрономических широт, долгот и азимутов перейдем соответственно к величинам

$$\Phi = \varphi - \xi_u,$$

$$L = \lambda - \eta_u \sec \varphi,$$

$$A = \alpha - \eta_u \operatorname{tg} \varphi,$$

причем под  $\xi_u$  и  $\eta_u$  понимаются слагающие именно выведенных нами абсолютных уклонений отвесных линий, то величины  $\Phi$ ,  $L$  и  $A$  будут соответствовать направлению нормали к общему земному эллипсоиду; это будут соответственно геодезические широта, долгота и азимут в рассматриваемой точке на поверхности общего земного эллипсоида. Вводя вместо  $\varphi$ ,  $\lambda$  и  $\alpha$  именно величины  $\Phi$ ,  $L$ ,  $A$  в уравнения градусных измерений или соответственно в широтные, долготные и азимутальные уравнения (708) § 93 астрономо-геодезической сети, мы, очевидно, тем самым обращаем в этих уравнениях искомые  $\Delta a$  и  $(\Delta \alpha)$  в поправку большой полуоси  $a_0$  и сжатия ( $\alpha_0$ ) референц-эллипсоида при переходе от них к полуоси  $a$  и к сжатию ( $\alpha$ ) общего земного эллипсоида, а все величины  $\xi$  и  $\eta$  в этих уравнениях при этом обратятся в поправки  $\delta \xi$  и  $\delta \eta$  к величинам  $\xi_u$  и  $\eta_u$ , причем эти поправки  $\delta \xi$  и  $\delta \eta$  будут обусловлены несовершенством метода определения величин  $\xi_u$  и  $\eta_u$ . Таким образом, задача обработки градусных измерений должна уже будет формулироваться, как определение размеров и сжатия общего земного эллипсоида.

Возможности получения  $\xi_u$  и  $\eta_u$  открываются нам, в известной степени, теорией изостазии или теорией так называемой «изостатической компенсации» в земной коре.

Компенсация притягательного действия масс, размещающихся выше уровня моря на материках, — массами, лежащими под ними ниже уровня моря, была достаточно установлена для ряда значительных районов результатами астрономо-геодезических работ. Впервые этот факт был подмечен в астрономо-геодезических работах англичан в Индии в первой половине XIX столетия: для пунктов, лежащих в северных, примыкающих к Гималаям, районах Индии, величины  $\xi$ , найденные астрономо-геодезическим путем, оказались значительно менее обусловливаемых действием мощной и обширной Гималайской горной системы; так, для пункта Калиана ( $\varphi = 29^\circ 3'$ ) величина  $\varphi - B$  равна  $+5''.2$ , а предвычисленное уклонение отвеса, обусловливаемое притягательным действием Гималаев, равно  $+27''.8$ . В таблице 6 приведены  $\xi_T$  и  $\eta_T$ , обусловленные действием земного рельефа в разных точках Северной Америки и  $\xi$  и  $\eta$ , полученные для тех же точек астрономо-геодезическим путем.

Таблица 6

Названия пунктов	$\xi_T$	$\eta_T$	Астрономо- геодези- ческое $\xi$	Астрономо- геодези- ческое $\eta$
Санта-Барбара	— 64",97	—	— 18",38	—
Пойнт-Арена	—	+104",63	—	+ 16",98
Нойт-Айланд	—	— 54 ,10	—	— 6 ,62
Уайдин	—	+ 54 ,71	—	+ 13 ,25
Патма Хэд	— 27 ,20	—	— 13 ,52	—
Чивер	—	— 37 ,46	—	— 14 ,77
Поркьюпайн	— 0 ,53	—	+ 2 ,44	—
Хоулетт	— 12 ,96	—	+ 1 ,92	—
Гаргантюа	—	— 11 ,94	—	+ 3 ,47

Конечно, астрономо-геодезические  $\xi$  и  $\eta$  искажены ошибками ориентирования эллипсоида, к которому они отнесены, и ошибками размеров и сжатия этого эллипсоида. Но ошибки размеров и сжатия эллипсоида, уже надлежаще подобранного, обуславливают в  $\xi$  и  $\eta$  изменения по сравнению с их значениями для общего земного эллипсоида лишь в несколько секунд (для США — в 2—3"); так как исходный пункт при получении геодезических широт и долгот в США был выбран внутри страны, в местности, значительно удаленной от горных районов и от океанов, и исходные геодезические широта и долгота этого пункта были установлены многими геодезическими передачами от разных астрономических пунктов, то нельзя было ожидать в астрономо-геодезических  $\xi$  и  $\eta$ , приведенных в таблице 6 искажений, обусловленных погрешностями в ориентировании референц-эллипсоида, больших 2—3" (впоследствии оказалось, что исходные геодезические широта и долгота, принятые при вычислении астрономо-геодезических  $\xi$  и  $\eta$ , приведенных в таблице 6, требуют поправок, меньших 0",2).

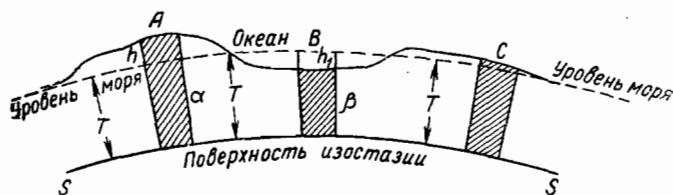
Таким образом, мы видим резкое подтверждение того, что огромное влияние топографического рельефа, т. е. неправильностей физической поверхности Земли, на направление отвесных линий совсем не соответствует действительным значениям уклонений отвесных линий: действительные значения  $\xi$  и  $\eta$  там, где  $\xi_T$  и  $\eta_T$  значительны, в несколько раз меньше (в 4—5 раз) значений этих  $\xi_T$  и  $\eta_T$  в соответствующих точках. Необходимо признать, что действие топографического рельефа на направление отвесной линии действительно компенсируется, и в значительнейшей степени, противоположным действием масс, лежащих вообще ниже уровня океана.

Большие материалы по определениям силы тяжести, собранные в последнее время, также подтверждают наличие указанной компенсации: на океанах (наблюдения Венинг Мейнеса на подводной лодке) Тихом и Атлантическом (исключая острова, прибрежные районы и районы больших впадин дна Океана) наблюденные значения силы тяжести отличаются от нормальной силы тяжести в среднем на величины порядка всего +5 — +11 миллигал, в то время, как недостаток плотности водной массы, заполняющей глубокую (около 4 км) океаническую впадину, должен был бы вызвать отрицательные аномалии силы тяжести порядка 240—300 миллигал, если бы не было компенсирующих, залегающих ниже



дна Океана масс; аномалии силы тяжести, полученные для гравиметрических станций в Калифорнии, в Альпах, в горных районах Средней Европы, также никак нельзя объяснить действием избыточных масс горных хребтов и плато. Мы можем утверждать, на основании астрономических, геодезических и гравиметрических материалов, что в общем на Земле избытки притягивающих масс в виде материков, возвышающихся в среднем около 0,8 км над уровнем моря, и в виде горных хребтов и плато компенсируются недостатком вещества под материками и горными образованиями в слоях земной коры, лежащих ниже уровня моря; недостаток же вещества в водных океанических впадинах возмещается залеганием избыточно плотных масс в слоях Земли, лежащих под дном Океана.

Англичанин Пратт в 1856, 1858 и 1870 гг. опубликовал свои работы по исследованиям уклонений отвеса в Индии и по вопросу существования внутренних масс, уравнивающих избытки или недостатки масс наружных. Пратт так излагает основы своей гипотезы: «Различие в поднятии земной поверхности, проявляющееся в горах, равнинах и дне океанов, произошло от неравномерного сжатия массы при ее затвердевании из жидкого или полужидкого состояния, вследствие чего ниже уровня моря под горами и равнинами имеется недостаток вещества, по количеству приблизительно равный массе, находящейся над уровнем моря; под дном океанов имеется избыток вещества, приблизительно равный недостатку океана по сравнению с горной породой. Таким образом, количества вещества в любом вертикальном столбе, проведенном от поверхности до некоторого уровня под корой, как в настоящее время, так и в прошлом приблизительно одно и то же во всех частях Земли». Процесс неравномерного уплотнения материи захватывал только наружные слои земного шара; по Пратту, при образовании возвышенностей давление в находившемся под ними магматическом веществе уменьшалось, оно приобретало текучесть и значительно увеличивалось в объеме, благодаря чему *заполнение освободившегося объема под возвышенностью*, в период ее образования, происходило веществом с уменьшенной плотностью. Объяснение образо-



Черт. 128

вания уплотнений под дном Океана у Пратта, собственно, отсутствует. Но, конечно, в силу пластичности слоя, непосредственно прилегающего снизу к кристаллической земной коре, и упругости земного шара, давление вышележащих масс на некоторой урovenной поверхности, залегающей достаточно глубоко, должно быть везде постоянным, и поэтому равновесие, имеющее место в общем в земной коре, требует избыточно плотных масс на известных глубинах под дном Океана. Пратт принимает, что поверхность, на которой давление вышележащих масс постоянно, имеет постоянную глубину  $T$  относительно уровня Океана; эта поверхность носит название *поверхности изостазии*, а величина  $T$  называется *глубиной компенсации*. Схема изостатической компенсации по Пратту изображена на черт. 128.

Вертикальные колонны  $A$ ,  $B$ ,  $C$  имеют одну и ту же площадь поперечного сечения на поверхности изостазии  $SS$ ; *вес каждой колонны должен быть постоянным*. Если плотность вещества в колонне  $C$ , взятой на равнинной, немного возвышающейся над уровнем моря части материка, положить равной средней плотности  $\delta$  земной коры, то для колонны  $A$ , взятой в горном районе, плотность вещества в нижней части  $\alpha$  этой колонны должна быть меньше  $\delta$  и равна  $\delta - \delta_1$ ; плотность вещества для нижней части  $\beta$  колонны  $B$ , взятой на Океане, должна быть, наоборот, больше  $\delta$  и равна  $\delta + \delta_2$ . Образование земной коры из столбов разной плотности, поверхности разделов которых имеют вертикальные образующие, и смена которых соответствует рельефу физической поверхности Земли и дна Океана, — вот что является характерным для гипотезы Пратта. Что будет происходить при изменении рельефа вследствие размыва, выветривания, боковых перемещений частей земной коры, землетрясений и т. д.? Искусственность и примитивность такой схемы достаточно очевидна. Тем не менее она в геодезии применяется, как единственная.

В 1855 г. знаменитый астроном Георг Эри выступил со своей гипотезой компенсации притягательного действия материков и горных хребтов. Он так излагает сущность своей гипотезы: «Я полагаю, что горы и плоскогорья не имеют иной опоры, кроме как возникающей от выпячивания нижней части легкой земной коры в более плотную лаву; горизонтальное протяжение этого выступа грубо соответствует горизонтальному протяжению плоскогорья, а глубина нижнего выступа такова, что увеличенная этим сила пловучести приблизительно равна избытку веса от выпячивания вверх плоскогорья. Я представляю себе, что состояние земной коры, лежащей на лаве, можно в точности сравнить с плотом из бревен, плавающим на воде: если мы замечаем бревно, верхняя сторона которого плавает значительно выше верхней поверхности других бревен, то мы можем быть уверены в том, что нижняя сторона его сидит глубже в воде, чем нижняя поверхность остальных».

Существование у возвышенных плоскогорий и материков выступов внутрь, погруженных в более плотную магму, — вот что является характерным для гипотезы Эри; при этом, чем выше плоскогорье или некоторый значительный горный кряж, тем более соответствующий внутренний выступ его. Эти выступы, имея плотность кристаллических пород, меньшую плотности магмы в подстилающем земную кору слое, подвергаются по законам гидростатики давлению снизу вверх, которое и поддерживает и уравнивает давление соответствующих наружных выступов. Представим себе земную кору, как состоящую из глыб, погруженных в подстилающую эту кору магму. По закону Архимеда, погруженная часть глыбы земной коры вытесняет массу магмы, равную массе всей глыбы.

Вырежем из земной коры вертикальный столб  $LCDK$  с сечением, равным единице (черт. 129); высоту  $LC = KD$  всего столба назовем через  $B$ , а высоту части  $BC$ , погруженной в магму, обозначим через  $b = BC$ . Тогда, называя через  $\delta$  плотность кристаллической земной коры и через  $\delta_1$  — плотность магмы, получим по закону Архимеда

$$B\delta = b\delta_1.$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \frac{b}{B} &= \frac{\delta}{\delta_1} \\ B - b &= \frac{\delta_1 - \delta}{\delta_1} B \end{aligned} \right\} \quad (710)$$

Приняв, что среднее значение  $\delta_1$  для глубин от 10 до 40 км равно 3,09 и что  $\delta = 2,83$ , получим  $B - b = 0,085 B$ . Для столба  $HEFG$  (черт. 129) назовем  $B$  через  $B_0$  и  $b$  — через  $b_0$ .

Мы имеем

$$B_0 - b_0 = \frac{\delta_1 - \delta}{\delta_1} B_0. \quad (710)$$

Называя  $LA = KH$  через  $H$ , имеем из черт. 129

$$H + B_0 - b_0 = B - b$$

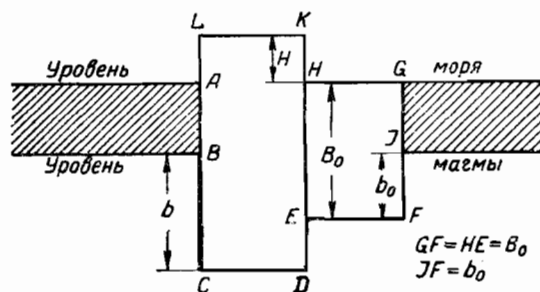
и далее, пользуясь (710) и (711)

$$H + \frac{\delta_1 - \delta}{\delta_1} B_0 = \frac{\delta_1 - \delta}{\delta_1} B. \quad (712)$$

Отсюда

$$B = B_0 + \frac{\delta_1}{\delta_1 - \delta} H. \quad (713)$$

Задаваясь значением  $B_0$ , т. е. толщиной земной коры для районов, где высоты материка над уровнем моря малы, мы могли бы по (713)



Черт. 129

рассчитать толщину  $B$  земной коры для разных районов, где высота  $H$  поверхности земли над уровнем моря имеет то или другое значение, причем при точных расчетах надлежит величины  $\delta$  и  $\delta_1$  выбирать по данным современной геофизики. Нужно заметить, что при величине  $H$  в 2—3 км (и более) множитель  $\frac{\delta_1 - \delta}{\delta_1}$  в (711) будет иметь другое значение, чем в (710), и поэтому формула (713) собственно не совсем верна, неверность ее будет приводить при  $H > 2$  км к заметным неточностям в определении  $B$ . Само собой разумеется, эта формула (713) непригодна для океанических участков. Плотность земной коры, по Эри, принимается постоянной и равной плотности самых верхних слоев Земли — именно обычно принимают  $\delta = 2,67$ . Приблизленно, при  $B_0 = 30$  км,  $\delta_1 = 3,08$  и  $\delta = 2,70$ , мы по (713) получим

$$\text{при } H = 4 \text{ км} \quad \dots \quad B = 62,5 \text{ км};$$

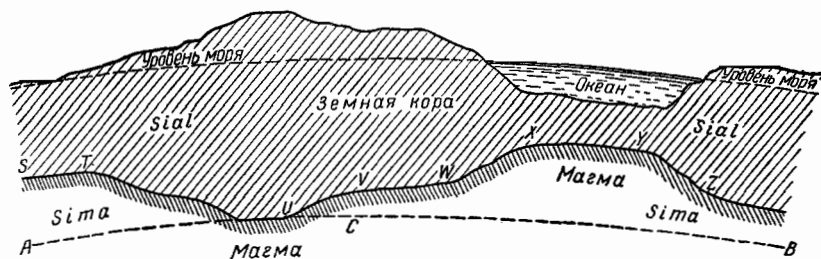
$$\text{„ } H = 2 \text{ км} \quad \dots \quad B = 46,2 \text{ км};$$

$$\text{„ } H = 1 \text{ км} \quad \dots \quad B = 38,1 \text{ км}.$$

Толщина земной коры под океанами получается около 8 км. Из других исследований, применяя гипотезу Эри к обработке гравиметрических

материалов, получается, что на Кавказе толщина земной коры 80—100 км, в Северной Америке 50—70 км, в Альпах 35—45 км и в Норвегии 32—38 км; по работам Bullard толщина земной коры для Восточной Африки 25—40 км.

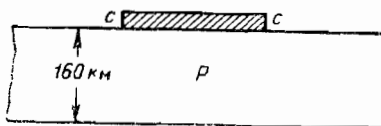
Существенно отметить, что согласно гипотезе Эри толщина земной коры должна возрастать (и очень заметно и быстро) вместе с возрастанием  $H$ ; под мощными горными образованиями она должна быть наибольшей и, наоборот, — сравнительно тонкой на океанах. Нижняя поверхность  $STUVWXYZ$  (черт. 130) кристаллической земной коры должна быть как бы зеркальным отображением внешней физической поверхности Земли.



Черт. 130

Если построить уровенную поверхность  $ACB$  через самую нижнюю точку поверхности  $STUVWXYZ$ , то не трудно рассчитать, что давление вышележащих масс на этой поверхности во всех ее точках остается постоянным. Итак, эту поверхность  $ACB$  можно, в применении к гипотезе Пратта, назвать поверхностью *изостазии*. Сравнивая черт. 128 и 130, мы замечаем, что и гипотеза Пратта, и гипотеза Эри предполагают постоянство массы во всех вертикальных колоннах равного поперечного сечения, простирающихся вниз от дневной поверхности Земли до некоторой определенной глубины. Конечно, иначе и не может быть. Разница двух гипотез — в распределении масс в вертикальных столбах. В гипотезе Пратта кристаллическая земная кора имеет всюду *постоянную толщину*, но *разную плотность* в разных вертикальных столбах, зависящую от высоты рельефа  $H$ .

В гипотезе Эри кристаллическая земная кора имеет всюду *одинаковую плотность*, но *разную толщину*, и компенсирующие массы сосредоточены у нижнего основания глыб земной коры в выступах, вдающихся в тяжелую магму и ее вытесняющих, причем происходят замены магмы более легким веществом кристаллической земной коры. Кристаллическая земная кора образована из кремния и алюминия и поэтому носит название *сиалического слоя* (sial); подстилающий магматический слой образован кремнием и магнием, и вещество это носит название «*sima*».



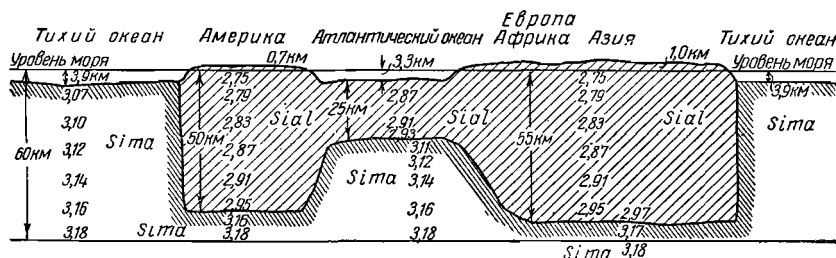
Черт. 131

Представим себе плоскогорье (черт. 131)  $сс$  в 160 км ширины и с постоянной высотой в 3,2 км; по расчетам Эри, если даже подстилающий плоскогорье слой  $P$  будет иметь толщину в 160 км, то все-таки этот слой не выдержит нагрузки в виде плоскогорья  $сс$  и разломится. Таким образом, для удержания мощных возвышенностей Средней Азии, земная кора должна была бы иметь по расчетам Эри толщину более 200 км, чего нет в действительности. Эти соображения подтверждают гипотезу

Эри, хотя вряд ли они вполне правильны. Эта гипотеза становится еще более обоснованной, если представить себе образование земной коры из глыб, плавающих в магме, так как вряд ли можно отрицать разломы земной коры в период ее образования. На земной поверхности происходит постоянное перемещение довольно значительных масс: реки выносят размытые массы в море; подземные воды выщелачивают залежи растворимых солей; за длинные периоды возникают новые горообразования, а прежние горообразования разрушаются под действием тектонических процессов. Гипотеза Эри в известной степени приспособлена к отражению всех этих изменений в устройстве самых верхних слоев земной коры. Всякая добавочная нагрузка вызывает увеличение соответствующего выступа поверхности  $STUVWXYZ$  (черт. 130) в магму, причем участок земной поверхности, на который пришлось эта нагрузка, должен опуститься на  $h \frac{\delta}{\delta_1}$ , если  $h$  — толщина наращенного добавочного слоя на прежнюю дневную поверхность рассматриваемого участка (следовательно, новая дневная поверхность будет иметь большую высоту над уровнем моря на  $\frac{\delta_1 - \delta}{\delta_1} h$ ). Снос некоторой массы с данного участка земной поверхности будет приводить к уменьшению нагрузки в соответствующем вертикальном столбе и к поднятию его на  $h \frac{\delta}{\delta_1}$ , если  $h$  — толщина снесенного сверху слоя (следовательно, новая дневная поверхность рассматриваемого участка будет иметь уменьшенную высоту над уровнем моря на  $\frac{\delta_1 - \delta}{\delta_1} h$ ). Но эти перемещения вертикальных столбов, вызываемые изменением их нагрузки, будут происходить очень медленно и выполняться в очень длинные периоды времени, в течение веков, главным образом, в силу необходимости преодолеть значительные сцепления между отдельными глыбами земной коры или значительное сопротивление прогибу того щита (или платформы) земной коры, на площади которого пришлось изменение нагрузки в той или другой части этой платформы. Последние обстоятельства ведут к значительному уменьшению самих поднятий и опусканий участков земной коры при увеличении или уменьшении нагрузки на них. *Очевидно, следовательно, изостазия связана с вековыми движениями суши.* Ярким примером такого векового движения суши, связанного с нарушением изостатического равновесия и с обратным процессом его восстановления, является Фенно-Скандинавский щит. В ледниковый период вся северная часть Европы была покрыта мощным ледяным покровом, толщина которого, вероятно, могла достигать в Скандинавии до 2—3 км (такая мощность ледяного покрова имеется в настоящее время в Гренландии). Под давлением этой ледяной массы суша опустилась; это опускание произошло может быть за несколько тысячелетий (оледенение продолжалось несколько сот тысяч лет). Стаивание льдов произошло *сравнительно* быстро (от 5 до 13 тысяч лет), и таким образом, *достигнутое изостатическое равновесие* (в течение ледникового периода) было нарушено. Восстановление его должно соответствовать исчезновению колоссальной нагрузки, вызванной устранением толщи льда в 2—3 км. Суша в Скандинавии должна была с конца ледникового периода постепенно подниматься, и это поднятие должно продолжаться до тех пор, пока не будет вновь достигнуто изостатическое равновесие. Опускание, вычисляемое как  $h \frac{1}{\delta_1}$ , составляет около 0,7—1,0 км, а сле-

довательно, такой же величины должно бы быть и обратное вековое поднятие. В действительности в Скандинавии мы наблюдаем поднятие всего полуострова со скоростью 1 м в столетие; следовательно, процесс восстановления изостатического равновесия растягивается на период порядка 700—800 столетий. Однако, вероятно, опускание в ледниковый период было значительно меньшим, вследствие значительного сопротивления, оказываемого имеющей сводчатую форму кристаллической земной корой.

На черт. 132 приведена схема строения земной коры, полученная на основании обработки результатов современных сейсмологических наблюдений и приводимая в виде таблиц в современных капитальных работах по строению Земли. Выделение сплошного материкового образования,



Черт. 132

состоящего из sial, характерно для этой схемы; на Тихом океане сиалический слой имеет толщину, равную нулю, и здесь непосредственно под дном океана залегает sima. На одних и тех же глубинах в Америке и в Евразии sial имеет одну и ту же плотность, за исключением восточного берега Атлантического океана; для части материковой глыбы, соответствующей Атлантическому океану, имеем плотности, несколько большие, чем плотности на тех же глубинах для континентов: это соответствует сжатию пород при происшедшем некогда опускании материка, занимавшего значительную часть Атлантического океана. Толщина сиалического слоя для Америки около 50 км, для Евразии около 55 км — в соответствии с большей средней высотой евразийского континента над уровнем моря; толщина сиалического слоя для Атлантического океана около 23 км. Поверхности раздела sima и sial для берегов Америки представляются в большей части поверхностями с вертикальными образующими. Уже на глубинах около 60 км наступает постоянство плотностей в горизонтальном направлении, и, следовательно, верхний предел для глубины изостатической компенсации по данным геофизики следует считать равным 55—60 км. То, что схематически представлено на черт. 132, — это есть сводка результатов наблюдений, это есть то, что существует в действительности. Эта схема может быть использована для подтверждения воззрения, что «никогда в истории Земли континенты не были дном океанической впадины», но это из нее вовсе не вытекает, и мы можем, согласно Вегенеру, представить себе, что некогда сиалический слой покрывал сплошь всю поверхность Земного шара, и в свою очередь был покрыт морем (глубиной до 2,6 км), а затем в области Тихого океана, по неизвестной причине, эта оболочка была разорвана на огромной площади, и этот разрыв, вместе с последовавшим сокращением оболочки, вызвал образование впадины Тихого океана, лишенной сиалического слоя.

Приведенные данные геофизики подтверждают в общем основное положение гипотезы Пратта: «Колонны, соответствующие пониженным

местам земного рельефа, имеют увеличенную плотность; колонны, соответствующие возвышенным местам рельефа, имеют уменьшенную плотность». Однако плотности на глубинах до 30 км в Атлантическом океане существенно меньшие, чем в Тихом океане; а на материках компенсация достигается отчасти и изменениями длины (глубины) колонн, что свойственно гипотезе Эри, а не Пратта. Но и гипотеза Эри подтверждается лишь до некоторой степени. Сиалическая кора на Тихом океане просто отсутствует, океан образовался не так, как это вытекает из гипотезы Эри; значительные выступы и зубцы, соответствующие отдельным горным образованиям и достигающие, согласно вытекающим из гипотезы Эри расчетам, значений от 10 до 50 км, также отсутствуют. Однако большая толщина сиалического слоя для Евразии по сравнению с Америкой, вследствие большей средней высоты Евразии над уровнем моря, и заметно меньшая толщина этого слоя под Атлантическим океаном, образовавшимся благодаря опусканию материка, а не как Тихий океан, подтверждают в известной степени гипотезу Эри, но конечно, лишь в общих чертах и без распространения на Океан в прямом смысле этого термина. Существенно отметить, что возникновение возвышенностей на континентах очень слабо сказалось на распределении плотностей на больших глубинах, совсем не так резко, как это вытекает из гипотезы Эри; резкое влияние образования возвышенностей можно ожидать лишь на глубинах до 20 км, и, конечно, это влияние нередко *достаточно закономерно*, и не стоит нередко, *в прямой связи с размером рельефа горного образования*. Изостатическая компенсация обусловила общее распределение плотностей в процессе образования континентов и океанов; образование возвышенностей было *второстепенным, подчиненным* влиянием в этом процессе, и оно вносило во всей толще земной коры, *лежащей ниже уровня Океана на 20 км и более, лишь малые модуляции* в соответствовавшем главному процессу распределении плотностей. Во всех гипотезах изостазии, *второстепенный* процесс рассматривается без всякой связи с главным. В верхнем 20-километровом слое во многих случаях имеет место смена плотностей, зависящая не только от высоты рельефа, но и от самого процесса горообразования; во всяком случае, смена плотностей в этом самом верхнем слое нередко вообще не укладывается ни в какую схему изостатической компенсации. Могут быть и имеются в действительности случаи, когда из-за распределения плотностей в верхнем 20-километровом слое изостатической компенсации в данном районе нет, или она — неполная, или не укладывающаяся в простые схемы; имеются и районы, где нарушенное некогда изостатическое равновесие еще не возобновилось.

Числовые результаты вычисления уклонений отвеса почти совпадают, будем ли мы при этом применять схему Пратта или Эри: это обусловливается тем, что и при неверном с точки зрения геофизики распределении плотностей можно получить верное влияние его на уклонение отвеса: или, другими словами, это обусловливается тем, что одной и той же системе уклонений отвеса соответствует неопределенное распределение плотностей внутри Земли. Так как вычисление по схеме Пратта проще, то ее и применяют в геодезии. Но нужно иметь в виду, что уверенные результаты получаются далеко не всегда, да и самая эта уверенность в результатах устанавливается не прямым, а косвенным путем.

Нельзя оспаривать изостатического равновесия и изостатической компенсации *в общем и целом в земной коре*. Нарушения этого состояния необходимы, иначе должна остановиться вся деятельность природы на земном шаре; причины этих нарушений весьма многочисленны и раз-

нообразны. Но тем не менее это — только *частные нарушения общего состояния*. Если геодезические результаты для одних районов констатируют наличие изостатической компенсации, а для других районов отсутствие этой компенсации — в полной или неполной мере, то и эти выводы, если они получены правильно, представляют сами по себе существенное значение в изучении твердой оболочки земного шара.

Применение теории изостазии оправдалось, по общепринятому мнению, в полной мере при обработке градусных измерений США; обработка измерений силы тяжести по США с применением теории изостазии приводит к среднему из абсолютных аномалий силы тяжести всего в 18 миллигал, а с применением редукций по Буге — около 48 миллигал. Применение теории изостазии к обработке градусных измерений в Западной Европе также привело к положительным результатам. Но в Индии применение теории изостазии к астрономо-геодезическим и гравиметрическим материалам не увенчалось успехом. Изостатически недокомпенсированным оказывается Кавказ; отсутствие изостатической компенсации констатируется работами С. В. Евсеева по ЦНИИГАиК на Среднем Урале и в обширном районе между Волгой и Уралом.

В больших равнинных областях (например, Европейская часть СССР) действие топографического рельефа на отклонение отвеса близко к нулю, а поэтому и действие компенсирующих масс, за их почти полным отсутствием, близко к нулю; между тем на известных глубинах в этих равнинных областях залегают опустившиеся мощные горные хребты (покрытые слоем наносов), которые вызывают отклонение отвеса порядка 10—15". Учесть такие влияния никакая схема изостатической компенсации не может.

Неуспехи в применении в некоторых районах той или иной схемы изостатической компенсации привели к введению понятий «локальная» и «региональная» компенсация: региональная компенсация отвергает компенсацию каждой отдельной возвышенности, каждой отдельной впадины, и устанавливает, что компенсация действует только в целом по отношению к более или менее значительным площадям, что отдельные детали рельефа не компенсируются, а уравниваются целые области. Однако попытки применить региональную компенсацию в общем не дали положительных результатов. Можно определенно сказать, что в зависимости от истории образования той или иной части земной коры может иметь место или региональная или локальная компенсация, и неучитывание *геологической стороны дела* приводит к постановке вопроса о региональной или локальной компенсации *вслепую*.

Как видим, применение теории изостазии в геодезических целях наталкивается на целый ряд осложняющих обстоятельств, а используемые схемы изостатической компенсации не увязаны с выводами геофизики. Поэтому и результаты этого применения приходится принимать с известной осторожностью; тем не менее приходится отметить, что применение теории изостазии в геодезии и гравиметрии уже ознаменовалось рядом крупных успехов.

## § 95. Применение теории изостазии Хейфордом к обработке градусных измерений в США. Учет влияния внешних масс (топографического рельефа)

Прежде всего остановимся на учете по методу Хейфорда влияния топографического рельефа местности на отклонение отвесной линии. Применяя формулы (653), (657) и (662), Хейфорд пользовался разбив-



кой территории вокруг пункта  $A$  на кольцевые зоны, внешние радиусы которых приведены в табл. 7.

Таблица 7

Номер кольца	Внешний радиус в километрах	Номер кольца	Внешний радиус в километрах	Номер кольца	Внешний радиус в километрах
1	4126,4	13	55,92	25	0,7915
2	2827,8	14	39,22	26	0,5551
3	1962,4	15	27,50	27	0,3892
4	1369,2	16	19,291	28	0,2729
5	957,9	17	13,523	29	0,1915
6	670,8	18	9,487	30	0,1342
7	470,3	19	6,653	31	0,0941
8	329,8	20	4,665	32	0,0660
9	231,1	21	3,272	33	0,0463
10	162,27	22	2,2948	34	0,0325
11	113,73	23	1,6093		
12	79,76	24	1,1286		

В формулах (653), (657) и (662) Хейфордом положено

$$K = \sin A_n - \sin A_{n-1} = 0,25.$$

Следовательно, квадрант окружности разбивался на четыре сектора. При таком значении  $K$  величина  $L$  подобрана в (653) таким образом, чтобы при  $h$ , равном одному футу, величина  $d_x$  оказывалась бы равной  $0'',0001$ . Тогда, определив по топографической карте среднюю высоту  $h$  призмы в сотнях футов, получаем непосредственно соответствующее этой призме  $d_x$  или  $d_y$  в сотых долях секунды. Оказалось, что для этого должно быть в (653)

$$\frac{r_K}{r_i} = 1,426.$$

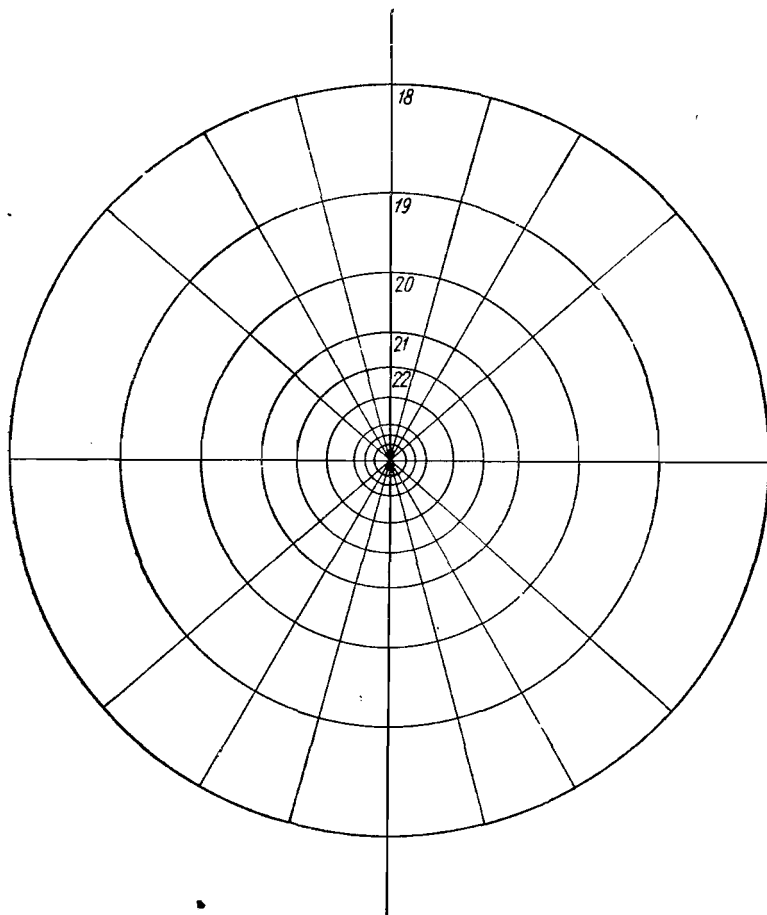
Формула (653) и отношение  $\frac{r_K}{r_i} = 1,426$  применялись с 34-го до 7-го кольца. Начиная же с внешнего радиуса 6-го кольца (670,8 км) и до конца, учитывалось влияние кривизны Земли и применялась формула (662) § 87. Однако, чтобы иметь ненарушенным условие, что при  $h = 1$  футу  $d_x$  или  $d_y$  равно  $0'',0001$ , множитель

$$\ln \frac{r_K}{r_i} + \frac{r_K^2 - r_i^2}{48 R^2} - 2 \sin \frac{\Theta_K - \Theta_i}{4} \sin \frac{\Theta_K + \Theta_i}{4}$$

в (662) приравнялся  $\ln 1,426$ . Это привело к увеличению радиусов колец, начиная с внешнего радиуса 6-го кольца: увеличение внешнего радиуса 6-го кольца получилось всего на 0,3 км, радиуса 5-го кольца на 19 км, радиуса 2-го кольца на 56 км и внешнего радиуса первого кольца на 173 км. Образец палетки Хейфорда приводится на черт. 133.

Дальнейшее в методе Хейфорда вытекает из сказанного в § 85, а именно: по таблице радиусов и по значениям  $\sin A$  строились диаграммы

на прозрачной бумаге (на целлулоиде), которые и накладывались на имевшиеся топографические и полутопографические карты; для каждой клетки диаграммы, ориентированной осью  $X$  по меридиану (черт. 133), подсчитывалась средняя высота рельефа в сотнях футов, что давало сейчас же соответствующее  $d_x$  в сотых долях секунды. Высоты призм на континентах и на островах считались положительными; глубины моря брались, как отрицательные  $h$ , но *уменьшенные* в отношении  $\frac{\delta - 1,03}{\delta} = \frac{1,64}{2,67}$ , вследствие учета притяжения толщи воды. Для определения слагающей



Черт. 133

уклонения отвеса в первом вертикале, диаграмма поворачивалась на  $90^\circ$ . Для близких к  $A$  участков, имевших значительную высоту над уровнем точки  $A$ , применялась формула (657). Нужно заметить, что астрономические точки градусного измерения, как и все геодезические точки, считаются отнесенными к поверхности геоида. Это вызывает необходимость в астрономические широты ввести поправки за кривизну силовой линии силы тяжести, о чем будет сказано ниже. Но это, казалось бы, обязывает учитывать влияние внешних масс на направление отвеса не для самой астрономической станции  $A$ , а для ее проекции  $A'$  на уровень океана.



уже был выполнен в первой части нашего Руководства по высшей геодезии, но все-таки приведем его здесь вновь. По теореме Клеро, имеем

$$g = g_{45}^{\circ} \left( 1 - \frac{\beta}{2} \cos 2\varphi \right).$$

Здесь  $g_{45}^{\circ}$  — ускорение силы тяжести на уровне океана под широтой  $45^{\circ}$ ;  $\frac{\beta}{2} = 0,0026$ ;  $g$  — ускорение силы тяжести на уровне океана под широтой  $\varphi$ . Возьмем (черт. 135) две бесконечно близкие уровенные поверхности  $mn$  и  $m_1n_1$ ; примем  $m_1m = dh$ . Для уровенных поверхностей имеем

$$g' dh = C,$$

причем  $g'$  — значение ускорения силы тяжести в  $m$ . Отсюда

$$g' d^2h + dg' h = 0.$$

Под  $d^2h$  понимается, конечно, изменение  $dh$  при переходе от  $m$  к  $n$ , т. е. влияние непараллельности уровенных поверхностей  $m_1n_1$  и  $mn$ . Далее, напомним

$$d^2h = -\frac{dg'}{g'} dh,$$

$$dg' = \beta g_{45}^{\circ} \sin 2\varphi d\varphi.$$

В последнем уравнении мы пренебрегли изменением  $g'$  с высотой, что, однако, не влияет на точность получения  $d^2h$ . Итак, имеем

$$d^2h = -\beta \sin 2\varphi d\varphi dh.$$

с пренебрежением малыми величинами третьего порядка.

Окончательно получаем

$$(dh) = -H\beta \sin 2\varphi d\varphi$$

и отсюда

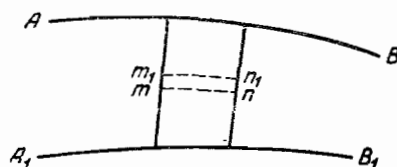
$$\varphi - \varphi' = \frac{H\beta}{M} \sin 2\varphi \varphi''.$$

Подставляя  $H$ , выраженное в километрах, а  $M$  беря для широты  $45^{\circ}$ , получим

$$\varphi' = \varphi - 0'',17 H \sin 2\varphi. \quad (714)$$

Это приведение широт является, конечно, непренебрегаемым. Его применяют не только при обработке градусных измерений с применением теории изостазии, но и вообще всегда при обработке градусных измерений. Нужно лишь отметить, что *действительное* искривление силовой линии может не совпадать с тем, которое было принято в настоящем параграфе, вследствие влияния аномальных масс.

Обращаясь снова к работе Хейфорда, отметим, что он впервые ввел учет действия внешних масс, очень удаленных от станции  $A$ , с охватом при этом громадной территории вокруг  $A$  в радиусе 4126 км. Хотя удаленные от  $A$  призмы дают каждая ничтожные слагаемые в формуле (662), однако может случиться, что в первом или втором кольце половина призм приходится на континенты, и каждая призма в этом их числе будет давать малое положительное слагаемое; в то же время другая



Черт. 135

половина призм с призмами, расположенными диаметрально противоположно призмам первой половины, придется на океаны, и каждая призма здесь будет давать малое отрицательное слагаемое. В результате действие всех призм рассматриваемого кольца может оказаться заметным. Вычисления Хейфорда действительно показали, что иногда первое кольцо между радиусами 2828 и 4126 дает отклонение отвеса в 5". Отсюда, конечно, можно сделать даже вывод, что нельзя ограничиваться и радиусом в 4126 км; однако нужно иметь в виду, что компенсирующее действие внутренних масс приводит к тому, что действие внешних масс далеких зон входит в образование действительного отклонения отвеса (т. е. обусловленного действием и внешних и внутренних масс) с множителем, меньшим 0,001; следовательно, результирующее влияние зон, следующих за радиусом 4126 км, будет выражаться величиной порядка 0,002—0",003.

Вычисления, описанные в настоящем параграфе, требуют применения карт разных масштабов, — от подробных топографических карт в масштабе 1 : 25 000 для самых близких к станции  $A$  зон до карт в масштабах 1 : 500 000, 1 : 1 000 000 и 1 : 2 000 000 для зон средних и дальних. Очевидно, что при пользовании картами в масштабах 1 : 1 000 000 и 1 : 2 000 000 при построении ранее указанной палетки надлежит учитывать проекцию карты.

В отдельных исследованиях кольцевые зоны, ограничиваемые окружностями, заменяют зонами, ограничиваемыми кривыми, имеющими уравнение

$$\rho = r \sqrt{\cos A},$$

в котором  $\rho$  обозначает радиус-вектор в направлении с азимутом  $A$ , а  $r$  — значение  $\rho$  при  $A = 0$ . Подобная зона между кривыми с уравнениями  $\rho_K = r_K \sqrt{\cos A}$  и  $\rho_i = r_i \sqrt{\cos A}$  приводит к такой же слагающей отклонения отвеса, как и кольцевая зона между радиусами  $r_K$  и  $r_i$ , конечно, при одной и той же средней высоте рельефа в той и другой зоне. Преимущество кривых заключается в том, что при пользовании ими не нужно подразделять зону на секторы (не нужны радиальные подразделения), а достаточно подсчитать среднюю высоту рельефа для всей зоны.

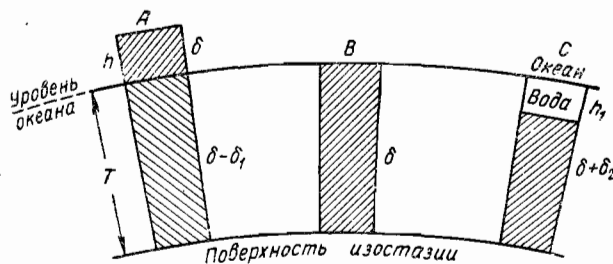
#### § 96. Применение теории изостазии Хейфордом — учет влияния масс, компенсирующих действие наружных масс. Результаты и выводы Хейфорда

Применяя гипотезу Пратта, Хейфорд полагал, что:

- 1) поверхность изостазии имеет всюду постоянную глубину  $T$  относительно уровня моря;
- 2) компенсация выполняется в полной мере;
- 3) плотность компенсирующей массы в каждой вертикальной колонне постоянна от поверхности изостазии до дна океана, или от поверхности изостазии до уровня океана для континентальных колонн; плотность компенсирующей массы соответствует недостатку или избытку плотности в верхней части колонны. Конечно, последнее положение вводится затем, чтобы не иметь дела с теми или иными предположениями относительно закона изменения плотностей в компенсирующих массах с высотой, для которых во времена Хейфорда (1910 г.) не было никаких прочных оснований.

Назовем через  $\delta$  среднюю плотность вещества в земной коре, заключенной между внешней физической поверхностью Земли и поверхностью

изостазии. Пусть на черт. 136 колонна  $A$  соответствует возвышенности высотой  $h$ , колонна  $B$  — низменной части материка, и колонна  $C$  — океанической впадине глубиной  $h_1$ . Плотность вещества в нижней части колонны  $A$ , лежащей ниже уровня океана, назовем через  $\delta - \delta_1$ , плотность вещества в части колонны  $C$ , лежащей ниже дна океана, назовем через  $\delta + \delta_2$ ; в верхней части колонны  $A$  плотность принимается рав-



Черт. 136

ной  $\delta$ . Считая  $T$  и  $h_1$  отрицательными, мы для колонн  $A$  и  $B$ , имеющих одинаковое поперечное сечение, напомним

$$h\delta - T(\delta - \delta_1) = -T\delta.$$

Отсюда

$$h\delta = -T\delta_1. \quad (715)$$

Для колонн  $B$  и  $C$ , имеющих также одинаковые поперечные размеры, имеем

$$\begin{aligned} -T\delta &= -h_1 1,03 - (T - h_1)(\delta + \delta_2), \\ h_1(\delta - 1,03) &= (T - h_1)\delta_2. \end{aligned} \quad (716)$$

При вычислении влияния масс, лежащих между уровнем океана и поверхностью изостазии, на направление отвесной линии в точке  $A$ , мы, понятно, можем совершенно не учитывать влияние однородного слоя, заключенного между уровнем океана и поверхностью изостазии и имеющего плотность  $\delta$ . Другими словами, нам в колоннах  $A$  и  $C$  нужно учесть влияние не всей массы колонны, а лишь *компенсирующей* массы, т. е. для колонны  $A$  — учесть действие массы с плотностью  $-\delta_1$ ; для колонны  $C$  нам нужно оценить только действие компенсирующей массы с плотностью  $+\delta_2$ , распределенной равномерно в части этой колонны, лежащей ниже дна океана (недостаток массы в океанической впадине уже был учтен при вычислении действия топографического рельефа).

При вычислении влияния компенсирующих масс надлежит взять, конечно, ту самую систему призм, которая была использована при разбивке местности для оценки действия внешних масс. Призма, заключенная между кольцами с радиусами  $r_K$  и  $r_i$  и между вертикальными плоскостями с азимутами  $A_n$  и  $A_{n-1}$ , ограничивалась при вычислении действия внешних масс уровненными поверхностями с отметками 0 и  $h$  или уровненными поверхностями с отметками 0 и  $h_1$ . При вычислении действия компенсирующих масс та же призма будет ограничиваться уровненными поверхностями или с отметками 0 и  $T$ , или с отметками  $h_1$  и  $T$ . Возьмем случай призмы, соответствующей участку континента, представленному на черт. 136 колонной  $A$ . Вследствие значительности  $T$  для близких и

средних зон Хейфорд применял при вычислении влияния компенсирующих масс формулу (657). Называя через  $D_T$  влияние верхней части колонны  $A$ , возвышающейся на  $h$  над уровнем моря и через  $D_C$  — влияние компенсирующей массы для той же колонны  $A$ , будем иметь на основании (653) и (657)

$$D_T = \frac{3}{4} \frac{\rho''}{\pi R} \frac{\delta}{\delta_0} h (\sin A_n - \sin A_{n-1}) \ln \frac{r_k}{r_i}; \quad (717)$$

$$D_C = \frac{3}{4} \frac{\rho'' \delta_1}{\pi R \delta_0} T (\sin A_n - \sin A_{n-1}) \times \\ \times \ln \frac{r_k + \sqrt{r_k^2 + T^2}}{r_i + \sqrt{r_i^2 + T^2}} \quad (718)$$

Но по (715)

$$\delta_1 T = -h \delta$$

и поэтому

$$D_C = -\frac{3}{4} \frac{\rho''}{\pi R} \frac{\delta}{\delta_0} h (\sin A_n - \sin A_{n-1}) \ln \frac{r_k + \sqrt{r_k^2 + T^2}}{r_i + \sqrt{r_i^2 + T^2}}. \quad (719)$$

Деля (718) на (717), получаем

$$\frac{D_C}{D_T} = - \frac{\lg \left( \frac{r_k + \sqrt{r_k^2 + T^2}}{r_i + \sqrt{r_i^2 + T^2}} \right)}{\lg \frac{r_k}{r_i}}. \quad (720)$$

В (720) непорочны логарифмы заменены обыкновенными. Далее

$$F = \frac{D_C + D_T}{D_T} = 1 - \frac{\lg \left( \frac{r_k + \sqrt{r_k^2 + T^2}}{r_i + \sqrt{r_i^2 + T^2}} \right)}{\lg \frac{r_k}{r_i}} \quad (721)$$

и, наконец,

$$D_C + D_T = F D_T. \quad (722)$$

Формулой (722) определяется суммарное действие на направление отвеса всей колонны  $A$ , т. е. и внешнего в ней рельефа и внутренних масс. Величина  $(D_C + D_T)$  была бы равна действительному отклонению отвеса в  $A$ , взятому с обратным знаком, если бы действительное распределение вещества в земной коре соответствовало схематическому его распределению, изображенному на черт. 136 и вытекающему из гипотезы Пратта-Хейфорда.

Для далеких (сферических) зон Хейфорд применял те же формулы (717), (718), (719), (720), (721) и (722), однако без достаточных к тому математических обоснований. Конечно, случай большого рельефа при значительном удалении призмы от станции  $A$ , когда нужно учитывать сферичность Земли, не предусматривается формулой (657), а следовательно, и формулой (718); и так как  $T$  в работах Хейфорда имело значение от 112 до 160 км, то эта формула для далеких зон должна полу-

читать некоторую поправку; в формуле (717) точно так же  $\ln \frac{r_K}{r_i}$  следует заменить для далеких зон выражением

$$\ln \frac{r_K}{r_i} + \frac{r_K^2 - r_i^2}{48 R^2} - 2 \sin \frac{\Theta_K - \Theta_i}{4} \sin \frac{\Theta_K + \Theta_i}{4}.$$

Но так как числовое значение этого выражения остается и для далеких зон равным  $\ln 1,426$ , то при переходе к (720), (721) и (722) нужно только правильно определить поправку к  $\ln \frac{r_K + \sqrt{r_K^2 + T^2}}{r_i + \sqrt{r_i^2 + T^2}}$ , которой, однако, Хейфорд пренебрегает и влияние которой не определяет и не подсчитывает. Влияние это заведомо будет мало, но и множитель  $F$  для далеких зон будет мал, так что рассматриваемая погрешность может пренебрежимо повлиять на получение значений  $F$  для далеких зон. На это впервые обратил внимание в 1939 г. С. В. Евсеев в своей работе «Исследование топографо-изостатической редукции уклонов отвеса...» в трудах ЦНИИГАиК, выпуск 29. Формулы Евсеева для  $D_C$  и  $D_T$  будут следующие

$$D_C = -\frac{3}{4} \frac{\delta}{\varepsilon_0} \frac{\rho''}{\pi R} h (\sin A_n - \sin A_{n-1}) \left\{ \left( 1 - \frac{3}{4} \frac{T}{R} + \frac{3}{16} \frac{T^2}{R^2} \right) \left( \ln \operatorname{tg} \frac{\Theta}{4} + \cos \frac{\Theta}{2} \right) + \frac{1}{16} \frac{T^2}{R^2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Theta}{2} \right\}_{\Theta=\Theta_i}^{\Theta=\Theta_K}; \quad (723)$$

$$D_T = +\frac{3}{4} \frac{\delta}{\varepsilon_0} \frac{\rho''}{\pi R} h (\sin A_n - \sin A_{n-1}) \left( \ln \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} + \cos \frac{\Theta}{2} \right)_{\Theta=\Theta_i}^{\Theta=\Theta_K}. \quad (724)$$

Формула (724) есть прежняя наша формула (662).

Сравнение формул (719) Хейфорда с (723) Евсеева показывает, что  $D_C$ , вычисляемое по Хейфорду, может быть ошибочно до 0,4%, т. е.  $F$  для далеких зон будет ошибочно на 0,004 в то время, как его значение для этих зон около 0,001—0,002. Мы приводим значения  $F$  по Хейфорду в таблице 8.

Как видно, значения  $T$  взяты просто равными значениям внешних радиусов колец 13, 12, 11, 10 и 9, приведенных в таблице 7.

Таблица 8 значений  $F$  показывает, что для первых шести колец ( $D_C + D_T$ ) близко к нулю, т. е. что действие внешних масс в дальних зонах совершенно компенсируется действием внутренних масс. Но эта же таблица показывает, что в ближних зонах (кольца 29—22) никакого компенсирующего действия внутренние массы не оказывают, и в этих зонах действие их топографического рельефа целиком входит в образование результирующего уклона отвесной линии. Отсюда вытекает, что в ближних зонах нужно тщательно определять средние высоты  $h$  верхней поверхности призм и пользоваться точными и подробными топографическими картами. Наоборот, можно в ряде случаев ограничиться предельным  $r_K = 957,9$  (внешний радиус 5-го кольца) и все последующие зоны просто не учитывать. Отметим, что  $F$  остается постоянным для всех призм кольца между радиусами  $r_K$  и  $r_i$ . Поэтому, чтобы получить сумму  $\Sigma D_T + \Sigma D_C$  для всех призм данного кольца, нужно  $\Sigma D_T$  для этого кольца умножить на соответствующее  $F$ . Таким образом, центр тяжести работы по вычислению топографо-изостатических редукций ( $D_C + D_T$ ) сводится к вычислению величин  $D_T$ , т. е. к выбору средних высот  $h$  для принятых подразделений территории; переход после этого



Т

Значения  $F$  для разных глубин компенсации  
Глубина компенсации  $T$  в километрах

Кольцо	231,3	162,2	120,9	113,7	79,76
29					
28					0,997
27			0,997	0,997	0,996
26		0,997	0,996	0,996	0,995
25	0,997	0,996	0,995	0,995	0,992
24	0,996	0,995	0,992	0,992	0,988
23	0,995	0,992	0,988	0,988	0,983
22	0,992	0,988	0,984	0,983	0,976
21	0,983	0,983	0,979	0,976	0,965
20	0,988	0,976	0,967	0,965	0,951
19	0,976	0,965	0,954	0,951	0,930
18	0,965	0,951	0,935	0,930	0,900
17	0,951	0,930	0,906	0,900	0,859
16	0,930	0,900	0,867	0,859	0,801
15	0,900	0,859	0,813	0,801	0,721
14	0,859	0,801	0,736	0,721	0,618
13	0,801	0,721	0,638	0,618	0,493
12	0,721	0,618	0,517	0,493	0,358
11	0,618	0,493	0,382	0,358	0,234
10	0,493	0,358	0,253	0,234	0,139
9	0,358	0,234	0,153	0,139	0,077
8	0,234	0,139	0,086	0,077	0,040
7	0,139	0,077	0,045	0,040	0,020
6	0,077	0,040	0,022	0,020	0,010
5	0,040	0,020	0,011	0,010	0,005
4	0,020	0,010	0,006	0,005	0,003
3	0,010	0,005	0,003	0,003	0,001
2	0,005	0,003	0,001	0,001	0,001
1	0,003	0,001	0,001	0,001	0,000

к величинам  $(D_C + D_T)$  выполняется просто. Приведем Хейфорда для океанического участка. Мы имеем

$$D_T = \frac{3}{4} \frac{h_1(\delta - 1,03)}{\delta_0 \pi R} \rho'' (\sin A_n - \sin A_{n-1}) \ln \frac{r_K}{r_i}$$

$$D_C = -\frac{3}{4} \frac{\delta_2 \rho''}{\delta_0 \pi R} (T - h_1) (\sin A_n - \sin A_{n-1}) \ln \frac{r_K + \sqrt{r_K^2}}{r_i + \sqrt{r_i^2}}$$

На основании же (716), перепишем формулу для  $D_C$  так

$$D_C = -\frac{3}{4} \frac{h_1(\delta - 1,03)}{\delta_0 \pi R} \rho'' (\sin A_n - \sin A_{n-1}) \ln \frac{r_K + \sqrt{r_K^2}}{r_i + \sqrt{r_i^2}}$$

Отсюда

$$\frac{D_C}{D_T} = - \frac{\operatorname{arctg} \frac{r_K + \sqrt{r_K^2} + (T - h_1)^2}{r_i + \sqrt{r_i^2} + (T - h_1)^2}}{\lg \frac{r_K}{r_i}};$$

$$D_C + D_T = D_T F';$$

$$F' = 1 - \frac{\lg \frac{r_K + \sqrt{r_K^2 + (T - h_1)^2}}{r_i + \sqrt{r_i^2 + (T - h_1)^2}}}{\lg \frac{r_K}{r_i}} \quad (726)$$

Формулы (726) и исчерпывают вопрос для океанических участков. Приведем теперь таблицу 9, являющуюся развитием таблицы 6; в ней приводятся не только  $\xi_T = -D_T$  и  $\xi$  и  $\eta$  астрономо-геодезические для разных пунктов США, но и  $-(D_T + D_C)$  для тех же пунктов при разных глубинах компенсации.

Таблица 9

Пункты	Слагающая отклонения	$-D_T$	Значения $-(D_T+D_C)$			$A-G$
			Глубина компенсации			
			162,2 км	120,9 км	113,7 км	
Санта-Барбара	Меридиан	$-64'',97$	$-14'',91$	$-12'',78$	$-12'',35$	$-18'',38$
Пойнт-Арена	Первый вертикал	$+104,63$	$+20,39$	$+16,45$	$+15,69$	$+16,98$
Нойт-Айланд	Первый вертикал	$-54,10$	$-3,33$	$-2,09$	$-1,92$	$-6,62$
Уайдин	Первый вертикал	$+54,71$	$+22,11$	$+20,38$	$+20,00$	$+13,25$
Патма-Хэд	Меридиан	$-27,20$	$-9,42$	$-8,66$	$-8,53$	$-13,52$
Чивер	Первый вертикал	$-37,46$	$-9,20$	$-8,80$	$-8,73$	$-14,77$
Поркью-лайн	Меридиан	$-0,53$	$+3,30$	$+2,93$	$+2,85$	$+2,14$
Хоуллетт	Меридиан	$-12,96$	$+3,62$	$+3,40$	$+3,33$	$+1,92$
Гаргантюа	Первый вертикал	$-11,94$	$+2,46$	$+2,17$	$+2,11$	$+3,47$

В последней графе ( $A - G$ ) таблицы приведены значения  $\xi$  и  $\eta$ , полученные астрономо-геодезическим путем при вычислении триангуляции США на эллипсоиде Кларка, по определению 1866 г. ( $a = 6\,378\,206$ ,  $b = 6\,356\,584$ ) и с исходными геодезическими данными, выведенными предварительно, которые, однако, впоследствии изменились только очень немного (в широте на  $-0'',20$ , в долготе на  $+0'',14$ ). Таблица резко указывает, как близки числа графы  $A - G$  к значениям  $-(D_T + D_C)$  и какие огромные расхождения имеются между значениями  $-D_T$  и  $A - G$ .

С другой стороны, таблица указывает, что  $-(D_T + D_C)$ , вычисленные для  $T = 162,2$  км,  $T = 120,9$  км и  $T = 113,7$  км, различаются между собой очень незначительно, нередко менее секунды; отсюда ясно, что из сопоставления значений ( $A - G$ ) с значениями  $-(D_T + D_C)$  глубина  $T$  определяется вообще с заметной погрешностью, не меньшей  $\pm 20$  км.

Допустим, что мы установили так или иначе глубину компенсации  $T$ . В § 85 было указано, что если при вычислении слагающей  $D_T$  в меридиане мы вводим действие призм, лежащих к северу от станции  $A$ , со знаком плюс, то получаем в результате уклонение отвеса в меридиане со знаком минус; точно так же, если при вычислении слагающей  $D_T$  в первом вертикале мы вводим действие призм, лежащих к востоку, со

знаком плюс, то получаем в результате с обратным знаком слагающую  $\eta$  уклонения отвеса в первом вертикале.

Назовем для какой-нибудь астрономической точки  $I$  через  $D_I^M$  сумму величин  $D_C + D_T$  для этой точки, отнесенных к меридиану точки  $I$ ; точно так же назовем через  $D_I^P$  сумму отнесенных к первому вертикалу точки  $I$  величин  $D_C + D_T$ .

Тогда мы имеем

$$\left. \begin{aligned} \Phi_I &= \varphi_I - \xi_I = \varphi_I + D_I^M \\ \mathcal{L}_I &= \lambda_I - \eta_I \sec \varphi_I = \lambda_I + D_I^P \sec \varphi_I \\ A_I &= \alpha_I - \eta_I \operatorname{tg} \varphi_I = \alpha_I + D_I^P \operatorname{tg} \varphi_I \end{aligned} \right\} \quad (727)$$

В (727) под  $\Phi_I$ ,  $\mathcal{L}_I$ ,  $A_I$  должно понимать те значения астрономической широты, астрономической долготы и астрономического азимута в точке  $I$ , которые имели бы место по устранении всех неправильностей в строении земной коры, и именно после замены слоя (черт. 128), ограниченного сверху физической поверхностью Земли, а снизу — поверхностью изостазии, слоем с постоянной везде плотностью  $\delta$  и ограниченным сверху видоизмененной ровной поверхностью океана, а снизу — параллельной ей поверхностью изостазии. Видоизмененная поверхность океана будет соответствовать новому распределению плотностей в земной коре и получает название «компенсированного геоида». Именно,  $\Phi_I$ ,  $\mathcal{L}_I$  и  $A_I$  являются астрономическими координатами и азимутами в точке  $I$  на таком компенсированном геоиде.

По установлении глубины компенсации и получении по (727) величин  $\Phi$ ,  $\mathcal{L}$  и  $A$  для всех астрономических точек триангуляции, можно поставить задачу нахождения размеров и сжатия эллипсоида и исходных геодезических дат, при которых этот эллипсоид наилучше подходил бы к компенсированному геоиду в данной стране. Очевидно, эти задачи будут решаться на основании применения формул (698). Обозначая

$$\left. \begin{aligned} \xi_K + D_K^M &= \delta \xi_K, \\ \eta_K \sec \varphi_K + D_K^P \sec \varphi_K &= \delta \eta_K \sec \varphi_K, \end{aligned} \right\} \quad (728)$$

и прибавляя к левым и правым частям уравнений (698) соответственно по  $D_K^M$  и по  $D_K^P \sec \varphi_K$ , напомним

$$\left. \begin{aligned} \delta \xi_K &= \Phi_K - B_K - p_1^{1,K} (\varphi_1 - B_1^\circ) - p_4^{1,K} (\alpha_{1,2} - A_{1,2}^\circ) + p_1^{1,K} \xi_1 + \\ &\quad + p_4^{1,K} \operatorname{tg} \varphi_1 \eta_1 - p_5^{1,K} \Delta a - p_6^{1,K} (\Delta \alpha) \\ \delta \eta_K \sec \varphi_K &= [(\mathcal{L}_K - L_K^\circ) - (\lambda_1 - L_1^\circ)] \cos \varphi_K - q_1^{1,K} \cos \varphi_K (\varphi_K - B_1^\circ) - \\ &\quad - q_4^{1,K} \cos \varphi_K (\alpha_{1,2} - A_{1,2}^\circ) + q_1^{1,K} \cos \varphi_K \xi_1 + \\ &\quad + \eta_1 \cos \varphi_K \sec \varphi_1 [1 + q_4^{1,K} \sin \varphi_1] - q_5^{1,K} \cos \varphi_K \Delta a - q_6^{1,K} \cos \varphi_K (\Delta \alpha); \\ \delta \eta_K \sec \varphi_K &= [A_{K,1} - A_{K,1}^\circ] \operatorname{ctg} \varphi_K - r_1^{1,K} \operatorname{ctg} \varphi_K (\varphi_1 - B_1^\circ) - \\ &\quad - r_4^{1,K} \operatorname{ctg} \varphi_K (\alpha_{1,2} - A_{1,2}^\circ) + r_1^{1,K} \operatorname{ctg} \varphi_K \xi_1 + \\ &\quad + r_4^{1,K} \operatorname{ctg} \varphi_K \operatorname{tg} \varphi_1 \eta_1 - r_5^{1,K} \operatorname{ctg} \varphi_K \Delta a - r_6^{1,K} \operatorname{ctg} \varphi_K (\Delta \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (729)$$

Величины  $\Phi$ ,  $\mathcal{L}$  и  $A$  получаются на основании уравнений (727).

Величины  $\delta \xi_K$  и  $\delta \eta_K$  обусловлены в уравнениях (729) несовершенством вывода  $D^M$  и  $D^P$ , т. е. несовершенством принятой схемы изостатической компенсации, неполностью изостатической компенсации, неучтенными местными влияниями (погребенный рельеф), ошибками формул

и карт при числовых определениях  $D^M$  и  $D^P$  и отступлениями компенсированного геоида от эллипсоида вращения. В этих величинах  $\delta\xi_K$  и  $\delta\eta_K$ , очевидно, имеется часть систематического характера и часть случайного характера. По неизвестности систематической части в  $\delta\xi_K$  и  $\delta\eta_K$ , решение уравнений (729) выполняется под условием минимума  $\sum \delta\xi_K^2 + \sum \delta\eta_K^2$ , распространяя суммирование  $\delta\xi^2$  и  $\delta\eta^2$  на все астрономические точки астрономо-геодезической сети. В результате приходят, конечно, к четырем нормальным уравнениям для определения  $\Delta a$ ,  $(\Delta\alpha)$ ,  $\xi_1$  и  $\eta_1$  (или  $\delta\xi_1$  и  $\delta\eta_1$ ). По подстановке найденных  $\Delta a$ ,  $(\Delta\alpha)$ ,  $\xi_1$  и  $\eta_1$  в уравнения (729), выводят  $\delta\xi$  и  $\delta\eta$  и получают ошибку единицы веса  $\mu$  по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum \delta\xi^2 + \sum \delta\eta^2}{n-4}},$$

где  $n$  — число всех уравнений для  $\delta\xi$  и  $\delta\eta$ , и оценивают точность вывода  $\Delta a$ ,  $(\Delta\alpha)$ ,  $\xi_1$  и  $\eta_1$  по правилам способа наименьших квадратов. Величины  $\delta\xi$  и  $\delta\eta$ , конечно, далее можно использовать для изучения отступлений компенсированного геоида от эллипсоида вращения с большой полуосью  $a_0 + \Delta a$ , сжатием  $\alpha_0 + (\Delta\alpha)$  и с исходной широтой  $\varphi_1$  —  $\xi_1$  и исходным азимутом  $\alpha_1 - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$ . Конечно, на тех пунктах, где определены  $\varphi$ ,  $\lambda$  и  $\alpha$  из уравнений (729), используют только уравнения, доставляемые широтой  $\varphi$  и долготой  $\lambda$ ; там, где долгота  $\lambda$  не определена, используют уравнения, доставляемые широтой  $\varphi$  и астрономическим азимутом  $\alpha_{K-1}$ . Как перейти от ранее приведенных уравнений градусных измерений по меридианам и по параллелям к уравнениям, отвечающим введению в астрономические широты и долготы топографо-изостатических редукций  $D^M$  и  $D^P$ , — это ясно само собой, и на этом не будем останавливаться.

Составление уравнений (727) и (729) может быть выполнено, как уже и указывалось, лишь при условии предварительного установления глубины компенсации  $T$ . Надежно глубина компенсации выводится из определения тяжести на крутых и высоких берегах океанов.

Хейфорд выводил глубину  $T$  из уравнений (729) астрономо-геодезической сети США, и именно следующим образом: задаваясь значениями  $T$  в 162,2 км, 120,9 и 113,7 км, вычислялись, как указано выше, редукции  $D^M$  и  $D^P$ , а по ним для каждой глубины компенсации — значения  $\Phi$ ,  $L$  и  $A$  по уравнениям (727). Далее, следовало для каждой глубины компенсации вычисление свободных членов в уравнениях (729). Очевидно, в четырех нормальных уравнениях, соответствующих уравнениям (729), изменялись при изменении глубины компенсации лишь свободные члены. Решение нормальных уравнений выполнялось для каждой из избранных глубин компенсации, перевычисляя лишь, конечно, графу со свободными членами в гауссовой схеме и делая новый вывод неизвестных  $\Delta a$ ,  $(\Delta\alpha)$ ,  $\xi_1$  и  $\eta_1$ . Величины  $\Delta a$ ,  $(\Delta\alpha)$ ,  $\xi_1$  и  $\eta_1$ , соответствующие определенной глубине компенсации, служили для вывода из уравнений (729) системы величины  $\delta\xi$  и  $\delta\eta$ , соответствующей именно этой глубине компенсации. Сравнивая между собой значения  $(\sum \delta\xi^2 + \sum \delta\eta^2)$  полученные при применении разных глубин компенсации, делали отсюда вывод о наиболее подходящей и наиболее вероятной глубине компенсации. Всего Хейфордом было выполнено пять решений для вывода  $\Delta a$ ,  $(\Delta\alpha)$ ,  $\xi_1$  и  $\eta_1$ : три из них уже указаны и соответствуют значениям  $T$  в 162,2, 120,9 и 113,7 км; четвертое решение исполнено, считая все  $D^M$  и  $D^P$  равными нулю, и пятое решение — считая  $D^M$  или  $D^P$  равными  $D_T$ , отнесенному соответственно к меридиану или первому вертикалу. Эти пять решений значатся под литерами  $A$ ,  $E$ ,  $H$ ,  $G$ ,  $B$ ; остановимся на них.

1. Решение *A*, при котором все  $D^M$  и все  $D^P$  полагаются равными нулю, очевидно сопровождается введением в уравнения (729) астрономически определенных величин  $\varphi$ ,  $\lambda$  и  $\alpha_{I,K}$  без всякого их исправления топографо-изостатическими редукциями. Это решение, следовательно, вполне совпадает с решением по астрономо-геодезическому методу, изложенным в § 93. Для того, чтобы  $D^M$  или  $D^P$  были равны нулю, нужно потребовать, чтобы  $D_T + D_C = 0$  или чтобы  $F$  в (722) был бы равен нулю. Но по (721) равенство нулю множителя  $F$  будет выполнено, когда  $T = 0$ . Отсюда вытекает, что астрономо-геодезический метод обработки градусных измерений предполагает изостатическую компенсацию выполненной для материков и возвышенностей уже на уровне океана, а для океанов — непосредственно на поверхности их дна.

Непосредственно под возвышенностями должны располагаться массы недостаточной плотности, уравнивающие избыток сосредоточенных в возвышенностях масс уже на поверхности океана (или немного ниже), непосредственно под дном океана должен находиться тонкий слой с избыточной плотностью вещества, уравнивающий весь недостаток плотности водной массы в океанической впадине. Вот какой смысл имеет астрономо-геодезический метод обработки градусных измерений в отношении строения земной коры. Конечно, такого строения земной коры не существует, и поэтому отсюда видна необоснованность решения *A*, и астрономо-геодезического метода обработки градусных измерений с точки зрения геофизики.

Поправки в астрономически определенные  $\varphi$ ,  $\lambda$  и  $\alpha_{I,K}$  должно вводить, и теория изостазии приводит к возможности введения таких поправок, определение которых, может быть, и далеко от совершенства.

2. Решение *B* предполагает, что  $D_C = 0$  и что, следовательно, топографо-изостатическая редукция сводится просто к топографической редукции; это равносильно, конечно, полному отрицанию изостазии и изостатической компенсации и исправлению  $\varphi$ ,  $\lambda$  и  $\alpha_{I,K}$  только за действие одних внешних масс. Надлежит тогда предположить, что кристаллическая земная кора заполняет весь земной шар, что земной шар не имеет упругости. Если в формуле (721) потребовать, чтобы  $F$  было равно 1, то тогда (722) обратится

$$D_C + D_T = D_T \text{ и } D_C = 0.$$

Чтобы  $F$  было равно единице в (721), нужно будет положить  $T = \infty$ . Но  $F$  будет очень близко к единице и при  $T = 2R$ .

3. Решение *E* соответствует  $T = 162,2$  км, в решении *H* величина  $T = 120,9$  км, а в решении *G* принималось, что  $T = 113,7$  км.

Уравнения (729) были составлены Хейфордом по такому материалу определения широт  $\varphi$  по 381 пункту; определения долгот  $\lambda$  для 131 пункта и определения азимутов  $\alpha_{I,K}$  на 253 пунктах, из которых 32 совпадали с определенными по долготе пунктами. В таблице 10 мы приводим результаты, соответствующие вышеприведенным решениям *A*, *B*, *E*, *H*, *G*.

В числах таблицы 10 резко выражается непригодность решения *E* отрицающего компенсацию внешних масс: здесь имеем такие результаты и для большой полуоси  $a$  и для сжатия ( $\epsilon$ ), которые следует назвать чудовищными; примерно также следует оценить и выводы для  $\xi_1$  и  $\eta$  так как исходный пункт сети США находится в значительном удалении

Таблица 10

Решения	Глубина компенсации $T$	$\xi_1$	$\eta_1$	$a$ (в метрах)	Сжатие ( $\alpha$ )	$\Sigma (\delta\xi^2 + \delta\eta^2)$
<i>B</i>	$\Rightarrow 2R$	$+ 19'',65$	$- 15'',53$	6383042	1 255,1	107385
<i>A</i>	0	$- 0,98$	$+ 0,73$	6378062	1 298,2	18880
<i>E</i>	162,2 км	$+ 0,18$	$- 1,46$	6378493	1 296,3	10297
<i>H</i>	120,9 .	$- 0,15$	$- 0,86$	6378388	1 297,0	10063
<i>G</i>	113,7 .	$- 0,20$	$- 0,74$	6378370	1 297,1	10077

и от горных массивов, и от океанов. Наоборот, «астрономо-геодезическое» решение, т. е. решение *A*, дает результаты вполне удовлетворительные; заметим, что для сжатия оно приводит к результату, вполне совпадающему с последними выводами сжатия, полученными в 1936—1939 гг. и из громадного гравиметрического материала, и из обработки градусных измерений СССР, США и Западной Европы. Решение *A* дает полуось  $a$ , преуменьшенную на 160—170 м против современных выводов, но решение *H*, которое Хейфорд признал наилучшим, дает преувеличенное  $a$  на 170—160 м. Сравнение решений *E*, *H*, *G* показывает, что изменение глубины  $T$  изостатической компенсации в пределах от 162 до 114 км сравнительно слабо влияет на полученные результаты для  $a$ , ( $\alpha$ ),  $\xi_1$  и  $\eta_1$ ; отсюда следует благоприятный для геодезии вывод, что даже значительная ошибка в значении  $T$  мало влияет на геодезические выводы при применении теории изостазии к обработке градусных измерений, но отсюда — и другой вывод, что геодезические материалы не дают прочного обоснования для вывода действительного значения глубины компенсации. Решение *H* было принято Хейфордом за наилучшее, так как именно это решение дает наименьшее значение  $\Sigma \delta\xi^2 + \Sigma \delta\eta^2$  — наименьшее против решения *G* на совершенно, конечно, пренебрегаемую величину. Таким образом, были приняты окончательные по США результаты

$$a = 6\,378\,388 \pm 35;$$

$$(\alpha) = 1:297,0 \pm 0,5;$$

$$T = 122,2 \text{ км} \pm 10 \text{ км}.$$

Заметим, что из последующей обработки определений силы тяжести по США Боуи получил для  $T$  значение в 96 км, которое, конечно, гораздо более вероятно.

Вывод Хейфорда по США дал блестящее и неопровержимое доказательство существования компенсации наружных масс, существования изостатического равновесия в земной коре. Уменьшение  $\sqrt{\Sigma \delta\xi^2 + \Sigma \delta\eta^2}$  почти в  $\sqrt{2}$  раз при применении теории изостазии доказывает косвенным образом обоснованность применения гипотезы Пратта. Но получение для ряда пунктов по США, находящихся вблизи крупных возвышенностей, где имеет место огромное действие внешних масс, величин  $D_T + D_C$ , почти равных по величине и обратных по знаку астрономо-геодезическим  $\xi$  и  $\eta$  для тех же пунктов, является прямым и веским доказательством применимости гипотезы Пратта-Хейфорда к вычислению топографо-изостатических редукций. Это и является очень важным в геодезических

целях. Но, конечно, отсюда еще далеко до утверждений, что и в действительности распределение плотностей в земной коре совпадает с распределением, даваемым схемой Пратта-Хейфорда.

То, что эта схема сильно противоречит приведенной на черт. 132 схеме не имеет еще особого значения при вычислении топографо-геодезических уклонений отвеса: 1) мы имеем право считать устраненным полный слой плотностью 0,27, заключенный между уровенной поверхностью океана и поверхностью изостазии, тогда средняя плотность масс под материками до глубины 50 км оказалась бы около 2,58, а средняя плотность под океанами (до глубины также 50 км) — около 2,83; 2) замена в вертикальных колоннах средними плотностями  $\delta - \delta_1$  и  $\delta + \delta_2$  плотностей, возрастающих в действительности линейно с глубиной, от уровня моря до глубины изостазии на материках, и от дна океана до той же глубины на океанических участках, сказалась бы ничтожно на результатах вычислений величин  $D_C$ . Но, конечно, мы все-таки, во-первых, получим ошибочность результатов для колонн, приходящихся на Атлантическом океане, и во-вторых, мы должны будем принять  $T$  около 55 км.

Последнее обстоятельство скажется заметно на выводах  $D^M$  и  $D^P$  и на выводах  $\Delta a$ ,  $(\Delta \alpha)$ ,  $\xi_1$  и  $\eta_1$ . Провизиопально можно ожидать получения для  $a$  значения около 637 8280 м и для  $(\alpha)$  значения 1 : 298,0. Несомненно, значительно возрастет  $\sum \delta \xi^2 + \sum \delta \eta^2$  по сравнению с решениями  $H$  и  $G$ , но это должно будет отнести не за счет понижения точности вывода  $\Delta a$ ,  $(\Delta \alpha)$ ,  $\xi_1$  и  $\eta_1$ , который будет, вероятно, более близок к истинному, а за счет несовершенства гипотезы Пратта-Хейфорда.

Значительные незакономерности в распределении плотностей в самом верхнем слое земной коры, имеющем толщину порядка 10—15 км, делают то, что при любой схеме изостатической компенсации величины  $D^M$  и  $D^P$  будут не отражать в себе той или другой части влияния этих незакономерностей. Однако при применении достаточно правильной схемы изостатической компенсации, непременно *согласованной с данными современной геофизики*, должно ожидать, что эти незакономерные влияния сравнительно мало повлияют на вывод  $\Delta a$ ,  $(\Delta \alpha)$ ,  $\xi_1$  и  $\eta_1$  при использовании обширных астрономо-геодезических сетей, вроде сети США и сети СССР. В то же время, при указанных условиях, вычисленные  $D^M$  и  $D^P$  отразят в себе все закономерные влияния и местного и общего характера, вследствие чего «компенсированный» геоид заметно приближается к «идеальному геоиду». Если поверхности разделов различных плотностей в земной коре и во всем земном шаре совпадали бы с уровенными поверхностями, то внешняя уровенная поверхность и была бы идеальным геоидом; идеальному геоиду соответствует нулевое изменение плотности на каждой уровенной поверхности. Нельзя отрицать общих отступлений идеального геоида от нормального эллипсоида, обусловленных причинами, не находящимися в связи с рельефом внешней физической поверхности Земли. Поэтому и получаемый даже на основании применения совершенной схемы изостатической компенсации компенсированный геоид может все-таки иметь общие отступления от нормального сфероида и вывод  $\Delta a$ ,  $(\Delta \alpha)$ ,  $\xi_1$  и  $\eta_1$  даже из обширной астрономо-геодезической сети все-таки не приводит еще к выводу элементов *общего* земного эллипсоида.

Для ряда стран изостатическая компенсация выполняется в довольно совершенной степени. В этих странах применение теории изостазии и той или иной схемы изостатической компенсации, несомненно, заметно повышает точность и надежность вывода размеров и сжатия земного эллип-

соида из градусных измерений и из астрономо-геодезических сетей и заметно приближает этот вывод к установлению размеров и сжатия общего земного эллипсоида, однако постольку, поскольку при этом не учитываются общие волны геоида, не стоящие в прямой связи с рельефом внешней физической поверхности Земли. Неучитывание влияния этих волн может, однако, сказываться заметно на выводе большой полуоси и сжатия эллипсоида — так, для США это влияние может, видимо, выражаться в размере большой полуоси величиной примерно в 100 м.

Но имеется целый ряд стран, где и астрономо-геодезические наблюдения, и гравиметрические определения показывают на отсутствие изостатической компенсации, или в полной, или не в полной мере. Возможно, конечно, что в ряде районов, где изостатическая компенсация выполняется не в полной мере, изостатическое равновесие еще не достигнуто после заметных нарушений его в историческом прошлом. Конечно, в таких районах не приходится рассчитывать на применение изостазии к обработке астрономо-геодезических сетей.

Несомненно, работы Хейфорда были значительным шагом вперед в области геодезии. Применение теории изостазии с тех пор получило достаточное развитие в обработке ряда градусных измерений и в обработке больших материалов по определениям силы тяжести.

Приходится еще обратить внимание на следующее обстоятельство: при применении изостазии мы применяем срезание масс, возвышающихся над уровнем моря, и заполнение нижних частей материковых колонн, лежащих ниже уровня моря, добавочными массами; мы выполняем заполнение океанической впадины избыточными массами, изъятими из колонн, лежащих ниже дна Оксана. Именно такое преобразование действительного распределения масс в земной коре сопровождается введением топографо-изостатических редукций в  $\varphi$ ,  $\lambda$  и  $\alpha_{i-K}$ . Очевидно, это преобразование вызывает изменение поверхности геоида, а следовательно, отражается и на положении и на виде нормального сфероида. Мы должны были бы учитывать эти смещения уровенной поверхности, вызываемые применением изостатической компенсации, однако до сих пор в градусных измерениях никто не обращал на это внимания. Смещения геоида *по высоте* будут невелики, и неучитывание их вызовет в большой полуоси ошибку порядка  $\pm 15$  м при выводе эллипсоида из материалов по США; но изменение наклона разных участков геоида, обуславливая *систематические* изменения в отклонениях отвеса, может дать, по нашим, правда, приближенным подсчетам, искажение в  $\Delta\alpha$  порядка 30 м по США.

## § 97. Об использовании гравиметрических материалов при обработке градусных измерений

Напомним, что градусные измерения, в виде ли дуг меридианов и параллелей, или в виде астрономо-геодезических сетей, могут иметь две задачи: 1) получение более или менее детальных профилей геоида или выяснение, так же более или менее детально, формы действительного геоида в пределах территории, покрытой данной астрономо-геодезической сетью; 2) вывод размеров и сжатия *земного эллипсоида*, т. е. общего эллипсоида, наилучше представляющего *геоид в целом*. К этим задачам примыкает третья, имеющая более практическое значение, — это вывод эллипсоида, наилучше подходящего для данной страны, и одновременно — установление исходных геодезических дат для вычисления геодезических сетей этой страны.



Первая из указанных задач требует значительного учащения астрономических пунктов градусных измерений по параллелям и по меридианам, а в астрономо-геодезических сетях — учащения самих рядов триангуляции и учащения на них астрономических пунктов.

Получение профилей геоида по большим дугам меридианов и параллелей в разных местах земного шара приводит к накоплению ценнейшего материала, важного не только для геодезии, но и для геологии и для геофизики, потому что *особенности этих профилей связаны с устройством твердой оболочки земного шара и с историей ее образования*. Однако только англичане в Индии и в Индо-Китае в своих работах за последнее десятилетие, действительно, осуществляют ту частоту астрономических пунктов на дугах своих градусных измерений, которая обеспечивает получение детальных профилей геоида. Вообще же осуществление такой программы градусных измерений, в которой астрономические пункты по дугам определялись бы через 15—20—25 км, представляет существенные затруднения. Но совсем новые возможности здесь дает гравиметрия. В § 78 мы изложили сущность метода астрономо-гравиметрического нивелирования, которое при расстояниях между астрономическими пунктами в 70—100 км приводит к возможности получить достаточно хорошо профиль геоида.

Следует выполнение астрономо-гравиметрического нивелирования считать неотъемлемой частью программы современных градусных измерений, чтобы выполнить вполне первую задачу, поставленную перед градусными измерениями. Гравиметрические работы должны, при густоте пунктов — один на 1000 км<sup>2</sup>, обслуживать при этом полосу вдоль дуги градусного измерения шириной в 220—240 км; за этой полосой гравиметрические станции могут располагаться через 80 км друг от друга до расстояния от оси дуги в 400 км; по самой дуге (по ее оси) должно быть выполнено в надлежащих местах некоторое сгущение гравиметрической сети.

В астрономо-геодезических сетях исследование фигуры геоида должно базироваться на астрономических пунктах, располагающихся друг от друга не далее как на 60—70 км, причем в основе должно лежать предположение о возможности на таком расстоянии интерполировать  $\xi + D^M$  или  $\eta + D^P$ . Но нередко нарушения изостатической компенсации заставят давать более густую сеть астрономических пунктов. Поэтому опять-таки и в задачу исследования фигуры геоида из данной астрономо-геодезической сети должно ввести использование гравиметрических материалов — в виде выполнения астрономо-гравиметрического нивелирования по одинаково направленным рядам триангуляции, отстоящим друг от друга на 600 км (и по меридианам и по параллелям), и в виде выполнения сплошной гравиметрической съемки между этими рядами — с обслуживанием одним гравиметрическим пунктом площади в 1000 км<sup>2</sup>; астрономические пункты при этом по рядам триангуляции, отстоящим друг от друга вообще на 200 км, должны быть взяты через 70—100 км друг от друга. Конечно, вывод интерполированных астрономо-геодезических уклонений отвеса из такого материала по всем рядам триангуляции, кроме рядов, где выполнено астрономо-гравиметрическое нивелирование, будет иметь среднюю ошибку около  $\pm 1''{,}5$ , но профили геоида, полученные по таким рядам, будут вставляться в профили по рядам, по которым выполнено астрономо-гравиметрическое нивелирование, что будет вести к получению целого ряда узловых точек в квадрате  $600 \times 600$  км и к выравниванию ошибок. В триангуляции СССР, где и на середине основ-

ных рядов II класса определяется астрономический пункт, таких узловых точек на площади  $600 \times 600$  км будет 25.

Таким образом, гравиметрия нам позволит в астрономо-геодезических сетях получить многочисленные профили геоида, построенные для ряда районов без применения каких-либо гипотез или предположений. Вероятно, в ближайшие годы мы будем иметь возможность на основании указанного использования гравиметрических материалов построить в изогипсах фигуру геоида для всей Европейской части СССР (без Кавказа) и для лежащей к югу от Сибирской железной дороги большой территории в Азиатской части СССР, ограничиваемой на востоке меридианом Новосибирска.

Использование гравиметрического материала по астрономо-гравиметрическому нивелированию сопровождается, как уже было указано, выводом величин  $\xi^g$  и  $\eta^g$  для довольно часто отстоящих друг от друга точек исследуемого профиля (10—15 км); конечно, эти  $\xi^g$  и  $\eta^g$  будут обусловлены местными влияниями, так как охват территории при их вычислении происходит в радиусе всего 120—200 км. Пусть мы имеем дело с меридианным профилем. Проследивая волны построенного профиля геоида, сопоставляя их с ходом изменения величин  $\xi^g$  и распределением аномалий тяжести, мы можем в равнинных районах установить места подземных залеганий, обуславливающих заметные местные аномалии силы тяжести и резкие изменения в величинах  $\xi$ . Далее мы можем, используя и карту аномалий силы тяжести, и значения  $\xi^g$  для участков профиля, прилегающих с юга и с севера (а также с востока и запада) к участку заметной аномалии, дать ряд значений ( $\xi^g$ ), *которые имели бы место по устранении такой, чисто местной аномалии*. Если астрономический пункт пришелся как раз в районе такой резко выраженной аномалии, то его астрономическая широта подлежит исправлению на  $-(\xi^g - (\xi^g))$ . Представляется, что в ряде случаев в равнинных районах, мы можем достаточно уверенно установить для астрономических точек ( $\xi^g$ ) и подставить в уравнение градусного измерения для этой точки ее широту, исправленную указанным образом. Такие исправления астрономических координат приведут к устранению чисто местных неправильностей геоида и обеспечат правильность вывода эллипсоида из отдельного градусного измерения и из комплекса дуг, занимающих некоторый даже значительный район. При этом такой эллипсоид не перестанет быть *местным*, но его особенности, обусловленные территориальными причинами, будут выявлены во всей полноте, не затушевываясь случайными влияниями. Так, для правильного получения уклона некоторого участка шоссе, мы при нивелировании шоссе, конечно, не ставим рейку в случайные выбоины. Применение указанного приема в горных районах, конечно, будет осложнено непрерывной сменой местных влияний, наслаивающихся друг на друга. Здесь приходится уже иметь иной охват территории гравиметрическим материалом; на этих случаях мы остановимся ниже.

Когда мы ставим вторую задачу — вывод из градусных измерений земного эллипсоида, то, задача эта получает определенность и выводы из ее решения могут получить правильную оценку в отношении точности результатов только тогда, когда мы так или иначе учтем или исключим влияние волн геоида систематического характера или общих волн геоида.

Гравиметрические материалы в этом отношении должны сыграть видную роль. В настоящее время гравиметрические станции почти совсем отсутствуют в Южной Америке, очень слабо освещена гравиметрически Африка, в Азии не имеется никаких гравиметрических материалов

по Турции, по Персии, по Аравии, по всей Западной половине Китая; на океанах имеются лишь данные по рейсам Венинг Мейнесса на подводной лодке; далеко еще неполно освещен гравиметрически север Азиатской части СССР. Поэтому на надежность выяснения общих волн геоида из современных гравиметрических материалов не приходится полагаться. Однако нужно полагать, что в недалеком будущем дело существенно изменится, и наиболее крупные, наиболее важные волны геоида будут выяснены. Вопрос учета влияния этих волн при обработке градусных измерений сводится к получению выражений *добавочных* уклонений отвеса, соответствующих рассматриваемым волнам, или в числовом виде, или в виде поправок, представленных аналитически. Если, например, гравиметрия подтвердит существование долготных волн того характера, который соответствует трехосности земного эллипсоида, то в уравнении (729) могут быть введены поправки, содержащие два добавочных неизвестных: экваториальное сжатие и долготу наибольшего меридиана.

Пусть вокруг некоторой астрономической точки  $A$  градусного измерения выполнены на территории с радиусом 400—500 км гравиметрические определения, причем в среднем одна гравиметрическая станция приходится на 1000 км<sup>2</sup>, но с проведением такого сгущения станций в ближайшем к  $A$  районе, чтобы можно было достаточно надежно определить горизонтальный градиент силы тяжести в точке  $A$ . Тогда по этому гравиметрическому материалу, по формулам Венинг Мейнесса, мы выведем некоторые «гравиметрические» слагающие уклонения отвеса  $\xi^g$  и  $\eta^g$ . Эти  $\xi^g$  и  $\eta^g$  могут различаться от абсолютного значения уклонения отвеса в точке  $A$  на величины порядка может быть 3—4". Мы можем считать, что полученные  $\xi^g$  и  $\eta^g$  включают в себя *все местные и областные влияния*, обуславливающие уклонение отвеса в точке  $A$ , за исключением редких случаев, когда значительные горные возвышенности, примыкающие к району местонахождения точки  $A$ , простираются далее (в ту или другую сторону) на расстояние от  $A$ , большее 400—500 км; но неучтенные влияния таких удаленных от  $A$  горных хребтов (или внутренних морей) более чем на 400—500 км будут уже невелики — порядка 0,4—0",8. Влияние *общих* отступлений геоида от нормального сфероида в этих величинах  $\xi^g$  и  $\eta^g$  скажется в слабой степени, и именно из-за неучтенного влияния далеких зон. Допустим, что мы для всех астрономических точек данного градусного измерения или астрономо-геодезической сети на основании соответствующего гравиметрического материала сделали указанные выше вычисления  $\xi^g$  и  $\eta^g$ . Введем теперь в уравнения (698) или (699) вместо

$$\left. \begin{aligned} \varphi_K \dots \varphi_K - \xi_K^g \\ \lambda_K \dots \lambda_K - \eta_K^g \sec \varphi_K \\ \alpha_{K-1} \dots \alpha_{K-1} - \eta_K^g \operatorname{tg} \varphi_K \end{aligned} \right\} \quad (730)$$

Этим самым мы в уравнениях градусных измерений устранили, сняли влияние местных и областных неправильностей геоида, но, конечно, оставили почти в полной силе влияние общих, больших волн геоида, «*континентальных*» волн. Приведет ли исправление  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $\alpha_{K-1}$  по (730) к приближению вывода из градусных измерений к выводу большой полуоси и сжатия *общего* земного эллипсоида? Мы можем рассуждать так: ряд дуг наших градусных измерений может попасть в области, где действие общих волн геоида слабо выражено; для вывода из таких дуг *общего* земного эллипсоида исправление  $\varphi$  и  $\lambda$  по (730) имеет существенное

значение; для остальных дуг, которые составят вообще большинство, исправление  $\varphi$ ,  $\lambda$  и  $\alpha_{K-I}$  по (730) будет иметь *второстепенное* влияние, но несомненно все-таки заметно улучшающее вывод из них общего земного эллипсоида. Это в особенности относится к очень большим дугам меридианов и параллелей, на которых большие волны геоида будут проходить через разные фазы. Нужно иметь в виду, что указанный прием использования гравиметрии в градусных измерениях является совершенно необходимым для предгорных и горных районов и для участков, примыкающих к океанам: здесь местные и областные влияния значительны и, не устранив их, мы будем вводить в вывод общего эллипсоида заметно искаженный материал. (Иначе, для таких районов придется применить теорию изостазии, может быть с малыми шансами на успех.) Косвенное подтверждение тому, что введение гравиметрических поправок в  $\varphi$ ,  $\lambda$  и  $\alpha_{K-I}$  по (730) улучшает вывод из комплекса градусных измерений в смысле приближения его к установлению размеров и сжатия общего земного эллипсоида, вытекает из того, что остаточные отклонения отвеса при неприменении этого приема характеризуются средним квадратическим значением  $\pm 3''{,}5$ , а при применении этого приема — средним квадратическим значением  $\pm 1''{,}9$  (работы ЦНИИГАиК, 1938—1939 гг.).

Приведем здесь следующие выводы английского геодезиста de Graaf Hunter'a: при наличии мировой сети гравиметрических пунктов с густотой один пункт на  $5 \times 5^\circ$  или 1654 пункта на весь земной шар и 84 дополнительных пункта, расположенных в пределах  $20^\circ$  от исследуемой точки, *вероятная* ошибка гравиметрического определения слагающей абсолютного отклонения отвеса ( $\xi$  или  $\eta$ ) составит  $\pm 0''{,}52$ ; если мировая съемка покрывает лишь отсек (сферический сегмент) при расстоянии  $\psi$  его границы от рассматриваемой точки в  $60^\circ$ , то эта ошибка достигает  $\pm 0''{,}99$ ; при  $\psi \leq 20^\circ$  эта же ошибка дойдет до  $\pm 1''{,}87$ . Эти расчеты de Graaf Hunter'a показывают, что даже при охвате территории гравиметрическими пунктами вокруг станции в радиусе 2200 км, все-таки неучтенная часть отклонения отвеса, обуславливаемая влиянием далеких зон, может достигать даже  $\pm 5$ — $6''$ . Расчеты, сделанные мною, с использованием в известной степени изостазии, приводят для того же охвата территории к значению *средней* квадратической ошибки в абсолютном отклонении отвеса в  $\pm 1''{,}1$  или к наибольшему значению этой ошибки в  $\pm 2$ — $3''$ .

Представим себе, что на всей территории СССР закончена общая гравиметрическая съемка. Тогда на восточной и западной окраинах нашего государства могут быть выбраны пункты *A* и *B*, гравиметрическая изученность вокруг каждого из которых будет распространяться на радиус около 1800 км; расстояние между такими «крайними» пунктами *A* и *B* будет (с востока на запад) около 5500 км; вблизи Среднего Урала найдутся пункты, для которых гравиметрический охват территории будет выполнен в радиусе 2000 км; для многих пунктов, тяготеющих к параллелям  $60$ — $65^\circ$ , охват будет в радиусе 1500 км. Используя на каждом астрономическом пункте астрономо-геодезической сети возможно больший гравиметрический материал, и вводя затем в астрономически определенные  $\varphi$  и  $\lambda$  поправки по (730), мы, несомненно, в уравнениях (698) или (699) освободимся не только от местных влияний, но в известной степени и от *общих влияний*, хотя и неполно, и в различной степени для разных пунктов как в силу их географического положения, так и в силу существенно различного для разных пунктов охвата территории вокруг них гравиметрическим материалом. При обработке этого обширного материала по СССР, которая относится, конечно, к будущему, а

не к настоящему, надо будет в уравнениях (698) принять ( $\Delta\alpha$ ) известным, и именно установленным из общей обработки всех имеющихся гравиметрических материалов по земному шару (1 : 298,3 по последним выводам 1939 г.). Мы не будем предпринимать методов обработки этого большого материала, в которых, между прочим, вопрос совместного использования очень неоднородно обслуженных гравиметрией астрономических пунктов займет видное место. Укажем лишь на то, что одна выше приведенная дуга  $AB$  даст большую полуось общего земного эллипсоида с ошибкой, обусловленной ошибками абсолютных уклонений отвеса в ее астрономических точках, не превышающей  $\pm 60$  м; остальные крупные дуги меридианов и параллелей, образующиеся в астрономо-геодезической сети СССР, будут частью вести к уменьшению этой ошибки, частью к ее увеличению.

Важно отметить, что если обширные астрономо-геодезические работы по СССР сами по себе все-таки не позволяют ставить задачу вывода из одних них *общего земного* эллипсоида, то присоединение к ним указанных обширных гравиметрических материалов делает возможным постановку этой задачи *из материалов одного СССР*, если в ней ограничиться требованием вывода большой полуоси с ошибкой порядка 60 м. Но, конечно, именно только проведение общей гравиметрической съемки во всех странах, где выполнены значительные градусные измерения, приведет к настоящей постановке задачи вывода из градусных измерений всех этих стран *общего земного* эллипсоида.

Окончательное решение этой задачи будет получено при завершении мировой гравиметрической съемки. Применяя теорию Стокса, мы тогда в состоянии будем вывести для любой астрономической точки любого градусного измерения с хорошей точностью высоту  $N$  геоида над общим земным эллипсоидом и величины  $\xi^s$  и  $\eta^s$ . Эти величины  $N$ ,  $\xi^s$  и  $\eta^s$  прежде всего должно использовать для надлежащего отнесения всех базисов триангуляции и измеренных в них горизонтальных направлений именно на поверхность *общего* земного эллипсоида по правилам, указанным в главе IX. Далее, для градусных измерений каждой страны, например СССР и США, величины  $\xi_1$  и  $\eta_1$  в уравнениях (698) или (699), в которых, конечно,  $\varphi$  и  $\lambda$  заменены по (730), должно вывести с полной тщательностью из соответственно собранного гравиметрического материала, и исключить их из числа неизвестных в уравнениях (698) и (699). Другими словами, в этих уравнениях можно будет оставить одно неизвестное — большую полуось эллипсоида. Понятно, что исследовательская работа пойдет и по линии установления поправки не только  $a$ , но и  $\alpha$ ; понятно, что особо тщательный вывод  $\xi_1^s$  и  $\eta_1^s$  следует сделать не в одной астрономической точке большой страны, а в двух или трех точках и составить соответственно две или три системы уравнений (698) или (699), отнесенных каждая к своему исходному пункту, величины  $\xi^s$  и  $\eta^s$  для каждого из которых исключаются из числа неизвестных. Сопоставления между получаемыми отсюда различными выводами для  $\Delta a$  и ( $\Delta\alpha$ ) будут, конечно, очень поучительны; на основании надлежащего научного использования этих сопоставлений и будет окончательно устанавливаться общий земной эллипсоид. Намеченное использование больших гравиметрических материалов должно будет сопровождаться исследованиями в области самой гравиметрии, в особенности по вопросу редукций силы тяжести.

Приведенные соображения относятся к перспективе, может быть и не так близкой по времени ее осуществления, но эта перспектива достаточно рисует роль гравиметрии в современной геодезии.

Для настоящего периода являлось бы существенным в задаче вывода общего земного эллипсоида определение  $\xi^s$  и  $\eta^s$  для центральных пунктов в СССР, в США и в Западной Европе — с охватом для каждого из таких пунктов территории в радиусе около 3000 км. Ошибки выведенных  $\xi^s$  и  $\eta^s$  для таких пунктов будут вряд ли более  $1''$ , и, вероятно, будут влиять на вывод  $\Delta a$  из градусных измерений каждой отдельной из названных трех стран в разные стороны; принятие их в качестве известных в уравнениях (698) или (699) по каждой стране будет равносильно установлению весьма близких друг к другу ориентировок тех трех эллипсоидов, которые устанавливаются астрономо-геодезическими и гравиметрическими результатами по каждой стране. Это благоприятно должно сказаться на выводе общего земного эллипсоида из совместной обработки материалов по всем этим странам.

Остановимся еще на задаче, которая была названа *третьей* в начале настоящего параграфа. В этой третьей задаче гравиметрические материалы позволят для ряда астрономических пунктов исключить в  $\varphi$  и  $\lambda$  *чисто местные и резко выраженные влияния*; это благоприятно отразится на выводе размеров и ориентировки эллипсоида, наилучше подходящего к геоиду в пределах данной страны. Далее, астрономо-гравиметрическое нивелирование позволит сделать точный перенос измеренных в триангуляции элементов на поверхность некоторого референц-эллипсоида; это же приводит к возможности надлежащего, правильного уравнивания большой астрономо-геодезической сети. *Последнее имеет большое значение в чисто производственных геодезических целях.* Наконец, в большой стране следует ориентировку эллипсоида, получаемую из обработки ее астрономо-геодезической сети по правилам, указанным в § 93, сопоставить с ориентировкой общего земного эллипсоида. В этих целях следует для пункта страны, имеющего наибольший охват территории гравиметрическими станциями, вывести  $\xi^s$  и  $\eta^s$ , и сопоставить их с  $\xi$  и  $\eta$ , полученными для того же пункта из обработки астрономо-геодезической сети страны. Это сопоставление может привести к обоснованию введения иной ориентировки эллипсоида, наилучше подходящего по размерам и сжатию к геоиду в данной стране, чем вытекающая из обычной обработки астрономо-геодезической сети.

### § 98. Исторические сведения о градусных измерениях

Считают, что Пифагор первым пришел к мысли о шарообразности Земли. Первое исторически несомненное определение размеров Земли было произведено александрийским ученым Эратосфеном, жившим в III веке до начала нашего летоисчисления. Эратосфен принял, что Александрия и Сиена (нынешний Ассуан) лежат на одном меридиане; расстояние между этими городами он вывел по сведениям о движении торговых караванов и именно принял его равным 5000 стадиям. Эратосфену было известно, что в день летнего солнцестояния в полдень в Сиене можно видеть изображение Солнца в очень глубоких колодцах, другими словами, в день летнего солнцестояния в полдень в Сиене Солнце имеет зенитное расстояние, равное  $0^\circ$ . В Александрии по наблюдениям тени гномона или отвесного шеста в полдень в день летнего солнцестояния Солнце оказывалось удаленным от зенита на одну пятидесятую долю окружности или на  $7^\circ 12'$  (приблизительно). Следовательно, разность широт Александрии и Сиены равна  $7^\circ 12'$ , и отсюда земной радиус в египетских стадиях вычисляется так

$$R = \frac{5000 \cdot 50}{2\pi} = 39\,790 \text{ стадий.}$$

По новейшим данным Сиена на  $3^\circ$  восточнее Александрии, а разность широт этих городов равна  $7'7''$ . Другими словами, вывод Эратосфена, совершенно правильный по идее, должен был бы дать для  $R$  величину, близкую к истинной. К сожалению, длина египетской стадии утеряна, и мы можем по изысканиям разных ученых лишь полагать с вероятностью, что она заключалась между 158 и 185 м. Взяв среднее из этих чисел для длины стадии, т. е. 172 м, получим по Эратосфену

$$R = 6844 \text{ км.}$$

Другими словами, древние египтяне и греки имели вполне правильное представление о размерах земного шара.

В 827 г. арабский калиф Альмамун, сын известного Гарун-аль-Рашида, предпринял градусное измерение у Аравийского залива, к западу от реки Тигра и города Моссула. Две партии астрономов от избранной точки под северной широтой  $35^\circ$  пошли в двух направлениях: одна — к северу, другая — к югу, производя измерение линии арабскими локтями; каждая партия продолжала измерение до тех пор, пока не прошла по меридиану одного градуса, что определялось измерениями меридианных высот звезд имевшимися угломерными инструментами. Длина арабского локтя была утрачена до 90-х годов прошлого столетия; при раскопках на нильском острове Рода были найдены на колонне из тесаного камня черты, обозначающие арабские локти, и таким образом удалось перечислить результат арабского градусного измерения в современных мерах. Именно, оказалось, что длина градуса меридиана под широтой  $35^\circ$  равна 111,8 км — результат, отличающийся от истинного (110,95) менее чем на 1%. Очевидно, арабские методы астрономо-геодезических измерений были весьма совершенны.

В средние века наука греков и арабов была забыта; однако великие морские открытия приводят в XVI веке к новым попыткам изучения размеров Земли. В 1528 г. французский ученый и врач Франциска II, Фернель измерил дугу меридиана близ Парижа. Меридианные высоты Солнца Фернель измерял при помощи треугольника с диоптрами, одна сторона которого была разделена на части, соответствующие минутам дуги; расстояние же по меридиану между Парижем и Амьеном Фернель получил счетом оборотов колеса своей повозки; случайно для градуса по меридиану Фернель получил число, равное 56747 тоазов или 110,6 км, т. е. очень близкое к истинному (ошибка всего 0,1%). В 1633—1635 гг. английский профессор Норвуд измерил дугу меридиана между Лондоном и Иорком при помощи стальных цепей; при этом получилась некоторая ломаная линия, близкая по общему направлению к меридиану: углы между элементами этой линии измерялись и затем длина ломаной линии редуцировалась на меридиан; измеренная дуга имела протяжение в  $2^\circ 28'$  и доставила для длины градуса по меридиану значение в 111,8 км, т. е. больше истинного на 0,4 км.

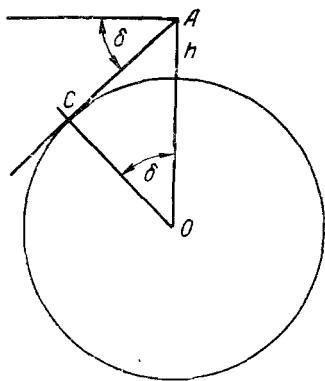
К этой же эпохе нужно отнести попытку определения англичанином Райтом радиуса Земли из измерения угла понижения горизонта, т. е. угла, составленного касательным к поверхности океана лучом зрения с горизонтальной плоскостью, проходящей через глаз наблюдателя. Если глаз наблюдателя находится в  $A$  (черт. 137) на высоте  $h$  над уровнем океана, если  $AC$  — касательная к поверхности океана, а  $AB$  — линия горизонтальная, то

$$R^2 \operatorname{tg}^2 \delta = (2R + h)h,$$

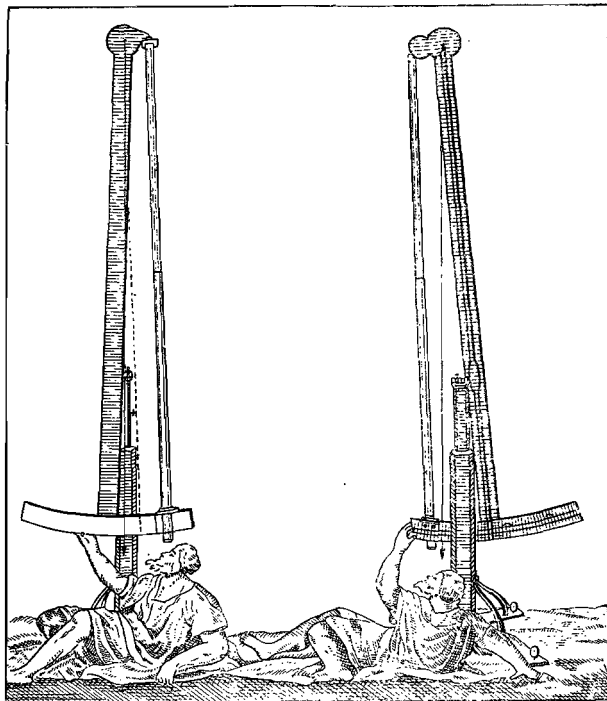
где  $\delta$  — угол понижения горизонта.

Высота  $h$  может быть определена точно, но определение угла  $\delta$  сопровождается значительной ошибкой из-за неверного учета земного преломления (света).

Новая эпоха в истории градусных измерений начинается с начала XVIII века, благодаря изобретению голландским ученым Снеллиусом метода триангуляции. Именно этот метод позволяет определять точно длины дуг по меридианам, длиной в тысячи километров. В 1614—1616 гг. Снеллиус в Голландии между городами Алкмар и Берген проложил цепь из 22 треугольников, в которой измерил три очень маленьких



Черт. 137



Черт. 138

базиса (от 200 до 700 м). Любопытно, что эти базисы связывались базисными сетями со сторонами основных треугольников ряда; любопытно также то обстоятельство, что все вычисления в этой триангуляции были выполнены без применения логарифмов, тогда только что изобретенных, но еще не вошедших в употребление.

Следующий шаг в истории градусных измерений представляют работы Пикара. Используя метод триангуляции, Пикар ввел в употребление в геодезических инструментах зрительные трубы, снабженные сеткой нитей; этим достигнута была значительно большая точность измерения горизонтальных углов в триангуляции, чем инструментами с диоптрами, не позволявшими определять углы точнее, как до  $1'$ . Разность широт определялась Пикаром зенитным сектором с радиусом в 10 футов (черт. 138).

Градусное измерение Пикаром было исполнено в 1669—1670 гг. между Парижем и Амьеном, по поручению незадолго перед тем осно-



ванной Французской Академии Наук; оно составило меридианную цепь в 13 треугольников с двумя базисами в 5663 и 3902 тоаза; эти базисы такой большой длины — в 12 и 8 км — были измерены деревянными жезлами, откладывавшимися по земле. Амплитуда дуги или разность широт ее конечных точек оказалась  $1^{\circ}22'55''$ ; длина дуги определилась в 78854 тоаза. Отсюда длина градуса по меридиану получается равно 57060 тоазов, или 111,212 км; истинная величина этого градуса 111,18 км, т. е. измерение Пикара, случайно дало результат высокой точности. Надлежит упомянуть, что точное определение размеров земного шара было совершенно необходимо Ньютону для подтверждения на числах закона всемирного тяготения; с опубликованием своих открытий Ньютон выступил только в 1682 г., после обработки градусного измерения Пикара, хотя закон всемирного тяготения был установлен Ньютоном не сколькими годами ранее.

В эту эпоху успехи геодезии были *необходимым обоснованием* больших движений мысли в области физики, механики и астрономии.

Исходя из весьма обоснованного предположения, что Земля некогда была в огненножидком состоянии, Ньютон доказал, что истинная фигура Земли есть не шар, а сфероид, понимая под последним тело вращения близкое к шару и сжатое в направлении оси вращения. При этом закон тяготения приводил к заключению, что жидкая масса, находящаяся в состоянии покоя и уединенная в пространстве, должна быть ограничена поверхностью шара; вращение же этой жидкой массы, обуславливая центробежную силу, возрастающую непрерывно от полюса к экватору, изменяет первоначальную фигуру равновесия жидкости, приводя ее к поверхности сфероида. Понятно, что сжатие этого сфероида должно быть одного порядка с величиной отношения центробежной силы на экваторе к силе тяжести. Простейшим из сфероидов является эллипсоид, образованный вращением эллипса около его малой оси (при условии мало разности между величинами осей этого эллипсоида). Поэтому во втором приближении Ньютон и принял, что эллипсоид с малым полярным сжатием представляет истинную фигуру Земли. Предположив, что плотности вещества внутри Земли остается везде одной и той же, т. е. рассматривая Землю, как однородное тело, Ньютон определил теоретически сжатие земного эллипсоида, используя по Пикару величину земного радиуса, результаты тогдашних определений ускорения силы тяжести; земное сжатие, выведенное таким образом Ньютоном, оказалось равным 1 : 23.

Эта теория Ньютона подтверждалась, во-первых, открытым в то время астрономом Д. Кассини вращением и сжатием планеты Юпитера, во-вторых, установленными астрономами Рише, Галлеем, Вареном и Дегеймом изменениями в длине секундного маятника, доказывавшим, что сила тяжести возрастает от экватора к полюсу.

Существенно отметить, что теория Ньютона уже определенно указала, что исследование фигуры Земли есть задача не только геометрическая, а связанная с изучением внутреннего строения Земли, с вопросами генезиса земной коры и обстоятельствами вращения Земли.

Пикар намеревался подтвердить выводы Ньютона и составил свое продолжение своей триангуляции на север и юг Франции. Этот проект в виде большого градусного измерения был осуществлен учениками Пикара: Ж. Кассини, Маральди и Лаиром. При проложении этого градусного измерения преследовалась одновременно практическая цель доставить опорные точки для обширных съемок, предпринятых Ж. Кассини для составления карты Франции в масштабе 1 : 86 000. Из-за перерывов в ассигновании средств градусное измерение было закончено толь-

к 1718 г.: оно доставило дугу меридиана от Дюнкирхена через Париж до Коллиура общим протяжением в  $8^{\circ}31'$ , причем астрономическим пунктом в Париже дуга разбивалась на две: северную — в  $2^{\circ}12'$  и южную — в  $6^{\circ}19'$ . Два новых базиса — у Дюнкирхена в 5464 тоаза и у Перпиньяна в 7246 тоаза — были измерены деревянными жезлами, откладываемыми по земле, и совпадали с основными сторонами цепи. Для длины градуса северная часть дуги дала величину 56 960, а южная часть дуги — 57 097 тоаза. На эллипсоиде, сжатом при полюсах, длина градуса меридиана непрерывно возрастает от экватора к полюсам. Следовательно, приведенный результат градусного измерения Кассини не подтвердил теории Ньютона; наоборот, он как бы удостоверил, что Земля есть эллипсоид, малая ось которого лежит в плоскости экватора.

Понятно, что ошибочность выводов Кассини легко объясняется влиянием ошибок в тогдашних определениях астрономических широт на определение малой разности длин градусов из смежных меридианных дуг. Обозначим: длину северной части дуги через  $s_1$ ; длину южной части дуги через  $s_2$ ; длину градуса из северной части дуги через  $d_N$ , а из южной части дуги через  $d_S$ ; амплитуды для северной и южной части дуг через  $\Delta\varphi_1$  и  $\Delta\varphi_2$ , а ошибки этих амплитуд через  $d\varphi_1$  и  $d\varphi_2$ . Имеем

$$d_N = \frac{s_1}{\Delta\varphi_1^0},$$

$$d_S = \frac{s_2}{\Delta\varphi_2^0},$$

$$\delta d_N - \delta d_S = d_N \frac{d\varphi_1}{\Delta\varphi_1} - d_S \frac{d\varphi_2}{\Delta\varphi_2},$$

понимая под  $\delta d$  погрешность вывода  $d$ .

Переходя к средним ошибкам, напомним (приближенно)

$$2m_{\delta d}^2 = m_{\varphi}^2 \left\{ \frac{d_N^2}{\Delta\varphi_1^2} + \frac{d_S^2}{\Delta\varphi_2^2} \right\},$$

$$\sqrt{2}m_{\delta d} = m_{\varphi} \sqrt{\frac{d_N^2}{\Delta\varphi_1^2} + \frac{d_S^2}{\Delta\varphi_2^2}}.$$

Применяя эту формулу к градусному измерению Кассини, мы находим, что средняя ошибка широты, равная  $\pm 4''$ , обусловит значение  $\sqrt{2}m_{\delta d}$  в 32 тоаза, в то время как истинное значение искомой величины  $d_N - d_S$  (средняя ошибка которой и есть  $\sqrt{2}m_{\delta d}$ ) для того же измерения Кассини составляет всего 40 тоазов. Итак, если бы Кассини определял широты на астрономических пунктах дуги с ошибкой в  $\pm 4''$  и если бы на этих пунктах вовсе не имели места случайные отклонения отвесных линий, то и тогда разность длин северного и южного градусов была бы определена из его градусного измерения с погрешностью, равной величине самой этой определяемой разности длин двух градусов.

Очевидно, что опытное подтверждение полярного сжатия Земли требовало в те времена определения длин двух градусов меридиана, находящихся под значительно разнящимися друг от друга широтами: напомним, что градус в средней широте  $0^{\circ}30'$  имеет длину в 110,56 км, а в средней широте  $89^{\circ}30'$  — длину 111,68 км; вот такую разность в 1120 м

или 600 тоазов могли схватить и современные Кассини астрономо-геодезические измерения.

Мнение о том, что Земля есть эллипсоид, вытянутый в направлении полярной оси, нашло многочисленных приверженцев, всячески оспаривавших теорию Ньютона.

Французская Академия Наук решила подвергнуть вопрос исчерпывающему испытанию посредством измерения двух дуг: одной — близ экватора и другой — близ полярного круга. В мае 1735 г. французские академики Буге, Годен и Лакондамин отправились в Перу, где после многих лет усиленных трудов им удалось измерить дугу в  $3^{\circ}7'$ , пересекающую экватор. Другая экспедиция, в составе академиков Мопертюи, Клеро, Камюза, Лемонье, отправилась в 1736 г. в Лапландию, где измерила дугу длиной около  $1^{\circ}$ .

На описании работ этих двух экспедиций Французской Академии Наук мы несколько остановимся, ввиду того, что здесь были впервые проведены некоторые основные черты правильной постановки геодезических работ.

В те времена во Франции нормальной мерой являлся тоаз, отмеченный на ступеньке лестницы замка Шателе в Париже. Лакондамин изготовил тщательно два железных полированных жезла совершенно одинаковых по виду и одинаковых по длине и «в точности» равных нормальному тоазу, отмеченному в замке Шателе. Эти два жезла по мысли Лакондамина должны были использоваться только для сличения с ними рабочих мер. Другими словами, начало работ академических экспедиций ознаменовалось созданием «нормальных» мер и проведением идеи подразделения мер на несколько разрядов. Хотя изготовленные Лакондамином два концевых тоаза достаточно несовершенны с современной точки зрения, но замена ими меры, отмеченной на ступеньке лестницы, несомненно является значительным шагом вперед в связи с идеей возможного сохранения нормальных жезлов.

Один из тоазов Лакондамина был отправлен с экспедицией Буге; с него была изготовлена на месте точная копия, сохранявшаяся всегда в тени, в палатке; с этой копией нормального тоаза ежедневно сравнивались рабочие жезлы, деревянные, 20 футов длиной, оканчивавшиеся медными пластинками. Следовательно, в работах Буге было разделение мер на три разряда.

Второй тоаз Лакондамина был оставлен сперва в Париже в Академии, как главная нормальная мера, с которой должны были сличаться нормальные меры экспедиций по возвращении их в Париж. Но, к сожалению, именно этот второй тоаз Лакондамина был дан в экспедицию Мопертюи, причем он пострадал при гибели судна во время обратного переезда во Францию из Лапландии.

Базисы на Перуанской дуге были измерены при температуре  $+13^{\circ}$  Реомюра; при той же температуре Годен сравнивал нормальные тоазы Лакондамина с тоазом на лестнице Шателе. Поэтому, когда без всяких повреждений нормальный жезл Лакондамина вернулся в Париж с экспедицией Буге, то он под названием «Перуанский тоаз» приобрел значение главной нормальной меры, отнесенной к температуре  $+13^{\circ} R$ . Все последующие точные нормальные меры, изготавливавшиеся в XVIII и частью в XIX столетии во Франции, Германии, России, в основе своей имеют именно этот Перуанский тоаз. При переходе на метрическую систему, при создании во Франции первого нормального метра, также исходили из отношения его длины к длине Перуанского тоаза.

В работах Мопертюи в комнате (в Торнео), где искусственно поддерживалась температура  $+13^{\circ} R$ , приготовлены были пять жезлов — в тоаз длиной, — из дерева, с железными наконечниками; эти наконечники подпиливались до тех пор, пока длина каждого жезла делалась в точности равной нормальному тоазу. В стены этой комнаты были вбиты два больших костыля на расстоянии немного меньшем пяти тоазов. Поместив между этими костылями на козлах все пять жезлов с выравниванием их в одну горизонтальную линию и так, чтобы они взаимно касались, затем костыли немного подпиливали с тем, чтобы получить между приготовленными поверхностями костылей расстояние ровно в пять тоазов. Для самого измерения базиса, помощью полученного нормального расстояния, сделаны были восемь сосновых с металлическими наконечниками жезлов, длиной каждый в 5 тоазов. Очевидно, и в работах Мопертюи было принято деление мер на три разряда.

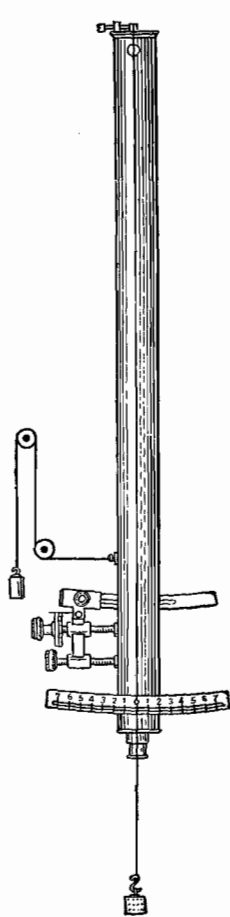
Измерения Мопертюи производились в долине реки Торнео. Сигналы на пунктах триангуляции были деревянные — в виде конусов, собранных из толстых бревен, оскобленных от коры; центры обозначались выбитыми на скале знаками или зарытыми в землю столбами. Триангуляция образовала растянутый семиугольник; базис (один, в середине триангуляции) связывался двумя переходными треугольниками со стороны основной сети. Измерение базиса было выполнено зимой с откладыванием деревянных рабочих жезлов по льду реки Торнео, вдоль которой располагался базис.

Два независимо исполненных друг от друга в течение 7 дней измерения базиса дали результаты, разнящиеся друг от друга только на 4 дюйма при длине базиса около 14 км. Углы измерялись квадрантом радиусом в два фута, снабженным микрометром: микрометр в виде винта с барабаном измерял угловое расстояние между двумя положениями алидады, из которых одно соответствует визированию трубой на предмет, а другое — совмещению указателя алидады с ближайшим штрихом делений квадранта. Точность этого квадранта испытывалась тем, что им много раз измерялись углы кругом горизонта, и всегда полученная сумма углов была очень близка к  $360^{\circ}$ .

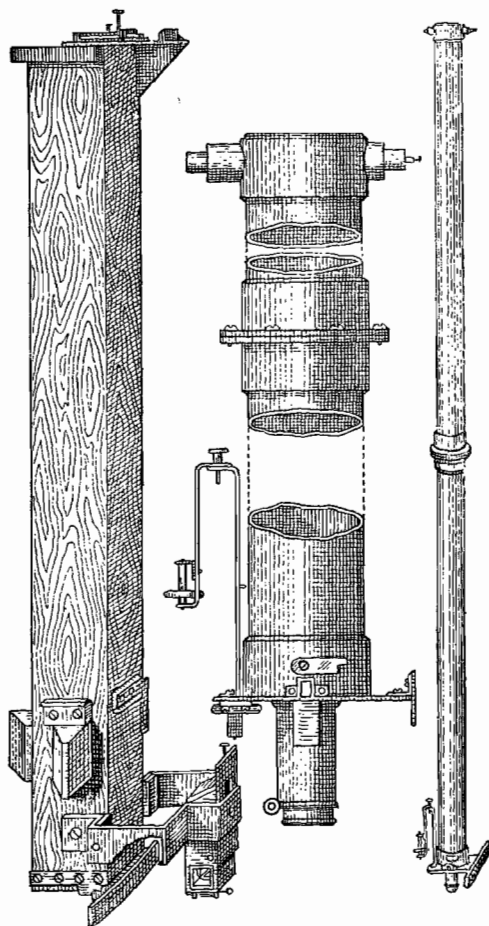
В каждом треугольнике измерялись все три угла; кроме того, для контроля наблюдались все суммы и разности углов.

Для астрономических определений были построены на копцах дуги — в Торнео и в Kittis — временные обсерватории. Главной задачей ставилось определение не абсолютных широт, а амплитуды дуги. Для этого служил зенитный сектор. Этот прибор состоял из медной трубы девяти футов длиной, образующей радиус медной же дуги в  $5^{\circ}30'$ , разделенной через  $7'30''$ . Труба и сектор с делениями были сделаны из одного куска металла; в центре сектора укреплялся на тонкой серебряной нити свинцовый отвес. На солидных подставках укреплялись лагеры для цилиндрических цапф, на которых подвешивался зенитный сектор: эти цапфы образовывали как бы горизонтальную ось, проходящую точно через центр сектора, около которой сектор мог качаться как маятник в той плоскости, в которой он был установлен, а именно в плоскости меридиана. С подставкой сектора соединялась внизу неподвижная дуга, которой касался разделенный лимб сектора; с этой дугой мог соединяться передвигающийся по ней микрометр. Винт микрометра, упираясь своим концом в выступ сектора, при своем вращении заставлял передвигаться (в небольших пределах) сектор. Устройство зенитного сектора можно видеть на приводимых здесь черт. 139 и 140. Очевидно, если допустить неизменяемость взаимного расположения частей инструмента

и идеальную точность укрепления нити с отвесом в центре инструмента, то место отсчета на секторе по нити отвеса будет постоянным при вертикальном положении визирной трубы (или вообще при установке трубы на постоянное зенитное расстояние) в разных пунктах земного шара. Поэтому, если в двух точках  $A$  и  $B$  отметить по нити отвеса на секторе отсчеты  $S_a$  и  $S_b$ , соответствующие наведениям трубы на одну и ту же звезду в моменты ее верхней кульминации в точках  $A$  и  $B$ , то, очевидно,  $S_a - S_b$  будет равно разности широт мест  $A$  и  $B$ .



Черт. 139



Черт. 140

При работе зенитным сектором один наблюдатель отмечал по часам момент наблюдения, другой — наводил трубу на звезду и третий — производил необходимые манипуляции с микрометром. После приближенной установки трубы на звезду, третий наблюдатель, действуя микрометром, подводил ближайший штрих лимба сектора к нити отвеса, записывая номер  $N$  этого штриха и отсчет  $p_1$  на микрометре, соответствующий точному совмещению этого штриха с нитью отвеса. После этого, действуя на сектор микрометром, производили точное наведение трубы на звезду, причем третий наблюдатель, работая согласно с первым в смысле закан

чивания движения, считал обороты винта микрометра и их доли и в момент прекращения работы микрометром, соответствующий точному наведению трубы на звезду, получал отсчет по микрометру  $p_2$ ; после этого третий наблюдатель давал сектору микрометром обратное движение до тех пор, пока не приходил к точному совмещению прежнего штриха лимба с нитью отвеса и получению при этом отсчета  $p'_1$  по микрометру. Очевидно, отсчет по сектору на избранную звезду равен

$$S = N \pm \left( p_2 - \frac{p_1 + p'_1}{2} \right).$$

Определение азимута выполнялось наблюдением пассажным инструментом моментов прохождения Солнца через вертикал того триангуляционного пункта, азимут направления на который подлежал определению. Поправка часов работы механика Грагама определялась по возможности ежедневно по соответствующим высотам Солнца или звезд, применяя квадрант радиуса три фута. Этим же инструментом, повидимому, была определена по Полярной звезде абсолютная широта Торнео. Амплитуда дуги Мопертюи равна  $57'28''$ ; широта Торнео  $65^\circ 50'$ . Длина градуса по меридиану для этой широты получилась из работ Мопертюи значительно большей, чем длина градуса под широтой Парижа; этим было подтверждено полярное сжатие Земли. Но, с другой стороны, длина градуса у Мопертюи получилась более истинной примерно на 400 метров.

Несомненно, что дуга с амплитудой всего в  $57'$  вообще слишком мала, чтобы на ней основывать точные исследования при определении вида и размеров Земли. Ошибки в  $6''$  при получении отсчетов на зенитном секторе в Торнео и Kittis могли привести к этой погрешности в 400 м в длине градуса. Правда, при указанных значительных размерах радиуса сектора эти ошибки отсчетов вряд ли были более  $4-5''$  в отдельном наблюдении, но к этим ошибкам собственно отсчета по сектору присоединялось влияние изменения места зенита на секторе при перевозке его с одного конца дуги на другой.

Мопертюи определение амплитуды выполнил по такой программе:

звезда  $\delta$  Дракона:

Kittis — наблюдения 1736 г. с 30 сентября по 10 октября в течение 8 дней;

Торнео — наблюдения 1736 г. с 1 ноября по 4 декабря в течение 8 дней;

звезда  $\alpha$  Дракона:

Торнео — наблюдения 1737 г. 17, 18 и 19 марта;

Kittis — наблюдения 1737 г. 4, 5 и 6 апреля.

Два вывода амплитуды из этих двух серий наблюдений различаются друг от друга всего на  $3'',5$ . Конечно, приведенная программа наблюдений, вполне правильно соображенная, все-таки не устраняет необходимости определений места зенита во время самих наблюдений на обоих пунктах, чего однако Мопертюи не мог выполнять из-за конструкции своего сектора. Сходимость двух выводов амплитуды могла быть случайной.

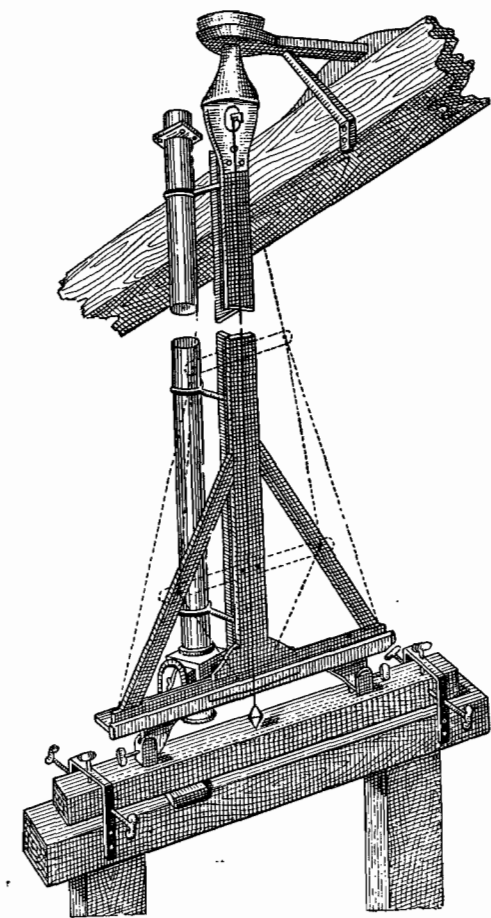
Экспедиция Мопертюи работала в 1736 и 1737 гг. В 1801 г. шведское правительство снарядило экспедицию под руководством Сванберга для переизмерения дуги Мопертюи — ввиду излишне большой длины для

градуса меридиана, полученной Мопертюи. Сванберг нашел почти все пункты градусного измерения Мопертюи, однако конечные астрономические пункты дуги взял иные, т. е. амплитуду Мопертюи оставил без проверки. Для градуса меридиана Сванберг получил значение меньшее на 400 м, чем Мопертюи.

Экспедиция Буге работала в Перу и проложила в долине реки Квито цепь из 32 треугольников, протянувшихся от  $+0^{\circ}2'30''$  северной широты до  $-3^{\circ}4'30''$  южной широты. В этой цепи были измерены два базиса на

концах цепи длиной около 12 км один и около 10,5 км — другой. Чрезвычайная высота гор — самая низкая точка триангуляции имела высоту около 2500 м — затрудняла переходы и причиняла множество лишений; кроме того, дикие индейцы уничтожали тригонометрические знаки, а в 1739 г. даже произвели на экспедицию нападение, в котором был убит врач экспедиции.

При измерении базисов мерные деревянные жезлы по 20 футов длиной, имевшие на концах медные пластинки, укладывались всегда горизонтально; при перемене их уровня употреблялись свинцовые отвесы на волоске или тонкой нити алоэ. Квадранты радиуса 2 и 3 футов, которыми измерялись углы, были очень несовершенны, и было потрачено много времени на определение ошибок их делений и поправок за эксцентриситет. Только в одном треугольнике угловая повязка достигла 10". Азимуты были определены из многочисленных наблюдений Солнца не на одном пункте цепи, а для нескольких ее сторон. Определение широт заняло несколько лет (три пункта): зенитные секторы экспедиции оказались очень несовершенными: громадное число уже сделанных

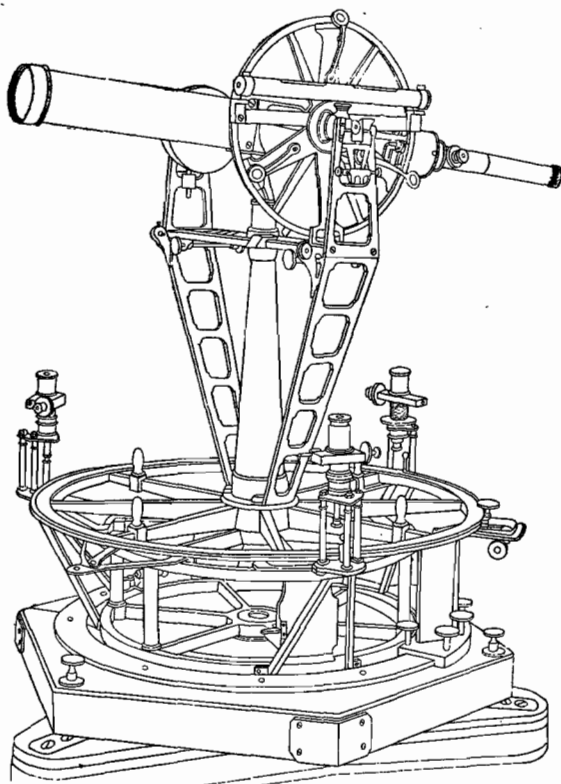


Черт. 141

наблюдений было отброшено. После тщательного определения разных поправок этих инструментов, после ряда исправлений в самих инструментах и переконструирования их была исполнена новая серия наблюдений с ноября 1742 г. до середины января 1743 г., результаты которой оказались удовлетворительными. Зенитный сектор, иной конструкции (черт. 141), употреблялся не так, как у Мопертюи: Буге и Лакондамин на каждом пункте по много раз изменяли положение сектора, перекладывая его по азимуту на  $180^{\circ}$ ; таким образом, наблюдения давали двойное зенитное расстояние звезды и доставляли материал для вывода места зенита. Как видно, экспедиция Буге продолжалась более 8 лет.

Еще до возвращения экспедиции Буге, Ж. Кассини произвел проверку части своей дуги меридиана во Франции, для чего вновь были измерены базисы, углы в треугольниках и широты на конечных пунктах. Для длины градуса под широтой Парижа было получено 57 084 тоаза. Буге для длины градуса на экваторе получил 56 748 тоазов, а Мопертюи под широтой  $65^\circ$  — 57 422 тоаза. Перуанская и французская дуги определяют сжатие Земли в 1:314; французская и лапландская дуги дают для сжатия результат в 1:214.

В 1783 г. были начаты работы по геодезическому соединению обсерваторий Гринвича и Парижа. Характерно, что здесь *впервые* англичане



Черт. 142

применили и для наблюдений горизонтальных углов, и для определений азимутов по Полярной — теодолит с микроскоп-микрометрами для отсчитывания кругов.

Французы, применяя квадранты для измерения углов в триангуляции, должны были плоскость квадранта совмещать с наклонной плоскостью, проходящей через вершины двух наблюдаемых триангуляционных сигналов и через место наблюдения. Поэтому измеренные квадрантом углы нужно было затем редуцировать на горизонт. Англичане впервые в виде теодолита ввели инструмент, измеряющий горизонтальные углы.

Теодолит того времени, изготовленный известным механиком и физиком Рамсденом, изображен на черт. 142: нижняя часть инструмента



имела массивную металлическую платформу с подъемными винтами; эта платформа несла на себе три микроскоп-микрометра и массивную стальную вертикальную ось длиной несколько более двух футов; верхняя часть инструмента состояла из солидно соединенных друг с другом: лимба диаметром 3 фута, полый внутри буксы, надевавшейся сверху на упомянутую стальную вертикальную ось, и подставок для трубы инструмента. (Лимб теодолита подразделялся через 15'; микроскоп-микрометры позволяли отсчитывать отдельные секунды. Труба имела длину в 36 дюймов, а горизонтальная ее ось — 24 дюйма). Следовательно, в этих теодолитах лимб вращался вместе с трубой около вертикальной оси. Массивность и солидность устройства геодезических инструментов с тех пор усвоена англичанами до настоящего времени.

При измерении базисов в описываемой работе по соединению Гринвича и Парижа англичане отказались навсегда от употребления деревянных жезлов, притом откладываемых по земле. Они заменили их стеклянными трубками длиной в 20 футов, укладывавшимися на особых подставках; коэффициенты расширения трубок были определены из особых исследований; при измерении определялась температура каждой трубки.

Приходится остановиться еще на одной подробности: базис в Hounslow, измеренный стеклянными трубками, был проверен измерением его двумя стальными, изготовленными Рамсденом, цепями по 100 футов длиной. На базисной линии через каждые 100 футов были забиты колья; к верхней поверхности кольев прикреплялись деленные шкалы, которые с помощью особого винта можно было медленно и плавно перемещать в направлении базиса. На этих шкалах делались отсчеты конечных штрихов цепи. Цепь натягивалась грузами около 10 кг и располагалась при этом на пяти переносных деревянных козлах.

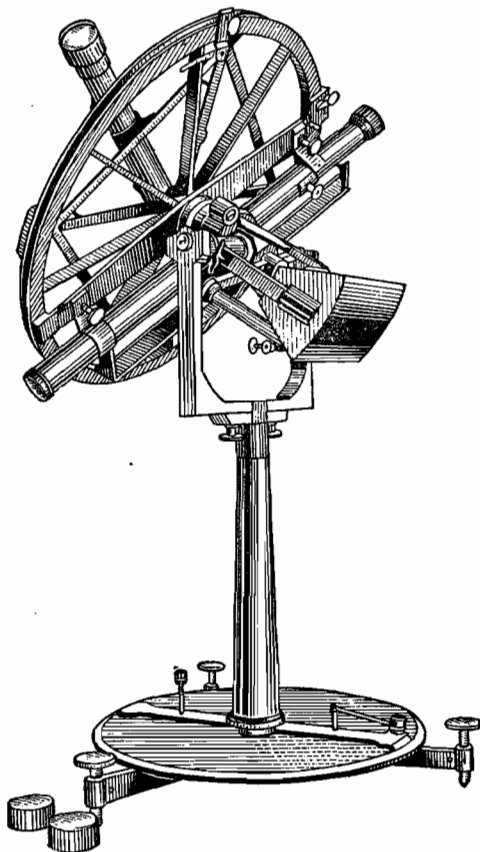
Этот метод измерения базисов, забытый потом совершенно, является конечно, прообразом метода Едерина.

В описываемых работах по соединению Гринвича и Парижа французы при измерении углов также заменили квадрант, но не теодолитом, а «повторительным кругом». Этот инструмент был предложен в 1752 г. профессором Геттингенского университета Тобиас Майером и вошел в значительное употребление вплоть до 30—40-х годов XIX столетия.

Повторительный круг (черт. 143) состоял из обычной треножной подставки с подъемными винтами, от которой шла сверху длинная вертикальная ось. Насаженная на эту ось букса вверх заканчивалась вилкой  $\vee$ , которая несла небольшую горизонтальную ось. К этой горизонтальной оси прикреплялась, соединяясь с ней неподвижно, муфта с рукавами: на одном рукаве помещался противовес круга, а другой поддерживал короткую «добавочную» ось, перпендикулярную к горизонтальной оси; один конец этой оси проходил через противовес, а другой служил для укрепления на нем круга инструмента. Следовательно, плоскость круга была параллельна упомянутой короткой горизонтальной оси, а всех осей в инструменте было три. Очевидно, вращение круга около горизонтальной оси вместе с вращением верхней части инструмента около вертикальной оси позволяло совместить плоскость круга с любой плоскостью. Круг инструмента был снабжен двумя трубами: верхняя труба с алидадой и четырьмя верньерами имела оптическую ось, параллельную плоскости круга, и вращалась около «добавочной» оси, вместе с которой мог вращаться и круг инструмента; нижняя труба прикреплялась с другой, неразделенной стороны круга; она была внецентричной, имела опти-

ческую ось, параллельную плоскости круга, и вращалась около той же добавочной оси. Обе трубы могли закрепляться неподвижно относительно лимба. Приведя плоскость круга в совмещение с плоскостью двух наблюдавшихся триангуляционных точек, ставили верхнюю трубу на отсчет по алидаде  $0^{\circ} 0' 0''$ , закрепляли алидаду и движением лимба наводили верхнюю трубу на левый предмет, после чего лимб закреплялся; теперь, открепив нижнюю трубу, наводили ее на правый предмет и затем снова ее закрепляли. Не трогая трубу, открепляли лимб и движением его наводили нижнюю трубу на левый предмет, после чего снова закрепляли лимб. Очевидно, в этот момент оптическая ось верхней трубы отойдет влево от левого предмета на величину измеряемого угла, и если при неподвижном круге наведем теперь эту верхнюю трубу движением алидады на правый предмет, то отсчет по верньеру даст двойную величину измеряемого угла. Этот отсчет не делался, алидада соединялась с лимбом, затем движением лимба верхняя труба направлялась на левый предмет, после чего лимб закреплялся; нижняя труба по откреплении ее и при неподвижном лимбе наводилась снова на правый предмет и закреплялась; не трогая трубу, движением лимба нижняя труба наводилась на левый предмет, а по закреплении лимба — верхняя труба, движением алидады, наводилась на правый предмет, причем полученный отсчет должен был бы быть равен учетверенной величине измеряемого угла, но этот отсчет не делался, а описанные действия повторялись еще раз и т. д. пока не выполняли заданного числа «повторений». Очевидно, метод рассчитан на возможно полное исключение влияния ошибок делений лимба и ошибок самих отсчетов по верньерам.

Но, конечно, теперь хорошо известно, что этот «способ повторений» заключает в себе систематические погрешности, достаточно крупные. Как только искусство деления кругов достигло известной степени совершенства, так главная причина погрешностей при точных измерениях горизонтальных углов перешла к ошибкам визирований на удаленные земные предметы, и способ повторений потерял всякое значение в точных работах. Однако нужны были исследования Струве и Бесселя, чтобы бросить только в 40-х годах прошлого столетия этот прославленный инструмент и соответствующий ему метод измерений.



Черт. 143

Следующей большой работой по градусным измерениям явилось так называемое «Большое французское градусное измерение», проведенное под руководством Деламбра. Оно было начато в 1792 г. и предпринято по распоряжению Революционного законодательного собрания с целью установить точную длину метра.

Ранее было указано, каким именно образом градусное измерение, исполненное под средней широтой  $45^\circ$ , дает вывод длины четверти меридиана, десятиллионной долей от которой и является метр.

Градусное измерение Деламбра продолжалось с 1792 по 1797 г. — в самый разгар французской революции. Была измерена дуга меридиана в  $9^\circ 40'$  от Дюнкирхена до Барселоны на юге; это была небывалая еще по протяжению дуга. Для измерения углов в треугольниках служили повторительные круги; частью наблюдения углов произведены в ночное время, пользуясь светом ламп; всего образовалось 115 треугольников. Для измерения базисов пользовались прибором, предложенным академиком Борда. В этом приборе было четыре мерных жезла; каждый состоял из двух полос, образующих металлический термометр и лежащих на толстом деревянном бруске. Нижняя платиновая полоса жезла имела два тоаза длины, полдюйма ширины и  $\frac{1}{12}$  дюйма высоты в поперечном сечении. Непосредственно на ней лежащая медная полоса была короче на 6 дюймов. Медная полоса прикреплена на одном конце винтом к платиновой, другим же своим концом и по всей длине она могла свободно передвигаться (при своем относительном расширении) вдоль платиновой полосы.

Разделенная шкала у свободного конца медной полосы и соответствующий ей верньер на платиновой полосе дают относительное изменение длины медной полосы, откуда можно вывести температуру и длину платиновой полосы. На свободном конце платиновой полосы, не покрытой медной полосой, имелась небольшая высовка, передвигавшаяся в пазу вдоль полосы, образуя как бы ее продолжение; эта высовка имела деления, отсчитывавшиеся вторым верньером на платиновой полосе; назначение высовки — измерять промежутки между смежными жезлами. При измерении базисные жезлы устанавливались каждый на двух железных треногах с подъемными винтами; наклонность жезла получалась при помощи дуги с уровнем. Упомянутые выше два верньера платиновой полосы при отсчитываниях рассматривались в микроскоп. Жезл № 1, изготовленный Борда, был тщательно сравнен с Перуанским тоазом; он не употреблялся в измерениях, а был выделен, как главная нормальная мера, и хранился в Бюро долгот.

Как видно, в измерении базисов Деламбр уже применил приборы и методы очень точные и в общем близкие к современным жезловым приборам. Принцип биметаллизма удерживался в базисных приборах западно-европейских государств вплоть до 1918 г.

Деламбром было измерено два базиса: близ Парижа и в Каркассоне. Определение азимутов было исполнено в пяти пунктах: близ Дюнкирхена, в Париже, Бурже, Каркассоне и Монжуи. При определениях азимутов, утром и вечером измеряли угол между Солнцем и триангуляционным пунктом, отмечая по часам момент наблюдения Солнца; необходимая поправка часов определялась из наблюдений абсолютных высот звезд повторительным кругом. На каждом из указанных пяти пунктов были исполнены очень большие ряды определений азимута, причем разногласия в выводах одного и того же азимута достигали  $45''$ !

Деламбр утешался соображением, что неточность определения азимута мало влияет на определение расстояния между земными параллеле-

лями при градусном измерении по меридиану, но, конечно, неточное определение азимутов повторительным кругом характеризовало работу этого инструмента и в отношении определения углов треугольников триангуляции. Впрочем, из 115 треугольников только в двух невязки получились между 4 и 5"; во всех остальных треугольниках ошибки суммы углов заключены между 0 и 2"; это дало повод Деламбру считать ошибку измеренного угла меньше 1".

Широты были определены в Дюнкирхене, Париже, Эво, Каркассоне, Барселоне и Монжуи повторительным кругом по зенитным расстояниям звезд — главным образом по  $\alpha$  и  $\beta$  Ursae minoris. Деламбр приписывает этим широтам, полученным из наблюдений звезд по одну сторону зенита, достаточно высокую точность. Между тем впоследствии Био из многочисленных наблюдений широты в Форментере обнаружил, что такие широты могут быть ошибочны от 3" до 6".

Только в отношении измерения базисов французские геодезисты эпохи Деламбра действительно сделали значительный шаг вперед, причем, введя сложный и тонкий базисный прибор, измеряли базисы такой же большой длины (около 11 км), как и ранее деревянными жезлами. В измерении углов триангуляции были также достигнуты заметные успехи по сравнению с работами Мопертюи и Буге, но следовало уже применять английские теодолиты, а не повторительный круг. Наиболее же ответственная часть, определение широт, — оставляла желать много лучшего. Триангуляция Деламбра была затем продолжена на юг от Барселоны его помощником Мешэнем, а после смерти Мешэня — астрономами Био и Араго — через Пиренеи и Испанию до Болеарских островов (острова Ивис и Форментера); работы Био и Араго закончились в 1825 г. В этой южной части измерения шли треугольниками с большими размерами сторон и поэтому применяли при наблюдениях углов световую сигнализацию; сторона Десиерто — Кампвей (Кампвей на острове Ивис) имеет длину около 160 км, и Араго пробыл 6 месяцев на Десиерто, чтобы наблюдать направление на Кампвей. Напомним, что во время этой экспедиции Араго был взят в плен; бежал в Алжир и испытал много тяжелых приключений.

Так как дуга Деламбра от Дюнкирхена до Монжуи в  $9^{\circ}40'$  разбивается астрономическими пунктами на несколько частных дуг, то сжатие Земли можно вывести из одного этого измерения Деламбра; оно оказывается равным 1 : 150. Если к измерению Деламбра присоединить Перуанское измерение, то для сжатия получается значение в 1 : 334. Если к дуге Деламбра, кроме Перуанского измерения, присоединить еще результаты Сванберга по переизмерению дуги Мопертюи, то для земного сжатия получим 1 : 300: именно этот результат и был принят учеными, как близкий к истине, в первой половине XIX столетия.

Выше было указано, что в 1783 г. англичане совместно с французами начали геодезические работы по соединению Гринвича и Парижа. В скором времени англичане изменили свое задание, перейдя на составление основной триангуляции Великобританских островов, включая и Северо-Шотландские острова.

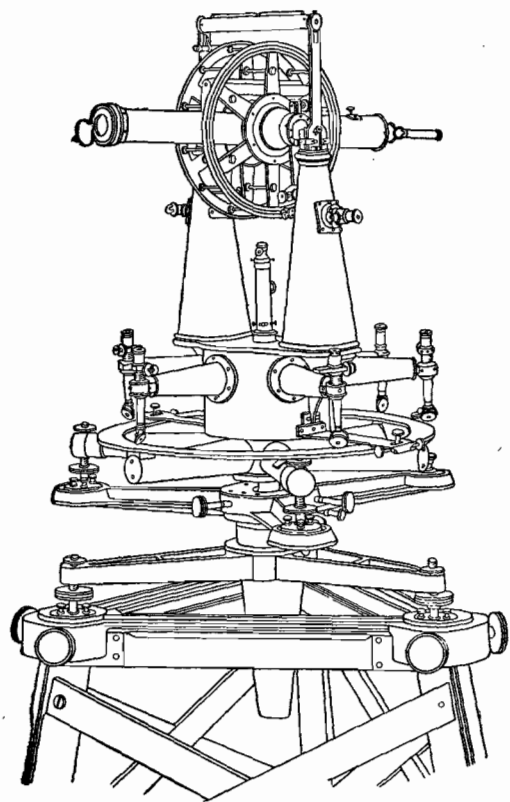
Работа с 1783 г. продолжалась до 1858 г. — сперва под руководством генерала Рой, затем — полковника Кольби и, наконец, под руководством генерала Джемса.

Основная триангуляция в Великобритании была построена в виде сплошной сети первоклассных треугольников; всего образовалось 218 треугольников I класса — средняя длина стороны 56 км, а наибольшая сторона имеет длину в 179 км. Базисы измерялись сперва, как указано

выше, жезлами в виде стеклянных трубок, а затем прибором Кольби — «компенсационным»: в этом приборе жезл состоит из латушной и железной полос по 10 футов длиной, неизменно скрепленных посередине двумя поперечными цилиндриками; на концах полос, перпендикулярно к ним имеются металлические язычки по 6 дюймов длиной, соединенные с полосами шарнирами; расстояние между точками, нанесенными на внешних концах язычков, должно оставаться постоянным при любой температуре. Этот сложный в общем прибор не оправдал вполне возлагавшихся на него надежд в отношении полной компенсации влияния температуры. Но, конечно, измеренные им базисы имеют точность, вполне соответствующую запросам градусных измерений.

Всего в Великобритании было измерено 6 базисов длиной от 8 до 12 км; несогласие в базисах нигде не превышало 1 : 30 000.

Для измерения углов служил «альтазимут» Траутона и Симса, изображенный на черт. 144. Этот инструмент имеет горизонтальный круг диаметром 2 фута, разделенный через 5'. Устройство осей — как у повторительного теодолита, хотя способ повторения никогда в Англии не применялся. Отсчетывание горизонтального круга исполнялось шестью микроскоп-микрометрами, соединенными рычагами с алидадой инструмента. Фокус трубы — 27 дюймов, а отверстие объектива 55 мм. На ось вращения трубы насажены два вертикальных круга 15 дюймов в диа-

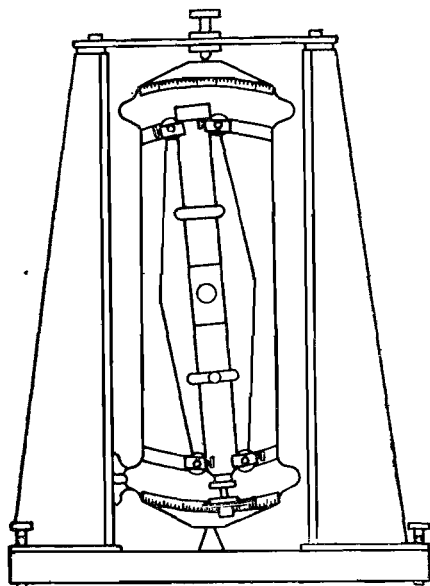


Черт. 144

метре, разделенные через 5' и отсчитываемые двумя микроскоп-микрометрами (обратите внимание на черт. 144). Для установки инструмента над центром пункта имеется вертикальный телескопический микроскоп, проходящий через вертикальную ось инструмента. Несомненно, что отсчитывание шести микроскопов, при достаточном количестве отдельных приемов измерения угла, приводило в среднем к уничтожению почти в полной мере влияния ошибок делений круга, но, с другой стороны, введение такого большого числа микроскопов увеличивает продолжительность одного приема наблюдений и, следовательно, ведет к нарастанию влияния ошибок, обусловленных внешними причинами. При современной точности нанесения штрихов на лимбе не следует иметь в инструменте более трех микроскопов.

В описываемой триангуляции Великобритании применяли при измерении горизонтальных углов способ круговых приемов; средняя ошибка измеренного угла менее 1".

Мы в праве заключить, что именно англичане первые применили в геодезической части градусных измерений и приборы, и методы наблюдений, существенно не отличающиеся от современных. Для определений широт англичане пользовались сперва зенитным сектором Эри, изображенным на черт. 145. Этот прибор состоял из трех частей: наружного станка, вращающейся рамы и алидады с трубой. Станок представлял прямоугольное массивное основание с подъемными винтами, от которого кверху шли две вертикальные стойки, соединенные верхней горизонтальной поперечиной. В середине этой поперечины имелся винт, конец которого вместе с выступным конусом в середине основания станка доставлял опорные точки вращающейся рамы. Вращающаяся рама представляла собой металлическую пластину с четырьмя ушками, служившими для ее закрепления после вращения около вертикальной оси. Выступное кольцо, диаметром в 9 дюймов, укрепленное на лицевой стороне рамы в ее середине, несло горизонтальную ось, на которой укреплялись труба и алидада инструмента. На концах рамы — верхнем и нижнем — помещались дуги радиуса 20,5 дюймов, разделенные через 5'. Алидада несла обоймы, прикрепляющие к ней объективную и окулярную части трубы, и четыре микроскопа с микрометрами для отсчета разделенных дуг. На задней стороне рамы помещались три точных уровня. Фокусная длина трубы была 46 дюймов, отверстие объектива — около 90 мм; увеличение трубы 70-кратное. Труба имела окулярный микрометр.



Черт. 145

После грубой установки трубы на зенитное расстояние звезды в меридиане и появления звезды в поле зрения трубы, наблюдатель отсчитывал уровни, четыре микроскопа алидады и затем наводил подвижную нить трубы на звезду с отсчетом момента времени и окулярного микрометра. После этого вращающаяся рама поворачивалась на  $180^\circ$  и труба ставилась на прежнее зенитное расстояние; по закреплении трубы и рамы, подвижная нить окулярного микрометра наводилась на ту же звезду с отметкой при этом момента по часам, после чего следовали отсчеты окулярного микрометра, четырех микроскоп-микрометров алидады и уровней. Полный прием состоял из наблюдений двух звезд по обе стороны от зенита.

Точность определений широт зенитным сектором Эри при принятой англичанами системе наблюдений была уже достаточно высокой; но только на 26 пунктах из 60 для определения широт был применен этот инструмент. На остальных пунктах англичане уже применяли зенит-телескоп и определяли им широты по способу Талькотта с средней ошибкой окончательного вывода широты не более  $\pm 0''{,}3$ . Азимуты определялись пассажным инструментом, причем определение азимутов было исполнено на 61 пункте триангуляции с средней ошибкой от  $\pm 0''{,}5$  до

$\pm 0''{,}7$ . Характерно для этой английской работы, что и ее астрономическая часть была представлена современными уже методами и инструментами, что и в этой части были получены результаты высокой точности, и, кроме того, астрономические определения проводились на значительном числе пунктов с целью выяснения местных отклонений отвесной линии.

В завершение своей работы англичане в 1862 г. выполнили новое соединение Гринвича с Дюнкирхеном и получили дугу меридиана от Saxaford ( $60^{\circ} 49' 37''$ )\* до Дюнкирхена ( $51^{\circ} 2' 8''$ ), с амплитудой  $9^{\circ} 47' 29''$ . Эта последняя работа послужила толчком для исполнения французами переизмерения дуги Деламбра. Новые французские триангуляции по этой дуге к югу от Парижа исполнялись под руководством Перрье с 1870 по 1894 гг.: повторительные круги были заменены большими теодолитами Бруннера с микроскоп-микрометрами; при измерении углов применяли преимущественно ночные наблюдения; прежняя система пользования колокольнями была брошена: на пунктах сети воздвигались деревянные сигналы, достигавшие в лесистых местах между Буржем и Парижем высоты 35 м. Наибольшая ошибка в сумме углов треугольника была  $1''{,}4$ , что указывает на высокую точность геодезической части работ. Измерение базисов выполнялось Перрье прибором из одного жезла длиной 3 м, состоявшего из двух цилиндрических полос — стальной и медной; полосы соединялись посередине, а на концах имели тонкоразделенные шкалы, считывавшиеся помощью микроскоп-микрометров. В приборе употреблялись три микроскоп-микрометра; подставки для них имели очень сложное устройство. Как видно, прибор этот очень сходен с современным базисным прибором Прусского геодезического института.

Астрономические работы были также проведены заново. С 1870 по 1882 г. была переизмерена южная часть дуги Деламбра от Монжуи и до Парижа на протяжении  $6^{\circ}30'$ . К этому же периоду (1878—1879 гг.) относится соединение Перрье южных треугольников испанской меридиональной цепи с триангуляцией в Алжире, проложенной тем же Перрье в 60-х и 70-х годах XIX столетия. Связь исполнилась посредством геодезического четырехугольника: две его вершины — Tetica и Mulhacén находятся в горах Сиерра-Невада, а остальные две — Filhaoussen и M'Sabiha — в Алжире; сторона Mulhacén — Filhaoussen равна почти 270 км. Сигналом на только что поименованных пунктах служил электрический свет от динамомашин; свет помещался в фокусе рефлектора в 20 дюймов в диаметре и при 24 дюймах фокусного расстояния.

С 1883 по 1894 г. французы проложили новую триангуляцию от южного конца дуги Деламбра, т. е. от Монжуи, далее на юг до соединения с испанской триангуляцией; переизмерение части дуги Деламбра от Парижа до Дюнкирхена было исполнено в 1903—1908 гг.\*\* Упоминаемая уже не раз испанская триангуляция была выполнена с 1859 по 1877 г. под руководством Ибаньеса. Испанцы воспользовались и для геодезических работ и для астрономических определений превосходными теодолитами и универсалами Репсольда, с диаметрами кругов от 27 до 40 см. Для измерений базисов служил прибор Ибаньеса, сходный по устройству с прибором, которым пользовался Перрье; длина жезла

\* Северные Шетландские острова.

\*\* Завершение астрономических работ вдоль парижского меридиана во Франции относится к 1909 году.

у Ибаньеса была взята в 4 м. Точность измеренных испанцами базисов наибольшая из полученных в Европе при применении жезловых приборов. Широты на пунктах испанской части дуги определены по зенитным расстояниям звезд в меридиане с высокой степенью точности — со средней ошибкой, меньшей  $\pm 0''{,}2$ ; вероятно, здесь немалую роль сыграли высокие качества инструментов Репсолда.

Таким образом, к 1910 г. усилиями англичан, французов и испанцев образовалась непрерывная дуга меридиана от Saxaford в Северо-Шетландских островах ( $60^{\circ}49'37''$ ) до Laghouat ( $33^{\circ}48'$ ) в Алжире с 38 астрономическими пунктами; протяжение дуги около 3100 км (по широте). Отметим здесь для сопоставления, что в настоящее время Главное управление геодезии и картографии исполняет в год около 3000 км первоклассной триангуляции в виде простой цепи треугольников. Эта дуга от Saxaford до Laghouat носит теперь название западно-европейского градусного измерения.

### § 99. Исторический обзор градусных измерений в первой половине XIX столетия

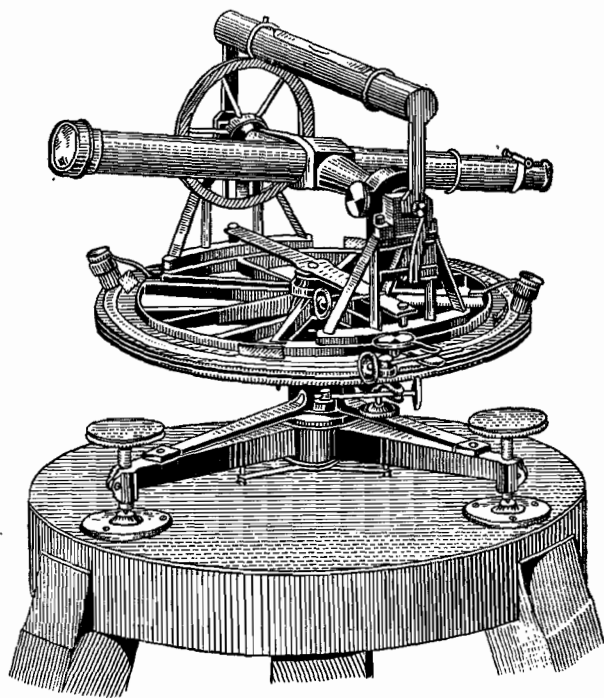
В предыдущем параграфе мы видели, что уже в конце XVIII столетия французские геодезисты пришли к совершенному прибору и к совершенным методам базисных измерений. В самом начале XIX столетия англичане для измерения горизонтальных углов на пунктах градусных измерений стали уже применять современного типа инструменты, теодолиты, и наблюдать способом круговых приемов, достигая результатов, немного уступающих по точности современным работам. В астрономической части, т. е. в определении широт и азимутов, англичане также уже с 30-х годов XIX столетия стали пользоваться зенит-телескопом для определения широт и наблюдениями азимута меридианной марки переносным пассажным инструментом. Однако глубокая и вполне научная разработка геодезической и астрономической части градусных измерений принадлежит в значительной степени Бесселю и Гауссу и отчасти русскому ученому В. Струве.

В 1821—1823 гг. Гаусс руководил Ганноверским градусным измерением. Ганноверская меридианная дуга имела протяжение всего  $2^{\circ}1'$  и, конечно, сама по себе не представляет материала, могущего влиять на вес определения земных размеров. Но должно отметить, что в этой работе Гаусс произвел многочисленные исследования способа повторения и установил несомненность систематических ошибок, присущих этому способу; Гауссом же была разработана идея измерения на данном пункте углов во всех комбинациях и, следовательно, указан был метод получения результата наблюдений на триангуляционном пункте в виде одного ряда направлений. Понятно, что, разрабатывая этот вопрос об измерении углов во всех комбинациях, Гаусс невольно должен был исходить из общей теории распределения весов наблюдений на триангуляционном пункте, но точных сведений об этом до нас не дошло. Гауссом же на работах в Ганновере был изобретен гелиотроп, который затем вошел во всеобщее употребление. Творец способа наименьших квадратов, Гаусс впервые применил его к обработке триангуляций. Далее, нужно отметить разработанную Гауссом теорию геодезической линии и теорию треугольников, образованных на поверхности эллипсоида вращения геодезическими линиями, и, наконец, — вторые Гауссовы формулы для вычисления геодезических широт, долгот и азимутов. Применявшийся Гауссом теодолит изображен на черт. 146.



В 1831—1834 гг. Бесселем произведено градусное измерение между Мемелем и Трунцем в Восточной Пруссии. Сочинение Бесселя «Gradmessung in Ostpreussen», изданное в 1838 г., несомненно является большим вкладом в геодезическую науку.

Бессель уточнил теорию базисных сетей и использовал ее в том отношении, что измерял базисы незначительной длины — в 2 км, но, переходя от базиса к стороне в 30 км, обеспечивал высокую точность угловой связи. Измерение базисов исполнялось Бесселем (с точностью около 1 : 500 000) им же самим сконструированным прибором. Этот прибор Бесселя, впоследствии усовершенствованный, послужил для измерения многих базисов в Средней Европе. С чрезвычайной заботливостью



Черт. 146

и солидностью сооружались Бесселем базисные центры. Для измерения горизонтальных углов употреблялись теодолиты с кругом диаметра около 40 см. Бессель первый в Средней Европе применил способ наблюдения направлений (т. е. способ круговых приемов, уже применявшийся в то время англичанами). Средняя ошибка направления из одного наблюдения в работах Бесселя составляет всего  $\pm 1'',3$ .

Сигналы, служившие для наблюдений, были двух родов: одним являлись медные полированные и высеребренные шары, другим (при небольших расстояниях) служила доска в два фута в квадрате, выкрашенная белой краской с черной полосой посередине: эта доска ставилась вертикально и могла вращаться около оси, совпадающей с серединой черной полосы и с вертикальной линией, проходящей через центр сигнала. На определение приведений обращалось большое внимание; так как при пользовании сигналами первого рода наблюдалось отражение

Солнца в виде яркой звездочки, то эти наблюдения требовали поправок «за фазу», которые тщательно определялись.

Уравнивание триангуляции производилось по строгому «методу Бесселя». Этот способ, несмотря на громоздкость вычислений, был принят затем при обработке Западно-европейских триангуляций. Конечно, заслуга Бесселя заключается в разработке вопроса об уравнивании триангуляции в общем виде\*, с соблюдением принципа суммы квадратов поправок непосредственно наблюдаемых величин (а не их функций).

Особенно приходится отметить данные Бесселем теорию и практику применения пассажного инструмента для определения времени, азимута и широты. Для широты Бессель применил способ определения ее из наблюдений пассажным инструментом, установленным в первом вертикале; этот способ, разработанный со всей полнотой знаменитым русским астрономом Струве, долгое время был основным при определении широт на пунктах триангуляции в Западной Европе, в России, Индии и только в последние десятилетия 19-го столетия стал вытесняться способом Талькотта.

Наблюдение времени и азимута сопровождалось установкой трех марок; одной в меридиане, другой к востоку на  $2^{\circ}20'$  и третьей к западу на  $2^{\circ}20'$ ; при этом путь Полярной пересекался вертикалами той и другой из боковых марок в двух местах вблизи восточной и западной элонгаций звезды. Перенос азимута с марок на сторону триангуляции исполнялся из наблюдений угла большим теодолитом.

Измерение Бесселя было косвенным к меридиану: по широте оно давало амплитуду всего в  $1^{\circ}30'$  при общем протяжении дуги в  $3^{\circ}4'$ . Такая косвенная дуга при определении астрономических широт и азимутов на обоих концах дуги равносильна двум градусным измерениям — по меридиану и по параллели и позволяет поэтому из нее одной сделать вывод и большой полуоси и сжатия земного эллипсоида\*\*. Таким образом, Бесселем была поставлена оригинальная геометрическая задача на поверхности эллипсоида вращения; она была решена им на основании тех исследований в отношении геодезической линии, которые приведены в главе VII настоящего Руководства.

Бесселем же был исполнен вывод вероятнейших размеров земного эллипсоида (1841 г.). Материал, использованный им при этом, был следующий:

	Амплитуда	Средняя широта	Число широт
Перуанское измерение . . . . .	$3^{\circ} 7'$	$1^{\circ}31'$	2
Первое индийское измерение . . . . .	1 35	12 32	2
Второе „ „ . . . . .	15 58	16 8	7
Французское (Деламбр) измерение . . . . .	12 22	44 51	7
Английское измерение . . . . .	2 50	52 2	5
Гавноверское „ . . . . .	2 1	52 32	2
Датское „ . . . . .	1 32	54 8	2
Прусское „ . . . . .	1 30	54 58	3
Русское „ . . . . .	8 2	56 4	6
Шведское „ . . . . .	1 37	66 20	2

\* Т. е. при произвольном распределении наблюдений на отдельных пунктах сети.

\*\* Характерно, что Бессель собственно в своей работе делает замену недоступного тогда точного определения разности долгот определением разности азимутов.

Об измерениях индийском и русском будет сказано вслед за этим; и русское, и индийское измерения вошли в вывод Бесселя неполностью. Несомненно, что Бессель использовал пестрый материал; кроме того, понятно, что использование коротких дуг и дуг, не связанных между собой, сильно колеблет значение общего вывода из такого материала.

Сжатие, по Бесселю,  $1 : 299,1 \pm 4,7$ , а большая полуось

$$a = 6\,377\,397 \text{ м} \pm 210 \text{ м}.$$

С 1816 г. по 1852 г. исполнено под руководством В. Струве большое русское градусное измерение по меридиану.

Войны Наполеона вызвали во всех государствах Европы организацию при главных штабах армий топографо-геодезических частей. К этому времени — именно к 1821 г. — относится учреждение и в России Военно-топографического управления, геодезические работы которого начались с продолжения триангуляций в Виленской губернии и в Западной Белоруссии (Гродно, Белосток); с 1816 г. по 1828 г. генерал Теннер, заведывавший этой триангуляцией, основной ряд ее исполнял в виде простой цепи I класса, располагавшейся по меридиану Вильно.

Одновременно (с 1816 по 1831 г.) В. Струве, занимавший кафедру астрономии и геодезии в Дерптском университете, предпринял и исполнил настоящее градусное измерение по меридиану в Прибалтийских губерниях. С назначением В. Струве в 1839 г. первым директором учрежденной тогда Главной астрономической обсерватории в Пулкове, он, как руководитель астрономической и геодезической деятельности в России, предпринял осуществление своей давнишней мечты — соединение своего градусного измерения с триангуляцией Теннера, обращение этой триангуляции в градусное измерение и продолжение измерений возможно далеко и на север и на юг.

Триангуляция Теннера постепенно продолжалась на юг, прошла через Волынский и Подольский край и через Бессарабию и кончилась в 1852 г. при устье Дуная; измерение Струве из Эстонии перешло в Финляндию, пересекло Швецию и Норвегию и окончилось в Финмаркене (Норвегия) в 1850 г., в Фугленесе на Ледовитом океане.

Все измерение Струве образовалось из 258 треугольников, не считая входивших в базисные передачи. Сам Струве принимал непосредственное участие в работах в Прибалтийских губерниях и в Финляндии; в остальных частях дуги за Струве оставалось общее руководство, а непосредственное заведывание осуществлялось: Теннером в России, Зеландером в Швеции и Ганстином в Норвегии (Зеландер — директор обсерватории в Стокгольме; Ганстин — директор обсерватории в б. Христиании, теперешнем Осло).

Крайние точки дуги Струве имеют широты

Фугленес . . . . .  $70^{\circ}40'11'',2$ ,

Старо-Некрасовка . . . . .  $45^{\circ}20'2'',9$ ,

т. е. амплитуда дуги  $25^{\circ}20'$ .

Геодезическая часть этой огромной работы не отличалась однородностью. Измерение базисов исполнено в одной части дуги прибором Струве, в другой части, южной — прибором Теннера; средняя ошибка базисов, измеренных прибором Струве, — около  $1 : 1\,000\,000$ , средняя ошибка базисов Теннера — около  $1 : 300\,000$ .

В Прибалтийских губерниях и в Финляндии Струве допускал не так редко очень значительные отступления треугольников от равносторонней

формы, чередование треугольников с значительно разнящимися размерами сторон и искривления цепи, избегая этим постройки сигналов не только значительной, но даже и средней высоты. Зато наблюдения углов в этой части дуги, исполненные с вполне устойчивых оснований (часто с земли) на хорошо видимые и устойчивые сигналы, хорошими инструментами и отличными наблюдателями, характеризуются высокой степенью точности: средняя ошибка угла колеблется от  $\pm 0'',4$  до  $\pm 0'',8$ . Для наблюдений углов Струве пользовался 18-дюймовыми теодолитами механика Рейхенбаха; лимб теодолита отсчитывался четырьмя 4-секундными верньерами, позволявшими при указанном размере диаметра лимба выбирать отдельные секунды (отметим попутно, что Рейхенбах не призывал введения в геодезических инструментах микроскоп-микрометров).

При переброске цепи через Финский залив она собственно была разорвана, так как только одна общая точка осуществила связь цепей, расположенных на разных сторонах залива.

Наоборот, Теннер, прокладывая свои основные ряды I класса вдоль градусного измерения, образовывал их из треугольников, близких к равносторонним; это требовало в залесенных губерниях сооружения на вершинах треугольников высоких сигналов, которые строились в те времена малоустойчивыми. Для наблюдений углов использовались у Теннера разнообразные инструменты, в том числе и повторительные круги. Заставляя офицеров Корпуса военных топографов продельвать огромные ряды наблюдений на триангуляционных пунктах, Теннер добивался допустимых невязок в треугольниках. Средняя ошибка измеренного угла в треугольниках Теннера по оценке Струве около  $\pm 1'',8$ . Но должно отметить, что переизмерения углов триангуляции Теннера, выполненные впоследствии при привязке к ним новых рядов, нигде не приводили к несогласиям, *большим секунды*.

В Швеции и Норвегии дуга пролегала, пересекая долину Торнео — место работ Мопертюи, по совершенно безлюдной местности, трудно проходимой; здесь нередко сигналами служили вежи, укрепленные на скалах, а наблюдения исполнялись небольшим теодолитом с десяти-секундными верньерами; средняя ошибка измеренных углов в этой части около  $\pm 3''$ . Необходимо здесь подчеркнуть, что требования к геодезической части со стороны градусных измерений могут быть допущены и ниже тех требований, которые должны быть соблюдены при составлении первоклассной триангуляции для базирования на ней всех последующих разрядов государственной триангуляции. Поэтому, несмотря на указанную значительную неоднородность геодезической части в разных местах дуги Струве, все-таки она полностью может быть использована для вывода размеров земного эллипсоида.

На протяжении дуги было измерено десять базисов длиной от 5 до 11 км.

Астрономические определения широты и азимутов были исполнены на 13 пунктах дуги, вследствие чего она разбилась на 12 частных дуг. Астрономические определения отчасти исполнены самим Струве, отчасти профессорами астрономии русских и шведских университетов. На каждом астрономическом пункте было исполнено значительное количество рядов наблюдений. Основным способом определения широты был способ наблюдений зенитной звезды пассажным инструментом, установленным в первом вертикале; при определении азимутов применялся также пассажный инструмент и меридианные марки.

Существенно отметить, что Струве одновременно с Бесселем (но, конечно, от него независимо) разработал и ввел способ круговых приемов или наблюдения направлений при измерении горизонтальных углов в триангуляции; особенностью «способа Струве» является двойное измерение направлений в каждом полуприеме — при положительном и отрицательном движении паводящего винта алидады.

В этой же работе В. Струве дал особый прием уравнивания цепей треугольников между их выходными сторонами — с принятием в расчет весов выходных сторон и с введением их в уравнивание, т. е. с определением, кроме поправок углов, и поправок *выходных сторон*. Этот прием, заброшенный впоследствии, вероятно, еще найдет применение в новых точных триангуляциях. Чрезвычайно интересные и талантливые исследования ошибок измерений углов и базисов, исполненные Струве, составляют значительный вклад в науку геодезии и заставляют геодезистов всех стран изучать его сочинения и в настоящее время; беседа через книгу «Дуга меридиана» с этим большим умом, талантливым теоретиком и большим практиком, действительно необходима для воспитания начинающего геодезиста и полезна опытному, много работавшему геодезисту для проверки самого себя.

Исследования Струве, проведенные им в астрономических работах по градусному измерению, являются образцовыми; излишне упоминать, что они составили только малую часть того, что этот великий ученый дал в области астрономии.

Как известно, главной нормальной мерой в работах по измерению русских базисов, с которой сравнивались нормальные жезлы базисных приборов, являлся двойной тоаз *N*, хранившийся постоянно с 1843 г. в Пулковской обсерватории. Копия этого двойного тоаза *N* — двойной тоаз *P*, также всегда хранившийся в Пулкове, был в 1886 г. сравнен с главными нормальными мерами других Европейских государств в Саутгемптоне, в Англии. Эти сравнения мер в Саутгемптоне были исполнены с великой тщательностью, в специально построенном здании с двойными каменными стенами, примыкавшем с северной стороны к большому зданию. В 1893 г. вице-директор Пулковской обсерватории А. П. Соколов сравнил непосредственно двойной тоаз *N* в Париже с международным метром-прототипом. Таким образом, собственно дважды исполнено отнесение измеренных Струве базисов к международной системе мер; разногласие в этих двух определениях доходит все-таки, видимо, до 1 : 200 000.

Делая вывод размеров земного эллипсоида из одного только измерения Струве, мы получим для полуоси

$$a = 6\,378\,445 \text{ м} \pm 169 \text{ м}, \text{ а для сжатия } 1 : 298,6 \pm 11,5.$$

Применяя гипотезу изостазии Пратта к обработке дуги Струве, получим при глубине компенсации в 96 км

$$a = 6\,378\,421 \text{ м} \pm 132 \text{ м}, \text{ сжатие } = 1 : 292,1 \pm 8,5.$$

Из формулы (53) § 8

$$S = a \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \left\{ 1 - \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2 B_m \right) e^2 - \dots \right\}$$

следует, что влияние члена с  $e^2$  уничтожается при  $B_m = 54^\circ 45'$ . Так как средняя широта дуги Струве равна  $58^\circ$ , то понятно, что она работает,

главным образом, на вывод большой полуоси. Приняв поэтому сжатие по Бесселю 1 : 299,1, сделаем из дуги Струве, без применения изостазии, новый вывод большой полуоси, который окажется таким

$$a = 6\,378\,455 \text{ м} \pm 127 \text{ м.}$$

Сопоставляя с выводом Хейфорда приведенные результаты для размеров Земли, мы видим, что действительно одно градусное измерение Струве дает очень надежный вывод размера большой полуоси земного эллипсоида; сжатие эллипсоида, по географическому положению дуги, из нее определяется с малым весом.

Нам нужно будет теперь перейти к работам англичан в Индии в XIX столетии. Эти обширные работы начались с 1799—1800 г. и в главной части закончились к 1878 г. по триангуляции и к 1900 г. — по астрономическим определениям. Первые годы ими руководил Ламбтон, затем до 1843 г. — Эверест, с 1843 по 1861 г. — Waugh и с 1861 по 1883 г. — Walker. Ламбтон измерял базисы стальными цепями, углы — теодолитом, изображенным на черт. 144, а широты определял зенитным сектором Рамсдена. Эверест для измерения базисов получил прибор Кольби, а для определения широт — вертикальные круги с диаметром в 36 дюймов; Эверестом же были получены новые, весьма совершенные теодолиты для измерения углов. Вооруженный этими приборами, Эверест постепенно переделал прежние свои измерения; измерения Ламбтона также были переделаны Walker'ом. Прибор Кольби, как известно, не оправдал вполне надежд в смысле компенсации влияния температуры, поэтому в скором времени Эверест и затем его преемник приняли за правило тщательно определять температуру рабочих жезлов простыми термометрами.

Средняя ошибка базисов, измеренных в Индии, оценивается около 1 : 400 000.

На триангуляционных пунктах в Индии англичане нередко возводили каменные башни высотой до 20 м, пустые внутри, позволявшие точнеешим образом центрировать теодолит над маркой, заложенной в основании. Наблюдения углов в Индии производились исключительно на световые сигналы: днем — на гелиотропы, ночью — на аргантовые лампы. Точность определения углов очень высока: в некоторых частях английской триангуляции средняя ошибка угла оценивается в  $\pm 0''{,}3$ .

Астрономические работы, кроме тщательности и искусства выполнения, характеризуются еще значительным числом рядов наблюдений. Примером могут послужить следующие результаты по определению Эверестом в 1836 г. посредством пассажного инструмента азимута вспомогательной лампы в Kalianpur'e:

из 130 наблюдений $\delta$ Ursae minoris . . . . .	179°59'53'',12
„ 115 „ 4 Ursae minoris Bode . . . . .	53'',56
„ 128 „ 51 Cephei . . . . .	53'',42

Из огромного материала индийских триангуляций, исполненных примерно к 1910 г., для градусных измерений выделяются:

1) дуга по меридиану от мыса Коморина (Kudankulam...  $\varphi = 8^{\circ}12'10''$ ) до Гималайского хребта (Dehra...  $\varphi = 30^{\circ}29'$ ) с огромной амплитудой в  $22^{\circ}17'$ , почти равной амплитуде дуги Струве;

2) дуга по меридиану  $75^{\circ}$  долготы (на  $3^{\circ}$  западнее первой дуги) от Mangalore ( $13^{\circ}$ ) до Sialkot ( $33^{\circ}$ ) с амплитудой около  $20^{\circ}$ ;

3) дуга параллели под средней широтой  $18^\circ$ : крайние точки параллели Бомбей и Vizagapatam имеют разность долгот  $10^\circ 28'$ ;

4) дуга параллели под широтой  $24^\circ$ , пересекающая всю Индию, с амплитудой по долготе более  $20^\circ$ ; конечные точки дуги — Kuttashee и Калькутта\*.

Существенно указать, что геодезические работы в Индии велись англичанами в порядке государственной триангуляции. Триангуляция I класса производилась рядами, расположенными по меридианам и по параллелям; эти ряды образовались отчасти из простых цепей треугольников, а большей частью из двойных цепей треугольников (иногда из примыкающих друг к другу одной стороной центральных систем).

К 1880 г. длина первоклассных рядов в Индии уже составляла общее протяжение до 20 000 км; из них около 6000 км вошли в упомянутые выше градусные измерения; средний размер стороны треугольника в Индии 45 км.

Довольно скоро в своих работах Эверест пришел к обнаружению значительных уклонений отвесной линии на астрономических пунктах меридианной дуги, значащейся в нашем перечне под номером первым. Поэтому Эверест предпринял ряд вычислений по учету влияния топографического рельефа на направление отвесной линии в этих пунктах. Поэтому же пять астрономических пунктов, находящихся в южной половине первой меридианной дуги, были выведены каждый, как сложная станция, именно следующим образом: если определяемый пункт есть *C*, то на смежных с ним и окружающих его пунктах триангуляции *A*, *B*, *D*, *E* определялись тщательно широты, кроме определения широты на пункте градусного измерения *C*. Затем астрономические широты *A*, *B*, *D*, *E* переносились геодезически на *C*, и широта этого пункта получалась как среднее из пяти ее значений, из которых четыре были геодезически перенесенными значениями астрономических широт пунктов *A*, *B*, *E*, *D*. Таким образом, до известной степени погашалось влияние чисто случайных притяжений на направление отвесной линии в *C*. Этот прием, несомненно, заслуживает внимания, в особенности для Европейской части СССР, где очень часто при отсутствии топографического рельефа встречаются чисто случайные уклонения отвесной линии от  $5''$  до  $10''$ , и, следовательно, в зависимости от совершенно произвольного выбора данного триангуляционного пункта за астрономический, амплитуда меридианной дуги может искажаться значительным образом.

В 1880 г. знаменитый английский геодезист Кларк вывел размеры земного эллипсоида из следующих градусных измерений:

1) западно-европейского от Saxaford до Форментеры с амплитудой около  $22^\circ$ \*\*;

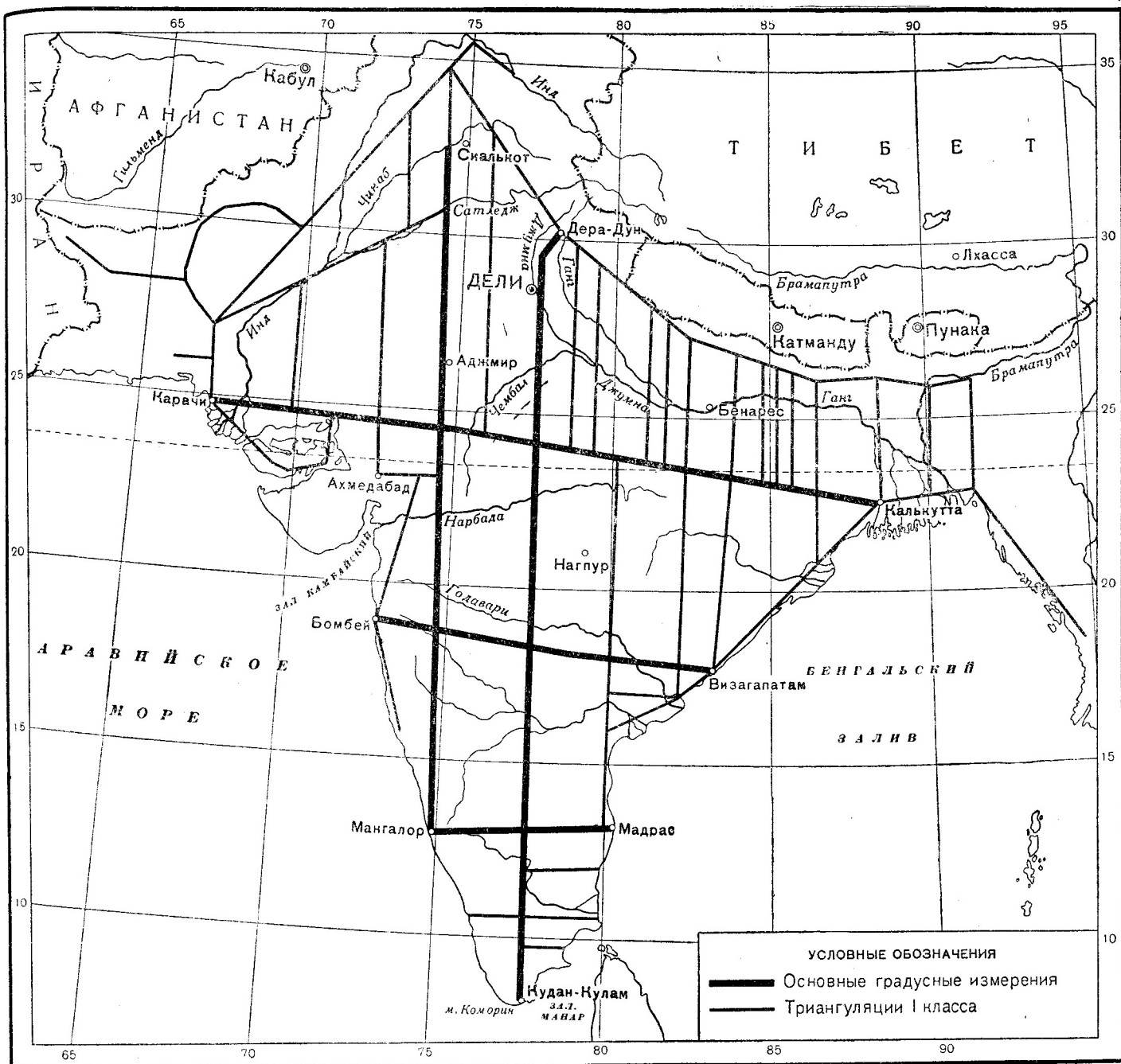
2) русского—от Фугленеса до Старо-Некрасовки (амплитуда  $25^\circ 20'$ );

3) главного индийского по меридиану мыса Коморина от Kudankulam до Kaliaua с амплитудой  $21^\circ 18'$ , отбрасывая участок от Kaliaua до Banog, находящегося вблизи Гималаев и имеющего уклонение отвесной линии до  $30''$ ;

4) долготного полигона из семи пунктов: Mangalore, Бомбей, Hidrabad, Vizagapatam, Мадрас, Bangalore, Bellary, образованного комбинацией дуг параллели под широтой  $18^\circ$  и дуги по параллели между Mangalore и Мадрасом, с перемычками между ними;

\* Завершение геодезических работ по этой дуге относится к 1906—1910 гг.

\*\* Тогда Южная часть этой дуги в  $5^\circ$  до Алжира не была еще закончена.





5) индийской дуги по 75-му меридиану от Shahpur ( $\varphi = 32^{\circ}1'$ ) до Walwari ( $\varphi = 20^{\circ}44'$ ) с амплитудой  $11^{\circ}17'$ ;

6) перуанской дуги Буге в  $3^{\circ}7'$ ;

7) меридианной дуги в Южной Африке с амплитудой  $5^{\circ}$ , между южными широтами  $29^{\circ}44'$  и  $34^{\circ}21'$ , измеренной Маклиром в 1842—1852 гг. от мыса Доброй Надежды к северу;

8) измерений Бесселя и Гаусса.

Кларк из этого большого материала получил

$$a = 6\,378\,249 \text{ м; сжатие} = 1 : 293,5;$$

средняя ошибка большой полуоси  $\pm 75 \text{ м}$ ; средняя ошибка числа в знаменателе сжатия  $\pm 1,1$ .

Индийские дуги, изображенные на черт. 147, по своему географическому положению обуславливают большой вес вывода из них малой полуоси эллипсоида; русская дуга и англо-французская дают с большим весом большую полуось. Таким образом, выведенные Кларком размеры земного эллипсоида должно было бы считать вполне надежными и заслуживающими несравненно большего доверия, чем размеры по Бесселю. Однако влияние областных и общих волн геоида на результаты градусных измерений в Индии приводит к сомнительности вывода сжатия Кларком.

Заметим, что Кларк вывел еще размеры Земли, принимая ее идеальную фигуру за трехосный эллипсоид; меридиан наибольшего диаметра получился с западной долготой  $8^{\circ}15'$ , меридиан наименьшего диаметра определился восточной долготой  $81^{\circ}45'$ ; разность экваториальных полуосей получилась около 450 м. Кларк замечает, что полученное положение экваториальных осей очень согласуется с расположением материков и океанов.

Исследования, начатые еще Эверестом, по определению влияния внешних притягивающих масс на уклонения отвесной линии в различных пунктах индийских градусных измерений, определенно показали, что вычисленные на основании такого учета только внешних притягивающих масс (Гималайского хребта, среднего Индийского плоскогорья, глубин Индийского океана) уклонения отвесных линий вообще оказываются значительно *большими наблюдаемых\** (т. е. полученных астрономо-геодезическим путем). Эти факты дали основание знаменитому английскому ученому Эри выступить в 1855 г. с своей гипотезой погружения нижних частей плоскогорий и горных хребтов в магму или существования у плоскогорий и горных хребтов выступов, входящих во внутреннюю жидкую массу. Гипотеза Эри в последнее время привлекает внимание ученых.

Одновременно англичанин Пратт, на основании своих исследований астрономо-геодезических результатов в Индии с присоединением сюда результатов определений силы тяжести в Индии, выдвинул свою гипотезу «изостатической компенсации» (статьи Пратта относятся к 1855, 1858 гг.), которая впоследствии нашла себе ярых приверженцев в среде американских геодезистов, получила широкое применение при выводе размеров земного эллипсоида из результатов обширных астрономо-геодезических работ в США и применена в последние годы европейскими учеными к обработке исполненных градусных измерений в Европе.

\* Так, на станция Kalia на наблюдаемое уклонение около  $5''$ , а вычисленное меридианное уклонение  $28''$ .

Итак, сделанный обзор английских работ в Индии до последних годов XIX столетия разворачивает перед нами картину умело поставленной огромной геодезической работы, оказавшей значительное влияние на дальнейшее развитие геодезической науки и техники.

В завершение отметим еще, что проложенное в Индии значительное число триангуляционных рядов I класса сопровождалось, конечно, образованием большого числа триангуляционных полигонов; уравнивание этой системы полигонов являлось сложнейшей задачей, которая, однако, с успехом была проведена под руководством Уокера (Walker); англичане явились здесь новаторами; характерно, что полигональные уравнивания не привели к искажениям углов, выходящим за пределы точности их измерения.

#### § 100. Краткий очерк градусных измерений во второй половине XIX и в начале XX столетия

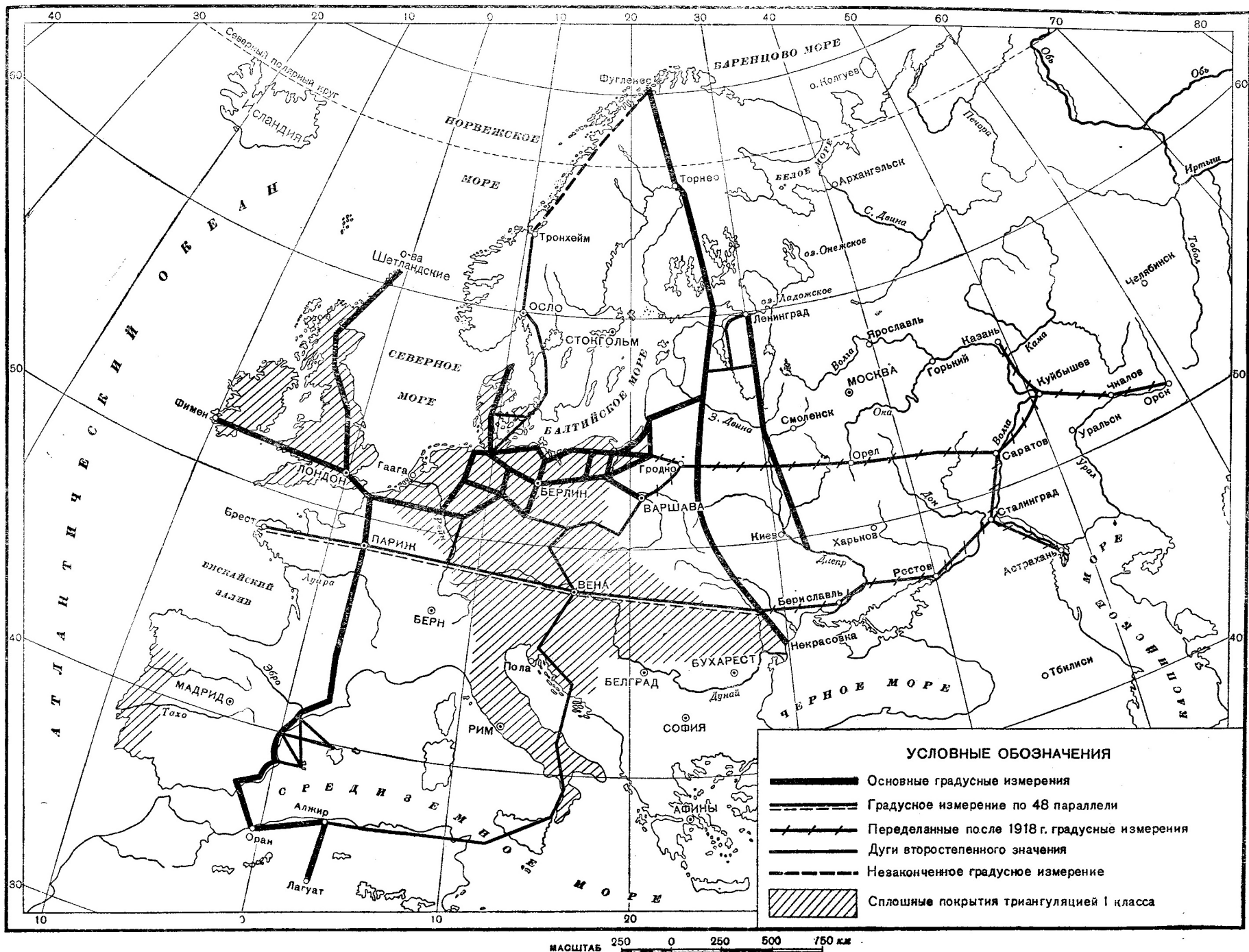
Существенно отметить, что к 70-м годам прошлого столетия уже были выработаны методы и приборы телеграфного определения долгот, причем первые определения долгот по телеграфу были исполнены Геодезической службой Северо-Американских Соединенных Штатов. «Долготный полигон» в Индии, упоминавшийся в § 99, был образован в 70-х годах XIX столетия и дал ошибки разностей долгот, выражающиеся вообще в сотых долях секунды времени.

Этот новый метод определения долгот, конечно, выдвинул мысль проведения градусных измерений по параллелям.

Учреждение, начиная с 1815—1820 гг., во всех государствах Европы военных топографо-геодезических управлений имело своим последствием исполнение этими организациями к середине XIX столетия обширных точных триангуляций, в которых были цепи, распространявшиеся вдоль параллелей. Это явилось существенным вторым обстоятельством для осуществления градусных измерений по параллелям. Мысль исполнения двух больших градусных измерений по параллелям  $47\frac{1}{2}^\circ$  и  $52^\circ$  принадлежит В. Струве: он ее высказал в 1857 г., причем руководился соображением, что многие триангуляционные ряды, проложенные в Западной Европе и в России для обоснования государственных съемок, расположились вдоль названных параллелей. Русская часть дуги параллели  $47\frac{1}{2}^\circ$ , начинаясь вблизи Кишинева от бока дуги Струве (Бологан — Перессичино), проходит через Бериславль, Александровск, Новочеркасск до Астрахани (исрт. 148), имея протяжение по долготе около  $20^\circ$ ; триангуляции по этой дуге начали исполняться под руководством Вронченко с 1848 г. и закончились под руководством Васильева к 1858 г.; астрономические работы на пунктах Кишинев, Николаев, Александровск, Ростов и Астрахань были, однако, осуществлены только в 1885—1890 гг.

Всех треугольников было образовано 179 при трех базах: Бериславльском, удаленном, однако, от основного ряда 13 соединительными треугольниками, Новочеркасском (близ Грушевки) и Астраханском. Хотя средняя ошибка измеренного угла оценивается всего в  $\pm 0'',9$ , но несогласия в выходных сторонах достигают 1 : 10 000 и даже 1 : 7000, несогласия в азимутах астрономических и геодезических достигают  $22''$  и не соответствуют несогласиям в астрономических и геодезических долготах.

По первоначальному проекту, дуга параллели  $47—48^\circ$  должна была начаться в Бресте во Франции, пройти через Париж, пересечь Эльзас-Лотарингию на широте Страсбурга, пройти через Баварию (Мюнхен),



Вюртемберг и Австрию, захватывая район Вены, пересечь Румынию и закончиться вблизи Кишинева в России.

Однако уже в 1861 г., ввиду отсутствия точных триангуляций на значительном протяжении  $47\frac{1}{2}^\circ$  параллели в пределах Западной Европы, этот проект был поставлен в дальнюю очередь, а в первую очередь было выдвинуто исполнение градусного измерения по 52-й параллели.

Мы все-таки сперва закончим обзор работ по  $47\frac{1}{2}^\circ$  параллели.

С 1818 по 1829 г. были исполнены геодезические и частью астрономические работы французскими геодезистами от Бреста через Париж до Страсбурга; однако эти работы были исполнены теми старыми методами, о которых упоминалось уже выше при описании измерения Деламба; поэтому по существу они подлежали переделке. В это же время, примерно в 1810—1830 гг., произведена теми же методами триангуляция в Баварии. К Баварской триангуляции примкнула, простираясь к востоку, триангуляция Вюртемберга, исполненная в конце 20-х и в начале 30-х годов. Все эти триангуляции подлежали исполнению заново, если к ним предъявить требования градусного измерения. Однако в соответствующих государствах, покрытых уже сплошной топографической съемкой, для которой указанные старые триангуляции доставили превосходную основу, не было непосредственного интереса в затрате денег на прокладку новых точных рядов триангуляции I класса. Поэтому, несмотря на признание в 1864 г. Центральным бюро Европейского градусного измерения необходимости заменить старые триангуляции Франции, Баварии, Вюртемберга, расположенные вдоль дуги 48-й параллели, новыми, дело это исполнением затянулось на десятки лет.

С 1862 г. в Австрии начинается построение основных рядов государственной триангуляции. К 80-м годам непрерывный ряд австрийских первоклассных треугольников простирается на восток от Вены до Румынии, а ответвление этого ряда на Краков соединяется в районе Черновиц с русскими триангуляциями в Подолии. В 1905 и 1906 гг. Румыния исполняет триангуляцию I класса и выполняет соединения своего ряда по  $47\frac{1}{2}^\circ$  параллели с австрийской триангуляцией и с русской в Бессарабии, причем необходимые работы по этому соединению с русской стороны были выполнены Корпусом военных топографов в 1904 г.

К западу от Вены работы Австрии достигли Тироля к началу 90-х годов прошлого столетия и в 1904—1908 гг. австрийцами было исполнено соединение триангуляции в Тироле с Баварскими треугольниками на 48-й параллели. В Вюртемберге новые работы были исполнены в 1877—1889 гг., а в Баварии с 1904 г. приступили к пересоставлению на протяжении 200 км старого основного ряда, располагающегося по 48-й параллели.

В 70-х же годах Прусское управление государственной съемки выполнило новые триангуляции по Рейну, а в 1899 г. было произведено соединение новых триангуляций в Эльзас-Лотарингии с триангуляциями во Франции. Новые триангуляции по французской части дуги, начатые только в девятисотых годах, закончены к 1939 г.

Астрономические работы по параллели 47—48° также очень растянулись во времени: Астрахань определялась в 1855 г. Смысловым, а затем Миончинским и Полянским в 1887 г.; остальные русские пункты определялись с 1883 по 1890 г.; в 900-х годах определены пункты в Румынии; в 1875—1913 гг. исполнены астрономические работы на австрийской части дуги; в 1912 г. — в Баварии; телеграфные определения долгот во Франции относятся к 1862—1902 гг.

В 1862 г. образовалось геодезическое объединение, названное сперва «Средне-Европейское градусное измерение», а в скором времени — «Европейское градусное измерение». В 1875 г. эта организация приобрела международное значение и переименовалась в «Международное измерение Земли». Это геодезическое объединение собирало почти ежегодно конференции геодезистов и имело два органа — исполнительный, в лице Центрального бюро, и научный, в лице Геодезического института в Потсдаме. Обработка европейских градусных измерений перешла к Геодезическому институту и выполнялась при значительном личном участии и под руководством Гельмерта. К 70-м годам XIX столетия достаточно созрела мысль о необходимости градусные измерения сопровождать изучением распределения отклонений отвесных линий; эта мысль реально вылилась впоследствии в требование исполнять высокоточные определения широты, долготы и азимута (астрономическим путем) на значительном числе геодезических пунктов градусного измерения. Чем более развивалась телеграфная сеть в Западной Европе, тем легче становилось определение на сравнительно значительном числе геодезических пунктов астрономической долготы.

Соответственно этим взглядам, на ряде новых пунктов западно-европейских триангуляций, вошедших в градусные измерения, дополнительно стали определять астрономические широты и азимуты, а где позволяла телеграфная сеть, — то и астрономические долготы.

Гельмерт дал строгую теорию использования лапласовых пунктов в целях уравнивания больших триангуляций; он же окончательно разработал уравнения, выражающие отклонения отвесных линий в функции: слагающих отклонения отвесных линий в некоторой, принятой за исходную, точке; искомым поправкам размеров принятого эллипсоида; погрешностей элементов, полученных из геодезических и астрономических работ. Именно эти уравнения, составленные для астрономических пунктов градусных измерений, стал, по предложению Гельмерта, публиковать Прусский геодезический институт, под названием «*Lotabweichungen*», давая этим строгий материал для установления и наиболее соответствующего данному обширному району эллипсоида, и системы отклонений отвесной линии\*. При этом каждая геодезическая линия между двумя астрономическими пунктами используется в целях определения такого эллипсоида, — независимо от того, направлена она по меридиану или по параллели, или косо по отношению к меридиану и параллели. Идея градусного измерения *по линии* заменилась мыслью захвата вдоль меридиана, или вдоль параллели, или вдоль произвольного косо направления *широкой полосы или значительной площади*, покрываемой или цепями треугольников, или сплошной триангуляцией, — с определением на пунктах триангуляции значительного количества астрономических пунктов и с введением впоследствии в обработку системы полигонов (черт. 148), образованных геодезическими линиями между этими астрономическими пунктами. Подход к замене градусных измерений *по линиям* исследованиями распределения отклонений отвесных линий на *значительных площадях* является характерной чертой нового направления, взятого уже с 80-х годов XIX столетия, в астрономо-геодезических работах в Европе.

Обращаясь снова к 52-й параллели, отметим прежде всего, что в 1862 г. начались точные триангуляции в Бельгии и в скором времени было исполнено соединение бельгийских триангуляций с английскими.

\* Относительно нормалей к этому эллипсоиду.

с одной стороны, и с германскими — с другой стороны; с 1865 г. по 1877 г. от Бельгии до Восточной Пруссии, именно кончая Позен-Шлезвигом, были проложены новые точные триангуляции Прусским управлением съемок; триангуляции от восточной границы Позен-Шлезвига до границы с Россией и соединение с русскими триангуляциями были исполнены еще в 1853—1854 гг. и остались без переделки до начала 900-х годов. В Западной Европе дуга 52-й параллели начиналась на юго-западном берегу Ирландии пунктом Фимен (Feaghmain, черт. 148), шла далее через Хаверфордвест и Гринвич в Англии, вступала в Бельгию в Ньюпорте, пересекала Гессен, направлялась далее на Берлин, отсюда — через Восточную Пруссию на Ченстохов и Варшаву и затем шла в России через Гродно, Бобруйск, Орел, Липецк, Саратов, Самару (ныне Куйбышев), Оренбург (ныне Чкалов) до Орска. Общее протяжение дуги по долготе около  $69^\circ$ , в пределах бывшей России находится  $39^\circ 24'$ . Исполнение триангуляций по русской части дуги относится, главным образом, к 1861—1870 гг., хотя триангуляции в Польше были произведены значительно раньше — в 40-х годах XIX столетия и даже частью в период 1827—1832 гг. Всего в пределах бывшей России образовалось 364 треугольника. В Полесье пришлось строить высокие сигналы. Русскими геодезистами на протяжении дуги от Ченстохова до Орска было измерено семь базисов: Ченстоховский, Варшавский, Рогачевский, Елецкий, Вольский, Бузулукский и Орский.

Западно-европейские геодезические работы по 52-й параллели дают результаты хорошей точности: несогласия в выходных сторонах, вычисляемых от разных базисов, нигде не превышают 1 : 60 000. Наоборот, в русской части дуги указанные несогласия достигают 1 : 5000. Астрономические работы по 52-й параллели заняли вообще период с 1863 по 1912 г.; определения долгот по всей дуге были выполнены сперва русскими геодезистами в 1864—1865 гг. и в 1875—1888 гг.; именно ими были определены долготы: Хаверфордвеста, Гринвича, Ньюпорта, Бонна, Лейпцига, Бреславля, Ченстохова, Варшавы, Гродно, Бобруйска, Орла, Липецка, Саратова, Самары (ныне Куйбышев), Оренбурга (ныне Чкалов) и Орска.

Указанные выше новые требования к постановке астрономо-геодезических работ побудили Прусский геодезический институт исполнить астрономические наблюдения еще на целом ряде геодезических пунктов, вошедших в измерение 52-й параллели в пределах Германии; стремление же получить ряд долготных полигонов и значительное повышение точности астрономического определения долготы, достигнутое в 90-х годах XIX столетия, привели к неоднократным переопределениям долгот, причем такому переопределению подверглись и пункты, определенные первоначально в Бельгии и в Германии в 1864 г. Эти астрономические работы Прусского геодезического института относятся к 1871—1911 гг.; как известно, ошибки в определении разности долгот в работах Прусского геодезического института стали выражаться только тысячными долями секунды времени.

По вычислениям Гельмерта (1906 г.) из русской части 48-й параллели при сжатии по Бесселю (1 : 299,15) большая полуось  $a = 6\,377\,350\text{ м} \pm 650\text{ м}$ .

Из исследований уклонений отвесной линии по 52-й параллели и в районах к ней примыкающих триангуляций получается, что наиболее подходящим является эллипсоид со сжатием 1 : 298,3 и большой полуось  $a = 6\,378\,000\text{ м}$ .

Если принять в выводе Гельмерта из русской части 48-й параллели сжатие по Кларку, то для  $a$  получилось бы еще меньшее значение.

Хотя вес выводов из русской части дуги 48-й параллели очень велик, но все-таки только что приведенные выводы дают некоторое основание заключить, что для средней Европы геоид представляется наилучше эллипсоидом со сжатием около  $1 : 300$ , т. е. со сжатием, близким к данному Бесселем, а не Кларком.

Старые первоклассные работы Военно-топографического управления доставили в России еще меридиональный ряд от Орла до Харькова и меридиональный ряд от Ульяновска до Астрахани; другими словами, триангуляции — вдоль параллели  $47\frac{1}{2}^\circ$  и  $52^\circ$  оказались связанными тремя меридианными цепями: по дуге Струве, по дуге от Орла до Харькова и Поволжским измерением.

В 1893 г. проф. Жданов из двух русских дуг параллелей по  $47\frac{1}{2}^\circ$  и  $52^\circ$  и заключенных между ними трех только что указанных меридианных дуг вывел размеры эллипсоида, наиболее подходящего для средней и южной части Европейской России. Ждановым получено

$$a = 6\,377\,717 \text{ м} \pm 300 \text{ м}, \text{ сжатие} = 1 : 299 \pm 6,2.$$

Вес этого вывода, конечно, очень мал.

## § 101. О градусных измерениях в Америке и Африке и других странах

Триангуляции в Америке сперва предлагались по береговым линиям с целями гидрографическими. Но уже в 70-х годах прошлого столетия выявился общий план геодезических работ по всей территории США, предусматривавший как научные, так и практические цели.

С 1833 по 1898 г. были исполнены в США триангуляции вдоль Атлантического океана по кривой дуге — от Мексиканского залива, именно, от Нового Орлеана ( $\varphi = 29^\circ 57'$ ,  $L = 90^\circ 4'$ ), через штаты Луизиана, Миссисипи, Каролина, Алабама, Виргиния, Пенсильвания до границы с Канадой в штате Мэн, до пункта Calais на берегу Атлантического океана на широте  $45^\circ 11'$  и на долготе  $67^\circ 17'$ . Следовательно, протяжение дуги по широте —  $15\frac{1}{4}^\circ$ , а по долготе —  $22\frac{3}{4}^\circ$ ; общая длина геодезической линии, соединяющей конечные пункты дуги, равна 2612 км. Руководителями работ были: первый по времени управляющий Береговой и геодезической съемкой в США Хасслер, затем Ваче и, наконец, Титтман. На протяжении дуги были определены: широты 71 пункта, долготы 17 пунктов и азимуты на 55 пунктах. Шесть базисов на протяжении этой дуги измерялись жезловыми приборами, предложенными Хасслером и Ваче. Горизонтальные углы в триангуляции измерялись сперва теодолитами с диаметром круга в 50,8 см; круг отсчитывался тремя микроскоп-микрометрами; труба теодолита имела объектив в 7,5 см. С 90-х годов американцы перешли к теодолиту с диаметром круга в 12 дюймов или 30 см.

Следующими большими дугами, исполненными в США, являются:

а) Трансконтинентальная дуга параллели под средней широтой  $39^\circ$ , измеренная с 1871 по 1898 г. от Point Arena на берегу Тихого океана в Калифорнии до мыса Мау на Атлантическом океане, между западными долготами  $74^\circ 55'$  и  $123^\circ 41'$ ; амплитуда дуги по долготе  $48^\circ 46'$ , а длина ее — 4244 км. Огромное предприятие по измерению такой грандиозной дуги сопровождалось преодолением геодезистами значительных трудностей: в западной части дуги при пере-

ходе через Сьерра-Неваду и через Скалистые горы геодезические пункты иногда располагались на высоте 3000—3970 м над уровнем моря; весь этот район безлюден и бесплоден; следующий за ним к востоку район характеризуется слабым рельефом и огромными лесами, вынуждавшими строить триангуляционные знаки высотой до 85 м; постоянные туманы в Калифорнии, поднимающиеся до высоты 2400 м при высотах триангуляционных пунктов над уровнем океана около 2000 м, сводили в этом районе годовой период наблюдений к 60 рабочим дням. Стороны треугольников в западной части дуги достигали иногда длины в 160 и более километров, а одна сторона в Сьерра-Невада имеет длину 307 км. При такой длине сторон в этой части дуги случалось, что сигналы, посланные гелиотропом с западной станции, принимались на восточной станции спустя несколько минут после захода Солнца.

Измерения горизонтальных углов в этой «центральной» трансконтинентальной дуге выполнялись сперва, до 90-х годов прошлого века, теодолитами с диаметром лимба 50,8 см (объектив трубы 7,5 см), способом круговых приемов: стороны длиной менее 160 км наблюдались 23 приемами; более длинные стороны наблюдались вдвое и даже втрое большим числом приемов; с 90-х годов входят в употребление 12-дюймовый теодолит с тремя микроскоп-микрометрами и измерение углов 16 приемами.

На протяжении дуги было измерено 10 базисов и определены: широты 109 пунктов, долготы 37 пунктов и азимуты на 73 пунктах.

б) Дуга по 98-му меридиану от Мексиканского залива до границы с Канадой, между параллелями  $\varphi = 26^\circ$  и  $\varphi = 49^\circ$ , т. е. с амплитудой в  $23^\circ$ . Геодезические работы по этой дуге выполнены в 1901—1907 гг.; при измерении базисов применялись: 1) прибор Eimbeck's'a или так называемый Duplexapparat оригинального устройства, обеспечивающий при скорости измерения в 250 м в час точность около 1 : 500 000; 2) инварные проволоки длиной в 100 м при натягивании динамометрами и при измерении по кольям; 3) инварные ленты длиной в 50 м, натягиваемые динамометрами; измерение ведется по кольям, на верхний срез кола набивается медная полоска, на которой отмечается конец откладываемой ленты. Существенно отметить, что, начиная с 1900 г., в США в точных триангуляциях входят в употребление прибор и метод Едерина, которые в скором времени в этом государстве совершенно вытесняют все другие методы измерения базисов; однако американские геодезисты применяют вместо проволоки круглого сечения инварную ленточку длиной притом не в 24 м, а в 50 м; натягивание выполняется всегда динамометрами, и штативы с целиками заменяются деревянными столбиками с марками.

С 1903 г. правительство Мексики начало геодезические работы по 98-му меридиану в пределах этого государства; в настоящее время мексиканская часть этой дуги закончена и, следовательно, получилась сплошная дуга меридиана от широты  $+16^\circ$  до широты  $+49^\circ$ . Другими словами, работы США и Мексики дали величайшую меридианную дугу в  $33^\circ$ .

в) Дуга меридионального направления по берегу Тихого океана от границы с Канадой до границы с Мексикой (под широтой  $39^\circ$ ); геодезическая часть закончена в 1907 г. Геодезическая служба Канады к 1924 г. исполнила работы по берегу Тихого океана от границы с США под широтой  $49^\circ$  до параллели  $53^\circ$ . В настоящее время, по имеющимся сведениям, геодезические работы в Канаде исполнены на всем протяжении берега Тихого океана, т. е. до границы на севере с Аляской ( $\varphi = 54\frac{1}{2}^\circ$ ) и до соединения с триангуляциями,



пролагаемыми США в Аляске; первоклассные же триангуляции в Аляске американские геодезисты уже довели по берегу Тихого океана от границы с Канадой ( $\varphi = 54\frac{1}{2}^\circ$ ) до параллели  $60^\circ$ . Таким образом, в настоящее время сплошные геодезические работы покрыли береговую полосу Тихого океана от  $\varphi = 60^\circ$  до  $\varphi = 39^\circ$ . В порядке второклассной триангуляции это измерение продолжено по южному берегу Аляски еще более, чем на 1000 км — вплоть до Алеутских островов.

г) Северная трансконтинентальная дуга, которая образовалась отчасти из триангуляций США по граничащей с Канадой параллели  $49^\circ$  и в районе Верхнего Озера, а в существенной части из триангуляций Канады по параллели  $49^\circ$  и к востоку от района Великих Озер. Остальные работы в Северной Америке показаны на карте (черт. 149).

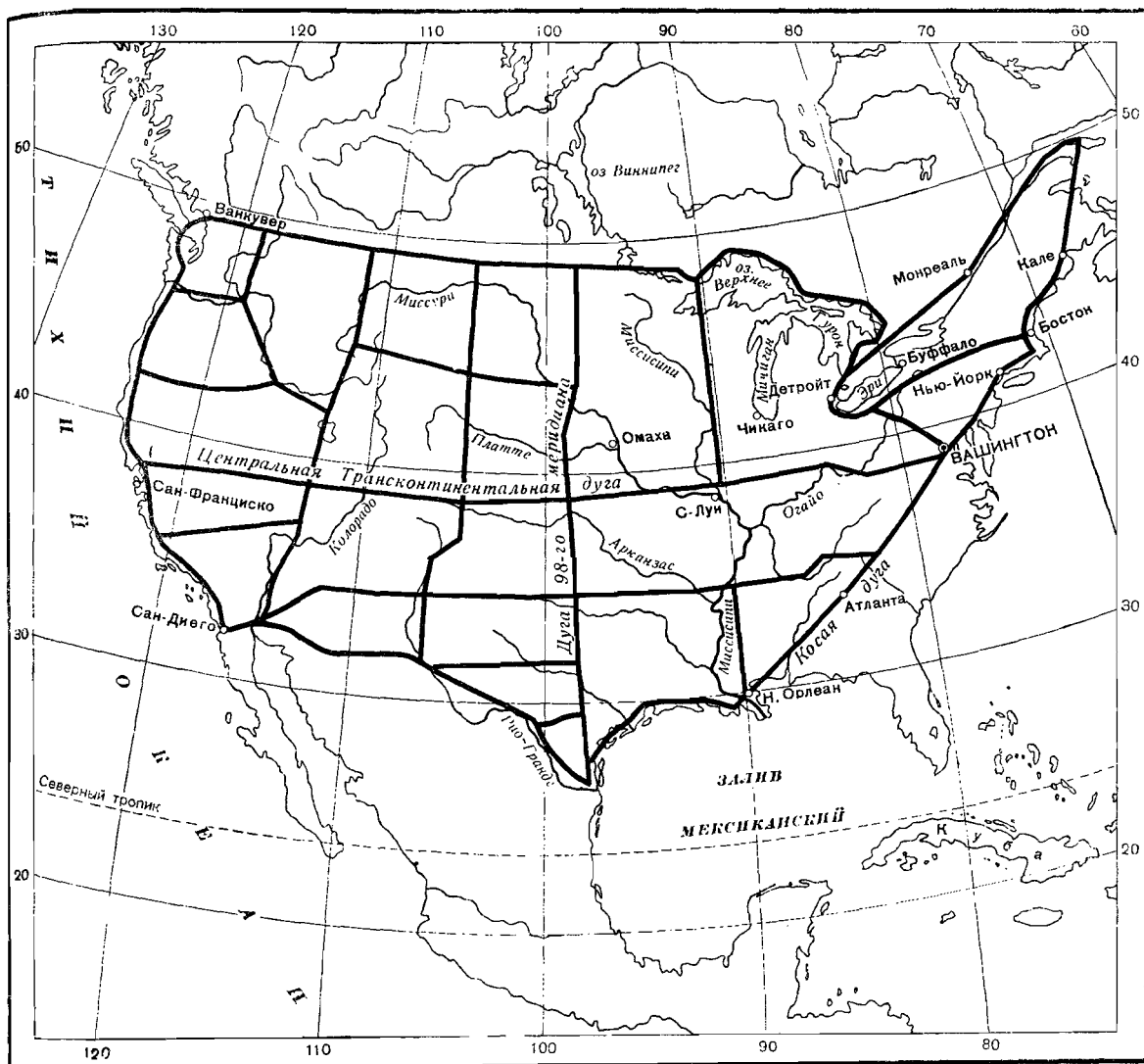
Теперь важно отметить, что уже с 90-х годов прошлого столетия американские геодезисты стали стремиться к значительной густоте астрономических пунктов в своих первоклассных триангуляциях; на многих триангуляционных пунктах они исполнили определения широт и азимутов, а затем повели и ведут обширные работы по точному определению долгот на пунктах триангуляции. Следует отметить введенный американцами «метод площадей» и применение к обработке градусных измерений теории изостазии, о чем уже достаточно сказано в § 95 и 96.

В Африке англичане выполнили большие работы от мыса Доброй Надежды до Каира. Эти работы начаты в 1883 г. от мыса Доброй Надежды; к 1905 г. были закончены триангуляции от южной широты  $34^\circ$  (мыс Доброй Надежды) до южной широты  $28^\circ$ , причем эта дуга падает между долготами  $+18^\circ$  и  $+30^\circ$ . В дальнейшем работы подвигались уже по меридиану  $L = 30^\circ$  и к 1909 г. были доведены до озера Танганьика, т. е. приблизительно до южной широты  $-9^\circ$ ; следовательно, к этому году в Африке получилась непрерывная дуга, имеющая амплитуду по широте в  $25^\circ$ . К 1936 г. на том же меридиане  $L = 30^\circ$  была закончена часть дуги от Каира ( $\varphi = +30^\circ$ ) до северной широты  $16^\circ$  и, кроме того, измерена часть этого меридиана между широтами  $+1,11$  и  $-9^\circ$  (черт. 150). Таким образом, из всей грандиозной дуги с амплитудой в  $64^\circ$  закончено  $49^\circ$  (к 1936 г.).

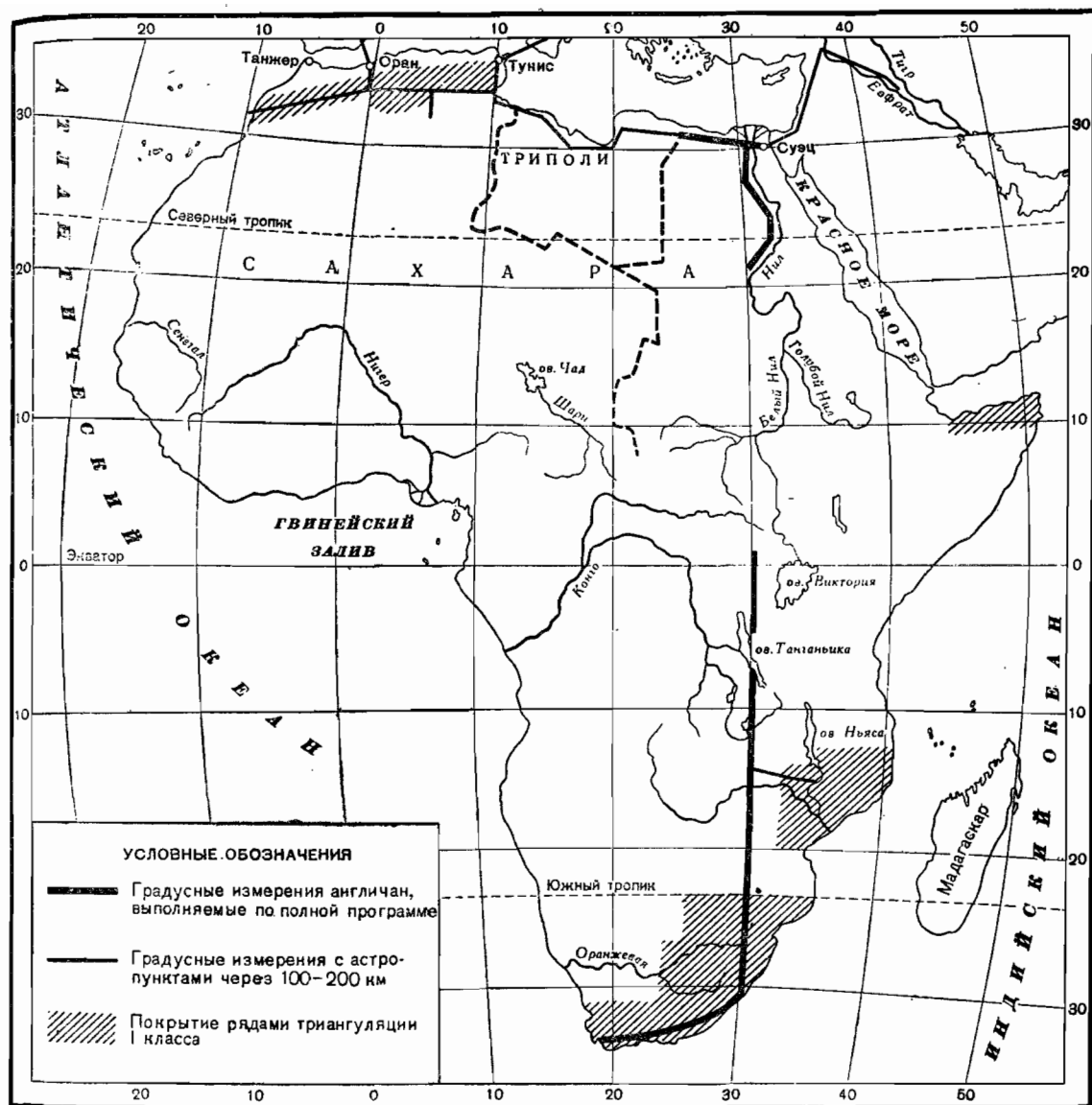
В 1899 г. Парижская, Петербургская и Стокгольмская Академии Наук решили вновь произвести градусные измерения близ экватора и вблизи северного полюса. С 1900 по 1902 г. организованные русским и шведским правительствами две экспедиции работали на островах Шпицбергена; шведско-русская дуга, проложенная ими, простирается от  $\varphi = 76^\circ,7$  до  $\varphi = 81^\circ,7$ . Из русских геодезистов в этой работе выделился успешною своего труда пулковский астроном А. С. Васильев.

В соответствии же с приведенным выше решением трех академий, французское правительство послало геодезическую экспедицию в Перу, которая работала с 1899 по 1906 г. и измерила дугу меридиана от северной широты  $+1^\circ 50'$  до южной широты  $-5^\circ 30'$ , пройдя ту же долину Квито, которую покрыл цепью треугольников Буге в 1735—1742 гг.

Как видели в предыдущих параграфах, такие малые и оторванные от других дуги, как Шпицбергенская и новая экваториальная французская (в Перу), ничего не дают в вопросе об общей фигуре Земли; между тем такие экспедиции стоят очень дорого. Отметим еще, что первая четверть настоящего столетия ознаменовалась началом и развитием



Черт. 149



Черт. 150

астрономо-геодезических работ в Японии, в Сиаме, в африканских владениях Франции, в Австралии.

## § 102. Развитие астрономо-геодезических работ в XX столетии

Мы уже отметили значительную работу англичан в Африке по меридиану Каира, выполненную до первой империалистической войны. Примерно к 1905 г. в Японии была закончена сплошная триангуляция I класса, охватившая все японские острова. В 1906 г. в России Корпус военных топографов начал строить новую триангуляцию I класса и к 1914 г. закончил главную часть дуги Пулково — Николаев, надлежащее астрономическое оснащение которой, однако, уже завершалось после 1920 г. В Германии до 1914 г. были выполнены некоторые дополнительные астрономические работы по астрономо-геодезической сети, примыкающей к дуге 52-й параллели. Во Франции также до 1910 г. были выполнены небольшие дополнительные астрономические работы по дуге Западно-Европейского меридиана. Но в общем же в период 1900—1914 гг. наблюдалось затишье как в развитии основных триангуляций, так и в образовании новых градусных измерений — исключение составляла Россия, приступившая, наконец, к осуществлению большого проекта новой триангуляции I класса, и Англия по своей работе в Африке.

После 1918 г. замечается оживление геодезической деятельности в Западной Европе, в колониях Англии и Франции, в Южной Америке. С 1920 г. начинается заметное усиление производственной геодезической деятельности по США, которое достигает своего максимума в период 1931—1934 гг. Но, конечно, наиболее важным фактом является развитие советской геодезии, начиная с 1923—1924 гг.

Но прежде чем говорить о развитии геодезических работ после 1918 г. в разных государствах, отметим сперва возникновение в 1919 г. нового международного геодезического объединения — «Международной геодезической ассоциации». Прежнее «Международное измерение Земли» по существу распалось осенью 1914 г. с возникновением европейской войны. В октябре 1918 г. образовался Международный совет научных изысканий (*Conseil international de recherches scientifiques*), переименованный впоследствии в Международный совет научных союзов. В числе 12 научных союзов, возглавляемых и объединяемых Международным советом научных союзов, состоит Международный геодезический и геофизический союз, состоящий в свою очередь из Международной геодезической ассоциации и ассоциаций: сейсмологии, метеорологии, магнетизма и земного электричества, физической океанографии и вулканологии. Международная геодезическая ассоциация собирает через каждые три года международные геодезические конференции, которые уже проведены: в 1922 г. в Риме, в 1924 г. в Мадриде, в 1927 г. в Праге, в 1930 г. в Стокгольме, в 1933 г. в Лиссабоне, в 1936 г. в Эдинбурге, в 1939 г. в Вашингтоне. Общие задачи Международной геодезической ассоциации формулируются как содействие и участие в исследованиях по определениям фигуры и размеров Земли, как координирование научных исследований в области астрономо-геодезии, требующих участия нескольких стран, с научным обсуждением изысканий в области сравнения мер и инструментов, применяемых в разных странах; ассоциация выдвигает также научные задачи и исследования, требующие участия нескольких стран.

Для непрерывного изучения ряда вопросов и для сбора, систематизации и разработки материалов организованы при Бюро ассоциации

комиссии: по базисам и триангуляциям, по точному нивелированию, по геодезической астрономии, по отклонениям отвесных линий, по измерениям силы тяжести, по изостазии, по изменениям широты, по проекциям, по приливным явлениям в земной коре. Уже собраны значительные материалы, характеризующие постановку, точность и развитие основных астрономо-геодезических и нивелирных работ во многих странах; отработаны ценные «рекомендации» по наблюдениям в триангуляции и по измерениям базисов; получены сводки очень больших материалов по отклонениям отвесных линий и по результатам гравиметрических работ; теоретические разработки, имеющие определенный интерес и значение, выполняются по изостазии и по проекциям.

Переходим теперь к обзору работ, выполненных в разных государствах после 1918 г.

В Эстонии, Латвии и Литве проложены новые триангуляции I класса, причем в цепях, простирающихся вдоль побережья Балтийского моря, в Эстонии выполнены астрономические определения широты и долготы на каждом триангуляционном пункте, в Литве — на трех четвертях пунктов; в Латвии астрономические работы в 1937 г. находились еще в стадии выполнения. По завершении астрономических работ в Латвии получится на восточных берегах Балтийского моря градусное измерение между параллелями  $64^\circ$  и  $55^\circ$ , с очень значительной густотой астрономических пунктов (черт. 151).

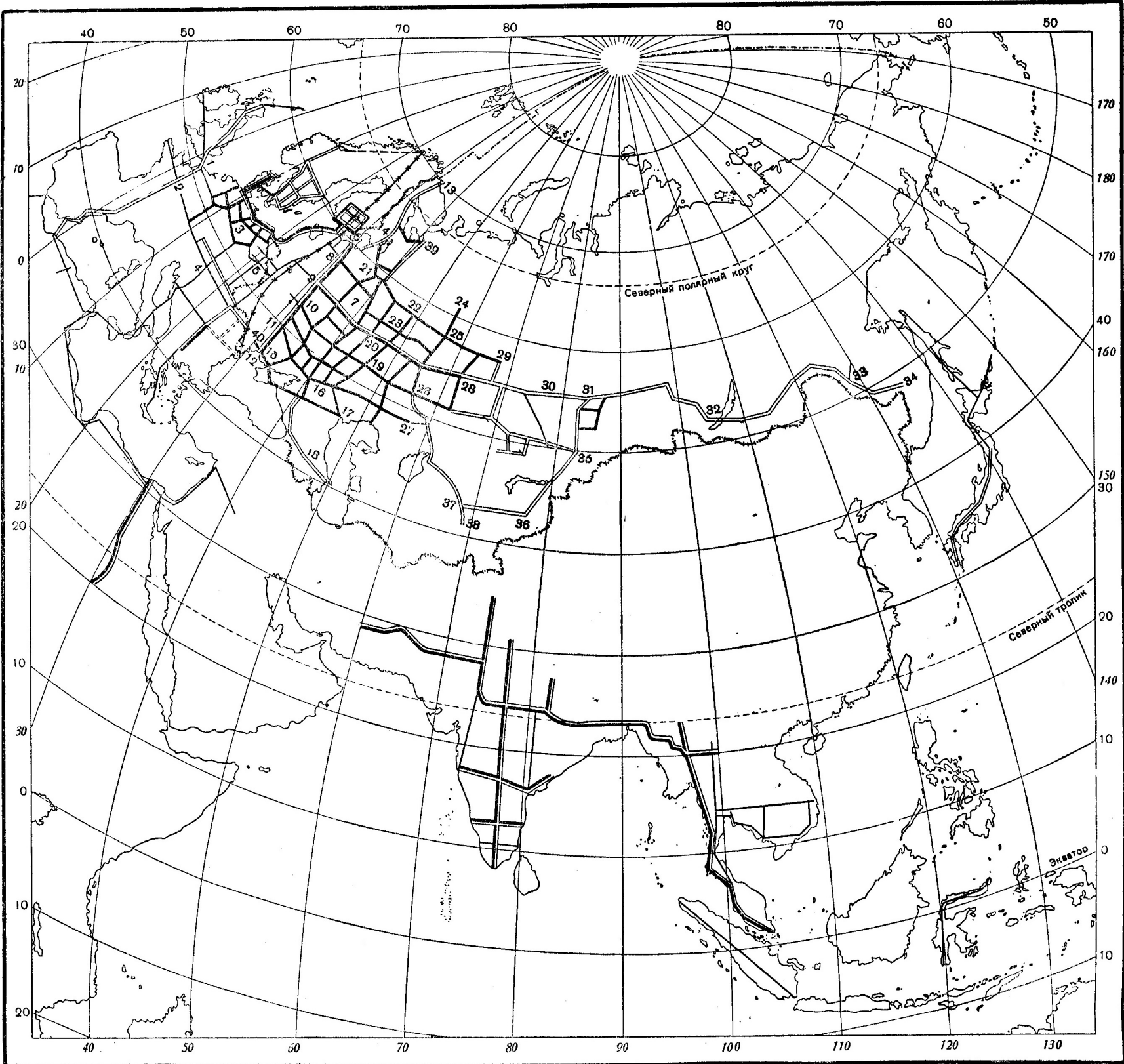
В Польше проведены достаточно обширные работы по построению новой триангуляции I класса. В этой триангуляции могут быть выделены: 1) ряд меридианального направления на севере от  $\varphi = 56^\circ$  до границы с Чехословакией на юге, на широте  $48\frac{1}{2}^\circ$ ; ряд располагается между меридианами  $24^\circ$  —  $27^\circ$ ; 2) ряд по параллели Варшавы, общей длиной около 600 км, располагающийся под широтой  $52^\circ$ . К сожалению, астрономические пункты на первом ряде даны через интервалы около 150 км, а на ряде по параллели  $52^\circ$  — еще реже.

В Чехословакии выполнено вновь сплошное триангулирование государства; в состав триангуляции I класса вошла часть градусного измерения по 48-й параллели, на которой дано 15 новых астрономических пунктов на отрезок длиной в 400 км. Соединение с градусным измерением в Польше выполнено по 24-му меридиану.

В Югославии по восточной ее границе выполнен меридианный ряд от параллели  $45^\circ$ , где он соединяется с указанным выше рядом Румынии, до параллели  $41^\circ$ , где он соединяется с новой триангуляцией Греции; (черт. 151) оснащение астрономическими пунктами этого ряда — вполне достаточное (астрономические пункты взяты через 30—40 км); кроме того, выполнены ряды по меридиану  $16^\circ$  и по 45-й параллели.

Новая триангуляция Греции продолжает этот меридианный ряд Югославии ( $L = 23^\circ$ ) до острова Крит, до широты  $35^\circ$ , однако астрономическая часть работ по этому ряду Грецией еще далеко не выполнена.

Существенно также отметить, что в результате перечисленных работ образовалась сплошная меридианная дуга от параллели  $64^\circ$  до параллели  $35^\circ$ , хорошо измеренная и оснащенная частыми астрономическими пунктами (правда, за исключением еще незаконченных астрономических определений участков). Прочное соединение этой дуги с дугой Струве делает то, что это новое градусное измерение по меридиану (долгота его изменяется от  $23$  до  $28^\circ$ ) простирается от широты  $70^\circ 40'$  до широты  $35^\circ$ . Существующее соединение: сети Чехословакии и других стран с сетью Дании, также заново выполненной; соединение этой последней



Черт. 151

# УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- |  |  |  |   |
|--|--|--|---|
|  | Градусные измерения нового типа (полная программа).  |  | Старого типа градусные измерения и астрономо-геодезические сети.                      |
|  | Градусные измерения и астрономо-геодезические сети «модернизированного» типа.  |  | Дуга Струве.  |
|  | Астрономо-геодезические сети в районах общей гравиметрической съемки с расстояниями между астрономическими пунктами не более 100 км. |  | Незаконченные астрономическими определениями дуги градусных измерений (или их части). |
|  |  |  |   |

сети с новой дугой меридиана, проложенной в Норвегии по ее восточной границе с Швецией до Тронгейма и соединение Тронгейма старым градусным измерением в Норвегии с конечным пунктом градусного измерения Струве — Фугленес, приводят к тому, что это большое градусное измерение от Ледовитого океана до острова Крита (Кандия), в части его с широты  $48^\circ$  до широты  $70^\circ 40'$ , образуется двумя ветвями. Следует пожелать, чтобы возможно скорее были закончены астрономические работы на некоторых участках этой дуги с надлежащей густотой астрономических пунктов.

Само собой напрашивается продолжение этого градусного измерения до Египта, до соединения с упомянутыми ранее работами англичан от Каира до Мыса Доброй Надежды.

За рассматриваемый период 1919—1939 гг. Турция начала астрономо-геодезические работы в Малой Азии; опубликованные сведения об этих работах, впрочем, слишком кратки. С другой стороны, Франция в Сирии уже выполнила астрономо-геодезические работы. Поэтому появился проект при выполнении градусного измерения Фугленес (Ледовитый океан) — Каир использовать новые астрономо-геодезические работы в Болгарии, Турции и Сирии и таким обходным путем подойти к устью Нила, продолжив к югу триангуляции французов в Сирии. В результате образуется измерение по меридиану от широты  $-34^\circ$  до широты  $+70^\circ 40'$ , т. е. с амплитудой около  $105^\circ$ .

За указанный же период во Франции была исполнена вновь часть дуги параллели  $47\frac{1}{2}^\circ$  к востоку от Парижа. Принимая во внимание указанные выше работы по этой параллели в Чехословакии, можно сказать, что западно-европейская часть этой параллели приведена в порядок, за исключением старого участка Брест — Париж, конечного западного участка этой дуги. Нужно иметь в виду, кроме того, что к новым триангуляциям Чехословакии по этой дуге примыкает с севера триангуляционный ряд I класса в Польше — на всем протяжении границы между Польшей и Чехословакией, а с юга к этим же триангуляционным рядам Чехословакии примыкает непосредственно ряд I класса, продолженный в последней четверти прошлого столетия в Австрии, Венгрии и Румынии и относившийся также к градусному измерению по  $47\frac{1}{2}^\circ$  параллели. Другими словами, обновленное градусное измерение по  $47\frac{1}{2}^\circ$  параллели приближается к типу астрономо-геодезической сети, которая, правда, надлежащее оснащение астрономическими пунктами имеет еще далеко не полное.

Очевидно, и дуга по 52-й параллели, после новых работ в Западной Европе, сделалась однородной в отношении геодезических материалов на всем протяжении.

Португалия исполнила в Мозамбике триангуляцию I класса в виде нескольких рядов между параллелями  $-14^\circ$  и  $-19^\circ$  и между меридианами  $+30^\circ$  и  $+37^\circ$ , однако с очень слабым астрономическим оснащением этих рядов. Франция выполнила довольно значительные геодезические работы в Марокко, Алжире и Тунисе, дав большую дугу параллели от долготы  $-9^\circ 5'$  до долготы  $+10^\circ$  между параллелями  $31^\circ$  и  $36^\circ$ , но по этой дуге определено очень мало астрономических пунктов.

По плану, намеченному Международной геодезической ассоциацией, по всему северному берегу Африки должно быть выполнено градусное измерение по параллели — от Атлантического океана до Палестины. К настоящему времени геодезическая часть работ по этой большой дуге, протяжением почти в  $43^\circ$  по долготе, выполнена в французских владениях.

ниях (о чем сказано выше) и в Египте от границы с Триполи ( $L = 24^\circ$ ) до Суэца ( $L = 34^\circ$ ); в итальянской части работы ведутся, по отчетным сведениям не имеется.

По плану, намеченному Международной геодезической ассоциацией, в Африке намечены к исполнению градусные измерения вдоль параллели с широтой  $+12^\circ$  и вдоль параллели с широтой  $-6^\circ$ ; по первой параллели, кроме небольших работ в Британском Сомали, ничего еще не выполнено. По второй параллели ( $-6^\circ$ ) работы падают в значительной части на территорию Бельгийского Конго, но пока, кроме нескольких прихотливо расположенных триангуляционных рядов, которые по достоинству даже не могут быть отнесены к II классу, ничего не сделано на этой территории, принадлежащей Бельгии; сведений о работах на остальных частях этой параллели с широтой  $-6^\circ$  не имеется. Наконец, должно отметить довольно значительные геодезические работы на территории Южно-Африканского Союза, но ставящиеся как чисто геодезические, а не как астрономо-геодезические (см. черт. 150).

Любопытно отметить, что в ряде исполненных новых геодезических работ в Африке господствует чисто производственный геодезический подход: небольшие добавочные расходы на астрономическую часть, даже в виде определенных через интервал в 100 км астрономических пунктов, оказываются непосильными или неприемлемыми; не приходится уже говорить об оснащении новых триангуляционных рядов частыми астрономическими пунктами. Только на дуге Каир — Мыс Доброй Надежды англичане дали астрономические определения широты почти на каждом пункте триангуляции I класса вдоль этой грандиозной дуги. Но те же англичане на своей части северо-африканской параллели (от  $L = 24^\circ$  до  $L = 34^\circ$ ), судя по отчетам, дали частые определения астрономических широт и очень редкие определения астрономических долгот.

Как видно, пока в Африке (черт. 150) имеем только одно градусное измерение по 30-му меридиану; но надлежащее проведение астрономической части работ может привести в недалеком будущем к большому градусному измерению по параллели  $+32^\circ$  между меридианами  $-9^\circ,5$  и  $-34^\circ$ . Точно так же выполнение астрономических работ по геодезическим рядам на территории Южно-Африканского Союза приведет к обширной астрономо-геодезической сети с площадью около 5 миллионов кв. км, что будет, несомненно, иметь свою ценность.

Переходим к Азии, не включая в нее пока Азиатской части СССР.

Здесь отметим сперва работы французов в Сирии (см. черт. 150), приведшие к выполнению триангуляционного ряда I класса по меридиану  $36^\circ$  между широтами  $36\frac{1}{2}^\circ$  и  $33^\circ$  и к ряду I класса по параллели  $36^\circ$  от Средиземного моря до реки Тигр — с долготной амплитудой в  $6^\circ$ . Эти небольшие работы мы отмечаем потому, что они, очевидно, послужат в дальнейшем для соединения работ в Европе и в Африке по 30-му меридиану, и для соединения работ в Африке с работами СССР.

Англичане в Индии и в Индо-Китае местами дополняли и восстанавливали обширные геодезические работы, исполненные ими до 1914 г. и описанные в § 99. Но в период с 1930 г. англичане начали новые астрономические работы по некоторым рядам триангуляции в Индии и в Индо-Китае, обращая их в новый тип градусного измерения, в котором астрономические определения делаются, во-первых, на триангуляционных пунктах, располагающихся друг от друга на расстоянии порядка 40—50 км, во-вторых, на расположенных между ними добавочных пунктах, определяемых геодезически засечками относительно триангуляционных



пунктов основного ряда; эти добавочные пункты следуют друг за другом по оси градусного измерения через 15 км в среднем и геодезически устанавливаются сравнительно грубо, однако с обеспечением в выводимых для этих пунктов слагающих уклонения отвеса ошибки не более 1". Англичане уже выполнили такого типа астрономические работы: на главной меридианной дуге, имеющей долготу  $78^\circ$  (черт. 151), от широты  $\varphi = +8^\circ$  до широты  $\varphi = +31^\circ$  (здесь были исполнены только определения широт и азимутов); на части меридианной дуги пол долготой  $75^\circ$  от широты  $25^\circ$  до широты  $33^\circ$ ; на параллели под средней широтой  $24^\circ$  от меридиана с долготой  $61^\circ$  до меридиана с долготой  $100^\circ$ ; на параллели под средней широтой  $18^\circ$  от Бомбея до Визагапатама ( $L = 73^\circ$  и  $L = 81^\circ$ ); по параллели с широтой  $13^\circ$  от Мангалора до Мадраса; на всех этих параллелях, на точках, расположенных часто, были определены и астрономические долготы, и астрономические широты; по меридианной дуге в Индо-Китае, с средней долготой  $97^\circ$ , идущей частью по восточному берегу Бенгальского залива, от параллели  $+24^\circ$  до параллели  $+9^\circ$ , причем на этой дуге определены как широты, так и долготы часто расположенных точек (см. черт. 151). Всего определено около 500 астрономических пунктов. Эта новая постановка астрономической части в градусных измерениях *очень поучительна — она дает возможность получить детально профиль геоида*. Далее, приходится отметить новые геодезические работы французов в Сиаме. Здесь проложен меридианный ряд с средней долготой  $99\frac{1}{2}^\circ$  между широтами  $+21^\circ$  и  $+6^\circ$  и ряды по параллели  $14^\circ$  от меридиана 99-го меридиана 106-го; однако астрономические пункты взяты и на том, и на другом ряде редко — с расстоянием в 100—200 км.

В Нидерландской Индии проложена триангуляция I класса на островах: Суматре, Яве, Целебесе и Борнео. Триангуляции Суматры и Явы связаны друг с другом; триангуляция Суматры может быть связана с триангуляциями англичан в Малайе (южная конечность Индо-Китая). В Австралии англичанами начаты геодезические работы, связь которых с триангуляциями в Индо-Китае представляет, конечно, определенный интерес; однако для этого предстоит использовать острова, расположенные по параллели  $-10^\circ$  между Явой и Австралией на протяжении 1500 км. Видимо, эта геодезическая связь Австралии с Азией будет осуществлена еще очень не скоро.

Остановимся теперь на развитии геодезических работ в США. С 1911 по 1929 г. в США были исполнены новые триангуляции I класса общим протяжением в 20 000 км; с 1930 по 1935 г. было проложено новых триангуляций I класса общим протяжением около 50 000 км. В общем получается сеть I класса, в которой ряды по параллелям идут через интервалы 500—600 км, а ряды по меридианам — через 160—170 км. Однако указанное грандиозное развитие геодезических работ в США не сопровождалось таким же развитием определений астрономических пунктов в триангуляции I класса — в среднем новые астрономические пункты, в числе примерно около 275, располагаются по рядам триангуляции через интервал 150 км. Очевидно, в этих работах США интересы научных геодезических задач были поставлены на второстепенный план.

Рассматриваемый отрезок времени 1919—1938 гг. ознаменовался еще началом геодезических работ в Южной Америке: здесь проложены ряды триангуляции I класса, которые могут привести к градусному измерению по меридиану между параллелями  $-30^\circ$  и  $-38^\circ$ . Это градусное измерение, совсем еще неосуществленное в части астрономической,

однако составляет всего пятую часть меридианного градусного измерения, охватывающего всю Южную Америку; следовательно, геодезическое изучение Южной Америки остается все-таки в очень далекой перспективе.

Теперь переходим к СССР (черт. 151). Начало развития новых астрономо-геодезических работ в СССР относится к 1923—1924 гг. С самого начала их постановки было принято за правило преследовать при их выполнении не только чисто практические задачи, но и научные цели, обеспечивая возможную полноту научного использования получаемых материалов. В рядах триангуляции I класса астрономические пункты определяются во всех пересечениях этих рядов, а между пересечениями — через 70—100 км по рядам триангуляции I класса; на каждой астрономической точке определяются с хорошей точностью широта и долгота, а на узловых точках — еще и астрономический азимут.

В настоящее время в астрономо-геодезической сети СССР определено 480 астрономических пунктов, не считая астрономических пунктов в основной триангуляции II класса. Полигоны триангуляции I класса со сторонами 200—250 км пересекаются накрест основными рядами II класса, в пересечении которых определяется астрономический пункт по широте, долготе и азимуту; большие полигоны I класса в необжитых районах разбиваются на шесть частей основными рядами II класса, с определением в пересечении этих рядов астрономических пунктов. Астрономических пунктов в основной триангуляции II класса имеется около 100. Общее протяжение рядов триангуляции I класса, используемых в целях градусных измерений, составляет около 35 000 км. Как видно, объем астрономо-геодезического материала по СССР заметно превышает объем материала, использованного по США Хейфордом в 1910 г. и признававшегося всеми «грандиозным». В таблице 11 приведены важнейшие дуги астрономо-геодезической сети СССР, выполненные до 1937 г.

К настоящему времени выполнен ряд Кострома—Вологда—Архангельск, что увеличивает амплитуду дуги, значащейся под № 4 в таблице 11, на 7°, приводя ее к величине в 22°. В настоящее же время выполняется ряд I класса по Енисею от Красноярска до устья этой реки, а также ряд от Сибирской железной дороги, от меридиана 125°, на Якутск; далее этот ряд пойдет на север по Лене. Геодезические работы ведутся на Колыме. Наконец, должно отметить геодезические работы I класса по побережью Охотского моря, которые сопровождаются огромными трудностями, но постепенно подвигаются и в перспективе должны будут дойти до Берингова пролива. Как видно, основные астрономо-геодезические работы СССР начинают развиваться уже в Сибири и на Дальнем Востоке, и именно на территории, лежащей к северу от 55-й параллели и очень слабо обжитой.

Большое градусное измерение «Орша — Челябинск — Красноярск — Чита — Хабаровск» имеет долготную амплитуду 112°. В настоящее время мы имеем возможности соединения геодезических работ СССР по этому градусному измерению с новыми работами Западной Европы по 52-й параллели, указанными выше; вместе с западно-европейскими измерениями по 52-й параллели получается дуга с долготной амплитудой в 150°. Конечно, для выяснения общих волн геоида мы получаем ценнейший и беспримерный еще в истории геодезии материал. Понятно, что значительный астрономо-геодезический материал, собранный уже в СССР, имеет огромное значение в вопросе установления из градусных измерений общего земного эллипсоида: все-таки приходится отметить, что главные

из общих волн геоида — это волны долготного характера, которые на протяжении территории СССР проходят различные фазы.

В § 97 мы уже выяснили значение гравиметрических работ в задачах, преследуемых градусными измерениями.

Таблица 11

№№ по порядку	Название дуг	Амплитуда		Средняя	
		по широте	по долготе	широта	долгота
Дуги меридианов					
1	Дуга Струве . . . . .	25°20′	—	58°	27°
2	Мурманск—Пулково—Николаев . . . . .	21 56	—	57	30
3	Петрозаводск—Харьков—Джанкой . . . . .	17	—	55	36
4	Кострома—Тамбов—Зуглиди . . . . .	15 00	—	50	41
5	Горький—Усть-Медведица . . . . .	6 19	—	53	44
6	Казань—Саратов—Астрахань . . . . .	9 44	—	51	48
7	Чердынь—Чкалов . . . . .	8 55	—	56	56
8	Ирбит—Челябинск—В. Тобол . . . . .	6 20	—	54	62
Дуги параллелей					
9	Шимск—Киров—Байкалово . . . . .	—	36°29′	57	49
10	Орша—Челябинск—Красноярск . . . . .	—	62 33	54	62
11	Красноярск—Чита—Хабаровск . . . . .	—	42 25	51	114
12	Гомель—Чкалов—Усть-Каменогорск . . . . .	—	51 38	51	57
13	Переяславль—Сталинград—Темир . . . . .	—	26 01	49	45
14	Тирасполь—Керчь—Астрахань . . . . .	—	18 12	46	39
Косые дуги					
15	Чкалов—Арысь—Алма-Ата . . . . .	8 22	21 26	48	69
16	Новосибирск—Алма-Ата . . . . .	11 44	6 02	49	79

В СССР с 1933 г. поставлена общая гравиметрическая съемка страны, которая уже охватила огромные площади, покрыв почти всю Европейскую часть СССР и значительную часть территории в Азии, к югу от Сибирской железной дороги до 75-го меридиана. Астрономо-гравиметрическое нивелирование выполнено пока по меридианному ряду Пулково—Николаев и по рядам по параллели Орша—Челябинск. В § 97 было выяснено, что при расстояниях между астрономическими пунктами по рядам триангуляции I класса в 70—100 км, мы при наличии астрономо-гравиметрического нивелирования получаем детальные профили геоида по дугам градусных измерений с той же точностью, как и при расположении астрономических пунктов через 10—15 км. При наличии сплошной гравиметрической съемки, но при отсутствии пополнения ее согласно требованиям астрономо-гравиметрического нивелирования, мы при том же расстоянии в 70—100 км между астрономическими пунктами получим профили геоида не так точно и не с той детальностью; необходимость таких пополнений там или здесь устанавливается в процессе обработки материалов с полной уверенностью и эти пополнения общей гравиметрической съемки представляют небольшие по объему

работы. Геодезисты СССР первые встали на путь *широкого использования в градусных измерениях гравиметрических материалов*, кроме обычных астрономо-геодезических. Очевидно, что в СССР получен грандиознейший материал по градусным измерениям и притом отвечающий вполне всем задачам градусных измерений, указанным уже в начале § 97; конечно, это — *новый тип градусных измерений, основанный на соответствующем использовании гравиметрических материалов*. Мы не ошибемся, если скажем, что СССР в деле градусных измерений дает пример значительнейшего успеха не только в количественном, но и в качественном отношении. Следует пожелать, чтобы прокладка градусных измерений в Азиатской части СССР к северу от 55-й параллели шла так же безостановочно, как это было до сих пор в других частях СССР; выдвижение везде на первый план научных целей, так характерное для всех предприятий советской власти, является гарантией того, что и трудные условия астрономо-геодезических и гравиметрических работ в северных областях Азиатской части СССР будут преодолены.

*Совместное использование астрономо-геодезических и гравиметрических материалов и введение гравиметрических работ в качестве органической части градусного измерения — вот что является характерным для программы градусных измерений по СССР.*

Из содержания настоящего параграфа выявилось стремление в современных градусных измерениях к образованию очень больших дуг, что имеет существенное значение в вопросе установления общего эллипсоида: с другой стороны, в ряде новых работ имеем выдвинутое требование — *дать детальные профили геоида*, что также должно приветствовать.

### § 103. Классификация градусных измерений. Выводы из современных градусных измерений

Из предыдущих параграфов достаточно выявилось различие программы при проведении тех или иных градусных измерений и различие в постановке задачи, решаемой на основании результатов градусных измерений. Это позволяет провести некоторую классификацию градусных измерений, которая имеет значение при общей оценке сделанного в этой области в разных странах.

**1. Старые градусные измерения.** К этому типу мы относим дуги, на которых астрономические пункты даются через расстояния порядка 200 км. Типом такого измерения является дуга Струве. Очевидно, здесь не приходится говорить о получении профиля геоида. Только при условии значительной длины дуги такого типа, материал по ней следует использовать для вывода общего земного эллипсоида — конечно, в соединении с рядом других больших дуг.

**2. Модернизированные дуги.** Это — частью старые дуги, на которых в порядке добавочных последующих астрономических работ интервал между астрономическими пунктами сведен к размеру 50—80 км, но сюда же относятся и некоторые новые дуги. Примером таких модернизированных из числа старых дуг является современная дуга Западно-Европейского меридиана; современная часть 52-й параллели, приходящаяся на Западную Европу и части параллели 47½°.

Сгущение астрономических пунктов, по сравнению с типом первым, является, конечно, шагом вперед. В этом классе задача получения профиля геоида все-таки не осуществляется полностью; здесь имеется неполнота программы, которая сказывается на значимости этих дуг. Нужно

отметить, что выполнение в последние годы во Франции общей гравиметрической съемки и многочисленные определения силы тяжести (на подводной лодке) в примыкающей к Франции и Испании части Средиземного моря позволяют по соответственной части западно-европейского меридиана восполнить отмеченную неполноту программы, свойственную этому типу дуг.

Дальнейшее развитие гравиметрических работ в Азиатской части СССР приведет к перечислению указанной нашей дуги в другой разряд.

**3. Астрономо-геодезические сети, используемые в целях градусных измерений.** Сюда относятся сети, составленные из многих рядов триангуляции I класса, по которым астрономические пункты располагаются через расстояния 70—100 км; расстояния между рядами триангуляции I класса одноименного направления — порядка 200 км. Сюда относится астрономо-геодезическая сеть США, сюда же относится сеть СССР, если при обработке составленных по ней уравнений для уклонений отвесных линий не пользоваться вовсе собранными гравиметрическими материалами, т. е. применять «астрономо-геодезический» метод обработки материала по уклонениям отвеса.

При обширности астрономо-геодезической сети такого типа, все-таки, благодаря значительному числу профилей геоида, связанных между собой, на выводе эллипсоида и его ориентировки из этих сетей влияние резких местных неправильностей геоида скажется в сильно ослабленном виде, хотя самые профили будут определены с сравнительно малой точностью, и задача получения формы геоида, соответствующей данной территории, будет в общем решена удовлетворительно.

**4. Градусные измерения нового типа.** Сюда относятся дуги, по которым даны астрономические пункты с расстояниями между ними по оси дуги порядка 15—20 км, или дуги, по которым выполнено в полной мере астрономо-гравиметрическое нивелирование. Этот тип отвечает вообще всем требованиям, предъявляемым к градусным измерениям. К этому типу относятся: упомянутые в § 102 дуги в Индии и в Индо-Китае, по которым выполнены новые астрономические работы; большая английская дуга в Африке по 30-му меридиану; дуга меридиана Пулково — Николаев в СССР и дуга параллели Орша — Челябинск.

Конечно, пятый класс дуг мы получим, когда гравиметрическое обслуживание территории во все стороны от любой точки дуги будет распространяться на 2500—3000 км. К этому типу дуг СССР подойдет всех скорее.

Как видно, только небольшой процент дуг и сетей, выполненных к настоящему времени, отвечает надлежащей программе градусных измерений.

Перейдем теперь к рассмотрению полученных до сих пор результатов по градусным измерениям, которые поместим в особой таблице 12. Помещенные в графе 6 таблицы 12 выводы большой полуоси, соединенные скобкой в пару, получены так: в верхнем выводе и полуось и сжатие получались, как два неизвестных вместе, из некоторой системы уравнений; при получении нижнего вывода в ту же систему уравнений подставлялось «принятое» сжатие, показанное в графе 8, и с ним получался вывод большой полуоси. Выводы, отмеченные звездочкой в графе 8, получены следующим образом: по Западной Европе, по США и по Азиатской части СССР использовались топографо-изостатические редукции, а по Европейской части СССР — редукции гравиметрические, при охвате территории гравиметрическими станциями вокруг астрономиче-

ского пункта радиусом от 400 до 700 км. В материалах по СССР Ф. Н. Красовским использовались 95 широтных и 235 долготных уравнений, в то время как в более поздних выводах по ЦНИИГАиК использовалось 289 широтных и 306 долготных уравнений, а всего 595 уравнений.

Проф. Красовский считал не подлежащими использованию широтные уравнения пунктов по параллели от Челябинска до Новосибирска как вследствие возможных систематических ошибок в геодезических широтах из-за неустойчивости ко времени выполнения его (Красовского) выводов исходного азимута, так и по тем соображениям, что вообще система широтных уравнений для пунктов, расположенных по параллели, сама по себе приводит, конечно, к неопределенному решению. Целый ряд широтных уравнений для пунктов в районе между Волгой и Уралом также был отброшен Ф. Н. Красовским из-за значительных искажений в них широт влияниями областного характера. Ко времени выводов, исполненных по ЦНИИГАиК, астрономо-геодезический материал значительно расширился (за три года): прибавились дуги в Казахстане и Средней Азии, прибавилась дуга от Новосибирска до Хабаровска, увеличился материал по северо-востоку Европейской части СССР; наконец, гравиметрия позволила в ряде пунктов, которые давали искаженные результаты, получить надлежащие поправки к астрономическим широтам и долготам.

Вывод ЦНИИГАиК по СССР, США и Западной Европе основывается на 1363 уравнениях — широтных и долготных и азимутальных; из них на долю СССР падает 595 уравнений, на долю Западной Европы 101 уравнение и на долю США — 667 уравнений. Нужно, однако, иметь в виду, что по СССР двойные астрономические пункты в пересечениях рядов I класса соединялись в один при составлении уравнений для  $\xi$  и  $\eta$ , астрономические же пункты в основных рядах II класса совсем, как правило, не использовались; этим самым значение материала по СССР было несколько уменьшено.

Вывод Ф. Н. Красовского по США отличается от вывода Хейфорда в силу того, что азимутальным уравнениям, так многочисленным по США, был дан вес 0,7, так как при их составлении нередко пользовались азимутами, *геодезически переданными* на большие расстояния от точек с лапласовыми азимутами.

Глубина изостатической компенсации при вычислении топографо-изостатических редукций принималась по США в 120,9 км, а по Западной Европе и по СССР — 96 км; впрочем, нужно оговориться, что по США использовались редукции, вычисленные Хейфордом, а по Западной Европе — редукции, вычисленные в 1923 г.

Все выводы большой полуоси, полученные при «принятом сжатии», отнесены к сжатию 1 : 298,3, которое получено из обработки вместе материалов по США, СССР и Западной Европе и в 1938 г. получено Международным геодезическим союзом и из обработки всех имеющихся до сих пор определений силы тяжести.

Таблица 12 показывает, что выводы большой полуоси при одном и том же и наилучше определенном сжатии колеблются по разным дугам и сетям в пределах 470 м, если мы не применяем теории изостазии, а используем материалы по градусным измерениям астрономо-геодезическим методом. При применении теории изостазии, при том же самом сжатии, выводы большой полуоси по разным дугам и сетям колеблются в пределах, собственно, почти тех же самых.

Таким образом, применение изостазии вовсе не сгладило значительных противоречий в выводах по отдельным дугам и сетям и не устранило значительных противоречий по отдельным дугам. Но, несомненно, применение изостазии заметно выравнивает вывод по Западно-Европейскому меридиану и делает его близким к выводу по другому значительному меридианному градусному измерению — по дуге Струве; на этот факт приходится впоследствии обратить особое внимание. С другой стороны, отдельные выводы большой полуоси при одном и том же и наилучше определенном сжатии из *сетей* США, СССР и Западной Европы колеблются при применении изостазии в пределах 240 м, при частичном же использовании гравиметрии по СССР — в пределах 110 м; колебания выводов по тем же сетям при одном и том же сжатии 1:298,3, если не применять изостазии, не становятся большими, а именно, лежат в тех же пределах 240 м. Применение изостазии, следовательно, несколько не улучшает сходимости выводов и по отдельным очень обширным астрономо-геодезическим сетям.

Далее, характерным является то, что при применении изостазии по ряду отдельных дуг и по отдельным большим сетям для полуоси  $a$  получается большее значение, чем без применения изостазии; это, впрочем, не относится к сети СССР. Чем это объяснить? Конечно, не теми влияниями, о которых было сказано в конце § 97 и которые обусловлены воображаемым изменением распределения плотностей в земной коре, сопровождающим применение теории изостазии к геодезическим задачам: здесь дело шло бы об искажениях в полуоси порядка 30—40 м. Поставленный вопрос остается пока без решения, без ответа. Я позволю себе выдвинуть предположение, что здесь не малую роль играет сильно преувеличенная глубина компенсации: следует применять  $T$  не в 96 км и тем более не в 120,9 км, а в 70—80 км. Это привело бы к уменьшению вывода Хейфорда для большой полуоси примерно на 80—100 м, и соответственно уменьшило бы вывод полуоси при применении изостазии по Западной Европе и по отдельным дугам Европы, однако это не сказалось бы вовсе на вывод по дуге Струве и по СССР, вследствие ничтожных высот над уровнем моря по дуге Струве и вследствие равнинно-низменного рельефа во всей используемой астрономо-геодезической сети СССР (за исключением части большой дуги по Сибирской параллели — от Иркутска до Хабаровска). При введении этой глубины компенсации  $T = 70—80$  км, конечно, ощутимо возросла бы  $\Sigma \xi^2 + \Sigma \eta^2$ , формальная точность выводов понизилась бы, но не для повышения формальной точности геодезических выводов существует в природе изостатическая компенсация уже на глубине 80 км.

Числа таблицы 12 определенно указывают, что выводы из отдельных дуг меридианов и параллелей сильно искажаются, очевидно, влиянием общих и местных отступлений геоида. Отсюда является обоснованным стремление в последнее время к образованию очень больших дуг меридианов и параллелей.

Отметим, что по США меридианные дуги дают

$$a = 6378\,272 \pm 110 \text{ м},$$

а дуги параллелей

$$a = 6378\,430 \pm 45 \text{ м}.$$

Сопоставление этих чисел с числами таблицы 12 обосновывает в известной степени такие соображения:

Название дуги или сети	Выводы без применения теории изостазии					Выводы с применением теории изостазии				
	большая полуось	сжатие выведенное	сжатие принятое	автор		большая полуось	сжатие выведенное	сжатие принятое	автор	
1	2	3	4	5		6	7	8	9	
Западная часть 52-й параллели						6378013		1 : 298,3	Красовский	
Западно-Европейский меридиан	6377935 без южной части 6378486 (вся дуга)	1 : 281,0		Гельмерт Шуманн		6378626 6378359	1 : 289,6	1 : 298,3	Красовский Дуга без южной части	
Дуга Струве	6378455 6378433		1 : 299,2 1 : 299,2 1 : 298,3	Гельмерт Шуманн						
24 параллель Индии	6378358		1 : 298,3	Шуманн						
Южная часть Африканской дуги	6378307		1 : 298,3	Шуманн						
Сеть США до 1910 г.	6378062	1 : 298,2		Хейфорд		6378388 6378383 6378394	1 : 297,9 1 : 297,7	1 : 298,3	Хейфорд Красовский Красовский	
Дуги Западной Европы	6377111		1 : 298,3	Красовский		6378300 6378293	1 : 301,0	1 : 298,3	Красовский Красовский	



Сеть США и дуги Западной Европы				6378373	1 : 298,2	Красовский
Сеть СССР	6378182 } 6378153 }	1 : 298,97 1 : 301,8	1 : 298,3 1 : 298,3	Красовский Изотов (ЦНИИГАиК)	6378153 6378273 } 6378276 }	1 : 298,3 1 : 298,2 *
Сеть СССР и дуги Западной Европы				6378247 } 6378177 } 6378193 } 6378216 }	1 : 300,6 1 : 297,6 *	Красовский (ЦНИИГАиК)
Сети СССР и США и дуги Западной Европы				6378338 } 6378298 } 6378295 } 6378292 }	1 : 291,97 1 : 298,4 *	Красовский Изотов (ЦНИИГАиК)
Сети СССР и США и дуги Западной Европы	6378116 } 6378156 }	296,77	1 : 298,3	Изотов (ЦНИИГАиК)	6378288	Изотов (ЦНИИГАиК)

а) дуги меридианов под долготами  $0-30^\circ$  и в средне-северных широтах приводят к значениям  $a$ , заметно *большим* (дуга Струве, дуга Западно-Европейского меридиана), чем дуги по параллелям в этих же районах;

б) дуги меридианов под долготами от  $-80^\circ$  до  $-120^\circ$  в средних широтах приводят к значениям  $a$ , заметно *меньшим*, чем дуги по параллелям в тех же районах (США).

Если эти различия в выводах  $a$  приписывать *общим* волнам геоида, то простейшее объяснение их получается, если предположить, что эти волны следуют отступлениям трехосного эллипсоида от эллипсоида вращения. В работах Ф. Н. Красовского по выводу земного эллипсоида (см. статьи в журнале «Геодезист» за 1936 г. № 6, 7, 9, 10, 11, 12) выполнен учет влияния трехосности земного эллипсоида. Приняв на основании своих исследований, что долгота наибольшего меридиана трехосного эллипсоида равна  $+10^\circ$ , что его экваториальное сжатие равно  $1:30\,000$ , а среднее полярное сжатие (или сжатие меридиана с долготой от наибольшего меридиана в  $45^\circ$ ) равно  $1:298,3$ , Ф. Н. Красовский получает результаты, приведенные в таблице 13.

Таблица 13

## Выводы большой полуоси эллипсоида при учете трехосности

(Полярное сжатие среднего эллипсоида  $1:298,3$ ; долгота наибольшего меридиана  $+10^\circ$ ;  $i = 1:30\,000$ ).

Название дуг или сетей	Большая полуось без учета трехосности	Большая полуось с учетом трехосности	Примечание
Западная часть 52-й параллели . . . . .	6378 013	6378 265	С изостазией
Западно - Европейский меридиан . . . . .	6378 359	6378 302	
Дуга Струве . . . . .	6378 481	6378 375	
24-я параллель Индии . . . . .	6378 358	6378 202	Без изостазии и приближенный вывод
Сеть США . . . . .	6378 394	6378 220	
Западная Европа—все дуги . . . . .	6378 293	6378 307	
СССР (материал до 1934 г.) . . . . .	6378 153	6378 148	С изостазией
Сеть США и дуги Западной Европы . . . . .	6378 375	6378 235	
Сеть СССР и дуги Западной Европы . . . . .	6378 177	6378 186	
Сети СССР, США и дуги Западной Европы . . . . .	6378 216	6378 201	Большая полуось относится к среднему эллипсоиду вращения, или к экваториальному полудиаметру меридиана, отстоящего на $45^\circ$ от наибольшего меридиана на трехосном эллипсоиде. Разность полудиаметров наибольшего и наименьшего меридиана равна 213 м

Приведем еще выводы ЦНИИГАиК с учетом трехосности, причем здесь принята долгота наибольшего меридиана  $+15^\circ$ , а экваториальное сжатие попрежнему взято равным  $1:30\,000$ .

сеть США . . . . .	6378 237,	
сеть СССР . . . . .	6378 269,	(и)
сеть СССР, сеть США и		
дуги Западной Европы . . . . .	6378 245.	(и)

Конечно, из таблицы 13 мы замечаем значительное повышение сходимости выводов полуоси  $a$  не только по отдельным большим сетям, но даже и по отдельным дугам: различия выводов  $a$  по СССР, по США и по Западной Европе лежат всего в пределах  $160\text{ м}$ ; различия по всем дугам и сетям — в пределах  $230\text{ м}$ ; если же взять во внимание по СССР только вывод (и), то колебания выводов большой полуоси по сетям происходят в пределах всего  $90\text{ м}$ , а колебания выводов по всем отдельным сетям и дугам — в пределах  $170\text{ м}$ . Заметим, что в 1938 г. из обработки громадного гравиметрического материала в Международном Геодезическом Союзе получили для сжатия значение  $1:297,8$ , долготу наибольшего меридиана  $\lambda_0 = -25^\circ$  и различие наибольшего и наименьшего экваториальных полу диаметров в  $352\text{ м} \pm 30\text{ м}$  (гравиметрия вообще дает для разности наибольшего и наименьшего диаметров большее значение, чем астрономо-геодезия).

Значительное разногласие в выводах долготы наибольшего меридиана из современных определений силы тяжести и из больших астрономо-геодезических материалов обращает на себя внимание и, видимо, свидетельствует о том, что общие волны геоида представляются, как отступления трехосного эллипсоида от эллипсоида вращения, лишь с известной степенью грубости, лишь при значительных обобщениях этих волн, причем эти обобщения при использовании различных материалов выполняются различно. Трехосность земного эллипсоида не является обоснованной с физико-механической стороны, и мы вовсе не имеем в виду подтверждать трехосность Земли заметным улучшением сходимости результатов по разным градусным измерениям, после введения «поправок за трехосность». Но эти поправки, получаемые легко из таблицы 13, показывают порядок тех возможных искажений в выводах эллипсоида из отдельных дуг и отдельных, даже больших, сетей, которые обусловлены значительными волнами геоида. Средние ошибки в  $\pm 100\text{ м}$  и в  $\pm 30\text{ м}$ , которые, применяя способ наименьших квадратов, приписывают выводам из отдельных дуг и из отдельных сетей, могут оказаться в полном несоответствии с действительной ошибкой вывода, если его отнести к определению общего земного эллипсоида.

Но если не следует утверждать существование трехосности земного эллипсоида, то существование значительной долготной волны геоида в восточной части Атлантического океана и в Западной Европе, обуславливающей положительные высоты геоида в этой области над нормальным сфероидом, следует считать доказанным, как и существование волны геоида противоположного характера в пределах Северной Америки. Хотя максимум этой второй волны видимо отстоит не на  $90^\circ$  долготы от максимума первой волны, хотя вообще максимумы этих двух волн пахупаны грубо и грубо установлены и максимальные высоты (или понижения) в них, которые, очевидно, притом не равны по величине, тем не менее несомненно, что вводя наши «поправки за трехосность»,

указанные в таблице 13, мы улучшаем результаты, полученные по отдельным градусным измерениям Западной Европы и по астрономо-геодезической сети США: знак всех поправок, несомненно, верен, по размер может быть ошибочен до 50% от вводимой поправки — в ту или другую сторону. Для СССР собственно нет еще прочного материала, выясняющего течение долготных волн на ее территории, но как показывает таблица 13, вывод по СССР не зависит от влияния трехосности. При огромном протяжении СССР по долготе, долготные волны геоида на ее территории непременно сменяются и по знаку и по величине, и в общем выводе по СССР следует ожидать компенсации в значительной степени влияния этих волн на установление размеров и сжатия общего земного эллипсоида.

Астрономо-геодезическая сеть СССР замечательна в двух отношениях:

1) результаты по ней в очень малой степени зависят от введения топографо-изостатических редукций, и следовательно, и от ошибок в них;

2) результаты по ней собственно не зависят от трехосности эллипсоида, и следовательно, и от ошибок в учете влияния этой трехосности. Далее, очевидно, в выводах из этой сети ничтожно влияют долготные волны геоида, которые все-таки являются главными в комплексе значительных волн геоида. Выводы проф. Ф. Н. Красовского 1936 г. по СССР основаны на заметно меньшем материале, чем последующие выводы ЦНИИГАиК; к тому же ЦНИИГАиК использовал, как было уже выше указано, значительный гравиметрический материал. Поэтому из всех выводов таблицы 12 вывод ЦНИИГАиК, отмеченный звездочкой в разделе выводов по сети СССР, должен считаться имеющим наибольший вес: этот вывод дает

$$a = 6\,378\,273 \pm 47 \text{ м},$$

$$(\alpha) = 1:298,2 \pm 1,1,$$

или, по учете влияния трехосности,

$$\left. \begin{aligned} a &= 6\,378\,269 \text{ м} \\ (\alpha) &= 1:298,3 \text{ м} \end{aligned} \right\} \quad (\text{СССР})$$

Сеть США дает по выводу Ф. Н. Красовского и с учетом трехосности

$$a = 6\,378\,220 \text{ м}, \quad \text{при сжатии } 1:298,3,$$

причем выводимое сжатие из этой сети США равно 1:297,7, и этому сжатию при учете трехосности будет соответствовать

$$a = 6\,378\,209 \text{ м}.$$

Дуги Западной Европы, по присоединении их к сети США, ничтожно изменяют вывод из этой сети; присоединение же их к сети СССР оказывает некоторое влияние, и именно в одну сторону на выводы ЦНИИГАиК, и в другую сторону — на выводы Ф. Н. Красовского.

**Окончательный вывод приходится принять тот, который обозначен выше буквой (ц) и основан на материалах по США, СССР и Западной Европы с учетом трехосности:**

$$\underline{a = 6\,378\,245 \text{ м},}$$

$$\underline{(\alpha) = 1:298,3.}$$

Вывод этот собственно почти совпадает или крайне близок с выводом, полученным в ЦНИИГАиК по одному СССР.

Общий вывод Ф. Н. Красовского 1936 г. был следующий

$$a = 6\,378\,210 \text{ м},$$

$$(\alpha) = 1:298,6,$$

а при сжатии

$$\left. \begin{array}{l} 1:298,3 \\ a = 6\,378\,201 \text{ м} \end{array} \right\} \quad (k)$$

Мы можем утверждать, что вывод

$$a = 6\,378\,245,$$

$$(\alpha) = 1:298,3,$$

конечно, является наилучшим в данное время и имеющим значительно большее обоснование, чем вывод Хейфорда:

$$a = 6\,378\,388,$$

$$(\alpha) = 1:297,0,$$

признанный имеющим международное значение и рекомендуемый Международным геодезическим союзом для использования и введения в геодезических работах всех стран.

Понятно, что полученный в ЦНИИГАиК вывод подлежит еще дальнейшему пересмотру и усовершенствованию. Ведь в работах в СССР по выводу общего земного эллипсоида вовсе не использовался материал по большим индийским градусным измерениям и по большому градусному измерению в Африке; новый гравиметрический материал во Франции не использован при обработке дуги западно-европейского меридиана; результаты по США не перечислены на новое и меньшее значение глубины изостатической компенсации. Нужно пожелать, чтобы научная работа по выводу общего земного эллипсоида в СССР продолжалась, соединяясь с исследованиями в области применения изостазии и с исследованиями по использованию в градусных измерениях современных гравиметрических материалов.

#### § 104. Об исследовании местной фигуры геоида астрономо-геодезическим путем

При решении этой задачи используются или частые профили астрономического нивелирования, все между собой связанные и покрывающие некоторую площадь, или частые профили астрономо-гравиметрического нивелирования, также все между собой связанные и покрывающие некоторую площадь, или система достаточно частых астрономических пунктов, совпадающих с пунктами некоторой триангуляции, покрывающей сплошь некоторый район. Мы остановимся на последнем случае, как более общем. Назовем через  $h$  высоту геоида в некоторой его точке с координатами  $B$  и  $L$  относительно референц-эллипсоида, а через  $\xi$  и  $\eta$  слагающие уклонения отвеса в той же точке. Мы, очевидно, имеем

$$-\frac{\partial h}{\partial B M} = \xi''; \quad -\frac{\partial h}{\partial L \cos BN} = \eta''.$$

Вводя систему прямоугольных сфероидических координат  $X$  и  $Y$ , мы можем написать

$$\frac{MdB}{\rho''} = dX; \quad \frac{N \cos BdL}{\rho''} = dY;$$

и поэтому

$$\xi'' = -\frac{\partial h}{\partial X} \rho''; \quad \eta'' = -\frac{\partial h}{\partial Y} \rho''.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \xi}{\partial Y} = \frac{\partial \eta}{\partial X}. \quad (731)$$

Уравнение (731) имеет определенное значение в исследованиях фигуры геоида, как необходимое условие, которое должно непременно быть принимаемо в расчет. Оно было впервые указано в 1863 г. профессором Московского университета Ф. А. Слудским, а затем самостоятельно «открыто» в 1875 г. французским ученым Вилларсо. Первый применил его проф. И. И. Померанцев в своей прекрасной работе «О фигуре геоида в Ферганской области» в 1897 г.

Если от точки  $M$  геоида с координатами  $X$  и  $Y$  и высотой  $h$  над референц-эллипсоидом мы переходим к точке  $N$  геоида с координатами  $X + dX$  и  $Y + dY$  и с высотой  $h + dh$ , то мы можем представить себе этот переход сперва в виде перехода от  $M$  по меридианному сечению геоида до точки  $N_1$ , лежащей в пересечении этого сечения с сечением геоида по параллели точки  $N$ , а затем в виде перехода от  $N_1$  к  $N$ . Поэтому

$$dh = -\frac{\xi''}{\rho''} dX - \frac{\eta''}{\rho''} dY. \quad (732)$$

Уравнение (732) является дифференциальным уравнением поверхности геоида.

Интеграл уравнения (732) будет

$$h = - \int \frac{\xi''}{\rho''} dX - \int \left[ \frac{\eta''}{\rho''} + \int \frac{\partial \xi}{\partial Y} \frac{1}{\rho''} dX \right] dY. \quad (733)$$

Интегрирование уравнения (733) требует, чтобы  $\xi$  и  $\eta$  были выражены, как функции координат  $X$  и  $Y$  (или  $B$  и  $L$ ). Общий метод решения задачи будет следующий. Представим  $\xi$  и  $\eta$ , используя интерполяционные формулы, в виде следующих уравнений

$$\left. \begin{aligned} \xi = & C_0 + C_1 \cos \varphi + C_2 \cos 2\varphi + \dots + C_i \cos i\varphi + \\ & + E_1 \sin \varphi + E_2 \sin 2\varphi + \dots + E_i \sin i\varphi + \\ & + G_1 \cos \lambda + G_2 \cos 2\lambda + \dots + G_{i_1} \cos i_1 \lambda + \\ & + K_1 \sin \lambda + K_2 \sin 2\lambda + \dots + K_{i_1} \sin i_1 \lambda + \\ & + M_{1,1} \cos \varphi \cos \lambda + M_{1,2} \cos \varphi \cos 2\lambda + \dots + M_{1,i_1} \cos \varphi \cos i_1 \lambda + \\ & + N_{1,1} \sin \varphi \cos \lambda + \\ & + N_{1,2} \sin \varphi \cos 2\lambda + \dots + N_{1,i_1} \sin \varphi \cos i_1 \lambda + \\ & + P_{1,1} \cos \varphi \sin \lambda + P_{1,2} \cos \varphi \sin 2\lambda + \dots + P_{1,i_1} \cos \varphi \sin i_1 \lambda + \end{aligned} \right\} \quad (734)$$

$$\left. \begin{aligned}
 &+ Q_{1,1} \sin \varphi \sin \lambda + \\
 &+ Q_{1,2} \sin \varphi \sin 2\lambda + \dots + Q_{1,i_1} \sin \varphi \sin i_1 \lambda + \\
 &+ M_{2,1} \cos 2\varphi \cos \lambda + M_{2,2} \cos 2\varphi \cos 2\lambda + \dots + M_{2,i_1} \cos 2\varphi \cos i_1 \lambda + \\
 &+ N_{2,1} \sin 2\varphi \cos \lambda + \\
 &+ N_{2,2} \sin 2\varphi \cos 2\lambda + \dots + N_{2,i_1} \sin 2\varphi \cos i_1 \lambda + \\
 &+ P_{2,1} \cos 2\varphi \sin \lambda + P_{2,2} \cos 2\varphi \sin 2\lambda + \dots + \\
 &+ P_{2,i_1} \cos 2\varphi \sin i_1 \lambda + Q_{2,1} \sin 2\varphi \sin \lambda + \\
 &+ Q_{2,2} \sin 2\varphi \sin 2\lambda + \dots + Q_{2,i_1} \sin 2\varphi \sin i_1 \lambda + \\
 &+ \dots \dots \dots
 \end{aligned} \right\} (734)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \eta = &c_0 + c_1 \cos \varphi + c_2 \cos 2\varphi + \dots + c_i \cos i\varphi + \\
 &+ e_1 \sin \varphi + e_2 \sin 2\varphi + \dots + e_i \sin i\varphi + \\
 &+ g_1 \cos \lambda + g_2 \cos 2\lambda + \dots + g_{i_1} \cos i_1 \lambda + \\
 &+ k_1 \sin \lambda + k_2 \sin 2\lambda + \dots + k_{i_1} \sin i_1 \lambda + \\
 &+ m_{1,1} \cos \varphi \cos \lambda + m_{1,2} \cos \varphi \cos 2\lambda + \dots + m_{1,i_1} \cos \varphi \cos i_1 \lambda + \\
 &+ n_{1,1} \sin \varphi \cos \lambda + \\
 &+ n_{1,2} \sin \varphi \cos 2\lambda + \dots + n_{1,i_1} \sin \varphi \cos i_1 \lambda + \\
 &+ p_{1,1} \cos \varphi \sin \lambda + p_{1,2} \cos \varphi \sin 2\lambda + \dots + p_{1,i_1} \cos \varphi \sin i_1 \lambda + \\
 &+ q_{1,1} \sin \varphi \sin \lambda + \\
 &+ q_{1,2} \sin \varphi \sin 2\lambda + \dots + q_{1,i_1} \sin \varphi \sin i_1 \lambda + \\
 &+ m_{2,1} \cos 2\varphi \cos \lambda + m_{2,2} \cos 2\varphi \cos 2\lambda + \dots + m_{2,i_1} \cos 2\varphi \cos i_1 \lambda + \\
 &+ n_{2,1} \sin 2\varphi \cos \lambda + \\
 &+ n_{2,2} \sin 2\varphi \cos 2\lambda + \dots + n_{2,i_1} \sin 2\varphi \cos i_1 \lambda + \\
 &+ p_{2,1} \cos 2\varphi \sin \lambda + p_{2,2} \cos 2\varphi \sin 2\lambda + \dots + p_{2,i_1} \cos 2\varphi \sin i_1 \lambda + \\
 &+ q_{2,1} \sin 2\varphi \sin \lambda + \\
 &+ q_{2,2} \sin 2\varphi \sin 2\lambda + \dots + q_{2,i_1} \sin 2\varphi \sin i_1 \lambda + \\
 &+ \dots \dots \dots
 \end{aligned} \right\} (735)$$

Более общий вид уравнений (734) и (735) будет следующий

$$\left. \begin{aligned}
 \xi = &C_0 + \Sigma C_i \cos i\varphi + \Sigma E_i \sin i\varphi + \Sigma G_{i_1} \cos i_1 \lambda + \Sigma K_{i_1} \sin i_1 \lambda + \\
 &+ \Sigma \Sigma (M_{i,i_1} \cos i\varphi \cos i_1 \lambda + N_{i,i_1} \sin i\varphi \cos i_1 \lambda + \\
 &+ P_{i,i_1} \cos i\varphi \sin i_1 \lambda + Q_{i,i_1} \sin i\varphi \sin i_1 \lambda) + \dots
 \end{aligned} \right\}, (736)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \eta = &c_0 + \Sigma c_i \cos i\varphi + \Sigma e_i \sin i\varphi + \Sigma g_{i_1} \cos i_1 \lambda + \Sigma k_{i_1} \sin i_1 \lambda + \\
 &+ \Sigma \Sigma (m_{i,i_1} \cos i\varphi \cos i_1 \lambda + n_{i,i_1} \sin i\varphi \cos i_1 \lambda + \\
 &+ p_{i,i_1} \cos i\varphi \sin i_1 \lambda + q_{i,i_1} \sin i\varphi \sin i_1 \lambda) \dots
 \end{aligned} \right\}. (737)$$

В (734) — (737) под  $\lambda$  понимается долгота точки от принятой за начало координат  $X$  и  $Y$  точки в исследуемом районе.

Обычно в уравнениях (734) и (735) ограничиваются двойными дугами, т. е.  $i$  и  $i_1$  получают значения единица и два. Тогда в этих уравнениях будет 50 коэффициентов  $C, E, G, K, c, e, g, k$ , подлежащих определению. Дифференцируя уравнения (734) по  $\lambda$ , а (735) по  $\varphi$ , мы далее пишем на основании (731)

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial \lambda}\right) \frac{1}{N \cos \varphi} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \varphi}\right) \frac{1}{M}$$

или несколько упрощенно

$$\frac{\partial \xi}{\partial \lambda} = \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \cos \varphi. \quad (738)$$

Использование уравнения (738) приводит, применяя метод сравнения в нем коэффициентов, к исключению из уравнений (734) и (735) ряда неизвестных коэффициентов. Так, при  $i$  и  $i_1$ , получающих значения единица и два, исключаются при помощи (738) 24 коэффициента из общего их числа 50. После указанного применения уравнения (738), уравнения (734) и (735) переписываем в новом виде, и далее, имея  $\xi$  и  $\eta$  для ряда пунктов исследуемой территории, подставляем эти определенные астрономо-геодезическим путем значения  $\xi$  и  $\eta$  в преобразованные уравнения (734) и (735), которые затем решаем по способу наименьших квадратов для вывода неизвестных коэффициентов  $C, E, G, K, c, e, g, k, M, N, P, Q, m, n, p, q$ . После определения этих коэффициентов остается подставить полученные с ними общие выражения (734) и (735) для  $\xi$  и  $\eta$  и из (734) выражение  $\frac{\partial \xi}{\partial \lambda}$  в уравнение (733) и его интегрировать. В результате найдем уравнение геоида для данного района.

Этот общий метод обычно значительно упрощается. На карте строят через интервал  $5''$  или  $2'',5$  кривые, соединяющие точки с равными уклонами отвеса  $\xi$  по широте; проведя на такой карте ряд меридианных сечений, при помощи кривых равных уклонов  $\xi$  по широте получают интерполированные значения  $\xi$  для ряда точек, достаточно частых и взятых на отмеченных меридианных сечениях. Допустим далее, что на некоторой параллели мы имеем настолько частые точки с тщательно определенными астрономическими долготами, что можем выполнять интерполирование значений  $\eta$  вдоль этой параллели.

Из уравнения

$$\left(\frac{dh}{dX}\right) = -\frac{\xi''}{\rho''},$$

интегрируя его по  $X$ , мы напомним для точки с координатами  $X$  и  $Y$

$$h_{XY} = \int_{X_0}^X \frac{\xi''}{\rho''} dX + f(Y), \quad (739)$$

причем в (739) в правой части первое слагаемое дает нарастание высоты  $h$  по меридианному профилю с ординатой  $Y$  на отрезке его между



абсциссами  $X_0$  и  $X$ , а  $f(Y)$  есть значение  $h$  в начальной точке этого профиля с координатами  $X_0$  и  $Y$ ; понятно, что  $\int_{X_0}^X \frac{\xi''}{\rho''} dX$  получается численным интегрированием по меридианному профилю, для частых точек которого получены ранее интерполированные значения  $\xi$  (при помощи карты кривых  $\xi$ ).

Если мы интерполированные  $\xi$  имеем для меридианных сечений с ординатами  $Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ , то напомним

$$\left. \begin{aligned} h_{X,Y_0} &= - \int_{X_0}^X \frac{\xi_0''}{\rho''} dX + f(Y_0) \\ h_{X,Y_1} &= - \int_{X_0}^X \frac{\xi_1''}{\rho''} dX + f(Y_1) \\ h_{X,Y_2} &= - \int_{X_0}^X \frac{\xi_2''}{\rho''} dX + f(Y_2) \\ &\dots \dots \dots \\ h_{X,Y_n} &= - \int_{X_0}^X \frac{\xi_n''}{\rho''} dX + f(Y_n) \end{aligned} \right\}, \quad (740)$$

причем в (740) через  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  обозначены интерполированные значения  $\xi$  соответственно в точках, взятых на профилях с ординатами  $Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ . Будем понимать под  $X_0$  именно абсциссу сечения (по параллели), параллельного оси  $Y$ , на котором мы получили интерполированные значения  $\eta$  для точек с ординатами  $Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ . Из уравнения

$$\frac{dh}{dY} = - \frac{\eta''}{\rho''},$$

интегрируя его по  $Y$ , мы напомним для точки с координатами  $X$  и  $Y$

$$h_{Y,X} = - \int_{Y_0}^Y \eta dY + \psi(X), \quad (741)$$

причем в (741) величины  $\eta$  относятся к точкам на перпендикулярном к оси  $X$  сечению, имеющему абсциссу  $X$ , и именно к части этого сечения между ординатами  $Y_0$  и  $Y$ ; а член  $-\int_{Y_0}^Y \eta dY$ , очевидно, дает нарастание высоты по этому сечению с абсциссой  $X$  между ординатами  $Y_0$  и  $Y$  и получается численным интегрированием; член  $\psi(X)$  в (741) представляет высоту точки с координатами  $Y_0$  и  $X$ .



и далее напишем (744) в таком виде

$$\Delta \lambda_a - \Delta \lambda_0 = \sec \varphi_m \operatorname{tg} q (\xi_a - \xi_0), \quad (745)$$

но, конечно, лишь при небольшом расстоянии  $Oa$ .

Общая же формула будет такая

$$\Delta \lambda_a - \Delta \lambda_0 = \sec \varphi_m \int_0^a \left( \frac{d\xi}{dX} \right) \operatorname{tg} q dX. \quad (746)$$

По формулам (745) или (746) будут получены  $\Delta \lambda_0$  вместо наблюдаемых  $\Delta \lambda_a$ , причем при применении (746) с карты кривых равных уклонов отвеса  $\xi$  берут  $q$ ,  $\frac{d\xi}{dX}$  и выполняют численное интегрирование при вычислении правой части формулы (746).

## Глава XI

# О МЕТОДАХ ОБРАБОТКИ БОЛЬШИХ АСТРОНОМО-ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

### § 105. Общие соображения

В обширных астрономо-геодезических сетях число треугольников триангуляции выражается несколькими и даже многими сотнями. Поэтому задача уравнивания под условием определения поправок *непосредственно* измеренных величин, т. е. поправок наблюдаемых направлений, становится чрезвычайно громоздкой, если мы говорим *об общем* уравнивании всей сети. Между тем, звенья триангуляции I класса, из которых каждое заключено между двумя выходными сторонами с определенными для них лапласовыми азимутами, являются *достаточно обособленными*. Общая для двух смежных звеньев длина выходной стороны вводится всегда в уравнивание с бесконечным весом, и поправка ее в этом уравнивании отсутствует.

В нашем геодезическом производстве полевые наблюдения выполняются по звеньям, т. е. в большинстве случаев горизонтальные направления при концах выходной стороны, входящие в треугольники следующего по времени исполнения звена, измеряются отдельно и независимо от направлений при концах той же выходной стороны, но входящих в треугольники звена, ранее исполненного. Правда, для контроля на каждом из конечных пунктов выходной стороны при прокладке следующего звена наблюдают непременно еще угол в треугольнике предыдущего звена, примыкающем к той же выходной стороне. Но по существу *общих наблюдаемых* направлений в треугольниках смежных звеньев мы не получаем. Тогда мы имеем право сказать, что если бы поправки лапласовых азимутов выходных сторон можно было бы приравнять нулю, как это имеет место в отношении поправок длин выходных сторон, то мы могли бы считать звенья триангуляции I класса при ее уравнивании *обособленными друг от друга*. Общая для двух смежных звеньев поправка лапласова азимута выходной стороны связывает уравнивание этих двух звеньев посредством азимутальных или лапласовых уравнений в одно целое, а в результате эти поправки лапласовых азимутов связывают в одно целое уравнивание всех звеньев. Но поправки лапласовых азимутов невелики и в своей главной части собственно независимы друг от друга для разных выходных сторон. В самом деле, для лапласова азимута  $A_{IK}^L$  имеем уравнение

$$A_{IK}^L = \alpha_{IK} - (\lambda_I - L_I) \sin \varphi_I$$

и отсюда

$$\delta A_{I,K}^L = \delta \alpha_{I,K} - \delta \lambda_I \sin \varphi_I$$

(ввиду малости  $dL_I$ ).

Ошибки  $\delta \alpha_{I,K}$  и  $\delta \lambda_{I,K}$ , как ошибки астрономически определенных азимута и долготы, конечно, для разных пунктов триангуляции не зависят друг от друга; среднюю же величину  $\delta \alpha_{I,K} - \delta \lambda_I \sin \varphi_I$  мы должны считать около  $\pm 0''{,}6$ . По сравнению с средней ошибкой геодезической передачи азимута по углам треугольников в звене длиной в 225 км, составляющей около  $\pm 2''{,}5 - \pm 2''{,}8$ , эта ошибка лапласова азимута, конечно, мала. Будет неправильно величины  $\delta \alpha_{I,K}$  и  $\delta \lambda_I$  положить равными нулю и тем самым осуществить обособленность смежных звеньев триангуляции I класса. Но если мы, *уравняв предварительно и отдельно друг от друга звенья*, далее заменим треугольники в каждом звене геодезической линией, соединяющей конечные лапласовы пункты звена, составим из таких геодезических линий полигоны триангуляции и при уравнивании таких полигонов введем и азимутальные или лапласовы условия с входящими в них величинами  $\delta \alpha_{I,K}$  и  $\delta \lambda_I$ , то будут ли сколько-нибудь существенно отличаться полученные при этом  $\delta \alpha_{I,K}$  и  $\delta \lambda_I$  от тех их значений, когда мы ту же сеть уравнивали бы строго по способу наименьших квадратов, соединяя в один процесс уравнивание условий треугольников всех звеньев, всех азимутальных условий, всех условий полигонов, без замены треугольников звена геодезической линией и с отысканием поправок непосредственно измеренных направлений и астрономических азимутов и долгот? Достаточных опытов вычислительного характера мы для ответа на этот вопрос не имеем, но можем предполагать, что, при отсутствии *слабых мест* в уравниваемой сети, среднее квадратическое значение различия поправок лапласовых азимутов (или величин  $\delta \alpha - \delta \lambda \sin \varphi$ ) при том и другом порядке уравнивания сети не превзойдет и, вероятно, будет заметно менее  $\pm 0''{,}6$ , т. е. среднего квадратического значения этой поправки. Отсюда различие ориентировок звена при том и другом порядке уравнивания будет заметно меньше  $\pm \frac{0''{,}6}{\sqrt{2}}$  и различие средних квадра-

тических поперечных сдвигов звена длиной в 225 км будет заметно менее 0,4 м. Эта величина хотя и непренебрегаемая, но все-таки небольшая по сравнению с средним поперечным сдвигом в  $\pm 0,8$  м, обусловливаемым ошибками наблюдаемых элементов в звене. Идя на допущение добавочных поперечных сдвигов звена, меньших для отдельного звена 0,4 м, при которых общий квадратический сдвиг достигает 0,9 м вместо 0,8 м, мы получаем основание к тому, чтобы уравнивание большой астрономо-геодезической сети вести таким образом: сперва выполняем уравнивание отдельных звеньев — *независимо друг от друга*; затем в каждом уравненном звене выводим длину геодезической линии, соединяющей конечные лапласовы пункты звена, и астрономические азимуты этой геодезической линии в ее концах, после чего образуем астрономо-геодезическую сеть именно из таких геодезических линий и, решая условные уравнения или уравнения погрешностей в такой сети, выполняем ее *общее уравнивание*. В результате такого уравнивания получаем: или уравненные значения длин геодезических линий, соединяющих смежные лапласовы пункты и уравненные лапласовы азимуты этих геодезических линий в их конечных точках, и вычисляем затем по этим длинам и азимутам окончательные геодезические координаты лапласовых пунктов астрономо-геодезической сети; или получаем уравненные геодезические координаты лапласовых пунктов, и после этого поправки длин геодези-

ческих линий и их лапласовых и астрономических азимутов. Первый вид решения имеем при общем уравнивании сети по способу «условных наблюдений»; второй вид решения имеем при общем уравнивании сети по способу «посредственных наблюдений». Тот ли или другой способ общего уравнивания сети будет применен, но после окончательного получения элементов этой сети, образованной из соединяющих смежные лапласовы пункты геодезических линий, останется выполнить еще один этап уравнивания: именно, пужно будет вставить треугольники каждого звена между окончательно установленными из общего уравнивания координатами конечных лапласовых пунктов этого звена и окончательно установленными из того же уравнивания астрономическими азимутами и долготами лапласовых пунктов.

Идея возможности при общем уравнивании сети заменить треугольники каждого отдельного звена геодезической линией, соединяющей конечные лапласовы пункты, и образовать сеть из таких геодезических геолиний была введена в восьмидесятих годах прошлого столетия Гельмертом; она применима, конечно, к астрономо-геодезическим сетям и не обоснована в применении к сетям чисто геодезическим, причем, очевидно, применение этой идеи в сетях астрономо-геодезических базируется на *возможно высокую точность* определения астрономических азимутов и астрономических долгот в пунктах Лапласа. В очень больших сетях, конечно, нужно считаться как с действием случайных ошибок, так в особенности и с действием ошибок систематического характера. Хорошо определенные лапласовы азимуты играют существеннейшую роль в борьбе с накоплением систематических ошибок в большой астрономо-геодезической сети, и поэтому некоторые ученые даже предлагали считать их жесткими при уравнивании. Очевидно, предложенный Гельмертом путь является путем средним и достаточно обоснованным.

Отметим, что по некоторым опытам, исполненным при обработке зарубежных триангуляционных полигонов, оказалось, что, при наличии *слабых мест* в том или другом триангуляционном ряде, уравнивание без замены треугольников звеньев геодезическими линиями приводит, несмотря на его строгость, к деформациям сети *большим, чем при уравнивании, подразделенном на три этапа*:

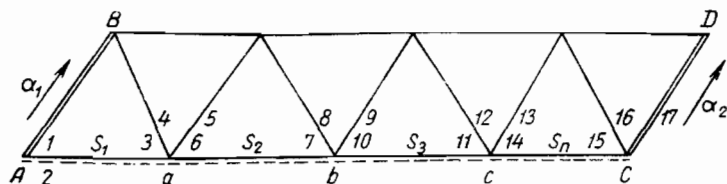
- 1) уравнивание треугольников звеньев независимо и раздельно по каждому звену;
- 2) образование сети из геодезических линий, соединяющих смежные лапласовы пункты на концах звеньев, и общее уравнивание такой сети;
- 3) вставка треугольников каждого звена между окончательно установленными элементами сети из геодезических линий.

Этот путь представляется и нам наиболее приемлемым и лежит в основе методов уравнивания, которые будут изложены в последующих параграфах.

#### **§ 106. Строгий вид азимутального условного уравнения в звене триангуляции I класса. Сравнение методов развертывания и проектирования триангуляции**

На черт. 153 изображено некоторое звено триангуляции I класса, заключенное между выходными сторонами  $AB$  и  $CD$ . Точки  $A$  и  $C$  суть пункты Лапласа; назовем в  $A$  астрономический азимут стороны  $AB$  через  $\alpha_1$ , астрономическую долготу точки  $A$  — через  $\lambda_1$ ; назовем в  $C$  астрономический азимут направления  $CD$  через  $\alpha_2$ , а астрономическую долготу

точки  $C$  — через  $\lambda_2$ . Возьмем далее *ходовую* линию  $AabcC$  и занумеруем наблюдаемые направления так, как это показано на черт. 153. Представим себе далее, что по длине выходной стороны  $AB$  и по *измеренным углам* в треугольниках звена, только лишь приведенным к плоским по теореме Лежандра, мы вычислим длины сторон  $Aa, ab, bc, cC$  и получим для них значения  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ . Допустим, что из вычислений предыдущих звеньев мы получили для геодезического азимута в  $A$  направления  $AB$  значение  $A_1$ , а для геодезической широты и долготы точки  $A$  соответственно значения  $B_1$  и  $L_1$ . С этими величинами  $A_1, B_1$  и  $L_1$  мы вычислим теперь, применяя постепенно по сторонам ходовой линии формулы Шрейбера и используя длины  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$  и измеренные направления 1, 2, 3, 6, 7, 10, ..., геодезические широты, долготы и азимуты в



Черт. 153

точках  $a, b, c, \dots, C$ . В результате мы придем в точке  $C$  к геодезическому азимуту  $A_2$  стороны  $CD$ , геодезической широте  $B_2$  и геодезической долготе  $L_2$  точки  $C$ .

Обозначим для стороны ходовой линии с номером  $k$ , имеющей длину  $s_k$ , разность вычисленных геодезических долгот ее конечных точек через  $l_k$ , разность вычисленных геодезических азимутов по этой же стороне в ее конечных точках — через  $\delta_k$ , среднюю широту и средний азимут по этой стороне соответственно через  $\varphi_m^k$  и  $A_m^k$ . Мы имеем такое условное уравнение по ходовой линии  $Aabc \dots C$

$$A_1 + dA_1 + 2 - 1 + (2) - (1) + \delta_1 + 180^\circ + d\delta_1 + 6 - 3 + (6) - (3) + \delta_2 + 180^\circ + d\delta_2 + 10 - 7 + (10) - (7) + \delta_3 + d\delta_3 + 180^\circ + 14 - 11 + (14) - (11) + \delta_4 + d\delta_4 + 180^\circ + \dots + 17 - 15 + (17) - (15) = A_2 + dA_2. \quad (747)$$

Но

$$A_1 + 2 - 1 + \delta_1 + 180^\circ + 6 - 3 + \delta_2 + 180^\circ + 10 - 7 + \delta_3 + 180^\circ + 14 - 11 + \delta_4 + 180^\circ + \dots + 17 - 15 = A_2, \quad (748)$$

по условию вычисления  $A_2$ . С другой стороны

$$\left. \begin{aligned} A_1 + dA_1 &= \alpha_1 + \delta\alpha_1 - (\lambda_1 + \delta\lambda_1 - L_1 - dL_1) \sin B_1 \\ A_2 + dA_2 &= \alpha_2 + \delta\alpha_2 - (\lambda_2 + \delta\lambda_2 - L_2 - dL_2) \sin B_2 \end{aligned} \right\}, \quad (749)$$

$$\left. \begin{aligned} dA_1 &= \alpha_1 - A_1 - (\lambda_1 - L_1) \sin B_1 + \delta\alpha_1 - (\delta\lambda_1 - dL_1) \sin B_1 \\ dA_2 &= \alpha_2 - A_2 - (\lambda_2 - L_2) \sin B_2 + \delta\alpha_2 - (\delta\lambda_2 - dL_2) \sin B_2 \end{aligned} \right\}. \quad (750)$$

Подставляя (748), (749) и (750) в (747), мы получим

$$\alpha_1 - A_1 - (\lambda_1 - L_1) \sin B_1 + \delta\alpha_1 - (\delta\lambda_1 - dL_1) \sin B_1 + (2) - (1) + d\delta_1 + (6) - (3) + d\delta_2 + (10) - (7) + d\delta_3 + (14) - (11) + d\delta_4 + \dots + d\delta_n + (17) - (15) = \alpha_2 - A_2 - (\lambda_2 - L_2) \sin B_2 + \delta\alpha_2 - (\delta\lambda_2 - dL_2) \sin B_2.$$

Или

$$(2)-(1)+(6)-(3)+(10)-(7)+(14)-(11)+\dots+(17)-(15)+\sum_1^n d\delta - \\ - \delta\alpha_2 + (\delta\lambda_2 - dL_2) \sin B_2 + \delta\alpha_1 - (\delta\lambda_1 - dL_1) \sin B_1 - \\ - \{(\alpha_2 - A_2) - (\alpha_1 - A_1) - (\lambda_2 - L_2) \sin B_2 + (\lambda_1 - L_1) \sin B_1\} = 0. \quad (751)$$

В (751) величины  $\delta\alpha_1$ ,  $\delta\alpha_2$ ,  $\delta\lambda_1$ ,  $\delta\lambda_2$  и поправки направлений, конечно, обусловлены только ошибками астрономических и геодезических наблюдений и являются ошибками непосредственно наблюдаемых величин; величины же  $d\delta$ ,  $dL_2$ ,  $dL_1$  есть функции ошибок наблюдаемых величин и, кроме того, обусловлены, сверх влияния ошибок наблюдаемых величин, и другими причинами, о которых будет сказано ниже.

Так как

$$L_2 = L_1 + l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n,$$

то

$$dL_2 = dL_1 + \sum_1^n dl.$$

Называя через  $\Delta$  поправку наблюдаемого левого по ходовой линии угла, мы перепишем еще уравнение (751) в таком виде

$$\delta\alpha_2 - \delta\alpha_1 - \delta\lambda_2 \sin B_2 + \delta\lambda_1 \sin B_1 - \sum_1^{n+1} \Delta + dL_1 (\sin B_2 - \sin B_1) + \\ + \sin B_2 \sum_1^n dl - \sum_1^n d\delta + \{[\alpha_2 - (\lambda_2 - L_2) \sin B_2] - A_2\} - \\ - \{[\alpha_1 - (\lambda_1 - L_1) \sin B_1] - A_1\} = 0. \quad (752)$$

Остановимся сперва на значении в (752) члена

$$Q = \sin B_2 \sum_1^n dl - \sum_1^n d\delta. \quad (753)$$

Уравнение (753) перепишем еще так

$$Q = \sum_1^n (dl_k \sin B_2 - d\delta_k),$$

причем  $dl_k$  и  $d\delta_k$  относятся к одной и той же стороне ходовой линии, именно к стороне с номером  $k$ .

Отбрасывая во вторых гауссовых формулах члены третьего порядка, которые не будут изменяться при дифференцировании  $l$  и  $\delta$ , мы напомним

$$\left. \begin{aligned} l_k &= (2)_k \frac{s_k \sin A_m^k}{\cos \varphi_m^k} \\ \delta_k &= (2)_k s_k \sin A_m^k \operatorname{tg} \varphi_m^k \end{aligned} \right\}. \quad (754)$$





Для рядов по меридианам и параллелям, очевидно,  $\sum_1^n (dl_k^s \sin B_2 - d\delta_k^s)$  чрезвычайно близка к нулю. Но возьмем  $A_m = 45^\circ$ , а  $\frac{ds}{s}$  положим равным  $1:100\,000$ , т. е. давая  $ds$  предельное значение для ряда триангуляции I класса; тогда при  $ns = 225\,000$  м получим из (757)

$$\sum_1^n (dl_k^s \sin B_2 - d\delta_k^s) < \frac{1}{400\,000} \frac{\rho''}{784} < \frac{1''}{1568}.$$

В действительности  $\sum_1^n (dl_k^s \sin B_2 - d\delta_k^s)$  не превосходит  $0'',0002$ , и, конечно, эта часть  $Q$  в уравнении (752) является совершенно пренебрегаемой; *ошибки длин сторон ходовой линии не влияют на составление азимутального уравнения.*

Назовем теперь через  $dl_k^A$  и  $d\delta_k^A$  изменения  $l_k$  и  $\delta_k$ , обусловленные изменением азимута  $A_m^k$  в (754) на  $dA^k$ . Мы имеем

$$\begin{aligned} dl_k^A &= (2)_k s_k \frac{\cos A_m^k}{\cos \varphi_m^k} dA^k; \\ d\delta_k^A &= (2)_k s_k \cos A_m^k \operatorname{tg} \varphi_m^k dA^k; \\ dl_k^A \sin B_2 - d\delta_k^A &= (2)_k \frac{\cos A_m^k s_k}{\cos \varphi_m^k} dA^k (\sin B_2 - \sin \varphi_m^k); \\ dl_k^A \sin B_2 - d\delta_k^A &= (2)_n \frac{s_k \cos A_m^k}{\cos \varphi_m^k} (B_2 - \varphi_m^k) \cos \frac{B_2 + \varphi_m^k}{2} dA^k. \end{aligned} \quad (758)$$

Опять-таки, считая ряд прямолинейным и образованным из треугольников, близких к равносторонним, можем нарастание  $\Delta\varphi$  широты на отрезках  $Aa$ ,  $ab$ ,  $ac \dots$  считать постоянным, а также считать постоянным  $s$  и азимут  $A_m^k$ . Имея в виду, что

$$\frac{\cos \frac{B_2 + \varphi_m^k}{2}}{\cos \varphi_m^k} = \frac{\cos \varphi_m^k \frac{(B_2 - \varphi_m^k)}{2} \sin \varphi_m^k}{\cos \varphi_m^k} = 1 - \frac{(B_2 - \varphi_m^k) \operatorname{tg} \varphi_m^k}{2};$$

перепишем (758) так

$$\begin{aligned} dl_k^A \sin B_2 - d\delta_k^A &= (2) s \cos A_m (B_2 - \varphi_m^k) dA^k - \\ &- (2) s \cos A_m (B_2 - \varphi_m^k)^2 \operatorname{tg} \varphi_m^k \frac{dA^k}{2}. \end{aligned}$$

Применяя ряд (756), будем иметь далее

$$\begin{aligned} \sum_1^n (dl_k \sin B_2 - d\delta_k) &< \frac{(2)(1)}{2 \rho''^2} s^2 n^2 \cos^2 A_m dA - \\ &- \frac{(2)(1)^2 s^3 \cos^3 A_m n^4}{8 \rho''^3} \operatorname{tg} \varphi_m dA. \end{aligned} \quad (759)$$

В (759)  $dA$  выражено в секундах и под этой величиной понимается максимальное значение ошибки азимута для сторон  $Aa$ ,  $ab$ ,  $bc, \dots$

При  $ns = 225$  км и при  $A_m = 0$  получаем максимальное значение левой части уравнения (759). Величина  $dA$  в этом уравнении обусловлена двумя причинами: 1) ошибкой  $dA_1$  начального в звене геодезического азимута, которая войдет, как почти постоянная часть, в геодезические азимуты всех сторон  $Aa, ab, bc, \dots$  ходовой линии (черт. 153); 2) ошибками углов, передающих азимут по ходовой линии. Последняя причина даст в ряде I класса часть  $dA$ , которая будет вообще менее  $0'',7 \times 2 \times \sqrt{\frac{n}{2}}$  и при  $n = 7$  выразится величиной, вообще меньшей  $2'',6$ ; эта часть  $dA$  обусловит в уравнении (759) влияние, вообще меньшее  $\pm 0'',001$ . Вследствие *случайного* характера этого малого влияния в различных звеньях, мы можем им пренебречь при составлении азимутального условия в звене. Ошибка  $dA_1$  может быть довольно значительна по причинам, указанным ниже. Но даже при  $dA_1 = 10''$  второе слагаемое в правой части (759) даст только  $0'',0005$ ; поэтому достаточно будет учитывать только первое слагаемое в правой части (759). Мы поэтому окончательно напомним

$$\sum_1^n (dl_k A \sin B_2 - d\delta_k A) \gtrless \frac{(2)(1)}{2 \rho''^2} s^2 n^2 \cos^2 A_m dA_1'',$$

$$\sum_1^n (dl_k \sin B_2 - d\delta_k A) \gtrless \frac{S^2 \cos^2 A_m}{2 R^2} dA_1'', \quad (760)$$

при этом в (760) под  $S = ns$  понимается длина звена  $AC$  (черт. 153).

Назовем теперь через  $dl_k^\varphi$  и  $d\delta_k^\varphi$  изменения  $l_k$  и  $\delta_k$ , обусловленные ошибкой на  $d\varphi_k$  средней геодезической широты стороны с номером  $k$  нашей ходовой линии. Из (754) мы будем иметь

$$dl_k^\varphi = (2)_k \frac{s_k \sin A_m^k \sin \varphi_m^k}{\cos^2 \varphi_m^k} d\varphi_k;$$

$$d\delta_k^\varphi = (2)_k \frac{s_k \sin A_m^k}{\cos^2 \varphi_m^k} d\varphi_k;$$

$$dl_k^\varphi \sin B_2 - d\delta_k^\varphi = (2)_k \frac{s_k \sin A_m^k}{\cos^2 \varphi_m^k} (\sin \varphi_m^k \sin B_2 - 1) d\varphi_k;$$

$$dl_k^\varphi \sin B_2 - d\delta_k^\varphi = (2)_k \frac{s_k \sin A_m^k}{\cos^2 \varphi_m^k} [\sin^2 B_2 - 1 + (B_2 - \varphi_m^k) \sin B_2 \cos B_2] d\varphi_k;$$

$$dl_k^\varphi \sin B_2 - d\delta_k^\varphi = - \frac{(2)_k}{\rho''} s_k \sin A_m^k \frac{\cos^2 B_2}{\cos^2 \varphi_m^k} d\varphi_k'' -$$

$$- (2)_k s_k \sin A_m^k \frac{\sin B_2 \cos B_2}{\cos^2 \varphi_m^k} (B_2 - \varphi_m^k) d\varphi_k. \quad (761)$$

Это уравнение можно упростить и написать еще так

$$dl_k^\varphi \sin B_2 - d\delta_k^\varphi = - \frac{(2)_k s_k}{\rho''} \sin A_m^k d\varphi_k'' + s \sin A_m^k \frac{(2)_k}{\rho''} \operatorname{tg} B_2 (B_2 - \varphi_m^k) d\varphi_k. \quad (762)$$

Величина  $d\varphi_k$  обусловлена ошибкой  $dB$ , исходной геодезической широты точки  $A$  и влиянием ошибок углов треугольников звена; последнее влияние всегда менее  $0'',06$ . Используя ряд (756), мы найдем, что в сумме  $\sum (dl^{\varphi}_k \sin B_2 - d\delta^{\varphi}_k)$  второй член правой части уравнения (762) обусловит величину

$$\frac{1}{4} \sin 2 A_m \frac{(1)(2)}{\rho''^2} \operatorname{tg} B_2 n^2 s^2 d \varphi_k, \quad (763)$$

максимальное значение которой при  $d\varphi_k = 0'',06$  будет 1 : 47 040 секунды!

Если мы примем  $dB_1 = 12''$ , то

$$\frac{1}{4} \sin 2 A_m \frac{(1)(2)}{\rho''^2} \operatorname{tg} B_2 n^2 s^2 dB_1$$

окажется около  $0'',007$  при  $A_m = 45^\circ$  и  $B_2 = 45^\circ$ .

Однако всегда  $A_m$  близок или к нулю или к  $90^\circ$  и значение рассматриваемого члена даже при  $dB_1 = 12''$  менее  $0'',002$ . Ввиду столь малого значения второго слагаемого в первой части уравнения (762), мы можем им все-таки пренебречь, хотя его влияние и может иметь явно систематический характер.

Нетрудно видеть, что влияние той части  $d\varphi_k$ , которая обусловлена ошибками углов треугольника звена, составит в  $\sum (dl^{\varphi}_k \sin B_2 - d\epsilon^{\varphi}_k)$  величину менее 0",002 и вследствие *случайности* характера, помимо его малости, это влияние не следует учитывать. Но не нужно забывать, что общий азимутальный поворот нашего ряда на  $dA_1$  даст также в  $d\varphi_k$  (762), кроме  $dB_1$ , некоторую систематическую часть. Эта часть будет такова:

для первой стороны ходовой линии . . . . .	$-(1) s \sin A_m dA_1,$
для второй стороны ходовой линии . . . . .	$-2(1) s \sin A_m dA_1,$
для третьей стороны ходовой линии . . . . .	$-3(1) s \sin A_m dA_1,$
. . . . .	
для $n$ -ой стороны ходовой линии . . . . .	$-n(1) s \sin A_m dA_1,$

причем здесь мы не различаем друг от друга величин  $s$  и азимутов  $A$  для разных сторон ходовой линии. Очевидно, в сумме  $\sum (dl^{\varphi_k} \sin B_2 - d\delta^{\varphi_k})$  изменения широт, вызванные изменением ориентировки ряда на  $dA_1$ , дадут член

$$\frac{(1)(2)}{\rho''^2} \frac{n^2 s^2}{2} \sin^2 A_m dA_1'' = \frac{S^2}{2R^2} \sin^2 A_m dA_1''.$$

Итак

$$\begin{aligned} \sum (dl_k^\varphi \sin B_2 - d\tilde{\epsilon}_k^\varphi) &= -\frac{(2)}{\rho''} ns \sin A_m dB_1 + \frac{S^2}{2R^2} \sin^2 A_m dA_1'' = \\ &= -\frac{(L_2 - L_1)''}{\rho''} \cos \Phi dB_1 + \frac{S^2 \sin^2 A_m}{2R^2} dA_1, \end{aligned} \quad (764)$$

причем в (764) под  $\Phi$  понимается средняя широта ходовой линии. Определяемая уравнением (764) часть  $Q$  имеет явно систематический характер и может достигать значения до  $0''{,}5$ !

Посмотрим теперь, как влияет на величину  $Q$  неверность принятой величины большой полуоси эллипсоида. Мы имеем из (754)

$$dl_k^a = -(2)_k \frac{s_k \sin A_m^k}{\cos \varphi_m^k} \frac{\Delta a}{a}.$$

$$d\delta_k^a = -(2)_k s_k \sin A_m^k \operatorname{tg} \varphi_m^k \frac{\Delta a}{a},$$

причем под  $dl_k^a$  и  $d\delta_k^a$  понимаем изменения в  $l_k$  и  $\delta_k$ , обусловленные переменной оси эллипсоида  $a$  на  $\Delta a$ . Далее напомним

$$dl_k^a \sin B_2 - d\delta_k^a = -(2)_k \frac{s_k \sin A_m^k}{\cos \varphi_m^k} \frac{\Delta a}{a} (\sin B_2 - \sin \varphi_m^k) =$$

$$= -(2)_k s_k \sin A_m^k B_2 - \varphi_m^k) \frac{\Delta a}{a};$$

$$\sum (dl_k^a \sin B_2 - d\delta_k^a) = -\frac{(2)(1)}{\rho''^2} \sin A_m \frac{n^2 s^2}{2} \frac{\Delta a}{a} \cos A_m;$$

$$\sum (dl_k^a \sin B_2 - d\delta_k^a) = -\frac{n^2 s^2}{2 R^2} \sin 2 A_m \rho'' \frac{\Delta a}{a}. \quad (765)$$

В рядах по меридианам и по параллелям это влияние близко к нулю и при  $\frac{\Delta a}{a} = 1 : 8000$  (эллипсоид по Бесселю) всегда менее  $0'',002$ ; хотя оно также имеет систематический характер, но по малости им можно пренебречь, тем более, что оно будет частью приводиться с влиянием члена, определенного формулой (763). Мы не будем здесь находить влияния на  $Q$  перемены сжатия референц-эллипсоида — оно будет дано в § 108; оно оказывается равным нулю для рядов по меридианам и по параллелям и вообще может считаться пренебрегаемым. Нужно, конечно, иметь в виду, что кроме непосредственного действия, представленного уравнением (765), влияние перемены  $a$  на  $\Delta a$  скажется еще тем, что оно вызовет добавочные изменения  $\varphi_m^k$  и  $A_m^k$ , причем, однако, эти добавочные изменения будут иметь среднее значение не более  $0'',5$  даже при  $\frac{\Delta a}{a} = 1 : 8000$ . В рядах по параллелям эти добавочные величины  $d\varphi$  будут сами, однако, равны нулю, а влияние этих  $d\varphi$  в рядах по меридианам согласно (764) обращается в нуль благодаря множителю  $\sin A_m$ . Добавочные  $dA$  будут равны нулю для рядов по меридианам, а систематическое их влияние на рядах по параллелям парализуется, согласно (760), почти нулевым значением  $\cos^2 A_m$  для этих рядов. То же самое приходится сказать и в отношении добавочных изменений  $\varphi_m^k$  и  $A_m^k$ , обусловленных изменением сжатия эллипсоида.

Таким образом, мы теперь можем написать на основании (760) и (764)

$$Q = -\frac{(L_2 - L_1)''}{\rho''} \cos \Phi dB_1 - \frac{(L_2 - L_1)'' (B_2 - B_1)''}{\rho''} \cos^3 B_1 (\Delta \alpha) + \\ + \frac{S^2}{2 R^2} dA_1'', \quad (766)$$

где  $(\Delta \alpha)$  — изменение сжатия эллипсоида.

Поэтому азимутальное условное уравнение (752) переписывается так

$$\delta\alpha_2 - \delta\alpha_1 - \delta\lambda_2 \sin B_2 + \delta\lambda_1 \sin B_1 - \sum_1^{n+1} \Delta + dL_1'' (\sin B_2 - \sin B_1) - \\ - \frac{(L_2 - L_1)''}{\rho''} \cos \Phi dB_1 + \frac{S^2}{2R^2} dA_1'' - \frac{(L_2 - L_1)'' (B_2 - B_1)''}{\rho''} \cos^3 B_1 (\Delta\alpha) + \\ + \{[\alpha_2 - (\lambda_2 - L_2) \sin B_2] - A_2\} - \{[\alpha_1 - (\lambda_1 - L_1) \sin B_1] - A_1\} = 0; \quad (767)$$

$(\Delta\alpha)$  — поправка сжатия эллипсоида;  $S$  — длина диагонали  $AC$  (черт. 153).

Чем обусловлены величины  $dL_1$ ,  $dA_1$ ,  $dB_1$  в уравнении (767)? Конечно, можно часть этих величин относить за счет влияния ошибок наблюдаемых величин в нашей астрономо-геодезической сети при передаче в ней геодезических координат  $B$  и  $L$  и геодезического азимута  $A$  от начального пункта триангуляции до начальной точки  $A$  (черт. 153) нашего звена. Однако даже при передаче геодезических координат на 5000 км ошибка  $dB_1$  и ошибка  $dL_1$ , обусловленные указанной причиной, не превзойдут  $0'',2$  и  $0'',2 \text{ сек } \Phi$ , и поэтому даже в крайних звеньях огромной астрономо-геодезической сети влияние членов с  $dB_1$ ,  $dL_1$  и  $dA_1$  можно было бы в уравнении (767) считать пренебрегаемым.

Но есть и другая причина. Величины измеренных углов в звеньях триангуляции, наблюдаемые астрономические азимуты и долготы, базисы триангуляции и вычисленные длины сторон треугольников триангуляции — все эти величины отнесены к поверхности геоида. Между тем, при вычислении геодезических координат и азимутов мы вводим вместо геоида поверхность некоторого референц-эллипсоида и на нем выполняем эти вычисления, применяя так называемый «метод развертывания». На этом методе развертывания мы уже останавливались немного в § 93. Сущность его заключается в том, что все длины, определенные из триангуляции и отнесенные к *геоиду*, откладываются на референц-эллипсоиде без всякого их изменения; точно так же принимают, что углы между геодезическими линиями на референц-эллипсоиде не отличаются от углов между соответствующими им кривыми на геоиде. Отсюда получается, что в уравнении (767) измеренные в звене направления и величины  $\alpha_2$ ,  $\alpha_1$ ,  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  отнесены к поверхности *геоида*, а величины  $A_2$ ,  $A_1$ ,  $L_2$  и  $L_1$ , с которыми происходит сопоставление измеренных и наблюдаемых величин, отнесены к поверхности произвольно выбранного референц-эллипсоида.

В уравнении (767) сумма слагаемых

$$\delta\alpha_2 - \delta\alpha_1 - \delta\lambda_2 \sin B_2 + \delta\lambda_1 \sin B_1 - \sum_1^{n+1} \Delta$$

не должна, как обусловленная ошибками наблюдаемых величин, зависеть от выбора референц-эллипсоида; эта сумма для данного звена — постоянна; между тем свободный член

$$\{[\alpha_2 - (\lambda_1 - L_2) \sin B_2] - A_2\} - \{[\alpha_1 - (\lambda_1 - L_1) \sin B_1] - A_1\}$$

на разных референц-эллипсоидах будет изменяться и, очевидно, изменение этого свободного члена, по смыслу формул (760), (764) и (772),

возмещается в точности изменением суммы остальных четырех слагаемых, т. е. суммы

$$dL_1'' (\sin B_2 - \sin B_1) + \frac{S^2}{2R^2} dA_1'' - \frac{(L_2 - L_1)''}{\rho''} \cos \Phi dB_1 - \\ - \frac{(L_2 - L_1)'' (B_2 - B_1)''}{\rho''} \cos^3 B_1 (\Delta \alpha).$$

Это же вытекает и из уравнения (767). Таким образом, понятно, что члены с  $dB_1$ ,  $dL_1$ ,  $dA_1$  и  $(\Delta \alpha)$  в (767) обусловлены выбором размеров, сжатия и ориентировки референц-эллипсоида. Не вводя этих членов в уравнение (767), как это обычно делают, мы, очевидно, на сумму их

искажим выражение  $\left( \delta \alpha_2 - \delta \alpha_1 - \delta \lambda_2 \sin B_2 + \delta \lambda_1 \sin B_1 - \sum_1^{n+1} \Delta \right)$  и неверно

выведем поправки наблюдаемых величин из уравнения астрономо-геодезической сети.

Допустим, что геоид совпадает с некоторым эллипсоидом; тогда различие размеров и сжатия и ориентировки принятого референц-эллипсоида от размеров, сжатия и ориентировки этого именно эллипсоида, совпадающего с геоидом, и обуславливает величины  $dB_1$ ,  $dA_1$  и  $dL_1$  и наличие членов с  $dB_1$ ,  $dL_1$  и  $dA_1$  в уравнении (767). При применении «метода развертывания» азимутальное уравнение (767) должно составляться не на произвольном референц-эллипсоиде, а именно на эллипсоиде, совпадающем с геоидом [или же должно учитывать влияние членов с  $dB_1$ ,  $dL_1$ ,  $dA_1$  ( $\Delta \alpha$ ) в (767)]. Если  $A_2$ ,  $A_1$ ,  $L_2$  и  $L_1$  вычислены именно на таком эллипсоиде, то тогда слагаемые, содержащие  $dB_1$ ,  $dL_1$  и  $dA_1$ , в (767) исчезнут. Но нужно заметить, что эллипсоид, совпадающий с геоидом на протяжении значительной астрономо-геодезической сети, не существует. Отсюда уже приходится взять под сомнение самый метод развертывания при вычислении значительной триангуляции. Для перехода к дальнейшим выводам надлежит предварительно сообразить влияние в (767) членов с  $dB_1$ ,  $dL_1$  и  $dA_1$  — прежде всего постольку, поскольку они обусловлены неверностью принятых экваториальной полуоси, сжатия и ориентировки референц-эллипсоида, т. е. не считаясь с отступлениями геоида от эллипсоида. Для простоты решения вопроса мы примем, что ошибочна лишь большая полуось референц-эллипсоида на  $\Delta a$ , ошибки же сжатия и ориентировки референц-эллипсоида примем равными нулю.

Пользуясь формулой (633), мы при  $\frac{\Delta a}{M_K} = 1 : 8000$ , при  $\psi = 56^\circ$  и  $A_{K-1} = 36^\circ$  получим  $dB_1 = 16''$ ; при этом начальный пункт триангуляции относится к Пулкову, а рассматриваемый пункт К в (633) — к Хабаровску. Поэтому при составлении уравнения (767) на эллипсоиде Бесселя член  $\frac{(L_2 - L_1)''}{\rho''} \cos \Phi dB_1$  составит для звена по параллели в районе Хабаровска около  $0'',5$ ; для звена по параллели в районе Новосибирска этот член составит около  $0'',15$ . Важно иметь в виду следующее: если мы будем идти по параллели от Орши до Хабаровска, то член с  $dB_1$  в (767) будет иметь для всех звеньев постоянный знак и будет постепенно возрастать от нуля до  $0'',5$ . Если мы пренебрегаем в (767) членом с  $dB_1$ , как это обычно и делают, то этим мы вносим систематические ошибки

в свободный член азимутального уравнения и, следовательно, *вносим накапливающиеся в одну сторону систематические ошибки в вычисляемые из уравнивания триангуляции лапласовы азимуты.*

Эти систематические ошибки вызовут постепенное и все более возрастающее «закручивание» в одну и ту же сторону звеньев триангуляции I класса. Искажение лапласова азимута достигнет в Хабаровске величины около  $6''{,}5$ . Очевидно, *это будет сопровождаться систематическими и весьма заметными в большой сети искажениями геодезических координат.* Понятно, что искажения, даваемые в азимуте отдельным звеном, при последовательной передаче азимутов по звеньям будут постепенно суммироваться. Искажения геодезических координат в большой астрономо-геодезической сети, обусловленные этими систематическими искажениями азимутов, будут очень значительны, например, при референц-эллипсоиде по Бесселю и начальном пункте триангуляции в Пулковке сдвиг Хабаровска в меридианном направлении будет выражаться несколькими десятками метров; искажение долготы в Хабаровске будет около  $1:8''$ . При этом, если в начальном пункте триангуляции выполнено условие Лапласа, то вследствие выполнения по звеньям уравнений (767), хотя бы и неверно составленных, условия Лапласа будут соблюдены вообще во всех лапласовых пунктах, хотя, как следует ожидать, и не с полной строгостью (этот вопрос детально мною не исследовался).

В рядах по параллелям метод развертывания приводит из-за неверности принятой большой полуоси эллипсоида *непосредственно* к искажениям в геодезических долготах и, внося ошибки в лапласовы азимуты, вносит *посредственным* путем ошибки в геодезические широты. В рядах по меридианам *непосредственное* действие будет в отношении геодезических широт и *посредственное*, через искажение лапласовых азимутов, — на геодезические долготы.

Очевидно, *непосредственное* действие метода развертывания имеет малое значение в использовании астрономо-геодезического материала в целях градусных измерений — это было с полной ясностью установлено по отношению к градусным измерениям по меридианам и по параллелям; это же вытекает и из уравнений (693), (694) и (695) по отношению к использованию астрономо-геодезической сети в целях градусных измерений, поскольку *непосредственное* действие метода развертывания заключается в использовании полученных расстояний на геоиде *без редуцирования их на референц-эллипсоид.* Но как дело обстоит в отношении *посредственного* действия метода развертывания? В отношении обработки дуг по меридианам и параллелям все обстоит довольно благополучно, так как ошибки азимутов порядка нескольких секунд никакого влияния на свободные члены уравнений по таким дугам не окажут. Но, конечно, не так дело обстоит при использовании астрономо-геодезической сети: при переходе от референц-эллипсоида к истинному эллипсоиду мы учитываем ведь в формуле (695) лишь то изменение азимута  $dA_1$ , которое обусловлено ошибкой геодезического исходного азимута, принятого в начальной точке триангуляции, и уклонением отвеса  $\gamma_{11}$  в этой точке в плоскости первого вертикала. Поэтому и в (695) и в (697)  $dA_1$  *постоянно* для всех геодезических линий, соединяющих начальную точку с разными и в результате со всеми астрономическими пунктами астрономо-геодезической сети. Между тем, этого не будет.

Если, решая обратную геодезическую задачу по геодезическим линиям  $AI, AK, AF, \dots$  и используя при этом  $B_1^{\circ}, L_1^{\circ}, B_L^{\circ}, L_L^{\circ}, B_K^{\circ}, L_K^{\circ}, B_F^{\circ}, L_F^{\circ}$  (черт. 125), мы вычислим азимуты  $A_{1K}^{\circ}, A_{1F}^{\circ}, A_{1F}^{\circ}, \dots$ , то они, вследствие применения метода развертывания, будут искажены и иска-



жены *различно*. Если для выходной стороны в начальной точке  $A$  мы с полным основанием пишем по (697)

$$dA_1 = \alpha_1 - A_1^\circ - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1,$$

то это уравнение можем применить только для геодезических линий, для которых геодезический азимут получается путем передачи  $A_1^\circ$  посредством *непосредственно измеренного горизонтального угла в  $A$* . Для всех же других геодезических линий надлежит писать

$$dA_1^I = \alpha_1 - A_1^\circ - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 - \delta A_{1,1}^\circ,$$

поимая под  $\delta A_{1,1}^\circ$  поправку азимута  $A_{1,1}^\circ$ , обусловленную применением метода развертывания. Соответственно этому и в уравнениях (698) и (699) должны бы появиться добавочные члены вида  $p_4^{1,1} \delta A_{1,1}^\circ$ ,  $q_4^{1,1} \delta A_{1,1}^\circ$ ,  $r_4^{1,1} \delta A_{1,1}^\circ$ , которые, однако, отбрасываются из-за их неизвестности, так как для их вычисления нужно уже знать различие размеров, сжатия и ориентировок референц-эллипсоида и искомого эллипсоида. По приближенной нашей оценке в уравнениях (698) влияние отброшенных членов  $p_4 \delta A_{1,1}^\circ$  на свободные члены широтных уравнений для Дальнего Востока будет сказываться величиной около  $2''$ , т. е. это влияние достаточно заметное, так как оно носит определенно систематический характер.

Мы видим, что получение строгого азимутального уравнения (767) приводит нас к очень важным заключениям по градусным измерениям, а именно:

1) несовершенство «метода развертывания» может заметно сказаться на результатах использования большой астрономо-геодезической сети в целях установления размеров, сжатия и ориентировки земного эллипсоида;

2) если оставлять этот метод, то задача § 93 должна решаться двумя приближениями: после вывода эллипсоида методами, данными в § 93, надлежит выведенный эллипсоид принять затем за новый референц-эллипсоид; на этом новом референц-эллипсоиде вновь уравнивать астрономо-геодезическую сеть и по результатам этого нового уравнивания, которое даст теперь малые ошибки, вновь вычислить геодезические координаты и азимуты, с которыми вновь составить уравнения (698); в них, правда, изменятся только свободные члены; новое решение новых уравнений (698) приведет к вторичным поправкам большой полуоси, сжатия и ориентировки эллипсоида;

3) во всех предыдущих рассуждениях и подсчетах отступления геоида от искомого эллипсоида в расчет не принимались; в пределах большой страны влияние их может быть, однако, заметным. Для учета этих влияний *необходимо метод развертывания заменить «методом проектирования»*, в котором все элементы триангуляции переносятся на поверхность референц-эллипсоида путем проектирования точек и линий местности нормальными к поверхности референц-эллипсоида.

Применение метода проектирования для составления уравнений градусных измерений в астрономо-геодезической сети вообще не имело еще места, но вопрос этот разрабатывается мною в настоящее время в Академии Наук СССР.

Уравнение (767) приводит нас к очень важным заключениям также и по линии «производственной» геодезии, или по линии обработки результатов основных астрономо-геодезических работ в стране, а именно:

а) изменения геодезических координат на 70—80 м и ошибка геодезических азимутов на 5—6" на краях громадной сети, растянувшейся на 7000 км, могут считаться такими, с которыми можно *практически помириться*, если при этом относительное положение геодезических точек в пределах одного полигона триангуляции I класса меняется заметно менее изменения в этом относительном положении, вызываемого ошибками измерений. Последнее важное условие, однако, не соблюдается в дальневосточных полигонах нашей сети. Но геодезисты не могут, конечно, примириться и с абсолютными сдвигами в несколько десятков метров, хотя бы они приходились и на огромном протяжении, потому что эти сдвиги обусловлены несовершенством методов обработки результатов основных геодезических работ;

б) если мы вседем при обработке астрономо-геодезической сети *наилучшие подходящие эллипсоид к геоиду* в пределах покрываемой этой сетью территории, то числовое значение членов с  $dB_1$ ,  $dL_1$ ,  $dA_1$  в (767) сделается малым. Для СССР мы можем считать, что в этом случае влияние членов с  $dB_1$ ,  $dL_1$ ,  $dA_1$  в (767) уменьшится в восемь, а может и больше раз. Тогда влияние ошибок метода развертывания сделается достаточно малым. Поэтому можно сделать такое заключение: *достаточно точная обработка значительной астрономо-геодезической сети требует введения в качестве референц-эллипсоида наилучшего подходящего к геоиду по размерам, сжатию и ориентировке эллипсоида, который должен быть выведен предварительно*. Вывод этот нужно сделать с двух приближений, как указано выше, в пункте 2. Метод развертывания остается тогда в силе, а в уравнениях (767) члены с  $dB_1$ ,  $dL_1$  и  $dA_1$  придется просто отбросить;

в) если мы будем применять *метод проектирования*, то можно показать, что сумма редукций измеренных направлений по ходовой линии  $Aabc \dots C$  (черт. 153) при отнесении их к референц-эллипсоиду будет равна сумме членов в (767) с  $dB_1$ ,  $dL_1$ ,  $dA_1$ ,  $(\Delta\alpha)$ . Следовательно, введение этих редукций освобождает нас от сохранения этих членов в (767). Это вытекает и логически: если все измеренные величины мы правильно отнесли на некоторый референц-эллипсоид, то теперь между ними и их погрешностями можем написать правильно соотношения, существующие геометрически на этой поверхности, *безразлично — насколько она отступает от геоида*. Вопрос отнесения измеренных базисов и горизонтальных направлений к поверхности референц-эллипсоида изложен подробно в главе IX, там же указано и какими материалами для этого должно располагать. Задача решается с полной точностью. Поэтому с точки зрения вполне точного нахождения поправок измеренных величин из уравнивания триангуляции можно помириться и с *неудачно выбранным референц-эллипсоидом*, если до уравнивания триангуляции выполнить проектирование всех измеренных элементов на этот референц-эллипсоид;

г) при выполнении пункта «б» влияние отступлений геоида от наилучшего эллипсоида совсем не учитывается. Между тем, если это влияние будет достаточно мало в уравнениях (767), то оно может заметно сказываться в базисных условных уравнениях и в условиях полигональных. Дело в том, что нужно учитывать как ошибочность вывода наилучшего подходящего эллипсоида, так и то, что в большой стране отступления геоида от этого эллипсоида могут достигать величины порядка 100 м и в ряде районов уклонения отвеса могут достигать значительных величин. На протяжении 400 км различие высот геоида над наилучшим эллипсоидом может достичь значения в 20 м. Пренебрегая этим обстоятельством, мы при применении *метода развертывания* введем

в линейные масштабы двух смежных полигонов триангуляции различие в 1 : 320 000, что, конечно, недопустимо. Поэтому вряд ли можно говорить о сохранении метода развертывания *при вполне точной* обработке триангуляции;

д) только метод проектирования дает вполне точные результаты. Он не требует той тщательности в установлении наилучшего подходящего эллипсоида, которая обязательна к выполнению при методе развертывания. Эта тщательность подбора *наилучшего эллипсоида* требует, конечно, покрытия всей территории страны *равномерно* астрономо-геодезической сетью и, следовательно, отдалает сроки даже только *достаточно* точной обработки астрономо-геодезической сети СССР на неопределенно долгие сроки.

Выведа референц-эллипсоид даже на основании неуровненного астрономо-геодезического материала и по правилам § 93, мы далее, имея полную уверенность в достаточной близости его к геоиду, выполним методом проектирования отнесение триангуляции *с полной точностью* на его поверхность, с полной точностью получим из уравнивания поправки наблюдаемых величин и с полной точностью выполним вычисление триангуляции на его поверхности. Если бы почему-либо впоследствии пришлось перейти на иной эллипсоид, то найденные поправки измеренных величин нисколько не изменились бы, и, таким образом, всякая нужда в дальнейших переуровнениях (см. пункт 2 и пункт «б») не возникла бы.

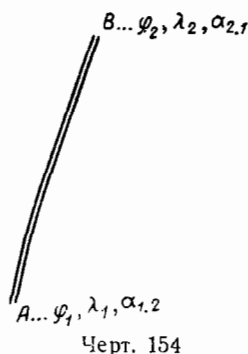
Наилучшая и трудно осуществимая близость поверхностей заменяется в методе проектирования *достаточной* и легко осуществимой их *близостью*; *достаточная* точность результатов заменяется в методе проектирования *полной их точностью*. Поэтому ясно, какой метод должно предпочесть при обработке и вычислении большой астрономо-геодезической сети.

# § 107. Дополнительные указания по составлению азимутальных уравнений и по уравниванию звеньев I класса: вывод астрономических азимутов и долгот на концах выходной стороны звена

Применяя метод проектирования или метод развертывания, но вводя тогда наилучший эллипсоид, мы пишем азимутальное уравнение в виде

$$\varepsilon \alpha_2 - \delta \alpha_1 - \delta \lambda_2 \sin B_2 + \delta \lambda_1 \sin B_1 - \sum_1^{n+1} \Delta + \{[\alpha_2 - (\lambda_2 - L_2) \sin B_2] - A_2\} - \\ - \{[\alpha_1 - (\lambda_1 - L_1) \sin B_1] - A_1\} = 0. \quad (768)$$

В базисных сетях в СССР мы имеем обычно на обоих концах выходной стороны *AB* (черт. 154) определения астрономических широт, долгот и азимутов; другими словами, и пункт *A* и пункт *B* являются пунктами Лапласа. Поэтому здесь возникает азимутальное условие по линии *AB*, которое и решается *до уравнивания звена*. Пусть геодезическая широта и геодезическая долгота точки *A* и точки *B* еще неизвестны. Примем в качестве исходных геодезических данных в точке *A* ее астрономическую широту  $\varphi_1$ , астрономическую долготу  $\lambda_1$  и астрономический азимут  $\alpha_{1,2}$  с *A* на *B*. Вычислим с этими исходными данными по формулам Шрейбера и на принятом



референц-эллипсоиде геодезическую долготу  $L_2$  точки  $B$  и геодезический азимут  $A_{2.1}$  с  $B$  на  $A$ . Мы должны иметь

$$\begin{aligned} A_{2.1} + dA_{2.1} &= \alpha_{2.1} \\ &+ \delta\alpha_{2.1} - (\lambda_2 + \delta\lambda_2 - L_2 - dL_2) \sin \varphi_2. \end{aligned} \quad (769)$$

Но

$$A_{2.1} + dA_{2.1} = \alpha_{2.1} + \delta\alpha_{2.1} + 180^\circ + \delta_{AB} + d\delta_{AB},$$

причем под  $\delta_{AB}$  понимается *вычисленное* приращение геодезического азимута по линии  $AB$ , а под  $d\delta_{AB}$  — погрешность этой величины. Так как

$$A_{2.1} = \alpha_{1.2} + 180^\circ + \delta_{AB},$$

то

$$dA_{2.1} = d\alpha_{1.2} + d\delta_{AB}.$$

Точно так же

$$L_2 + dL_2 = \lambda_1 + l_{AB} + \delta\lambda_1 + dl_{AB},$$

причем под  $l_{AB}$  понимается *вычисленная геодезическая* разность долгот точек  $A$  и  $B$ , а под  $dl_{AB}$  — погрешность этой величины.

Так как

$$L_2 = \lambda_1 + l_{AB},$$

то

$$dL_2 = \delta\lambda_1 + dl_{AB}.$$

Теперь условие (769) переписывается так

$$\begin{aligned} \alpha_{2.1} - A_{2.1} + \delta\alpha_{2.1} - \delta\alpha_{1.2} - (\lambda_2 - L_2) \sin \varphi_2 - \delta\lambda_2 \sin \varphi_2 + \delta\lambda_1 \sin \varphi_2 + \\ + dl_{AB} \sin \varphi_2 - d\delta_{AB} = 0 \end{aligned} \quad (770)$$

или

$$\begin{aligned} \delta\alpha_{2.1} - \delta\alpha_{1.2} - \delta\lambda_2 \sin \varphi_2 + \delta\lambda_1 \sin \varphi_2 + (\alpha_{2.1} \mp 180^\circ - \delta_{AB} - \alpha_{1.2}) - \\ - [(\lambda_2 - \lambda_1) - l_{AB}] \sin \varphi_2 = 0, \end{aligned} \quad (771)$$

причем в (771) члены  $dl_{AB} \sin \varphi_2 - d\delta_{AB}$  совсем опущены, что вытекает из предыдущего параграфа, так как  $AB = s < 30$  км.

Решение уравнения (771) происходит по способу наименьших квадратов, придавая азимутам вес  $p_1$ , а долготам — вес  $p_2$ .

Обозначим

$$w = (\alpha_{2.1} \mp 180^\circ - \delta_{AB} - \alpha_{1.2}) - [(\lambda_2 - \lambda_1) - l_{AB}] \sin \varphi_2.$$

Мы имеем следующее нормальное уравнение коррелат

$$2 \left( \frac{1}{p_1} + \frac{\sin^2 \varphi_2}{p_2} \right) k_1 + w = 0$$

и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \delta\alpha_{2.1} = -\delta\alpha_{1.2} &= - \frac{w}{2 \left( 1 + \frac{p_1}{p_2} \sin^2 \varphi_2 \right)} \\ \delta\lambda_2 = -\delta\lambda_1 &= + \frac{w \sin \varphi}{2 (p_2 + p_1 \sin^2 \varphi_2)} \end{aligned} \right\} \quad (772)$$

Имеются основания принять  $p_1 = 1$  и  $p_2 = 2$ , тогда (772) переписывается еще так

$$\left. \begin{aligned} \delta\alpha_{2,1} = -\delta\alpha_{1,2} &= -\frac{w}{2 + \sin^2 \varphi_2} \\ \delta\lambda_2 &= -\delta\lambda_1 = +\frac{w \sin \varphi}{2(2 + \sin^2 \varphi_2)} \end{aligned} \right\} \quad (773)$$

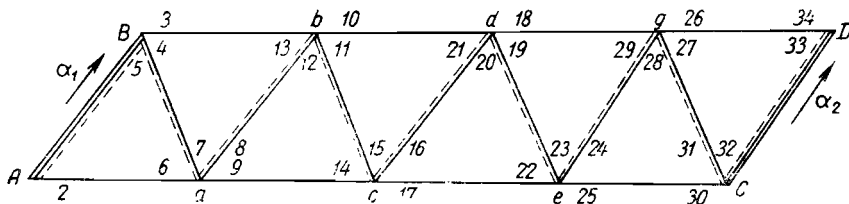
Получив теперь по (773) поправки азимутов и долгот, выводят

$$\begin{aligned} \alpha'_{1,2} &= \alpha_{1,2} + \delta\alpha_{1,2}; & \lambda'_1 &= \lambda_1 + \delta\lambda_1; \\ \alpha'_{2,1} &= \alpha_{2,1} + \delta\alpha_{2,1}; & \lambda'_2 &= \lambda_2 + \delta\lambda_2. \end{aligned}$$

Эти  $\alpha'_{1,2}$ ,  $\lambda'_1$ ,  $\alpha'_{2,1}$ ,  $\lambda'_2$  — ту или другую из них пару — и рассматривают при уравнивании звена, как непосредственно наблюдаемый астрономический азимут и долготу выходной стороны  $AB$ , причем, очевидно, безразлично — пойдем ли в уравнивании звена от  $\alpha'_{1,2}$  и  $\lambda'_1$ , или от  $\alpha'_{2,1}$  и  $\lambda'_2$ . Величина свободного члена  $w$  в уравнении (771) является весьма характерной: она призвана контролировать точность определения астрономических азимутов и долгот. Принимая в расчет только точность самих определений азимутов и долгот из астрономических наблюдений, среднее квадратическое значение  $w$  должно быть в наших широтах менее  $\pm 0''{,}8$ . В действительности оно оказывается заметно большим; причина заключается в искажении наблюдаемых астрономических азимутов действием боковой рефракции. Влияние боковой рефракции в течение двух вечеров, за которые выполняются астрономические наблюдения по определению азимутов, остается в известной части постоянным и выражается в среднем величиной  $\pm 0''{,}5 - \pm 0''{,}75$ : к этому выводу приводят значения  $w$  для огромного числа определенных по СССР пунктов Лапласа. Среднее квадратическое значение  $w$  оказывается около  $\pm 1''{,}1 - \pm 1''{,}2$ . Среднюю ошибку азимута  $\alpha'_{1,2}$  должно полагать около  $\pm 0''{,}6$ .

#### § 108. Дополнительные указания по уравниванию звеньев I класса: выполнение самого уравнивания

Переходим теперь к самому уравниванию звена с применением уравнения (768) при составлении азимутального уравнения. В звене мы имеем условия фигур по числу треугольников звена, условие базисное и условие азимутальное. Все эти условия должно составлять, используя



тельного процесса. Конечно, уравнение (768) остается в силе, только  $-\sum_{i=1}^{n+1} \Delta$  будет образовываться из поправок промежуточных углов звена таким образом

$$-\sum_{i=1}^{n+1} \Delta = [(5) - (4)] - [(8) - (7)] + [(12) - (11)] - [(16) - (15)] + \dots$$

Уравнительные вычисления начинаются, конечно, с определения сферических избытков треугольников и получения невязок в треугольниках. Далее, приводят связующие углы треугольников к плоским по теореме Лежандра, а из промежуточных углов вычитают, по предложению И. Ю. Пранис-Праневича, кроме трети сферического избытка, еще и полную невязку треугольника. Таким образом, сумма углов в каждом треугольнике будет приведена в точности к  $180^\circ$ . С такими приведенными углами вычисляют, идя от выходной стороны  $AB$ , длины связующих и промежуточных сторон треугольников. Придя к выходной стороне  $DC$ , получают свободный член базисного условия и составляют затем базисное условие. Конечно, длины связующих сторон будут получены вполне правильно по измеренным углам, правильно же будет получен и свободный член базисного условия. Но длины промежуточных сторон будут получены *неправильно*. Далее приступают к получению свободного члена азимутального уравнения (768), идя с вычислением геодезических координат и азимутов по ходовой линии  $ABabc$  черт. 155 и применяя формулы Шрейбсера. При этом используют длины связующих сторон и для передачи азимутов — *измеренные промежуточные углы*, по из каждого из которых вычтена полная невязка соответствующего треугольника; другими словами, в этом вычислении геодезических координат и азимутов те значения промежуточных углов, которые входили в вычисление сторон треугольников, *увеличиваются лишь на одну треть сферического избытка* соответствующих треугольников. Понятно, что свободный член азимутального уравнения будет получен *неправильно*.

По одновременно с вычислением геодезических координат и азимутов по ходовой линии  $ABabcd \dots C$ , выполняют вычисление геодезических координат и азимутов по линиям  $Aa, Bb, ac, bd, \dots$ , т. е. по промежуточным сторонам ряда. При этом, при передаче координат и азимута по линии  $Aa$  используют полученную указанным выше образом длину промежуточной стороны  $Aa$  (черт. 155) и измеренный связующий угол  $2-1$ ; для  $a$  должно получить в точности те же самые значения координат, которые получились передачей их по  $AB$  и  $Ba$ ; прибавив к обратному азимуту линии  $Aa$  измеренный угол  $7-6$ , должно получить геодезический азимут с  $a$  на  $B$ , полученный передачей по  $AB$  и  $Ba$ . При передаче по  $Bb$  используют измеренный угол  $5-3$ , уменьшенный на полную невязку первого треугольника  $ABa$ , а при сопоставлении азимута в  $b$  по линиям  $bB$  и  $ba$  используют измеренный угол  $13-12$ . Азимут в  $a$  линии  $ac$  получают, используя измеренный угол  $9-6$ , из которого вычтена невязка треугольника  $Bab$ , и т. д.

Таким образом, в каждой точке ходовой линии  $ABabcd \dots C$  геодезические координаты и азимуты получаются двойным вычислением с *полным* контролем. В этом и заключается положительная сторона предложения И. Ю. Пранис-Праневича — измеренный промежуточный угол уменьшать на полную невязку соответствующего треугольника. Но, конечно, и вычисление по

ходовой линии  $ABabcd \dots C$ , и вычисление (контрольное) по промежуточным сторонам приводят к неверному значению свободного члена азимутального условия, в которое, следовательно, приходится ввести поправку. Предложение И. Ю. Пранис-Праневича изложено в его статье в журнале «Геодезист» № 5 за 1935 г.

Об установлении допустимого размера свободного члена в азимутальном уравнении сказано в I части нашего Руководства по высшей геодезии.

Решение по способу наименьших квадратов условий фигур, условия базисного и условия азимутального выгодно выполнять, применяя метод Больца—Изотова.

### § 109. Заключительные соображения по уравниванию звеньев I класса. Предложения проф. Ф. Н. Красовского

Приходится теперь обратить внимание на то обстоятельство, что все звенья триангуляции I класса примыкают друг к другу и, следовательно, астрономические азимуты и долготы в конечном пункте звена являются *общими* по крайней мере для двух звеньев, а может быть и для трех, и даже для четырех звеньев. Раздельное уравнивание примыкающих друг к другу звеньев, конечно, будет приводить к различным значениям поправок  $\delta\alpha$  и  $\delta\lambda$  для одного и того же астрономического азимута и для одной и той же астрономической долготы, получаемым из различных раздельно уравниваемых звеньев. Устранение этой неизбежной неопределенности достигается в нашем производстве очень простой мерой, а именно тем, что из уравнивания отдельных звеньев вовсе не выводят поправок  $\delta\alpha$  и  $\delta\lambda$ , принимая их равными нулю; другими словами, в нашем производстве уравнение (768) пишут в виде

$$\begin{aligned} & - \sum_1^{n+1} \Delta + \{\alpha_2 - (\lambda_2 - L_2) \sin B_2 - A_2\} - \\ & - \{\alpha_1 - (\lambda_1 - L_1) \sin B_1\} - A_1 = 0. \end{aligned} \quad (768)$$

Очевидно, при этом погрешности, заключающиеся в астрономических азимутах и долготах, перекладываются на поправки углов треугольников триангуляции. Среднее квадратическое значение выражения

$$z = \delta\alpha_2 - \delta\alpha_1 - \delta\lambda_2 \sin B_2 + \delta\lambda_1 \sin B_1,$$

при  $m_\alpha = \pm 0'',6$  и  $m_\lambda = \pm 0'',45$  близко к  $\pm 1''$ ; таким образом, из-за отбрасывания членов с  $\delta\alpha_1$  и  $\delta\lambda_1$  в азимутальном уравнении, измеренное направление в триангуляции может получить добавочную поправку в  $\pm 0'',25$ . Это — не малая величина; среднее квадратическое значение  $z$

в  $1''$  не мало по сравнению с средним квадратическим значением  $\sum_1^{n+1} \Delta$  в (768), которое составляет около  $\pm 2'',5$ .

Некоторые ученые высказывались, что для снижения действия систематических ошибок в углах треугольников триангуляции надлежит именно астрономические азимуты и долготы считать при уравнивании жесткими, но тогда, очевидно, нужно предъявить к определению астрономических азимутов особенно жесткие и повышенные требования и, главное, обратить внимание на уменьшение искажения азимутов действием боковой рефракции. Практически это сводится к следующим

мерам: надлежит выбрать выходную сторону так, чтобы профиль местности между ее концами давал везде хорошую высоту визирного луча над почвой и препятствиями; по выходной стороне местность должна быть достаточно однообразной, без болот, водоемов; астрономический инструмент при определении азимута должен быть достаточно поднят над землей; ряды определений азимута должны быть распределены на некоторый более или менее продолжительный период, например на три месяца, проводя в течение месяца определение азимута из двух-трех вечеров, следующих друг за другом. Но все эти меры трудно осуществимы, и мы их привели, главным образом, к тому, чтобы иллюстрировать трудность получения точных астрономических азимутов в триангуляции, играющих столь, однако, ответственную роль.

Как видим, вопрос раздельного уравнивания звеньев осложняется: то, что делается в нашем геодезическом производстве, не совсем обосновано; во всяком случае принятый порядок требует иной постановки определения астрономических азимутов, которая, однако, трудно осуществима. По предложению Гельмерта, эти затруднения устраняются иным путем: раздельно звено уравнивается только за условия фигуры и базисов; по уравненным углам в звене выводится длина геодезической линии, соединяющей конечные лапласовы пункты звена и астрономические азимуты этой геодезической линии в ее концах; далее переходят к *общему уравниванию сети*, и вот тогда вводят азимутальные или лапласовы уравнения в систему условных уравнений сети, причем эти лапласовы уравнения составляют для каждой геодезической линии, заменившей соответственное звено триангуляции. Как увидим в следующем параграфе, в эти лапласовы уравнения по геодезической линии войдут поправки  $\delta\alpha_1$  и  $\delta\lambda_1$  непосредственно наблюдаемых астрономических азимутов и долгот. Конечно, это — совершенно определенная постановка дела, и может быть есть основания ей следовать и у нас. Однако имеются, думается, веские соображения и за то, чтобы сохранить использование азимутальных уравнений и при *предварительном уравнивании* звеньев. Несомненно, это влияет существенно на уменьшение поперечного сдвига звена, а тогда это влияет в свою очередь очень заметно на уменьшение невязок полигонов триангуляции I класса.

Представим себе, что мы уравнивали звенья раздельно за условия фигур, базисов и азимутов, после чего вывели длину геодезической линии, соединяющей конечные лапласовы пункты звена, и астрономические азимуты в конечных точках этой геодезической линии. Далее мы переходим к общему уравниванию сети, т. е. составляем полигонные условия в сети и уравнения Лапласа по геодезическим линиям, заменившим соответствующие звенья триангуляции; в последние уравнения войдут поправки  $\delta\alpha_1$  и  $\delta\lambda_1$  астрономических непосредственно наблюдаемых азимутов и долгот. Из общего уравнивания сети мы определим поправки длин геодезической линии, поправки их направлений и величины  $\delta\alpha_1$  и  $\delta\lambda_1$ ; следовательно, азимутальные уравнения будут решаться дважды — при предварительном уравнивании звеньев и при общем уравнивании сети. Но предварительное уравнивание звеньев и за условия азимутальные существенно повлияет на уменьшение невязок триангуляционных полигонов. В этом мы убедились из первого уравнивания части триангуляции I класса СССР, выполненного в 1930 г., когда уравнивались совместно девять полигонов. К этому же приводят и теоретические соображения, подкрепленные расчетами проф. Н. А. Урмаева (см. Н. А. Урмаев «Методы уравнивания триангуляции I класса», Труды ЦНИИГАиК, выпуск 19, 1937 г.). С другой стороны, наш



опыт показывает, что *общее* уравнивание сети может приводить к самым неожиданным и по размерам и по знаку поправкам длин геодезических линий и их направлений, определенно нередко распределяющихся неправильно, и здесь работают два обстоятельства: возможность так сказать «перекачивать» невязки из средних полигонов на краевые полигоны, менее тесно связанные условиями; противоречивость условий широтного, долготного и азимутальных в каждом полигоне в отношении требуемых ими исправлений длин и направлений геодезических линий, образующих полигон. Уменьшение невязок в полигонах триангуляции играет существенную роль в уменьшении и ослаблении этого неправильного распределения поправок уравниваемых элементов общей сети.

В 1937 г. мною были (см. Геодезист № 3 за 1937 г.) высказаны следующие предложения.

1. Надлежит ввести в нашей сети так называемые «*фундаментальные*» астрономические азимуты, которые определяются по рядам триангуляции I класса, например через четыре звена или через пять звеньев, т. е. отстоят друг от друга на 1000—1250 км. Предварительное изучение местности в отношении боковой рефракции должно предшествовать выбору той линии, на концах которой будут определены *фундаментальные* астрономические азимуты. Постройка небольших бетонных башен высотой около 8 м на будущих пунктах наблюдений фундаментальных азимутов (это делалось в Чехословакии и в Дании); повторные определения азимутов через известные промежутки времени — вот меры, которые должны, вместе с надлежащим выбором местности, привести к средней ошибке определения астрономического азимута около  $\pm 0'',3 - \pm 0'',4$ . Конечно, на этих пунктах определение астрономической долготы также выполняется по усиленной программе и пассажным инструментом с безличным микрометром, достигая средней ошибки долготы около  $\pm 0'',2$ .

2. Звенья триангуляции уравниваются предварительно только за условия фигур и за базисные условия.

3. С уравненными значениями углов, полученными после выполнения пункта 2, составляется по каждому звену, в части ряда I класса между двумя *фундаментальными* азимутами, азимутальное условие вида уравнения (768) (без применения, конечно, предложения И. Ю. Пранис-Праневича); при этом в уравнениях для краевых звеньев, примыкающих к *фундаментальным* азимутам, поправки этих фундаментальных азимутов и астрономических долгот на соответственных пунктах Лапласа принимаются равными нулю. Эти азимутальные уравнения решаются все вместе для всех звеньев (числом 4—5), заключенных между фундаментальными азимутами, причем в качестве неизвестных при этом уравнивании принимаются  $\sum_{i=1}^{n+1} \Delta$  и величины  $u_k = \delta z_k - \delta \lambda_k \sin B_k$ , рассчитав,

конечно, предварительно относительные веса этих неизвестных. Очевидно, что получение свободных членов в азимутальных уравнениях при этом совместном их уравнивании требует той же работы, что и при раздельном уравнивании звеньев. Само совместное решение полученных азимутальных уравнений представляет простой и очень небольшой труд.

4. После нахождения величин  $u_k$ , что собственно и является задачей по пункту 3, приступают к новому и вторичному уравниванию каждого звена — за условия фигур, базисов и азимутов. При этом: а) вычисление свободного члена в азимутальном уравнении производится заново, пользуясь только *измеренными* углами треугольников триангуляции и длинами сторон треугольников, полученными только по *измеренным* углам

(напомним, что при выполнении пункта 3 свободные члены азимутальных уравнений получались, используя уравненные за условия фигур и базисов углы треугольников); понятно, что здесь выгодно применить прием И. Ю. Пранис-Праневича, б) свободный член  $W$  представляется в виде

$$W_a = \{[\alpha_2 - (\lambda_2 - L_2) \sin B_2] - A_2\} - \{[\alpha_1 - (\lambda_1 - L_1) \sin B_1] - A_1\} + u_2 - u_1; \\ u_2 = \delta\alpha_2 - \delta\lambda_2 \sin B_2; \quad u_1 = \delta\alpha_1 - \delta\lambda_1 \sin B_1. \quad (774)$$

причем для  $u_2$  и  $u_1$  используются соответственные значения  $u_k$ , полученные при выполнении пункта 3. Азимутальное уравнение, конечно, принимает вид уравнения (768), т. е. при выполнении пункта 4 поправки  $\delta\alpha_1$  и  $\delta\lambda_1$  уже не отыскиваются. Выполнение пункта 4 является увеличением объема вычислительных работ только при уравнивании звеньев I класса. Понятно, что пункт 3 приводит к хорошему установлению поправок астрономических величин. Представляется, что на этот предложенный мною порядок следует пойти; определение фундаментальных азимутов в двух пунктах на площадь в 1 000 000 км<sup>2</sup>, конечно, представляется совсем малым добавлением к общему объему громадных по СССР основных астрономо-геодезических работ. Единственное существенное возражение, которое можно выдвинуть против приведенных моих предложений, это — общее некоторое замедление, вернее приостановка в обработке государственной триангуляции СССР, обусловливаемая замедлением в приступе к определению фундаментальных азимутов и долгот. После уравнивания звеньев по пункту 4, с уравненными углами треугольников вычисляют длины их сторон. Далее можно поступать двояко.

I. В каждом звене, приняв точку  $A$  (черт. 155) за начало полярных координат и астрономический меридиан в  $A$  за полярную ось, вычисляют для точек  $a, b, c, d, \dots, C$  полярные координаты по уравненным углам треугольников, по длинам их сторон и принимая за исходный — *уравненный* астрономический азимут  $\alpha_1 + \delta\alpha_1$  стороны  $AB$ , полученный по выполнении ранее приведенного пункта 3 моих предложений. В результате получают: длину геодезической линии  $AC$  или  $AD$ ; астрономические азимуты этой геодезической линии  $AC$  (или  $AD$ ) в точке  $A$  и в точке  $C$  (или в точке  $D$ ), которые мы назовем через  $\alpha_{AC}$  и  $\alpha_{CA}$  (или  $\alpha_{AD}$  и  $\alpha_{DA}$ ). Получение азимута  $\alpha_{CA}$  (или  $\alpha_{DA}$ ) происходит таким образом: последняя пара (черт. 155) полярных треугольников будет: треугольник  $AeC$  и треугольник  $ADC$ ; решая их, получим, кроме расстояний  $AC$  и  $AD$ , еще угол  $ACD$ ; вычитая этот угол из азимута  $\alpha_2 + \delta\alpha_2$ , полученного по пункту 3, получим и  $\alpha_{CA}$ . Пусть на черт. 156, точки  $1, 2, 3, 4, \dots$  суть конечные лапласовы пункты в звеньях  $1-2, 2-3, 3-4, \dots$ ; стороны  $1.B, 2.D, 3.C$  суть выходные стороны этих звеньев; линии  $1-2, 2-3, 3-4$  суть геодезические линии, соединяющие лапласовы пункты  $1, 2, 3, 4$ , и заменяющие треугольники звеньев. В звене первом по их порядку, начинающемуся в исходной точке 1 (черт. 156) государственной триангуляции, будет установлен методом, указанным в § 93, исходный геодезический азимут  $A_0$  стороны  $1.B$ , причем будем иметь

$$A_0 + \alpha_{1.B} - (\lambda_0 - L_0) \sin \varphi_0,$$

понимая под  $\lambda_0$  и  $L_0$  астрономическую и геодезическую долготу этого исходного пункта 1 триангуляции, а под  $\alpha_{1.B}$  — астрономический азимут той, выходящей из исходного пункта стороны  $1.B$  триангуляции, к которой относится азимут  $A_0$ .

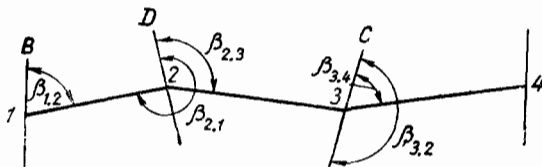
Из вычисления полярных координат по этому первому звену 1-2 мы получим, конечно, угол  $\beta_{1,2}$ . Таким образом, геодезический азимут с точки 1 на точку 2 определится так

$$A_{1,2} = A_0 + \beta_{1,2},$$

или

$$A_{1,0} = a_{1,2} + A_0 - \alpha_{1,2},$$

причем  $\alpha_{1,2}$  выведен указанным выше образом из вычисления полярных координат в уравненном звене 1-2. Решая теперь прямую геодезическую задачу по расстоянию  $s_{1,2}$  и по азимуту  $A_{1,2}$  с применением формул с средней широтой и средним азимутом и исходя из установленных по



Черт. 156

правилам § 93 исходной широты  $B_0$  и  $L_0$  точки 1, мы получим  $B_2$ ,  $L_2$  и  $A_{2,1}$  в точке 2. Мы должны будем иметь выполнение условия Лапласа в точке 2, в виде уравнения

$$A_{2,1} = \alpha_{2,1} - (\lambda_2 - L_2) \sin B_2,$$

что и будет служить контролем правильности уравнивания звена 1-2.

Далее переходим к звену 2-3. Геодезический азимут  $A_{2,3}$  соображаем так

$$A_{2,3} = \alpha_{2,3} + (A_{2,1} - \alpha_{2,1}) = A_{2,1} - [\beta_{2,1} - \beta_{2,3}].$$

Далее, исходя от  $B_2$ ,  $L_2$ ,  $s_{2,3}$ ,  $A_{2,3}$ , вычисляем прямую геодезическую задачу по геодезической линии 2-3 и получаем  $B_3$ ,  $L_3$  и  $A_{3,2}$ , причем должно будет выполняться условие Лапласа в точке 3

$$A_{3,2} = \alpha_{3,2} - (\lambda_3 - L_3) \sin B_3$$

.....

Изложенные действия выполняем по всем звеньям. Конечно, под  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  понимаются при составлении условий Лапласа не непосредственно наблюдаемые астрономические долготы, а долготы  $\lambda_2 + \delta\lambda_2$ ,  $\lambda_3 + \delta\lambda_3$ ,  $\lambda_4 + \delta\lambda_4$ , ..., причем  $\delta\lambda_2$ ,  $\delta\lambda_3$ ,  $\delta\lambda_4$  суть полученные при выполнении пункта 3 моих предложений поправки долгот  $\lambda$ .

II. Второй порядок будет следующий. После уравнивания звена 1-2 и вычисления длин сторон его треугольников, используя в качестве исходных  $B_0$ ,  $L_0$  и  $A_0$ , вычисляю по формулам Шрейбера геодезические координаты и азимуты точек  $B$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , ..., 2 (черт. 155 и черт. 156); в точке 2 (или в точке  $C$  черт. 155) должно получиться

$$A_{CD} = \alpha_2 - (\lambda_2 - L_2) \sin B_2; \quad [A_{2,D} = \alpha_2 - (\lambda_2 - L_2) \sin B_2 \text{ по черт. 156}],$$

причем  $\alpha_2$  получается прибавлением к наблюдаемому значению азимута в  $C$  поправки  $\delta\alpha_2$ , а  $\lambda_2$  — прибавлением к наблюдаемому значению долготы поправки  $\delta\lambda_2$ . Получив  $B_2$  и  $L_2$ , по ним и по  $B_0$ ,  $L_0$  вычисляю

обратную геодезическую задачу, из которой получают  $s_{1\cdot 2}$ ,  $A_{1\cdot 2}$  и  $A_{2\cdot 1}$ . Теперь выводят

$$\alpha_{1\cdot 2} = A_{1\cdot 2} + (\alpha_{1\cdot B} - A_0),$$

$$\alpha_{2\cdot 3} = A_{2\cdot 1} + (\alpha_2 - A_2),$$

причем  $\alpha_2$  есть непосредственно определенный астрономический азимут стороны  $2.B$  (черт. 156) плюс  $\delta\gamma_2$ ;  $A_2$  есть геодезический азимут той же стороны  $2.B$ , полученный вышеуказанным решением прямых геодезических задач по формулам Шрейбера по сторонам треугольников звена  $1-2$ .

Теперь, исходя от  $B_2$ ,  $L_2$  и  $A_2$ , вычисляют по формулам Шрейбера геодезические координаты и азимуты вершин всех треугольников звена  $2-3$  и получают  $B_3$ ,  $L_3$  для точки  $3$ , и геодезический азимут  $A_3$  стороны  $3.C$  (черт. 156). Далее, контролируют выполнение лапласова условия в точке  $3$ , и затем из обратной геодезической задачи по  $B_2$ ,  $L_2$ ,  $B_3$  и  $L_3$  выводят  $s_{2\cdot 3}$ ,  $A_{2\cdot 3}$  и  $A_{3\cdot 2}$  и вычисляют

$$\alpha_{2\cdot 3} = A_{2\cdot 3} + (\alpha_2 - A_2),$$

$$\alpha_{3\cdot 2} = A_{3\cdot 2} + (\alpha_3 - A_3),$$

причем  $A_3$  — геодезический азимут выходной стороны  $3.C$ , а  $\alpha_3$  — наблюдаемый астрономический азимут этой стороны плюс  $\delta\alpha_3$ , выведенное по пункту  $3$ .

Второй из приведенных двух порядков требует большего количества вычислений, но зато дает геодезические координаты и азимуты во всех геодезических пунктах каждого звена, которые *до общего уравнивания* государственной триангуляции и используются, как предварительные геодезические координаты и азимуты. Это очень существенно для производства. Первый порядок, основанный на применении полярных координат, дает геодезические координаты только лапласовых пунктов, в чем и заключается его невыгодность с производственной точки зрения. Но величины  $s$  для геодезических линий  $1-2$ ,  $2-3$ ,  $3-4$ , азимуты  $\alpha_{1\cdot 2}$ ,  $\alpha_{2\cdot 1}$ ,  $\alpha_{2\cdot 3}$ ,  $\alpha_{3\cdot 2}$ ,... и геодезические координаты лапласовых пунктов получаются несколько более точно, чем по второму приему.

Вывод длин геодезических линий  $1-2$ ,  $2-3$ ,  $3-4$ ,... и их астрономических азимутов есть уже *подготовка к общему уравниванию* триангуляции; но при применении первого из указанных приемов обработки это необходимо еще для того, чтобы проконтролировать выполнение лапласовых условий на всех пунктах  $1, 2, 3, 4, \dots$  и удостовериться в правильности уравнивательных вычислений по звеньям.

## § 110. Общее уравнивание астрономо-геодезической сети по способу Гельмерта

Характерным для метода Гельмерта должно считать, что общее уравнивание астрономо-геодезической сети в нем тесно связывается с определением размеров, сжатия и ориентировки наилучше подходящего к геоиду эллипсоида (или исходных геодезических дат). Далее, характерным для этого метода является признание, что измеренные в триангуляции элементы, отнесенные на поверхность геоида, при отнесении их на поверхность этого искомого эллипсоида, наилучше подходящего к геоиду, никаким reductions не подлежат, так как эти reductions являются пренебрегаемыми. Приняв некоторый эллипсоид за референц-эллипсоид и установив

так или иначе исходную геодезическую широту  $B_1$ , исходную геодезическую долготу  $L_1$  в исходном пункте  $A$  триангуляции и исходный геодезический азимут  $A_1$  в той же точке  $A$ , приступают к общему уравниванию триангуляции. (В крайнем случае можно принять:  $A_1 = \alpha_{1.2}$ ;  $L_1 = \lambda_1$  и  $B_1 = \varphi_1$ , если  $\varphi_1$ ,  $\lambda_1$  и  $\alpha_{1.2}$  суть астрономически определенные широта и долгота и азимут в точке  $A$ ). Ему предшествует предварительное и раздельное уравнивание звеньев триангуляции. Как уже было указано ранее, по Гельмерту, предварительное и раздельное уравнивание звеньев сводится к уравниванию их только за условия фигур и базисов. После этого следует вывод длин геодезических линий, соединяющих смежные лапласовы пункты, и астрономических азимутов этих геодезических линий в их конечных точках. Это выполняется, применяя обычно второй из приемов, указанных в конце § 109, но только, во-первых, составление лапласовых условий при этом, понятно, отпадает; во-вторых, астрономические азимуты берутся так, как они выведены для выходных сторон по § 107; в третьих, как уже сказано, исходные геодезические даты и референц-эллипсоид не считаются окончательно установленными.

Переходим к этой первой стадии вычислений, которая имеет задачей дать длины  $s$  геодезических линий, заменивших звенья, и астрономические азимуты этих геодезических линий в их конечных лапласовых пунктах; нам придется при этом собственно повторить то, что было сказано в конце § 109, однако это не будет, думается, излишним. Имея в звене 1-2 (черт. 156) для точки 1, которую мы называем теперь через  $A$ , величины  $B_1$ ,  $L_1$  и геодезический азимут  $A_1$  по выходной стороне  $1 \cdot B$ , вычисляют последовательно геодезические координаты и азимуты всех геодезических точек в звене 1-2 и, придя к точке 2, получают для нее  $B_2$  и  $L_2$  и геодезический азимут  $A_2$  для выходной стороны  $2 \cdot D$  (черт. 156). Теперь, решая обратную геодезическую задачу по  $B_1$ ,  $L_1$ ,  $B_2$  и  $L_2$ , выводят длину  $s_{1.2}$  геодезической линии 1-2 и геодезические азимуты  $A_{1.2}$  и  $A_{2.1}$ .

Астрономические азимуты получают так

$$\alpha_{1.2} = A_{1.2} + (\alpha_1 - A_1),$$

$$\alpha_{2.1} = A_{2.1} + (\alpha_2 - A_2),$$

причем под  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  понимают астрономические азимуты выходных сторон  $1 \cdot B$  и  $2 \cdot D$ , полученные по § 107.

Исходя от  $B_2$ ,  $L_2$  и  $A_2$ , вычисляют геодезические координаты и азимуты для всех геодезических точек звена 2-3, затем по  $B_2$ ,  $L_2$ ,  $B_3$  и  $L_3$  выводят решением обратной геодезической задачи длину  $s_{2.3}$  геодезической линии 2-3 и геодезические азимуты  $A_{2.3}$  и  $A_{3.2}$ ; затем следует вывод

$$\alpha_{2.3} = A_{2.3} + (\alpha_2 - A_2),$$

$$\alpha_{3.2} = A_{3.2} + (\alpha_3 - A_3),$$

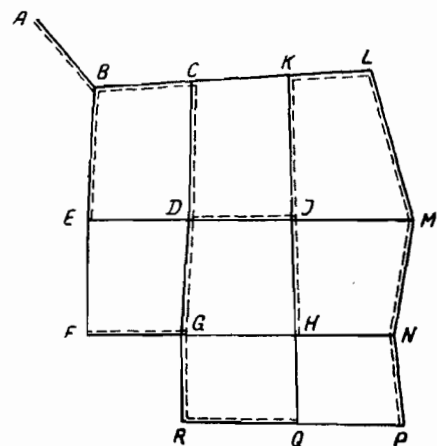
причем  $\alpha_3$  — астрономический азимут выходной стороны  $3 \cdot C$ , полученный по § 107. Дальнейший порядок остается тем же самым.

Величины  $s_{1.2}$ ,  $s_{2.3}$ ,  $s_{3.4}$ ,  $\alpha_{1.2}$ ,  $\alpha_{2.1}$ ,  $\alpha_{2.3}$ ,  $\alpha_{3.2}$  в дальнейшем считаются непосредственно измеренными и отнесенными к поверхности искомого эллипсоида, наилучше подходящего к геоиду.

Дальнейшая, вторая стадия вычислений заключается в установлении системы «приближенных» геодезических координат  $B^\circ$  и  $L^\circ$  лапласовых пунктов, а затем в установлении точно соответствующих этим  $B^\circ$  и  $L^\circ$  «приближенных» длин  $s^\circ$  геодезических линий и точно соот-

ветствующих этим же *приближенным* координатам «*приближенных*» геодезических азимутов  $A^\circ$  этих геодезических линий в точках Лапласа.

По существу, приведенное выше вычисление в *первой стадии* величин  $B_1, L_1, B_2, L_2, B_3, L_3, \dots$ , которое использовалось для вывода величин  $s_{i,k}$  и астрономических азимутов  $\alpha_{i,k}$ , вполне отвечает этой задаче установления «*приближенных*» координат  $B^\circ, L^\circ$ . Понятно, что от исходной точки  $A$  к рассматриваемой точке  $K$  мы можем подойти разными путями, используя разные звенья, уравненные предварительно за условия фигур и базисов в них. Другими словами, для точки  $K$  мы получим в *первой стадии* не одно, а вообще несколько значений координат  $B$  и  $L$ , и поэтому любую пару значений  $B$  и  $L$ , полученную для точки  $K$ , мы можем принять за «*приближенные*» координаты  $B^\circ_K$  и  $L^\circ_K$ . Следовательно, по существу выполнение *первой стадии* обусловило уже выполнение второй стадии, однако только в отношении установления *приближенных координат*. Пройдя вычислениями в первой стадии по линиям, отмеченным пунктиром на черт. 157, мы уже получим  $B$  и  $L$  для всех лапласовых пунктов нашей сети и можем их принять за «*приближенные*» координаты  $B^\circ$  и  $L^\circ$ , требуемые *второй стадией*, не делая никаких *добавочных* вычислений. Очевидно, по этим же линиям «*приближенные*»  $s^\circ$  и  $A^\circ$



Черт. 157

совпадут с выведенными в первой стадии длинами  $s_{i,k}$  геодезических линий, отмеченных пунктиром на черт. 157, и геодезическими азимутами  $A_{i,k}$  для тех же линий. Но идя в первой стадии по линии  $CK$ , мы получим для  $B$  и  $L$  в точке  $K$  иные значения, чем полученные вычислениями по линиям, отмеченным пунктиром. То же самое относится к точкам  $M, N, H, P$ . В первой стадии мы проходим по всем геодезическим линиям; вторая стадия этого не требует. Если мы примем за  $B^\circ$  и  $L^\circ$  те их значения, которые были получены в первой стадии передачами только по пунктирным линиям черт. 157, то теперь во второй стадии нужно будет выполнить точное решение обратных геодезических задач (используя эти  $B^\circ$  и  $L^\circ$ ) по линиям  $CK, IM, GH, HN$  и  $QP$ , т. е. по линиям, не отмеченным пунктиром на черт. 157, или по линиям *избыточным в сети*. Полученные из вполне точного решения этих обратных геодезических задач значения  $s^\circ$  и  $A^\circ$  не будут, конечно, совпадать с соответствующими  $s$  и  $A$ , выведенными по тем же линиям в *первой стадии*. Нам представляется, что во второй стадии целесообразно поступить именно так: выделить избыточные в сети геодезические линии, приводящие к замыканию полигонов; за *приближенные* координаты принять те значения  $B$  и  $L$ , которые в *первой стадии* получились прямой передачей геодезических координат по *необходимым* линиям (для построения сети); решить по *избыточным* линиям обратную геодезическую задачу, используя по каждой такой линии уже установленные *приближенные* координаты  $B^\circ$  и  $L^\circ$  ее конечных точек. Для всех *необходимых* линий  $s^\circ$  и  $A^\circ$  должно тогда взять те самые, которые получились по этим линиям в первой стадии и там обозначались через  $s_{i,k}$  и  $A_{i,k}$ , причем  $s_{i,k}$  имеет значение определенной из триангуляции длины геодезической линии  $IK$ , а раз-

ность азимутов  $A_{i,k} - A_{i,a}$  даст измеренный (косвенно) в триангуляции угол  $KID$  (черт. 157); по этим линиям поэтому будет иметь

$$\xi_{i,k} - s_{i,k}^{\circ} = 0; \quad A_{i,k} - A_{i,k}^{\circ} = 0. \quad (775)$$

Третья стадия заключается в составлении уравнений уклонений отвесных линий по каждой геодезической линии, входящей в нашу сеть. В точке  $A$  мы имеем уравнения

$$\left. \begin{aligned} B_1^{\circ} + dB_1 &= \varphi_1 + \delta\varphi_1 - \xi_1 \\ L_1^{\circ} + dL_1 &= \lambda_1 + \delta\lambda_1 - \eta_1 \sec \varphi_1 \\ A_{AB}^{\circ} + dA_{AB} &= \alpha_{AB} + \delta\alpha_{AB} - \gamma_1 \operatorname{tg} \varphi_1 \end{aligned} \right\} \quad (776)$$

В точке  $K$  мы имеем такие уравнения

$$\left. \begin{aligned} B_K^{\circ} + dB_K &= \varphi_K + \delta\varphi_K - \xi_K \\ L_K^{\circ} + dL_K &= \lambda_K + \delta\lambda_K - \eta_K \sec \varphi_K \\ A_{KI}^{\circ} + dA_{KI} &= \alpha_{KI} + \delta\alpha_{KI} - \gamma_K \operatorname{tg} \varphi_K \\ s_{i,K}^{\circ} + ds_{i,K} &= s_{i,K} + \delta s_{i,K} \end{aligned} \right\}. \quad (777)$$

В этих уравнениях  $dB_1$ ,  $dL_1$ ,  $dA_{AB}$ ,  $dB_K$ ,  $dL_K$ ,  $dA_{KI}$ , ... суть те *поправки*, которые нужно придать соответственно к  $B_1^{\circ}$ ,  $L_1^{\circ}$ ,  $A_{AB}^{\circ}$ ,  $B_K^{\circ}$ ,  $L_K^{\circ}$ ,  $A_{KI}^{\circ}$ , чтобы перейти к *геодезическим* координатам и азимутам в точках  $A$  и  $K$  на *искомом эллипсоиде*; эти *поправки* обусловлены как ошибочностью «приближенных» координат и азимутов, так и неверностью размеров, сжатия и ориентировки принятого при получении приближенных координат и азимутов референц-эллипсоида. Величины  $\xi_1$ ,  $\eta_1$ ,  $\xi_K$ ,  $\eta_K$  суть слагающие уклонения отвеса *относительно искомого эллипсоида* в точках  $A$  и  $K$ ;  $\delta\varphi_1$  и  $\delta\lambda_1$  суть *ошибки* астрономической широты  $\varphi_1$  и астрономической долготы  $\lambda_1$  точки  $A$ , а  $\delta\alpha_{AB}$  — *ошибка* астрономического азимута  $\alpha_{AB}$  в  $A$  геодезической линии  $AB$ , выведенного в первой стадии вычислений;  $\delta s_{i,K}$  — *погрешность* длины геодезической линии  $s_{i,K}$ , обусловленная ошибками углов треугольников и базисов в звене  $IK$ . Величины  $\delta\varphi_K$  и  $\delta\lambda_K$  суть *ошибки* наблюдаемых в точке  $K$  астрономической широты  $\varphi_K$  и астрономической долготы  $\lambda_K$ , а  $\delta\alpha_{KI}$  — *ошибка* астрономического азимута  $\alpha_{KI}$  геодезической линии  $KI$ , выведенного в *первой стадии* вычислений;  $ds_{i,K}$  — *поправка*  $s_{i,K}^{\circ}$ .

Перейдем к рассмотрению геодезической линии  $IK$ ; мы можем написать такие уравнения по этой линии

$$\left. \begin{aligned} B_K^{\circ} + \frac{\partial B_K}{\partial B_1} dB_1 + \frac{\partial B_K}{\partial s_{i,K}} ds_{i,K} + \frac{\partial B_K}{\partial A_{i,K}} dA_{i,K} + \frac{\partial B_K}{\partial a} \Delta a + \\ + \frac{\partial B_K}{\partial (x)} (\Delta x) &= \varphi_K + \delta\varphi_K - \xi_K \\ L_K^{\circ} + \frac{\partial L_K}{\partial B_1} dB_1 + \frac{\partial L_K}{\partial s_{i,K}} ds_{i,K} + \frac{\partial L_K}{\partial A_{i,K}} dA_{i,K} + \frac{\partial L_K}{\partial a} \Delta a + \\ + \frac{\partial L_K}{\partial (x)} (\Delta x) + dL_1 &= \lambda_1 + \delta\lambda_1 - \eta_1 \sec \varphi_1 \\ A_{KI}^{\circ} + \frac{\partial A_{KI}}{\partial B_1} dB_1 + \frac{\partial A_{KI}}{\partial s_{i,K}} ds_{i,K} + \frac{\partial A_{KI}}{\partial A_{i,K}} dA_{i,K} + \frac{\partial A_{KI}}{\partial a} \Delta a + \\ + \frac{\partial A_{KI}}{\partial (x)} (\Delta x) &= \alpha_{KI} + \delta\alpha_{KI} - \gamma_1 \operatorname{tg} \varphi_1 \end{aligned} \right\}. \quad (778)$$

Смысл этих формул понятен, если представить себе, что при вычислении точки  $K$  от  $I$  по геодезической линии  $IK$  мы для получения геодезической широты  $B_K$  и геодезической долготы  $L_K$  точки  $K$  на *искомом эллипсоиде*, а также геодезического азимута  $A_{K,I}$  с точки  $K$  на точку  $I$  на том же *искомом эллипсоиде* используем: широту  $B^\circ$ , ошибочную на  $dB_I$ ; долготу  $L^\circ$ , ошибочную на  $dL_I$ ; азимут  $A^\circ_{I,K}$ , ошибочный на  $dA_{I,K}$ ; расстояние  $s^\circ_{I,K}$ , ошибочное на  $ds_{I,K}$  и, кроме того, если принять во внимание, что при вычислениях разностей широт, долгот и азимутов по геодезической линии  $IK$  мы должны перейти от эллипсоида с большой полуосью  $a_0$  и сжатием  $(\alpha_0)$  к эллипсоиду с большой полуосью  $a_0 + \Delta a$  и сжатием  $(\alpha_0) + (\Delta \alpha)$ . Правые части уравнений (778) представляют как раз соответственно  $B_K$ ,  $L_K$  и  $A_{K,I}$ . В левой части каждого из уравнений (778) учитывается влияние изменений широты, долготы и азимута в точке  $I$  при переходе на новый эллипсоид, влияние различия  $s_{I,K}$  от  $s^\circ_{I,K}$ , а также влияние на вычисляемые разности широт, долгот и азимутов по геодезической линии  $IK$  изменений в размерах и сжатии эллипсоида. Для дифференциальных коэффициентов, стоящих в (778), мы можем использовать их выражения, данные Гельмертом и приведенные в виде формул (709), причем, конечно, используем и прежние обозначения этих дифференциальных коэффициентов в виде  $p_1, p_4, p_5, p_6, q_1, q_4, q_5, q_6, r_1, r_4, r_5, r_6$ . У нас в (709) отсутствуют лишь коэффициенты при  $ds$ , которые мы здесь и приводим, используя формулы (537)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B_K}{\partial s_{I,K}} &= p_3^{I,K} = - \frac{\cos A^\circ_{K,I}}{M_K} \rho'' \\ \frac{\partial L_{I,K}}{\partial s_{I,K}} &= q_3^{I,K} = - \frac{\sin A^\circ_{K,I}}{N_K \cos B_K} \rho'' \\ \frac{\partial A_{K,I}}{\partial s_{I,K}} &= r_3^{I,K} = - \frac{\sin A^\circ_{K,I}}{N_K} \operatorname{tg} B^\circ_K \rho'' \end{aligned} \right\} \quad (779)$$

Теперь уравнения (778) перепишем так

$$\left. \begin{aligned} \xi_K - \delta \varphi_K &= \varphi_K - B_K^\circ - p_1^{I,K} dB_I - p_3^{I,K} ds_{I,K} - p_4^{I,K} dA_{I,K} - \\ &\quad - p_5^{I,K} \Delta a - p_6^{I,K} (\Delta \alpha) \\ \eta_K \lambda \sec \varphi_K &= \lambda_K - L_K^\circ + \delta \lambda_K - dL_I - q_1^{I,K} dB_I - q_3^{I,K} ds_{I,K} - \\ &\quad - q_4^{I,K} dA_{I,K} - q_5^{I,K} \Delta a - q_6^{I,K} (\Delta \alpha) \\ \eta_K^a \operatorname{tg} \varphi_K &= \alpha_{K,I} - A^\circ_{K,I} + \delta \alpha_{K,I} - r_1^{I,K} dB_I - r_3^{I,K} ds_{I,K} - \\ &\quad - r_4^{I,K} dA_{I,K} - r_5^{I,K} \Delta a - r_6^{I,K} (\Delta \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (780)$$

Подставим теперь в (780) вместо  $dB_I$ ,  $dL_I$  и  $dA_{I,K}$  их значения согласно (777)

$$\left. \begin{aligned} dB_I &= \varphi_I - B_I^\circ - (\xi_I - \delta \varphi_I) \\ dL_I &= \lambda_I - L_I^\circ + \delta \lambda_I - \eta_I \sec \varphi_I \\ dA_{I,K} &= \alpha_{I,K} - A^\circ_{I,K} + \delta \alpha_{I,K} - \eta_I \operatorname{tg} \varphi_I \end{aligned} \right\} \quad (781)$$



и, кроме того, умножим третье из уравнений (780) на  $\operatorname{cosec} \varphi_K$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} \xi_K - \delta \varphi_K = & \varphi_K - B_K^\circ - p_1^{I,K} (\varphi_I - B_I^\circ) - p_3^{I,K} (s_{I,K} - s^\circ_{I,K}) - \\ & - p_4^{I,K} (\alpha_{I,K} - A^\circ_{I,K}) + p_1^{I,K} (\xi_I - \delta \varphi_I) - p_3^{I,K} \delta s_{I,K} + p_4^{I,K} \operatorname{tg} \varphi_I \eta_I - \\ & - p_4^{I,K} \delta \alpha_{I,K} - p_5^{I,K} \Delta a - p_6^{I,K} (\Delta \alpha); \end{aligned} \quad (782)$$

$$\begin{aligned} \eta_K \lambda \sec \varphi_K = & \lambda_K - L_K^\circ - (\lambda_I - L_I^\circ) - q_1^{I,K} (\varphi_I - B_I^\circ) - \\ & - q_3^{I,K} (s_{I,K} - s^\circ_{I,K}) - q_4^{I,K} (\alpha_{I,K} - A_{I,K}) + \delta \lambda_K - \delta \lambda_I + \\ & + q_1^{I,K} (\xi_I - \delta \varphi_I) - q_3^{I,K} \delta s_{I,K} - \sec \varphi_I (1 + q_4^{I,K} \sin \varphi_I) \eta_I - \\ & - q_4^{I,K} \delta \alpha_{I,K} - q_5^{I,K} \Delta a - q_6^{I,K} (\Delta \alpha); \end{aligned} \quad (783)$$

$$\begin{aligned} \eta_K^\alpha \sec \varphi_K = & (\alpha_{K,I} - A^\circ_{K,I}) \operatorname{cosec} \varphi_K - r_1^{I,K} \operatorname{cosec} \varphi_K (\varphi_I - B_I^\circ) - \\ & - r_3^{I,K} \operatorname{cosec} \varphi_K (s_{I,K} - s^\circ_{I,K}) - r_4^{I,K} (\alpha_{I,K} - A^\circ_{I,K}) \operatorname{cosec} \varphi_K + \\ & + r_1^{I,K} \operatorname{cosec} \varphi_K (\xi_I - \delta \varphi_I) - r_3^{I,K} \operatorname{cosec} \varphi_K \delta s_{I,K} + \\ & + r_4^{I,K} \operatorname{cosec} \varphi_K \operatorname{tg} \varphi_I \eta_I - r_4^{I,K} \operatorname{cosec} \varphi_K \delta \alpha_{I,K} + \delta \alpha_{K,I} \operatorname{cosec} \varphi_K - \\ & - r_5^{I,K} \operatorname{cosec} \varphi_K \Delta a - r_6^{I,K} \operatorname{cosec} \varphi_K (\Delta \alpha). \end{aligned} \quad (784)$$

Третья стадия заключается именно в получении уравнений (782), (783) и (784) по каждой из всех геодезических линий, входящих в астрономо-геодезическую сеть. В этих уравнениях через  $\eta^\lambda$  обозначена слагающая уклонения отвеса в первом вертикале, получаемая из сопоставления астрономических и геодезических долгот; через  $\eta^\alpha$  обозначена та же слагающая уклонения отвеса в первом вертикале, но получаемая из сопоставления астрономических и геодезических азимутов.

### § 111. Уравнение Лапласа или азимутальное уравнение по некоторой геодезической линии по Гельмерту; сопоставление его с азимутальным уравнением по Красовскому

Мы на время прервем изложение метода Гельмерта уравнивания астрономо-геодезической сети и вновь займемся лапласовым уравнением по геодезической линии  $IK$ . Вычитая из (784) уравнение (783) предыдущего параграфа, мы и получаем сейчас же уравнение Лапласа по Гельмерту в таком сперва виде

$$\begin{aligned} (\alpha_{K,I} - A^\circ_{K,I}) \operatorname{cosec} \varphi_K - r_4^{I,K} (\alpha_{I,K} - A^\circ_{I,K}) \operatorname{cosec} \varphi_K + q_4^{I,K} (\alpha_{I,K} - A^\circ_{I,K}) - \\ - \{(\lambda_K - L^\circ_K) - (\lambda_I - L^\circ_I)\} - (r_1^{I,K} \operatorname{cosec} \varphi_K - q_1^{I,K}) (\varphi_I - B_I^\circ) - \\ - (r_3^{I,K} \operatorname{cosec} \varphi_K - q_3^{I,K}) (s_{I,K} - s^\circ_{I,K}) + (r_1^{I,K} \operatorname{cosec} \varphi_K - q_1^{I,K}) (\xi_I - \delta \varphi_I) - \\ - (r_3^{I,K} \operatorname{cosec} \varphi_K - q_3^{I,K}) \delta s_{I,K} + \delta \alpha_{K,I} \operatorname{cosec} \varphi_K - \\ - (r_4^{I,K} \operatorname{cosec} \varphi_K - q_4^{I,K}) \delta \alpha_{I,K} - \delta \lambda_K + \delta \lambda_I + (r_4^{I,K} \operatorname{cosec} \varphi_K \operatorname{tg} \varphi_I - \\ - (q_4^{I,K} \operatorname{tg} \varphi_I - \sec \varphi_I) \eta_I - (r_5^{I,K} \operatorname{cosec} \varphi_K - q_5^{I,K}) \Delta a - \\ - (r_6^{I,K} \operatorname{cosec} \varphi_K - q_6^{I,K}) (\Delta \alpha) = 0. \end{aligned} \quad (785)$$

В этом виде (785) уравнение Лапласа часто и остается в вычислениях по Гельмерту; так как коэффициенты в (783) и (784) уже вычислены, то путем простого вычитания из (784) уравнения (783) получаем (785). Но из (779) ясно видно, что

$$r_3^{I,K} \operatorname{cosec} \varphi_K - q_3^{I,K} = 0,$$

т. е. в (785) члены с  $\delta s$  и  $(s - s_0)$  исчезают, что находится в полном согласии с выводами § 106. Подставим далее в (785) значения коэффициентов  $p$ ,  $q$  и  $r$  по (709) § 93. Мы получим

$$r_5^{I,K} \operatorname{cosec} \varphi_K - q_5^{I,K} = 0,$$

$$r_6^{I,K} \operatorname{cosec} \varphi_K - q_6^{I,K} = \frac{(L_K - L_I)'' (B_K - B_I)''}{\rho''} \cos^3 \varphi_I \operatorname{cosec} \varphi_K;$$

$$r_1^{I,K} \operatorname{cosec} \varphi_K - q_1^{I,K} = \frac{\sin (L_K - L_I)}{\cos \varphi_K} \left\{ \operatorname{cosec} \varphi_K (1 - e^2 \sin^2 \varphi_K \cos^2 \varphi_K) - \right. \\ \left. - \frac{M_I}{N_K} \sin \varphi_K \right\};$$

$$r_1^{I,K} \operatorname{cosec} \varphi_K - q_1^{I,K} = \frac{\sin (L_K - L_I)}{\sin \varphi_K} \cos \varphi_K \quad (\text{с отбрасыванием члена порядка } e^2 l);$$

$$r_4^{I,K} \operatorname{cosec} \varphi_K - q_4^{I,K} = \cos \frac{s_{IK}}{R} \operatorname{cosec} \varphi_K.$$

Отсюда

$$\alpha_{K,I} - A^{\circ}_{K,I} - \cos \frac{s_{IK}}{R} (\alpha_{I,K} - A^{\circ}_{I,K}) - (\lambda_K - L_K^{\circ}) \sin \varphi_K + (\lambda_I - L_I^{\circ}) \sin \varphi_K - \\ - \sin l_{I,K} \cos \varphi_K (\varphi_I - B_I^{\circ}) + \delta \alpha_{K,I} - \cos \frac{s_{IK}}{R} \delta \alpha_{I,K} - \delta \lambda_K \sin \varphi_K + \\ + \delta \lambda_I \sin \varphi_K + \sin l_{I,K} \cos \varphi_K (\xi_I - \delta \varphi_I) + \left( \cos \frac{s_{IK}}{R} \operatorname{tg} \varphi_I - \frac{\sin \varphi_K}{\cos \varphi_I} \right) \eta_I - \\ - \frac{l''_{I,K} (B_K - B_I)''}{\rho''} \cos^3 \varphi_I (\Delta \alpha) = 0. \quad (786)$$

Так как

$$\left. \begin{aligned} dB_I &= \varphi_I - B_I^{\circ} - (\xi_I - \delta \varphi_I) \\ dA_{I,K} &= \alpha_{I,K} - A^{\circ}_{I,K} + \delta \alpha_{I,K} - \eta_I \operatorname{tg} \varphi_I \\ dL_I &= \lambda_I - L_I + \delta \lambda_I - \eta_I \sec \varphi_I \end{aligned} \right\}. \quad (787)$$

то уравнение (786) приводится к такому виду

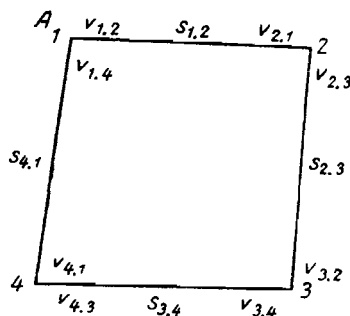
$$\alpha_{K,I} - A^{\circ}_{K,I} - (\alpha_{I,K} - A^{\circ}_{I,K}) - (\lambda_K - L_K^{\circ}) \sin \varphi_K + (\lambda_I - L_I^{\circ}) \sin \varphi_I - \\ - \sin l_{I,K} \cos \varphi_K (\varphi_I - B_I^{\circ}) + \sin l_{I,K} \cos \varphi_K (\xi_I - \delta \varphi_I) + \delta \alpha_{K,I} - \delta \alpha_{I,K} + \\ + \frac{s_{IK}^2}{2R^2} dA_{I,K} - \delta \lambda_K \sin \varphi_K + \delta \lambda_I \sin \varphi_K + (\lambda_I - L_I^{\circ}) (\sin \varphi_K - \sin \varphi_I) + \\ + \left( \operatorname{tg} \varphi_I - \frac{\sin \varphi_K}{\cos \varphi_I} \right) \eta_I + \frac{l''_{I,K} (B_K - B_I)''}{\rho''} \cos^3 \varphi_I (\Delta \alpha) = 0;$$

$$\begin{aligned}
& \{(\alpha_{K,I} - A^{\circ}_{K,I}) - (\lambda_K - L_K^{\circ}) \sin \varphi_K\} - \{(\alpha_{I,K} - A^{\circ}_{I,K}) - (\lambda_I - L_I^{\circ}) \sin \varphi_I\} - \\
& - \sin l_{I,K} \cos \varphi_K (\varphi_I - B_I^{\circ}) + \delta \alpha_{K,I} - \delta \alpha_{I,K} - \delta \lambda_K \sin \varphi_K + \delta \lambda_I \sin \varphi_I + \\
& + \sin l_{I,K} \cos \varphi_K (\xi_I - \delta \varphi_I) + \frac{s^2_{I,K}}{2R^2} dA_{I,K} + (\sin \varphi_K - \sin \varphi_I) [(\lambda_I - L_I^{\circ}) - \\
& - \eta_I \sec \varphi_I + \delta \lambda_I] - \frac{l''_{I,K}(B_K - B_I)''}{\rho''} \cos^3 \varphi_I (\Delta \alpha) = 0; \\
& \{(\alpha_{K,I} - A^{\circ}_{K,I}) - (\lambda_K - L_K^{\circ}) \sin \varphi_K\} - \{(\alpha_{I,K} - A^{\circ}_{I,K}) - (\lambda_I - L_I^{\circ}) \sin \varphi_I\} - \\
& - \sin l_{I,K} \cos \varphi_K dB_I + \delta \alpha_{K,I} - \delta \alpha_{I,K} + \delta \lambda_I \sin \varphi_I - \delta \lambda_K \sin \varphi_K + \frac{s^2_{I,K}}{2R^2} dA_{I,K} + \\
& + (\sin \varphi_K - \sin \varphi_I) dl_I - \frac{l''_{I,K}(B_K - B_I)''}{\rho''} \cos^3 \varphi_I (\Delta \alpha) = 0. \quad (788)
\end{aligned}$$

Это согласуется с данным мною уравнением (767) в § 106 до малых величин порядка  $e^2 l \cos \Phi dB$  и  $(B_K - B_I) l dB$ , которые вносят в (767) погрешность вообще меньшую 0'',002. Представляется, что в ряде случаев пользование лапласовым уравнением в форме (788) проще, чем в форме (786).

## § 112. Продолжение изложения метода Гельмерта общего уравнивания астрономо-геодезической сети

После составления уравнений (782), (783) и (784) в методе Гельмерта приступают к четвертой стадии — именно к отнесению выражений для всех  $\xi$  и  $\eta$  к начальной точке триангуляции и попутно к получению уравнений Лапласа, также отнесенных все к начальной точке триангуляции. Это отнесение «к начальному пункту» заключается в выражении  $\xi_K$  и  $\eta_K$  через  $\xi_1$  и  $\eta_1$ , минуя  $\xi$  и  $\eta$  для всех точек Лапласа, являющихся связующими между  $K$  и  $A$ , если под  $A$  понимать начальную точку, в которой составляющие уклонения отвеса суть  $\xi_1$  и  $\eta_1$ . Аналогичную задачу мы уже имели в § 93, но только в упрощенном виде. Для выяснения дела напомним сперва уравнения (782), (783) и (784) для геодезических линий 1-2, 2-3, 3-4, 4-1, образующих полигон, изображенный на черт. 158, при этом начальная точка  $A$  триангуляции будет идти под номером 1. Свободные члены в уравнениях (782), (783) и (784) будем обозначать через  $W^{\varphi}$ ,  $W^{\lambda}$  и  $W^{\alpha}$ . Мы имеем



Черт. 158

$$\left. \begin{aligned}
\xi_2 - \delta \varphi_2 &= W^{\varphi}_{1,2} + p_1^{1,2} (\xi_1 - \delta \varphi_1) - p_3^{1,2} \delta s_{1,2} + p_4^{1,2} \operatorname{tg} \varphi_1 \eta_1 - \\
&\quad - p_4^{1,2} \delta \alpha_{1,2} - p_5^{1,2} \Delta \alpha - p_6^{1,2} (\Delta \alpha) \quad Ia \\
\eta_2^{\lambda} \sec \varphi_2 &= W^{\lambda}_{1,2} + \delta \lambda_2 - \delta \lambda_1 + q_1^{1,2} (\xi_1 - \delta \varphi_1) - q_3^{1,2} \delta s_{1,2} + \\
&\quad + \sec \varphi_1 (1 + q_4^{1,2} \sin \varphi_1) \eta_1 - q_4^{1,2} \delta \alpha_{1,2} - q_5^{1,2} \Delta \alpha - q_6^{1,2} (\Delta \alpha) \quad Ib \\
\eta_2^{\alpha} \sec \varphi_2 &= W^{\alpha}_{1,2} + r_1^{1,2} \operatorname{cosec} \varphi_2 (\xi_1 - \delta \varphi_1) - r_3^{1,2} \operatorname{cosec} \varphi_2 \delta s_{1,2} + \\
&\quad + r_4^{1,2} \operatorname{cosec} \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_1 \eta_1 + \operatorname{cosec} \varphi_2 \delta \alpha_{1,2} - r_4^{1,2} \operatorname{cosec} \varphi_2 \delta \alpha_{1,2} - \\
&\quad - r_5^{1,2} \operatorname{cosec} \varphi_2 \Delta \alpha - r_6^{1,2} \operatorname{cosec} \varphi_2 (\Delta \alpha) \quad Ic
\end{aligned} \right\}, \quad L_{1,2} = Ib - Ic = 0. \quad (789)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \xi_3 - \delta\varphi_3 &= W_{2,3}^{\varphi} + p_1^{2,3}(\xi_2 - \delta\varphi_2) - p_3^{2,3}\delta s_{2,3} + p_4^{2,3}\lg \tau_2 \eta_2 - \\
 &\quad - p_4^{2,3}\delta\alpha_{2,3} - p_5^{2,3}\Delta a - p_6^{2,3}(\Delta\alpha) \quad IIa \\
 \eta_3^\lambda \sec \varphi_3 &= W_{2,3}^{\lambda} + \delta\lambda_3 - \delta\lambda_2 + q_1^{2,3}(\xi_2 - \delta\varphi_2) - q_3^{2,3}\delta s_{2,3} + \\
 &\quad + \sec \varphi_2(1 + q_4^{2,3}\sin \varphi_2)\eta_2 - q_4^{2,3}\delta\alpha_{2,3} - q_5^{2,3}\Delta a - q_6^{2,3}(\Delta\alpha) \quad IIb \\
 \eta_3^\alpha \sec \varphi_3 &= W_{2,3}^{\alpha} + r_1^{2,3}\operatorname{cosec} \varphi_3(\xi_2 - \delta\varphi_2) - r_3^{2,3}\operatorname{cosec} \varphi_3\delta s_{2,3} + \\
 &\quad + r_4^{2,3}\operatorname{cosec} \varphi_3 \lg \varphi_2 \eta_2 + \operatorname{cosec} \varphi_3\delta\alpha_{2,3} - r_4^{2,3}\operatorname{cosec} \varphi_3\delta\alpha_{2,3} - \\
 &\quad - r_5^{2,3}\operatorname{cosec} \varphi_3\Delta a - r_6^{2,3}\operatorname{cosec} \varphi_3(\Delta\alpha) \quad IIc \\
 L_{2,3} &= IIb - IIc = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (790)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \xi_4 - \delta\varphi_4 &= W_{3,4}^{\varphi} + p_1^{3,4}(\xi_3 - \delta\varphi_3) - p_3^{3,4}\delta s_{3,4} + p_4^{3,4}\lg \varphi_3 \eta_3 - \\
 &\quad - p_4^{3,4}\delta\alpha_{3,4} - p_5^{3,4}\Delta a - p_6^{3,4}(\Delta\alpha) \quad IIIa \\
 \eta_4^\lambda \sec \varphi_4 &= W_{3,4}^{\lambda} + \delta\lambda_4 - \delta\lambda_3 + q_1^{3,4}(\xi_3 - \delta\varphi_3) - q_3^{3,4}\delta s_{3,4} + \\
 &\quad + \sec \varphi_3(1 + q_4^{3,4}\sin \varphi_3)\eta_3 - q_4^{3,4}\delta\alpha_{3,4} - q_5^{3,4}\Delta a - q_6^{3,4}(\Delta\alpha) \quad IIIb \\
 \eta_4^\alpha \sec \varphi_4 &= W_{3,4}^{\alpha} + r_1^{3,4}\operatorname{cosec} \varphi_4(\xi_3 - \delta\varphi_3) - r_3^{3,4}\operatorname{cosec} \varphi_4\delta s_{3,4} + \\
 &\quad + r_4^{3,4}\operatorname{cosec} \varphi_4 \lg \varphi_3 \eta_3 + \operatorname{cosec} \varphi_4\delta\alpha_{3,4} - r_4^{3,4}\operatorname{cosec} \varphi_4\delta\alpha_{3,4} - \\
 &\quad - r_5^{3,4}\operatorname{cosec} \varphi_4\Delta a - r_6^{3,4}\operatorname{cosec} \varphi_4(\Delta\alpha) \quad IIIc \\
 L_{3,4} &= IIIb - IIIc = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (791)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \xi_4 - \delta\varphi_4 &= W_{1,4}^{\varphi} + p_1^{1,4}(\xi_1 - \delta\varphi_1) - p_3^{1,4}\delta s_{1,4} + p_4^{1,4}\lg \varphi_1 \eta_1 - \\
 &\quad - p_4^{1,4}\delta\alpha_{1,4} - p_5^{1,4}\Delta a - p_6^{1,4}(\Delta\alpha) \quad IVa \\
 \eta_4^\lambda \sec \varphi_4 &= W_{1,4}^{\lambda} + \delta\lambda_4 - \delta\lambda_1 + q_1^{1,4}(\xi_1 - \delta\varphi_1) - q_3^{1,4}\delta s_{1,4} + \\
 &\quad + \sec \varphi_1(1 + q_4^{1,4}\sin \varphi_1)\eta_1 - q_4^{1,4}\delta\alpha_{1,4} - q_5^{1,4}\Delta a - q_6^{1,4}(\Delta\alpha) \quad IVb \\
 \eta_4^\alpha \sec \varphi_4 &= W_{1,4}^{\alpha} + r_1^{1,4}\operatorname{cosec} \varphi_4(\xi_1 - \delta\varphi_1) - r_3^{1,4}\operatorname{cosec} \varphi_4\delta s_{1,4} + \\
 &\quad + r_4^{1,4}\operatorname{cosec} \varphi_4 \lg \varphi_1 \eta_1 + \operatorname{cosec} \varphi_4\delta\alpha_{1,4} - r_4^{1,4}\operatorname{cosec} \varphi_4\delta\alpha_{1,4} - \\
 &\quad - r_5^{1,4}\operatorname{cosec} \varphi_4\Delta a - r_6^{1,4}\operatorname{cosec} \varphi_4(\Delta\alpha) \quad IVc \\
 L_{1,4} &= IVb - IVc = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (792)$$

Вычитая: из уравнения *Ib* уравнение *Ic*, из уравнения *IIb* уравнение *IIc*, из уравнения *IIIb* уравнение *IIIc*, из уравнения *IVb* уравнение *IVc*, мы получаем в виде уравнений (789), (790), (791) и (792) уравнения Лапласа по линиям 1-2, 2-3, 3-4, 4-1, левые части которых, т. е. величины  $L_{1,2}$ ,  $L_{2,3}$ ,  $L_{3,4}$ ,  $L_{1,4}$ , конечно, должны быть равны нулю. Очевидно, поставленная в рассматриваемой четвертой стадии задача сводится к постепенному и последовательному исключению: из уравнений *IIa*, *IIb*, *IIc* (789) величин  $\xi_2$  и  $\eta_2$ ; из уравнений *IIIa*, *IIIb*, *IIIc* величин  $\xi_3$  и  $\eta_3$ .

Это исключение делается по такой схеме. Величина  $(\xi_2 - \delta\varphi_2)$ , определяемая уравнением *Ia*, подставляется в уравнения *IIa*, *IIb* и *IIc* и в уравнение Лапласа по линии 2-3, отнесенное к точке 3

$$L_{2,3} = IIc - IIb. \quad (790)$$

Далее  $\eta_2^\alpha \sec \varphi_2$ , определяемое уравнением *Ic*, подставляется вместо  $\eta_2 \sec \varphi_2$  в уравнения *IIa*, *IIb*, *IIc* и в уравнение (790). Представим результаты этих подстановок в таком виде

$$(\xi_3 - \delta\varphi_3)' = 'W^{\varphi}_{1,3} = f_1[(\xi_1 - \delta\varphi_1), \eta_1, \Delta a, (\Delta \alpha), \delta s_{1,2}, \delta s_{2,3}, \delta \alpha_{1,2}, (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3})]; \quad II'a$$

$$(\eta_3^{\lambda} \sec \varphi_3)' = 'W^{\lambda}_{1,3} + f_2[(\xi_1 - \delta\varphi_1), \eta_1, \Delta a, (\Delta \alpha), \delta s_{1,2}, \delta s_{2,3}, \delta \alpha_{1,2}, (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}), \delta \lambda_1, \delta \lambda_3, \delta \lambda_2]; \quad II'b$$

$$(\eta_3^{\alpha} \sec \varphi_3)' = 'W^{\alpha}_{1,3} + f_3[(\xi_1 - \delta\varphi_1), \eta_1, \Delta a, (\Delta \alpha), \delta s_{1,2}, \delta s_{2,3}, \delta \alpha_{1,2}, (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}), \delta \alpha_{3,2}]; \quad II'c$$

$$J'_{2,3} = II'c - II'b = 0, \quad (790')$$

Теперь к уравнению *IIb'* и к уравнению (790') прибавляется уравнение (789) и тогда они получают окончательный вид; этот окончательный вид уравнения *IIb'* и (790') назовем через *IIb''* и (790''). Уравнение *IIb''* вычитают из *IIc'*, и тогда должны получить в точности (790'') — это является контролем вычислений. Приведем общий вид окончательных уравнений в точке 3

$$(\xi_3 - \delta\varphi_3)' = 'W^{\varphi}_{1,3} + f_1[(\xi_1 - \delta\varphi_1), \eta_1, \Delta a, (\Delta \alpha), \delta s_{1,2}, \delta s_{2,3}, \delta \alpha_{1,2}, (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3})]; \quad II'a$$

$$(\eta_3^{\lambda} \sec \varphi_3)'' = ''W^{\lambda}_{1,3} + f_2[(\xi_1 - \delta\varphi_1), \eta_1, \Delta a, (\Delta \alpha), \delta s_{1,2}, \delta s_{2,3}, \delta \alpha_{1,2}, (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3})] + \delta \lambda_3 - \delta \lambda_1; \quad II''b$$

$$(\eta_3^{\alpha} \sec \varphi_3)' = 'W^{\alpha}_{1,3} + f_3[(\xi_1 - \delta\varphi_1), \eta_1, \Delta a, (\Delta \alpha), \delta s_{1,2}, \delta s_{2,3}, \delta \alpha_{1,2}, (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}), \delta \alpha_{3,2}]; \quad II'c$$

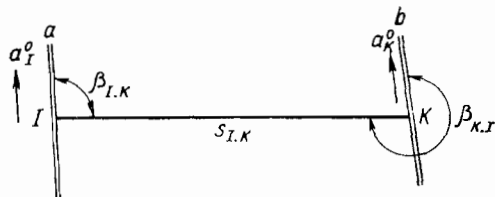
$$J_{1,2,3} = W^{\eta}_{1,2,3} + \delta \lambda_3 - \delta \lambda_1 + f_4[(\xi_1 - \delta\varphi_1), \eta_1, \Delta a, (\Delta \alpha), \delta \alpha_{1,2}, (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}), \delta \alpha_{3,2}]. \quad (790'')$$

Важно отметить: 1) что поправки азимутов по направлениям 2-1 и 2-3 входят с одинаковыми по величине и обратными по знаку коэффициентами, т. е. образуют поправку угла 1-2-3; 2) что в уравнениях (790'') и *II''b* не входит поправка  $\delta \lambda_2$ , а входит разность  $\delta \lambda_3 - \delta \lambda_1$  с коэффициентом единица; это достигается именно вычитанием (789) из *IIb'* и (790').

Исключение  $\xi_3$  и  $\eta_3$  из уравнений *IIIa*, *IIIb* и *IIIc* производится совершенно по такому же плану, но только используя, конечно, уравнения *II'a*, *II''b*, *II'c* и (790''), а именно:  $\xi_3 - \delta\varphi_3$ , определяемое уравнением *II'a*, подставляется в *IIIa*, *IIIb*, *IIIc* и (791); далее, в эти же уравнения, вместо  $\eta_3 \sec \varphi_3$ , подставляется  $\eta_3^{\alpha} \sec \varphi_3$ , определяемое уравнением *II'c*; наконец, к преобразованным в результате этих действий уравнениям *IIIb* и (791), которые мы назовем через *III'b* и (791'), прибавляется уравнение (790''). Действия контролируются тем, что лапласово уравнение (791'') должно совпадать с получаемым вычитанием из *III'c* уравнения *III'b*.

После выполнения рассматриваемой *четвертой стадии* вычислений, по Гельмерту, мы получим по описанному порядку выражения  $\xi$  и  $\eta$ , отнесенные *все к исходному* пункту триангуляции, и все лапласовы уравнения, также отнесенные к исходному пункту триангуляции. При этом для каждого пункта величина  $\eta$  выражается дважды; *после выполнения уравнений Лапласа* в нашей астрономо-геодезической сети эти два выражения величины  $\eta$  для каждого пункта должны будут численно совпасть.

Назовем астрономические азимуты выходных сторон  $Ia$  и  $Kb$  звена  $IK$  (черт. 159) в  $I$  — через  $\alpha_I^\circ$ , и в  $K$  — через  $\alpha_K^\circ$ . Пусть, далее, углы  $\beta_{K,I}$  и  $\beta_{I,K}$  выведены после уравнивания звена, как было указано в предыдущих параграфах. Мы имеем, конечно,



Черт. 159

$$\alpha_{I,K} = \alpha_I^\circ + \beta_{I,K},$$

$$\alpha_{K,I} = \alpha_K^\circ + \beta_{K,I}.$$

Отсюда

$$\delta\alpha_{I,K} = \delta\alpha_I^\circ + \delta\beta_{I,K},$$

$$\delta\alpha_{K,I} = \delta\alpha_K^\circ + \delta\beta_{K,I}.$$

Если ошибки направлений назовем:

для  $Ia$  . . . . . через  $v_I$ , для  $Kb$  . . . . . через  $v_K$ ,

для  $IK$  . . . . . через  $v_{I,K}$ , для  $KI$  . . . . . через  $v_{K,I}$ ,

то

$$\left. \begin{aligned} \delta\alpha_{I,K} &= \delta\alpha_I^\circ - v_I + v_{I,K} = \delta\alpha_I^\circ + v_{I,K} \\ \delta\alpha_{K,I} &= \delta\alpha_K^\circ - v_K + v_{K,I} = \delta\alpha_K^\circ + v_{K,I} \end{aligned} \right\}, \quad (793)$$

причем через  $\delta\alpha_I^\circ$  и  $\delta\alpha_K^\circ$  обозначены:  $\delta\alpha_I^\circ - v_I$ ;  $\delta\alpha_K^\circ - v_K$ . Очевидно, теперь, что в уравнениях для уклонов отвесных линий выражение:  $\delta\alpha_{s+1} - \delta\alpha_s$  обращается в  $v_{s,s+1} - v_{s+1,s}$ , или в поправку угла в полигоне при вершине с номером  $S$ .

Благодаря замыканию полигонов в рассматриваемой астрономо-геодезической сети, для ряда пунктов величины  $\xi$  и  $\eta^\lambda$  получатся двукратно, а может быть и трехкратно; это обстоятельство, именно, и ведет к составлению полигонных условий в триангуляции.

Пятая стадия вычислений заключается именно в составлении условных уравнений в рассматриваемой астрономо-геодезической сети. Если мы обратимся к полигону, изображенному на черт. 158, то мы видим, что  $\xi_4$  и  $\eta_4^\lambda \sec \varphi_4$  определяются, во-первых, передачей по геодезическим линиям 1-2, 2-3 и 3-4 (использование уравнений  $II'a$ ,  $II''b$  и  $II'c$  приводит, как было уже указано, к получению выражений для  $(\xi_4 - \delta\varphi_4)'$  и  $(\eta_4^\lambda \sec \varphi_4)''$  из уравнений  $III'a$  и  $III'b$ ), во-вторых те же величины определяются непосредственно из уравнений  $IVa$  и  $IVb$ .

Уравнение

$$(\xi_4 - \delta\varphi_4)' = \xi_4 - \delta\varphi_4,$$

выражает собой *условное уравнение широты* в нашем полигоне.

Уравнение

$$(\eta_4^\lambda \sec \varphi_4)'' = \eta_4^\lambda \sec \varphi_4$$

выражает собой *условное уравнение долготы* в том же полигоне. В общем виде условие широты представляется в таком виде

$$\begin{aligned} c_\varphi + a_1 \delta s_{1,2} + a_2 \delta s_{2,3} + a_3 \delta s_{3,4} + \dots + a_n \delta s_{n-1} + b_2 (v_{2,1} - v_{2,3}) + \\ + b_3 (v_{3,2} - v_{3,4}) + \dots + b_n (v_{n,n-1} - v_{n,1}) + p^\varphi \frac{\Delta a}{a_0} + q^\varphi (\Delta \alpha) = 0. \end{aligned} \quad (794)$$

Общий вид долготного уравнения напишется так

$$c_\lambda + d_1 \delta s_{1,2} + d_2 \delta s_{2,3} + d_3 \delta s_{3,4} + \dots + d_n \delta s_{n-1} + e_2 (\nu_{2,1} - \nu_{2,3}) + \\ + e_3 (\nu_{3,2} - \nu_{3,4}) + \dots + e_n (\nu_{n,n-1} - \nu_{n,1}) + p^\lambda \frac{\Delta a}{a_0} + q^\lambda (\Delta \alpha) = 0. \quad (795)$$

В (794) и (795) под  $n$  понимается число вершин полигона. В эти уравнения входят при вполне строгом учете всех влияний: 1) с совершенно ничтожными коэффициентами величины  $(\xi_1 - \delta\varphi_1)$  и  $\eta_1 \sec \varphi_1$ ; 2) с очень малыми коэффициентами величины  $\Delta a$  и  $(\Delta \alpha)$ ; 3) поправки  $\delta s$  длин всех сторон полигона; 4) поправки астрономических азимутов, причем поправки азимутов соединяются *парно*: поправки азимутов  $\delta\alpha_{s,s+1}$  и  $\alpha_{s,s-1}$  имеют коэффициенты, равные по величине и противоположные по знаку; другими словами, в уравнения широты и долготы входят не поправки астрономических азимутов, а *поправки углов* при вершинах полигона, или поправках направлений сторон полигона; при этом в условие для полигона из  $n$  вершин войдут всегда поправки  $n-1$  углов при  $n-1$  вершинах, или поправки 2  $(n-1)$  направлений.

Конечно, невязка сфероидического полигона по широте или по долготе зависит, строго рассуждая, не только от ошибок длин его сторон и от ошибок углов при его вершинах, но и от правильности приданного полигону при вычислении его невязок географического положения, от правильности принятой при этом его общей азимутальной ориентировки и от правильности размеров и сжатия того эллипсоида, на котором этот полигон укладывается и строится по измеренным в нем элементам. Так как мы имеем дело с поверхностью вращения, то правильность географического положения полигона определяется принятой исходной в нем широтой. Конечно, эта правильность диктуется, главным образом, выбором исходной широты  $B^\circ_1$  в исходном пункте  $A$  (или пункте № 1) всей триангуляции; другими словами, погрешность

$$dB_1 = \varphi_1 - B_1^\circ - (\xi_1 - \delta\varphi_1)$$

может быть принята выражающей неверность принятого географического положения полигона. Но влияние члена  $\varphi_1 - B_1^\circ$ , конечно, учлось само собой при образовании свободных членов уравнений для  $\xi$  в нашем полигоне, влияние же  $(\xi_1 - \delta\varphi_1)$  на широтную и долготную невязки полигона оказывается совершенно пренебрегаемым. Очевидно, и учетное влияние  $\varphi_1 - B_1^\circ$  также совершенно пренебрегаемо, так как  $\varphi_1 - B_1^\circ$  и  $\xi_1$ -величины вообще одного порядка. При том приближенном установлении географического положения полигонов, которым мы обычно располагаем до уравнения астрономической сети, ошибки этого географического положения не сказываются сколько-нибудь заметно на невязках полигонов. Члены с  $(\xi_1 - \delta\varphi_1)$  в условиях широты и долготы просто всегда не вводятся. Ошибка азимутальной ориентировки также оказывается влияющей пренебрегаемо на невязки условий широтных и долготных. Это мною показано в моей статье в «Трудах» ЦНИИГАиК за 1931 г., выпуск 2-й. Члены с  $\eta_1 \sec \varphi_1$  в уравнениях широты и долготы, очевидно, и выражают неучтенную в свободных членах часть влияния общей неверности в азимутальной ориентировке полигонов. Эта величина  $\eta_1 \sec \varphi_1$  входит с такими ничтожными коэффициентами в условие широты и долготы, что всегда слагаемые с  $\eta_1 \sec \varphi_1$  просто пренебрегаются в этих условных уравнениях.

Что касается членов с  $\Delta a$  и  $(\Delta x)$ , то они хотя и малы, но не пренебрегаемы ни в условном уравнении широты, ни в условном уравнении долготы. Введение этих членов в условные уравнения полигона, очевидно, учитывает влияние «метода развертывания», т. е. те искажения в построении полигона, которые вносятся развертыванием его элементов на референц-эллипсоиде вместо построения их на поверхности эллипсоида, наилучше подходящего к геоиду. Однако понятно, что при этом метод Гельмерта вовсе не учитывает влияния отступления геоида в пределах полигона от этого наилучше подходящего эллипсоида; на этой *слабой стороне* мы остановим внимание впоследствии.

Сравнение выражений для  $\xi$  и  $\eta$ , полученных при замыкании полигонов триангуляции двукратно и трехкратно и вообще многократно для одних и тех же точек, приводит к получению в *пятой стадии вычислений* всех условий полигонных, или условий широт и долгот. Это сравнение делается, конечно, очень просто.

Вторым типом условных уравнений в астрономо-геодезической сети являются уравнения Лапласа и условия сумм углов в полигонах. Если все вершины полигона являются пунктами Лапласа, как это имеет место теперь в СССР, то условие суммы углов в полигоне отпадает при использовании уравнений Лапласа для всех сторон полигона.

Шестая стадия вычислений заключается в решении условных уравнений широт и долгот и уравнений Лапласа *всех вместе* по способу наименьших квадратов. Этому решению предшествует установление весов длин геодезических линий, весов направлений геодезических линий и величин  $\delta^{\circ}_1$ ; об этом будет сказано при рассмотрении способов Красовского и Урмасва. Гельмерт при своем решении условных уравнений астрономо-геодезической сети относит члены этих уравнений, в которые входят величины  $\xi_1 - \delta\varphi_1$ ,  $\eta_1 \sec \varphi_1$ ,  $\Delta a$  и  $(\Delta x)$ , в *состав свободных членов уравнений*. Поэтому коррелаты нормальных уравнений получают-ся функциями как свободных членов условных уравнений, так и величин  $\xi_1 - \delta\varphi_1$ ,  $\eta_1 \sec \varphi_1$ ,  $\Delta a$  и  $(\Delta x)$ , т. е. *численного значения коррелат еще не получается*. Поэтому же и поправки наблюдаемых величин, т. е. величины  $\delta s_{I,K}$ ,  $\nu_{I,K}$ ,  $\delta^{\circ}_1$ ,  $\delta\lambda_1$ , получаются в виде выражений, в которые входят, кроме некоторого числа, еще члены с  $(\xi_1 - \delta\varphi_1)$ , с  $\eta_1 \sec \varphi_1$ , с  $\Delta a$  и с  $(\Delta x)$ . Полученные из решения условных уравнений сети выражения поправок наблюдаемых величин, т. е. поправок  $\delta s_{I,K}$ ,  $\delta\lambda_1$ ,  $\delta^{\circ}_1$ ,  $\nu_{I,K}$  подставляются в выражения  $\xi$  и  $\eta$ , отнесенные к исходному пункту триангуляции. Очевидно, после такой подстановки все  $\xi$  и  $\eta$  сделаются функциями *только неизвестных*:  $(\xi_1 - \delta\varphi_1)$ ,  $\eta_1 \sec \varphi_1$ ,  $\Delta a$  и  $(\Delta x)$ . После этого должно собственно следовать установление неизвестных  $(\xi_1 - \delta\varphi_1)$ ,  $\eta_1 \sec \varphi_1$ ,  $\Delta a$  и  $(\Delta x)$ . Конечно, для этого нужно использовать тот или другой метод, указанный по отношению астрономо-геодезической сети в главе о градусных измерениях: или решение уравнений для  $\xi$  и  $\eta$  выполнять под условием минимума  $\sum \xi^2 + \sum \eta^2$ , или ввести предварительно в  $\varphi$  и  $\lambda$  топографо-изостатические редукции, или ввести предварительно в  $\varphi$  и  $\lambda$  редукции, полученные на основании использования гравиметрических материалов. Во всяком случае *в седьмую стадию мы должны отнести установление величин  $\xi_1 - \delta\varphi_1$ ,  $\eta_1$ ,  $\Delta a$  и  $(\Delta x)$* . После этого *восьмая и последняя стадия* общего уравнивания астрономо-геодезической сети заключается в подстановке *в полученные в шестой стадии* выражения величин  $\delta s_{I,K}$ ,  $\delta\lambda_1$ ,  $\delta^{\circ}_1$ ,  $\nu_{I,K}$  этих установленных значений  $\xi_1 - \delta\varphi_1$ ,  $\eta_1$ ,  $\Delta a$ ,  $(\Delta x)$ . Таким образом, в этой *восьмой стадии* будут наконец получены



числовые значения поправок всех наблюдаемых величин, и, собственно, задача уравнильных вычислений будет закончена.

Исходные геодезические даты будут, очевидно, получены так

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \varphi_1 - (\xi_1 - \delta\varphi_1) \\ L_1 &= \lambda_1 + \delta\lambda_1 - \tau_1 \sec \varphi_1 \\ A_{1,2} &= \alpha_{1,2} + \delta\alpha_{1,2} - \tau_1 \operatorname{tg} \varphi_1 \end{aligned} \right\}. \quad (796)$$

$$\delta\alpha_{1,2} = \delta_1^\circ + \nu_{1,2} \dots$$

Очевидно,

$$(\alpha_{1,2} + \delta\alpha_{1,2}) - A_{1,2} = [(\lambda_1 + \delta\lambda_1) - L_1] \sin \varphi_1,$$

т. е. лапласово условие в пункте 1 будет выполнено, а поэтому вследствие выполнения после уравнивания лапласовых уравнений по всем геодезическим линиям в сети, в каждом лапласовом пункте этой сети будем иметь

$$(\alpha_{I,K} + \delta\alpha_{I,K}) - A_{I,K} = [(\lambda_I + \delta\lambda_I) - L_I] \sin \varphi_I, \quad (797)$$

причем

$$\delta\alpha_{I,K} = \delta_I^\circ + \nu_{I,K}.$$

Уравнение (796) относится к геодезической линии 1-2, вошедшей в уравнивание астрономо-геодезической сети. Уравнение (797) также относится к геодезическим линиям, вошедшим в уравнивание астрономо-геодезической сети;  $A_{I,K}$  и  $L$  суть геодезические азимут и долгота, вычисленные: на эллипсоиде с большой полуосью  $a_0 + \Delta a$  и сжатием  $(\alpha_0) + (\Delta\alpha)$ ; с исходными геодезическими данными, установленными по (796); с уравненными длинами геодезических линий  $(s_{I,K} + \delta s_{I,K})$  и с уравненными значениями углов между ними. Используя черт. 156, мы напомним

$$\text{уравненный угол } 3-2-1 \text{ при точке } 2 = \beta_{2,1} - \beta_{2,3} + \nu_{2,1} - \nu_{2,3}.$$

Таким образом, окончательное вычисление геодезических координат и азимутов в сети, составленной соединяющими смежные лапласовы пункты геодезическими линиями, предполагает переход на новый эллипсоид, наилучше подходящий к геоиду, установление исходных геодезических дат по (796), исправление длин геодезических линий поправками  $\delta s_{I,K}$  и исправление углов  $\beta$ , полученных по выполнению раздельного уравнивания звеньев за условия фигур и базисов, разностью поправок  $\nu_{I,K}$ . Контролем вычисления геодезических координат и азимутов и правильности выполненного общего уравнивания сети будет служить выполнение на каждом пункте условия (797) и выполнение условий замкнутости в каждом полигоне триангуляции.

### § 113. Заключительные соображения по методу Гельмерта общего уравнивания астрономо-геодезической сети

Прежде всего обращает на себя внимание крайняя громоздкость, возникающая при применении этого метода Гельмерта к сколько-нибудь значительным астрономо-геодезическим сетям. Выполнение третьей и в особенности четвертой стадии вычислений в сколько-нибудь значительной сети сопровождается огромной затратой вычислительного труда. Но должно отметить известную полноту и последовательность проведения

теоретических требований в уравнивании по методу Гельмерта. Если измеренные в триангуляции элементы, отнесенные к геоиду, мы сочли бы не получающими никаких изменений при переходе на некоторый референц-эллипсоид, установленный без использования материалов нашей астрономо-геодезической сети, то при дальнейшем уравнивании этой сети мы получили бы неверные результаты, что особенно ярко выяснено в § 106 по отношению к лапласовым уравнениям и лапласовым азимутам. В уравнивании по способу Гельмерта эти слабые стороны метода «развертывания» триангуляции на референц-эллипсоиде, более или менее произвольно выбранном, устраняются в своей главной части и устраняются именно тем, что все условные уравнения отнесены к «наилучше подходящему» эллипсоиду. В эти условные уравнения введены члены, зависящие от  $(\xi_1 - \delta\varphi_1)$ ,  $\eta_1 \sec \varphi_1$ ,  $\Delta a$ ,  $(\Delta x)$ , т. е. от различия ориентировок, размеров и сжатия наилучше подходящего эллипсоида и принятого референц-эллипсоида.

Величины  $(\xi_1 - \delta\varphi_1)$ ,  $\eta_1$ ,  $\sec \varphi_1$ ,  $\Delta a$ ,  $(\Delta x)$  находятся из составленных выражений для слагающих уклонов отвеса  $\xi$  и  $\eta$ , в которые входят свободные члены, зависящие от геодезических элементов градусных измерений — от длин  $s$  геодезических линий и их геодезических азимутов  $A$ . Вывод окончательных значений  $s$  и  $A$  требует правильного получения лапласовых азимутов и уравнивания астрономо-геодезической сети. Это правильное получение лапласовых азимутов и правильное уравнивание (если не применять метода проецирования измеренных величин на референц-эллипсоид) сети требуют замены геоида наилучше подходящим эллипсоидом, если не считаться с влиянием отступлений геоида от этого эллипсоида на длины геодезических линий и углы между ними. Таким образом, достаточно строго поставленная задача обработки астрономо-геодезической сети требует знания наилучше подходящего эллипсоида, а строгое определение этого наилучше подходящего эллипсоида требует в свою очередь строгой обработки астрономо-геодезической сети (в особенности в отношении строгого получения лапласовых азимутов). Получается замкнутый круг, подтверждающий положенную в основу метода Гельмерта связь обработки астрономо-геодезической сети с определением наилучше подходящего к геоиду эллипсоида (в пределах территории этой астрономо-геодезической сети).

Выход из этого замкнутого круга дается Гельмертом по следующему плану.

1. В выражения для  $\xi$  и  $\eta$  вводятся, кроме  $(\xi_1 - \delta\varphi_1)$ ,  $\eta_1$ ,  $\Delta a$  и  $(\Delta x)$ , еще и поправки  $\delta s_{r,k}$  измеренных длин геодезических линий, поправки  $v_{r,k}$  их измеренных направлений, поправки  $\delta\lambda$ , астрономических долгот и поправки  $\delta^\circ$ , азимутальных ориентировок по выходным сторонам в лапласовых пунктах ( $\delta^\circ = \delta x^\circ_1 - v_1$ )

2. В условные уравнения, кроме величин  $\delta s$ ,  $\delta\lambda$ ,  $v$  и  $\delta^\circ$ , входят члены с  $(\xi_1 - \delta\varphi_1)$ ,  $\eta_1$ ,  $\Delta a$  и  $(\Delta x)$ , которые и выражают влияние на свободный член соответствующего условного уравнения различия ориентировок, размеров и сжатия наилучшего эллипсоида и референц-эллипсоида, т. е. учитывают необходимое исправление этого свободного члена, получаемого применением метода развертывания триангуляции на референц-эллипсоиде. Введение поправок  $\delta s$ ,  $\delta\lambda$ ,  $v$ ,  $\delta^\circ$  по пункту 1 в выражения  $\xi$  и  $\eta$  обеспечивает правильность учета этого исправления из сравнения  $\xi$  и  $\eta$ , полученных многократно для некоторого пункта, в невязках соответствующих полигонов; сравнение же  $\eta^\lambda$  и  $\lambda^x$  приводит к учету такого исправления в свободных членах лапласовых уравнений.

3. Члены с  $(\xi_1 - \delta\varphi_1)$ ,  $\eta_1$ ,  $\Delta a$  и  $(\Delta\alpha)$  в условных уравнениях сети следует рассматривать, как поправки свободных членов этих уравнений; тогда становится понятным, что поправки наблюдаемых величин выражаются через поправки ориентировки, большой полуоси и сжатия референц-эллипсоида, т. е. через величины, от которых *ошибки измеренных величин*, собственно, *никак не зависят*. Члены с  $(\xi_1 - \delta\varphi_1)$ ,  $\eta_1$ ,  $\Delta a$  и  $(\Delta\alpha)$ , входящие в выражения поправок  $\delta s$ ,  $\delta\lambda$ ,  $\nu$ ,  $\delta^\circ$ , отражают лишь влияние на эти величины той ошибочности свободных членов условных уравнений, которая в этих свободных членах имеет место при применении метода развертывания на референц-эллипсоиде. Раз мы учли эти влияния в шестой стадии вычислений, учли, конечно, лишь в форме аналитической, то этого достаточно, чтобы составить теперь выражения для величин  $\xi$  и  $\eta$ , полученные в результате выполнения четвертой стадии. *Без участия уже* в этих выражениях для  $\xi$  и  $\eta$  неизвестных *поправок наблюдаемых величин* ( $\delta\lambda$ ,  $\nu$ ,  $\delta^\circ$ ,  $\delta s$ ), а выражая  $\xi$  и  $\eta$  только через неизвестные  $(\xi_1 - \delta\varphi_1)$ ,  $\eta_1$ ,  $\Delta a$  и  $(\Delta\alpha)$  и свободные члены. В этот момент исключения из уравнений для  $\xi$  и  $\eta$  поправок  $\delta s$ ,  $\delta\lambda$ ,  $\delta^\circ$ ,  $\nu$  замкнутый круг разрывается. Выполнив определение  $(\xi_1 - \delta\varphi_1)$ ,  $\eta_1$ ,  $\Delta a$  и  $(\Delta\alpha)$  по правилам обработки материалов градусных измерений, мы получаем возможность определить затем и численные значения поправок наблюдаемых в астрономо-геодезической сети величин.

Поправки наблюдаемых величин получаются с малыми искажениями их погрешностями «метода развертывания», имеющими, как мы видели, вредный *систематический* характер.

Конечно, *слабым* местом метода Гельмерта является то, что в нем применяется тот же метод развертывания, но только на наилучшее подходящее эллипсоиде; таким образом, искажения длин и направлений геодезических линий, вызываемые отступлениями геоида от наилучшего подходящего эллипсоида, вовсе не учитываются. О числовых значениях этих искажений мы уже упоминали в § 106; они могут вносить добавочные невязки одного порядка с теми, которые обусловлены ошибками геодезических измерений.

Понятно, о практическом применении метода Гельмерта уравнивания астрономо-геодезической сети вряд ли приходится говорить, если эта сеть включает в себя более 12 замкнутых полигонов. Пока мы имеем применение этого метода к восьми полигонам.

#### § 114. Предложения проф. Ф. Н. Красовского по общему уравниванию астрономо-геодезической сети. Предварительные соображения

Вывод наилучшего подходящего эллипсоида для территории большой страны и для большой астрономо-геодезической сети, исполняемой в ней, всегда растягивается на очень длинные сроки. Так, для СССР нужно ждать развития градусных измерений в северных частях Сибири и Дальнего Востока. Между тем, законченные полевыми исполнениями части большой триангуляции должно обрабатывать так, чтобы этим не задерживать использования опорных геодезических сетей в самых разнообразных целях. Принятие при этом временных систем геодезических координат вызовет в последующем громоздкие и сложные перевычисления, захватывающие триангуляции всех классов, и что самое тяжелое — сдвиг рамок топографических планшето и карт.

По существу установление референц-эллипсоида и исходных геодезических дат нужно выполнять в самом начале развития астрономо-геодезических работ в данной стране, когда работы по детальному обоснова-

нию и по топографическим съемкам еще только начинаются. Для целей производственной геодезии, с другой стороны, ошибка на 100 м в принятой большой полуоси референц-эллипсоида и ошибка на две единицы в знаменателе его сжатия имеют малое значение; неправильность установления исходной геодезической широты и долготы на одну секунду также еще не имеет практического значения. Даже к установлению исходного геодезического азимута мы можем предъявить не так уже строгие требования потому, что ошибка в этом азимуте на одну секунду, хотя и обусловит в значительной сети заметные вообще на ее краях сдвиги геодезических точек по широте и долготе, но это не будет влиять на относительное расположение геодезических точек, это лишь приведет к изменению системы координат; абсолютные же сдвиги точек, удаленных от исходной точки триангуляции на 4000—5000 км, выразятся величиной, меньшей 20 м, которые при такой огромной территории не имеют еще практического значения, а получают, конечно, то или другое значение лишь в научных вопросах.

Наконец, приходится отметить, что выполнение общего уравнивания астрономо-геодезической сети влияет собственно мало на результаты вывода из этой сети размеров и сжатия наилучшего подходящего эллипсоида и исходных геодезических дат. Допустим сперва, что мы так или иначе учли до установления этого эллипсоида и его ориентировки влияние в условиях уравнивания сети членов с  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\Delta a$  и ( $\Delta z$ ) и, следовательно, выполнили общее уравнивание астрономо-геодезической сети вполне правильно. Тогда, как показывает опыт СССР, получаемые из общего уравнивания поправки длин геодезической линии не превышают 1 м на 300 км, а поправки лапласовых азимутов этих геодезических линий — не превышают 1",5. Если мы предположим, что половина наибольшей поправки длины геодезической линии имеет постоянный систематический характер, то тогда исправление длин геодезических линий из общего уравнивания повлияет на вывод большой полуоси, очевидно, только на 10 м. Поправки лапласовых азимутов, как обусловленные при указанных условиях, главным образом, ошибками астрономических определений, будут независимы друг от друга, и можно сообразить, что влияние этих поправок азимутов, определенных общим уравниванием, на вывод большой полуоси из астрономо-геодезической сети СССР будет менее 15—20 м.

Но допустим теперь, что по методу § 93, не выполнив общего уравнивания астрономо-геодезической сети, а применяя метод развертывания сети на некотором референц-эллипсоиде, мы проводим вывод размеров и сжатия эллипсоида и исходных геодезических дат из обширной астрономо-геодезической сети. Как уже указывалось в § 93 и в § 106, непосредственное действие метода развертывания не сказывается на составлении уравнений для  $\xi$  и  $\eta$ , поскольку мы имеем в виду использование только длин геодезических линий. Не так благополучно дело обстоит с азимутами геодезических линий. Если мы выведем геодезические азимуты геодезических линий, соединяющих смежные лапласовы пункты, чисто геодезическим путем, т. е. не используя вовсе астрономических азимутов и астрономических долгот на пунктах Лапласа, то в обширной сети мы получим эти геодезические азимуты с значительными искажениями, которые, конечно, заметно скажутся на свободные члены уравнений для  $\xi$  и  $\eta$  и отсюда — могут заметно повлиять на установление эллипсоида и исходных геодезических дат. Если мы, уравнивая всякую триангуляцию за азимутальные условия, затем выведем геодезические азимуты геодезических линий, как азимуты Лапласа, то при применении метода раз-

вертывания, как показано в § 106, эти азимуты будут иметь *систематические искажения*. Общее уравнивание сети не исправит этих систематических искажений геодезических (лапласовых) азимутов геодезических линий: искажения азимутов в отдельном полигоне для его сторон будут довольно однообразны и влияние их на невязку полигона будет ничтожно. Между тем, только соответствующее погрешностям азимутов изменение невязки полигона могло бы действовать на исправление ошибок азимутов.

Влияние систематических ошибок в геодезических азимутах геодезических линий на составление уравнений для  $\xi$  и  $\eta$  в астрономо-геодезической сети СССР было оценено в § 106; оно, по приближенной оценке нашей, может дать погрешность в выводе большой полуоси эллипсоида из астрономо-геодезической сети СССР около  $\pm 75$  м.

Все приведенные до сих пор соображения убеждают в том, что *для практических целей* нет нужды так тесно связывать вывод эллипсоида и установление исходных геодезических дат с строгим общим уравниванием астрономо-геодезической сети, как это сделано в методе Гельмерта. Возможно удовлетвориться выводом не наилучшего подходящего к геоиду для данной территории эллипсоида, а *достаточно хорошо* подходящего эллипсоида.

Представим себе, что мы уравнили звенья триангуляции СССР так, как это делается в нашем геодезическом производстве (и как собственно не следует этого делать даже в практических целях), т. е. произвели уравнивание отдельных звеньев за условия фигур, базисов и за условия азимутальные, причем в азимутальные условия не вводили неизвестных членов с  $(\xi_1 - \delta\varphi_1)$ ,  $\eta_1$ ,  $(\Delta z)$  и полагали поправки астрономических азимутов и астрономических долгот на выходных сторонах звеньев равными нулю. Далее представим себе, что по уравненным элементам звеньев мы в каждом звене вычислили полярные координаты, в результате чего получили длины  $s$  геодезических линий 1-2, 2-3, 3-4, ... (черт. 156) и углы  $\beta_{1-2}$ ,  $\beta_{2-3}$ ,  $\beta_{2-1}$ ,  $\beta_{3-4}$ , ... Теперь, принимая за исходные астрономическую широту  $\varphi_1$  и астрономическую долготу  $\lambda_1$  пункта 1 (или А) и астрономический азимут  $\alpha_1$  выходной стороны 1-В (черт. 156), приступаем к вычислению прямых геодезических задач по линиям 1-2, 2-3, 3-4, ... на принятом референц-эллипсоиде, пользуясь для передачи азимутов углами  $\beta_{1-2}$ ,  $\beta_{2-3}$ ,  $\beta_{2-1}$ ,  $\beta_{3-4}$ , ... В результате получим *методом развертывания* на нашем референц-эллипсоиде геодезические широты  $B^\circ$  и  $L^\circ$ , которые и подставляем в свободные члены уравнений (699) § 93. Далее должен следовать вывод эллипсоида и исходных геодезических дат. Важно отметить, что *указанный «несовершенный» порядок подготовки геодезического материала сам по себе даст на вывод эллипсоида и установление исходных геодезических дат влияние, с которым можно в практических целях и не считаться.*

Конечно, задачу вывода эллипсоида и установления исходных геодезических дат можно ставить по-разному. Следует, даже преследуя практические цели, добиваться в ней возможно лучших результатов — понятно, по каким мотивам. Тогда приходится учесть ту точность, которую данная астрономо-геодезическая сеть обеспечивает сама по себе в выводах элементов эллипсоида и исходных геодезических дат независимо от совершенства или несовершенства обработки геодезических материалов. Тогда может быть следует присоединить к материалам по данной стране материалы по градусным измерениям других стран; тогда следует использовать имеющиеся по данной стране гравиметрические материалы и

может быть следует не определять сжатие, а взять его значение, выведенное из международных гравиметрических материалов.

Но как бы мы ни ставили задачу установления эллипсоида и исходных геодезических дат для геодезических работ в данной стране, несовершенства обработки используемого астрономо-геодезического материала будут играть достаточно *второстепенную роль*. Наконец, используя результаты современных градусных измерений, мы можем, если имеем значительную страну, принять при уравнивании звеньев триангуляции и при последующем выводе величин  $B_K^\circ, L_K^\circ$  и  $A_K^\circ$ , входящих в свободные члены уравнений (699), один из хорошо установленных эллипсоидов; из гравиметрических же материалов можем для некоторой целесообразно выбранной точки получить в ней  $\xi^g$  и  $\eta^g$ , и тогда, приняв эту точку за исходную, установить временные исходные геодезические даты по уравнениям

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \varphi_1 - \xi_1^g \\ L_1 &= \lambda_1 - \eta_1^g \sec \varphi_1 \\ A_1 &= \alpha_1 - \eta_1^g \tg \varphi_1 \end{aligned} \right\}. \quad (798)$$

Используя этот эллипсоид и исходные даты по (798), мы будем иметь уже *малые ошибки* систематического характера в выведенных из уравнивания звеньев величинах  $B_K^\circ, L_K^\circ$  и  $A_K^\circ$ , в несколько раз меньшие рассчитанных для СССР в § 106.

Таким образом, *в настоящее время мы располагаем целым рядом средств для того, чтобы с невыполнением общего уравнивания астрономо-геодезической сети данной большой страны не считаться при установлении эллипсоида и исходных геодезических дат для основных геодезических работ в этой стране.*

### § 115. Способ проф. Ф. Н. Красовского общего уравнивания значительной астрономо-геодезической сети

Этот способ основан именно на том, что референц-эллипсоид и исходные геодезические даты для данной страны уже установлены и притом так, что обеспечена *достаточная* близость этого референц-эллипсоида к эллипсоиду, наилучшее подходящему к геоиду на территории данной страны. Эта *достаточная* близость оценивается: ошибкой в большой полуоси референц-эллипсоида, меньшей 100 м; ошибкой в знаменателе сжатия этого эллипсоида, меньшей двух единиц; ошибками исходных геодезических широт, долготы и азимута, меньшими 1".

При выполнении этих условий, уравнение Лапласа (азимутальное уравнение) мы можем написать по геодезической линии  $IK$  в таком простом виде

$$\begin{aligned} [(\alpha_{K,I} - A_{K,I}) - (\lambda_K - L_K) \sin \varphi_K] - [(\alpha_{I,K} - A_{I,K}) - (\lambda_I - L_I) \sin \varphi_I] + \\ + \delta \alpha_{K,I} - \delta \alpha_{I,K} - \delta \lambda_K \sin \varphi_K + \delta \lambda_I \sin \varphi_I = 0. \end{aligned} \quad (799)$$

Это уравнение (799) есть простое следствие уравнения (786), или уравнения (788), если в (786) отбросить члены с  $\varphi_I, B_I^\circ, \xi_I - \delta \varphi, \eta_I, (\Delta \alpha)$ , а в (788) отбросить члены с  $dB_I, dL_I, dA_{I,K}$  и  $(\Delta \alpha)$ . Представим себе, что от исходного пункта в Пулкове мы сперва спускаемся по меридиану до Орши, до широты  $54^\circ$ , а затем подвигаемся на 6000 км по 54-ой параллели к востоку. Если примем  $\Delta \alpha < 100$  м,  $dB_I < 1''$ ,  $dL_I < 2''$  и  $dA_I < 1''$ , то на всем этом пути накопление ошибок в лапласовых азимутах, обусловленное отбрасыванием указанных членов в (786) или в

(788), не превысит  $1'',5$ , а наибольшая ошибка в (799) для звена в 250 км не превзойдет  $0'',07$ . Конечно, с такими ошибками, хотя и систематического характера, вполне можно помириться.

Теперь обратимся к полигонным условиям. В § 112 уже было выяснено, что ошибка геодезической широты вершины, принимаемой в полигоне за пачальную, и ошибка геодезического азимута стороны полигона, исходящей из этой вершины, влияют ничтожно на невязку полигона. Далее проф. Ф. Н. Красовским выяснено (см. журнал «Геодезист» за 1939 г.), что добавочные невязки полигона, вносимые неверностью большой полуоси и сжатия референц-эллипсоида, выражаются так

$$\left. \begin{aligned} \delta\varphi^a &= -\frac{s^3}{R^3} \rho'' \frac{\Delta a}{a_0} \\ \delta l^a &= \frac{s^3}{R^3} \frac{\rho''}{\cos \varphi} \frac{\Delta a}{a_0} \\ \delta\varphi^{\alpha} &= \frac{s^3}{R^3} \rho'' \cos 2\varphi (\Delta \alpha) \\ \delta l^{\alpha} &= -\frac{s^3}{R^3} \frac{\cos 2\varphi}{\cos^2 \varphi} \rho'' (\Delta \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (800)$$

В (800) длина стороны полигона обозначена через  $s$ ; полигон предполагается имеющим форму трапеции, с двумя сторонами по меридианам, имеющими одну и ту же среднюю широту, и с двумя сторонами, имеющими в их середине азимут, равный  $90^\circ$ .

По формулам (800) оказывается, что при  $\Delta a < 100$  м и  $(\Delta \alpha) < 1 : 45\,000$ , в средних широтах при  $s = 225$  км

$$\begin{aligned} \delta\varphi^a &< 0'',0001; \\ \delta l^a &< 0'',0002; \\ \delta\varphi^{\alpha} &< 0'',00003; \\ \delta l^{\alpha} &< 0'',0001. \end{aligned}$$

Другими словами, мы имеем право при условленных ошибках в полуоси и сжатии референц-эллипсоида *не считаться с влиянием этих ошибок на образование невязок в полигоне*.

Обозначим на черт. 158: вершины полигона номерами 1, 2, 3 и 4; стороны его через  $s_{1\cdot2}$ ,  $s_{2\cdot3}$ ,  $s_{3\cdot4}$ ,  $s_{4\cdot1}$ ; поправки направлений, образующих углы полигона, через  $\nu_{1\cdot2}$ ,  $\nu_{1\cdot4}$ ,  $\nu_{2\cdot1}$ ,  $\nu_{2\cdot3}$ ,  $\nu_{3\cdot2}$ ,  $\nu_{3\cdot4}$ ,  $\nu_{4\cdot3}$ ,  $\nu_{4\cdot1}$ ; геодезические азимуты сторон полигона  $A_{1\cdot2}$ ,  $A_{2\cdot1}$ ,  $A_{2\cdot3}$ ,  $A_{3\cdot2}$ ,  $A_{3\cdot4}$ ,  $A_{4\cdot3}$ , ... Тогда на основании сказанного мы напишем, если представим себе переход от точки 1 к точке 3 по линиям 1-2 и 2-3

$$\begin{aligned} dB_2 &= p_3^{1\cdot2} \delta s_{1\cdot2}; \quad dL_2 = q_3^{1\cdot2} \delta s_{1\cdot2}; \\ dA_{2\cdot1} &= r_3^{1\cdot2} \delta s_{1\cdot2}; \quad dA_{2\cdot3} = r_3^{1\cdot2} \delta s_{1\cdot2} - (\nu_{2\cdot1} - \nu_{2\cdot3}); \\ dB_3 &= p_1^{2\cdot3} p_3^{1\cdot2} \delta s_{1\cdot2} + p_3^{2\cdot3} \delta s_{2\cdot3} + p_4^{2\cdot3} r_3^{1\cdot2} \delta s_{1\cdot2} - p_4^{2\cdot3} (\nu_{2\cdot1} - \nu_{2\cdot3}); \\ dL_3 &= q_3^{1\cdot2} \delta s_{1\cdot2} + q_1^{2\cdot3} p_3^{1\cdot2} \delta s_{1\cdot2} + q_3^{2\cdot3} \delta s_{2\cdot3} + q_4^{2\cdot3} r_3^{1\cdot2} \delta s_{1\cdot2} - q_4^{2\cdot3} (\nu_{2\cdot1} - \nu_{2\cdot3}) \end{aligned}$$

или

$$\left. \begin{aligned} dB_3 &= (p_1^{2\cdot3} p_3^{1\cdot2} + p_4^{2\cdot3} r_3^{1\cdot2}) \delta s_{1\cdot2} + p_3^{2\cdot3} \delta s_{2\cdot3} - p_4^{2\cdot3} (\nu_{2\cdot1} - \nu_{2\cdot3}) \\ dL_3 &= (q_3^{2\cdot3} p_3^{1\cdot2} + q_4^{2\cdot3} r_3^{1\cdot2} + q_3^{1\cdot2}) \delta s_{1\cdot2} + q_3^{2\cdot3} \delta s_{2\cdot3} - q_4^{2\cdot3} (\nu_{2\cdot1} - \nu_{2\cdot3}) \end{aligned} \right\} \quad (801)$$

Теперь будем переходить от точки 1 к точке 3 через точку 4, т. е. по линиям 1-4 и 4-3. Мы имеем

$$\begin{aligned} dB_4 &= p_3^{1.4} \delta s_{1.4} + p_4^{1.4} (v_{1.4} - v_{1.2}); \\ dL_4 &= q_3^{1.4} \delta s_{1.4} + q_4^{1.4} (v_{1.4} - v_{1.2}); \\ dA_{1.4} &= v_{1.4} - v_{1.2}; \\ dA_{4.1} &= r_3^{1.4} \delta s_{1.4} + r_4^{1.4} (v_{1.4} - v_{1.2}); \\ dB'_3 &= (p_1^{4.3} p_3^{1.4} + p_4^{4.3} r_3^{1.4}) \delta s_{1.4} + p_3^{4.3} \delta s_{4.3} + (p_1^{4.3} p_4^{1.4} + \\ &\quad + p_4^{4.3} r_4^{1.4}) (v_{1.4} - v_{1.2}) + p_4^{4.3} (v_{4.3} - v_{4.1}); \\ dL'_3 &= (q_1^{4.3} p_3^{1.4} + q_4^{4.3} r_3^{1.4} + q_3^{1.4}) \delta s_{1.4} + q_3^{4.3} \delta s_{4.3} + q_4^{4.3} (v_{4.3} - v_{4.1}) + \\ &\quad + (q_1^{4.3} p_4^{1.4} + q_4^{4.3} r_4^{1.4} + q_4^{1.4}) (v_{1.4} - v_{1.2}). \end{aligned} \quad (802)$$

Обозначим теперь через  $B_3^{1.2.3}$  и  $L_3^{1.2.3}$  геодезическую широту и долготу точки 3 (черт. 158), вычисленные при помощи передачи от широты и долготы точки 1 по линиям 1-2 и 2-3, с использованием при этом измеренных значений длин  $s_{1.2}$  и  $s_{2.3}$ , измеренного угла  $2 \cdot 1 - 2 \cdot 3$  при точке 2 и начального азимута  $A_{1.2}$  линии 1-2. Обозначим далее через  $B_3^{1.4.3}$  и  $L_3^{1.4.3}$  геодезическую широту и долготу точки 3, вычисленные при помощи передачи от той же широты и долготы точки 1 по линиям 1-4 и 4-3, с использованием при этом измеренных длин  $s_{1.4}$  и  $s_{4.3}$ , измеренных углов  $(1 \cdot 4 - 1 \cdot 2)$  и  $(4 \cdot 3 - 4 \cdot 1)$  при точках 1 и 4 и того же азимута  $A_{1.2}$  линии 1-2. Мы, конечно, должны иметь

$$\begin{aligned} B^{1.4.3} + dB'_3 &= B^{1.2.3} + dB_3, \\ L^{1.4.3} + dL'_3 &= L^{1.2.3} + dL_3 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} B^{1.2.3} - B^{1.4.3} + (p_1^{2.3} p_3^{1.2} + p_4^{2.3} r_3^{1.2}) \delta s_{1.2} + p_3^{2.3} \delta s_{2.3} - \\ - (p_1^{4.3} p_3^{1.4} + p_4^{4.3} r_3^{1.4}) \delta s_{1.4} - p_3^{4.3} \delta s_{4.3} - p_4^{2.3} (v_{2.1} - v_{2.3}) - \\ - (p_1^{4.3} p_4^{1.4} + p_4^{4.3} r_4^{1.4}) (v_{1.4} - v_{1.2}) - p_4^{4.3} (v_{4.3} - v_{4.1}) = 0, \quad (803) \\ L^{1.2.3} - L^{1.4.3} + (q_1^{2.3} p_3^{1.2} + q_4^{2.3} r_3^{1.2} + q_3^{1.2}) \delta s_{1.2} + q_3^{2.3} \delta s_{2.3} - \\ - (q_1^{4.3} p_3^{1.4} + q_4^{4.3} r_3^{1.4} + q_3^{1.4}) \delta s_{1.4} - q_3^{4.3} \delta s_{4.3} - \\ - q_4^{2.3} (v_{2.1} - v_{2.3}) - (q_1^{4.3} p_4^{1.4} + q_4^{4.3} r_4^{1.4} + q_4^{1.4}) (v_{1.4} - v_{1.2}) - \\ - q_4^{4.3} (v_{4.3} - v_{4.1}) = 0. \quad (804) \end{aligned}$$

Уравнения (803) и (804) суть, конечно, условия широты и долготы в нашем полигоне. Конечно, эти уравнения достаточно просты для их составления. Они, конечно, имеют в виду частный случай — случай полигона из четырех вершин, но этот случай обращается в общий в астрономо-геодезической сети СССР. В качестве исходных координат начальной точки полигона 1-2—3-4 (черт. 158) и в качестве исходного азимута  $A_{1.2}$  стороны 1-2 в нем служат координаты и азимут, получаемые после уравнивания звеньев.

Уравнение Лапласа (799) мы переписываем так

$$\begin{aligned} [(\alpha_{K.I} - A_{K.I}) - (\lambda_K - L_K) \sin \varphi_K] - [(\alpha_{I.K} - A_{I.K}) - (\lambda_I - L_I) \sin \varphi_I] - \\ - \delta \lambda_K \sin \varphi_K + \delta \lambda_I \sin \varphi_I + \delta_K^\circ - \delta_I^\circ + v_{K.I} - v_{I.K} = 0 \end{aligned} \quad (805)$$



согласно обозначениям, данным формулой (793). Так как до общего уравнивания астрономо-геодезической сети предполагается выполненным уравнивание звеньев за условия фигур, базисов и азимутов, то свободный член в уравнении (805) при переходе к общему уравниванию будет равен нулю во всех лапласовых уравнениях.

Как видно, составление уравнений (803), (804) и (805) просто и неизмеримо проще применяемого в способе Гельмерта.

Приведем еще уравнения широты и долготы в несколько ином виде, также данным проф. Ф. Н. Красовским; этот вид уравнений предполагает, что полигон 1-2-3-4 (черт. 158) при вычислении его невязок проходит в круговом порядке по ходу часовой стрелки, начиная от точки 1 (т. е. передача координат идет через точку 2, через точку 3 и через точку 4 на точку 1). Мы имеем

$$\begin{aligned} B_1 - (B_1) = & [p_3^{1.2} + (p_4^{2.3} + p_4^{3.4} + p_4^{4.1}) r_3^{1.2}] \delta s_{1.2} + [p_3^{2.3} + (p_4^{3.4} + \\ & + p_4^{4.1}) r_3^{2.3}] \delta s_{2.3} + [p_3^{3.4} + p_4^{4.1} r_3^{3.4}] \delta s_{3.4} + p_3^{4.1} \delta s_{4.1} - \\ & - [p_4^{2.3} + (p_4^{3.4} + p_4^{4.1} r_4^{3.4}) r_4^{2.3}] (\nu_{2.1} - \nu_{2.3}) - \\ & - [p_4^{3.4} + p_4^{4.1} r_4^{3.4}] (\nu_{3.2} - \nu_{3.4}) - p_4^{4.1} (\nu_{4.3} - \nu_{4.1}); \end{aligned} \quad (806)$$

$$\begin{aligned} L_1 - (L_1) = & [q_3^{1.2} + (q_1^{2.3} + q_1^{3.4} + q_1^{4.1}) p_3^{1.2} + (q_4^{2.3} + q_4^{3.4} + q_4^{4.1}) r_3^{1.2}] \delta s_{1.2} + \\ & + [q_3^{2.3} + (q_1^{3.4} + q_1^{4.1}) p_3^{2.3} + (q_4^{3.4} + q_4^{4.1}) r_3^{2.3}] \delta s_{2.3} + \\ & + [q_3^{3.4} + q_1^{4.1} p_3^{3.4} + q_4^{4.1} r_3^{3.4}] \delta s_{3.4} + q_3^{4.1} \delta s_{4.1} - \\ & - [q_4^{2.3} + (q_1^{3.4} + q_1^{4.1}) p_4^{2.3} + q_1^{4.1} r_4^{3.4} + \\ & + (q_4^{3.4} + q_4^{4.1} r_4^{3.4}) r_4^{2.3} (\nu_{2.1} - \nu_{2.3}) - [q_4^{3.4} + q_1^{4.1} p_4^{3.4} + \\ & + q_4^{4.1} r_4^{3.4}] \times (\nu_{3.2} - \nu_{3.4}) - q_4^{4.1} (\nu_{4.3} - \nu_{4.1}). \end{aligned} \quad (807)$$

В формулах (806) и (807):  $B_1$  и  $L_1$  — значения широты и долготы в пункте 1, принимаемые за исходные в нашем полигоне;  $(B_1)$  и  $(L_1)$  — значения широты и долготы в той же точке 1, но получаемые круговым вычислением (по ходу часовой стрелки) широт, долгот и азимутов по четырем сторонам нашего полигона. Уравнения (806) и (807) сложнее уравнений (803) и (804); кроме того, они несколько упрощены. Именно, при выводе (806) и (807) было принято в коэффициентах при  $\delta s$

$$\begin{aligned} p_1 &= 1; \quad p_4 r_1 = 0; \quad q_4 r_1 = 0; \quad q_1 p_4 = 0; \\ p_4 r_4 &= p_4; \quad q_4 r_4 = q_4; \quad q_1 p_1 = q_1. \end{aligned}$$

В коэффициентах же при поправках углов было принято

$$\begin{aligned} p_1 p_4 &= p_4; \quad p_1 q_4 = q_4; \quad p_1 q_1 = q_1; \\ p_4 p_4 r_1 &= 0; \quad q_4 p_4 r_1 = 0; \\ q_1 p_4 r_4 &= q_1 p_4. \end{aligned}$$

При полигонах, стороны которых располагаются по меридианам и по параллелям, эта упрощенность не имеет никакого значения; если стороны полигонов имеют азимуты, уклоняющиеся от  $0^\circ$  и  $90^\circ$  на  $\pm 6^\circ$ , то упрощения в коэффициентах формул (806) и (807) дают добавочную невязку в полигоне, вообще меньшую  $0'',002$  при сторонах полигона не превышающих 225 км. Конечно, следует применять формулы (803) и (804). Но формулы (806) и (807) легко распространить на полигон с произвольным числом вершин, почему мы их и приводим. Условные

уравнения широты и долготы для полигона с произвольным числом вершин приведены в выпуске 2 Трудов Государственного института геодезии и картографии за 1931 г. Полезно коэффициенты уравнений (803), (804) или (806) и (807) при вычислениях умножить на  $\frac{100}{3}$ .

Как уже указывалось в § 109, мы считаем целесообразным до общего уравнивания сети выполнить уравнивание звеньев за условия фигур, базисов и азимутов—так, как это объяснено в § 109. Уравненные звенья вычисляются с исходными данными, принятыми в государственной триангуляции и на принятом референц-эллипсоиде; отсюда получаются геодезические координаты лапласовых пунктов и геодезические азимуты геодезических линий, соединяющих смежные лапласовы пункты. При этом для ряда пунктов Лапласа будут получены по несколько значений широты, долготы и азимута, так как эти величины, благодаря наличию избыточных линий в сети, могут быть для одного и того же пункта и для одной и той же геодезической линии выведены из разного материала; эти различные результаты для одного и того же пункта и для одного и того же направления обусловлены, конечно, невязками полигонов триангуляции — линейными и угловыми. Однако эти различия так невелики, что любой из полученных результатов для координат лапласова пункта и азимута исходящей из него геодезической линии может быть принят в качестве исходного при вычислении из полигона величин  $(B_1)$  и  $(L_1)$ , или  $B^{1.2.3}$ ,  $L^{1.2.3}$ ,  $B^{1.4.3}$ ,  $L^{1.4.3}$ .

В способе проф. Красовского существенным является отделение задачи общего уравнивания астрономо-геодезической сети от вывода наилучше подходящего эллипсоида и установления исходных геодезических дат. Нужно сказать, что введение наилучше подходящего эллипсоида в обработку астрономо-геодезической сети и в дальнейшее вычисление на нем всех геодезических пунктов обширной страны может и не состояться, а может быть заменено удержанием ранее принятого референц-эллипсоида, если он достаточно близок к наилучше подходящему эллипсоиду, или может быть заменено введением близкого к нему эллипсоида, который уже принят в ряде других стран.

В том виде, как он был выше изложен, способ проф. Красовского имеет три слабых места: 1) в нем, как и в способе Гельмерта, не учитывается влияние отступлений геоида от наилучше подходящего эллипсоида или от эллипсоида, устанавливаемого по Красовскому без общего уравнивания сети; 2) не имея еще покрытия всей территории значительной страны астрономо-геодезической сетью, трудно точно установить, насколько могут различаться наилучше подходящий эллипсоид и соответствующие ему исходные геодезические даты от того *достаточно* близкого к нему эллипсоида и тех исходных дат, который и которые устанавливаются согласно порядку, указанному в § 114; при этом нужно учитывать и то, что все-таки невыполнение общего уравнивания внесет добавочные ошибки в установление этого достаточно близкого к наилучше подходящему эллипсоида; 3) систематические искажения в элементах уравненной астрономо-геодезической сети все-таки остаются, хотя они сводятся к малым и даже может быть очень малым размерам.

По поводу этих соображений должно сказать следующее. При точной обработке астрономо-геодезических материалов, покрывающих значительную территорию, не следует пренебрегать отступлениями геоида от эллипсоида, о чем мы уже неоднократно указывали в предыдущих параграфах и главах. *Единственный путь* избавиться от этого недочета,

который свойствен всем обработкам астрономо-геодезических сетей, выполненным и выполняемым до сих пор во всех странах, *заключается в переходе от метода «развертывания» к методу «проектирования»* элементов, измеренных в натуре, на поверхность референц-эллипсоида — будет ли он установлен в результате определения «наилучше подходящего» эллипсоида или эллипсоида достаточно близкого к этому последнему. Если принять эту установку, т. е. переход на метод проектирования, то слабое место, отмеченное под номером один и три, в способе проф. Красовского совершенно отпадает, что уже выяснено в § 105 и 106 в отношении получения лапласовых азимутов и свободных членов в азимутальных уравнениях; но это, конечно, очевидно в отношении получения свободных членов уравнений широты и долготы, так как если мы все измеренные величины отнесли на некоторый эллипсоид и на его именно поверхности ведем расчет невязок полигонов, то погрешности в большой полуоси и сжатии этого эллипсоида, каковы бы они ни были, конечно, уже никакого влияния на образование невязки этого полигона не имеют. Что касается возражений, приведенных выше под номером два, то частью они ослабляются также введением метода проектирования. Но самое главное заключается в том, что правильно перейдя от непосредственно измеренных в триангуляции величин к их проекциям на референц-эллипсоид, *как бы он ни был избран*, мы можем с полной точностью составить условные уравнения *между поправками только измеренных величин*, которые, следовательно, и определятся с полной правильностью. В этом же ведь и заключается задача общего уравнивания астрономо-геодезической сети; она решается при применении способа Красовского и метода проектирования наиболее просто, с полной геометрической ясностью и вполне правильно. Очевидно, если мы будем брать разные эллипсоиды, то при применении метода проектирования будем получать для  $\delta s$ ,  $\nu$ ,  $\delta^\circ$ ,  $\delta\lambda$  одну и ту же систему значений.

Вопрос установления эллипсоида и исходных геодезических дат *можно и должно отделить от вопроса общего уравнивания астрономо-геодезической сети*. В этом уравнивании следует добиваться наилучших результатов, и для этого неизбежно ввести метод проектирования, который можно считать необходимым и для получения надлежаще точных результатов при окончательном вычислении геодезических координат и азимутов из обширной государственной триангуляции.

В настоящее время основные астрономо-геодезические работы в СССР выполняются по программе, обеспечивающей применение метода проектирования: высоты геоида над референц-эллипсоидом, необходимые для приведения на его поверхность измеренных базисов и углов треугольников триангуляции, доставляются астрономо-гравиметрическим нивелированием или сетью астрономических пунктов триангуляции, используемых вместе с материалами общей гравиметрической съемки страны; необходимые для приведения измеренных в триангуляции горизонтальных направлений или углов уклонения отвесных линий относительно принятого референц-эллипсоида для всех астрономических пунктов триангуляции также определены в процессе установления этого референц-эллипсоида, для остальных же геодезических точек они выводятся, используя совместно материалы общей гравиметрической съемки страны и астрономо-геодезические уклонения отвеса в астрономических пунктах триангуляции. Вычисление этих приведений составит сравнительно малую работу.

Итак, в СССР имеется все, чтобы проводить обработку результатов основных астрономо-геодезических работ с полной строгостью, причем,

конечно, способ проф. Красовского способствует быстрому выполнению этой большой и важной задачи.

### § 116. Способ проф. Н. А. Урмаева общего уравнивания астрономо-геодезической сети

Этот способ, предложенный недавно, имеет те же предпосылки, что и способ проф. Красовского, т. е. 1) задача общего уравнивания астрономо-геодезической сети отделена от задачи установления достаточно хорошо подходящего референц-эллипсоида и исходных геодезических дат; 2) общему уравниванию предшествует уравнивание звеньев триангуляции I класса за условия фигур, базисов и азимутов. Но если общее уравнивание в методе проф. Красовского выполняется по способу «условных наблюдений», то в методе проф. Урмаева вводится уравнивание «посредственных» наблюдений; другими словами, находятся прямым путем не поправки наблюденных величин, т. е. величины  $\delta s_{I,K}$ ,  $\nu_{I,K}$ ,  $\delta \lambda_1$  и  $\delta \varphi_1$  из *условных уравнений* между ними, а поправки *координат лапласовых пунктов* из уравнений *погрешностей* для  $\delta s_{I,K}$ ,  $\nu_{I,K}$ ,  $\delta \lambda_1$  и  $\delta \varphi$ .

Работа Н. А. Урмаева напечатана в трудах ЦНИИГАиК в 1937 г. выпуск 19.

Общему уравниванию астрономо-геодезической сети предшествует (кроме уравнивания звеньев) установление системы приближенных геодезических координат  $B^\circ$  и  $L^\circ$  лапласовых пунктов так, как это уже объяснено по отношению способа Гельмерта; после этого следует точное вычисление, применяя обратную геодезическую задачу, длин  $s_{I,K}^\circ$  и геодезических азимутов  $A_{I,K}^\circ$  и  $A_{K,I}^\circ$ , точно соответствующих приближенным координатам  $B^\circ$ ,  $L^\circ$ ,  $B_K^\circ$  и  $L_K^\circ$  конечных точек  $I$  и  $K$  геодезической линии  $IK$ . Уравнения погрешностей для линии  $IK$  и для точки  $I$  (черт. 159) напишутся так

$$s_{I,K}^\circ - s_{I,K} + ds_{I,K} = \delta s_{I,K}, \quad (808)$$

$$-\zeta_I + dA_{I,K} + [A_{I,K}^\circ - (\beta_{I,K} + z_I^\circ)] = \nu_{I,K}. \quad (809)$$

Под  $\nu_{I,K}$  понимается поправка *угла*  $\beta_{I,K}$  (см. черт. 159). Под  $ds_{I,K}$  понимается поправка  $s_{I,K}^\circ$ , а под  $\delta s_{I,K}$  — погрешность измеренной величины  $s_{I,K}$ ; уравнение (808) понятно само собой.

В уравнении (809) под  $dA_{I,K}$  понимается поправка азимута  $A_{I,K}^\circ$ , а под  $z_I^\circ + \zeta_I$  — «ориентировочный» угол на точке  $I$ , по прибавлении которого к величине  $\beta_{I,K} + \nu_{I,K}$  должно получить истинный геодезический азимут  $s$  на  $K$ ; т. е. мы имеем

$$A_{I,K}^\circ + dA_{I,K} = \beta_{I,K} + \nu_{I,K} + z_I^\circ + \zeta_I. \quad (810)$$

Очевидно, величина  $(z_I^\circ + \zeta_I)$  есть истинный геодезический азимут стороны  $Ia$  (черт. 159), по которой имеем наблюдаемое значение  $\alpha_1$  астрономического азимута;  $z_I^\circ$  есть приближенное значение *ориентировочного* угла на точке  $I$ . Таким образом, величина

$$\alpha_1 + \delta_1 - (z_I^\circ + \zeta_I) = \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 \quad (810')$$

представляет собой уклонение отвеса в точке  $I$  по азимуту, если под  $\delta_1$  понимать ошибку наблюденного азимута  $\alpha_1$ . С другой стороны, в точке  $I$  должно быть выполнено условие Лапласа, которое, очевидно, напишется так

$$(\lambda_1 + \delta \lambda_1 - L_1^\circ - dL_1) \sin \varphi_1 = \alpha_1 + \delta_1 - (z_I^\circ + \zeta_I)$$

или

$$\delta_I - \delta\lambda_I \sin \varphi_I = \zeta_I - dL_I \sin \varphi_I - (\alpha_I - z_I^\circ) + (\lambda_I - L_I^\circ) \sin \varphi_I. \quad (811)$$

Обозначим

$$\delta_I - \delta\lambda_I \sin \varphi_I = u_I. \quad (812)$$

тогда (811) перепишем еще так

$$\zeta_I - \delta L_I \sin \varphi_I - [(\alpha_I - z_I^\circ) - (\lambda_I - L_I^\circ) \sin \varphi_I] = u_I. \quad (813)$$

Уравнение (808) есть первый тип уравнений погрешностей, число которых равно числу геодезических линий в нашей астрономо-геодезической сети. Уравнение (809) есть второй тип уравнений погрешностей, число которых будет вдвое больше числа уравнений первого типа, так как уравнение (809) составляется для направления  $IK$  и для направления  $KI$ . Уравнение (813) есть третий тип уравнений погрешностей, число которых равно числу пунктов Лапласа. Определяемыми прямым путем из уравнивания являются величины  $dB_I$ ,  $dL_I$  и  $\zeta_I$ . Надлежит сперва величины  $ds_{IK}$  и  $dA_{IK}$ , входящие в уравнения (808), (809) и (813), выразить через  $dB_I$ ,  $dL_I$ ,  $dB_K$  и  $dL_K$ ; тогда уравнения погрешностей (808), (809) и (813) примут окончательный вид — вид связей между неизвестными  $dB_I$ ,  $dL_I$  и  $\zeta_I$  и погрешностями  $\delta s_{IK}$ ,  $\delta\lambda_I$ ,  $\delta\lambda_K$  и  $\delta\lambda_K$  «непосредственно» наблюдаемых величин. Зависимость между  $ds_{IK}$ ,  $dA_{IK}$ ,  $dA_{KI}$ ,  $dB_I$ ,  $dL_I$ ,  $dB_K$  и  $dL_K$  мы легко устанавливаем, пользуясь дифференциальными формулами (564) и (565). Именно

$$\begin{aligned} dA_{IK} &= \frac{M_I}{s_{IK}} \sin A_{IK} dB_I + \frac{M_K}{s_{IK}} \sin A_{KI} dB_K - \\ &- \frac{N_I}{s_{IK}} \cos B_I \left( \cos A_{IK} - \frac{s_{IK}}{N_I} \operatorname{tg} B_I \right) dL_I - \\ &- \frac{N_K}{s_{IK}} \cos B_K \cos A_{KI} dL_K; \end{aligned} \quad (564)$$

$$\begin{aligned} ds_{IK} &= -\frac{M_K}{\rho''} \cos A_{KI} dB_K - \frac{M_I}{\rho''} \cos A_{IK} dB_I - \\ &- \frac{N_K \cos B_K}{\rho''} \sin A_{KI} dL_K - \frac{N_I \cos B_I}{\rho''} \sin A_{IK} dL_I. \end{aligned} \quad (565)$$

Эти выражения (564) и (565) надлежит подставить в уравнения (808) и (809). Предварительно для удобства вычислений положим

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_I}{10 \rho''} dB_I &= \xi_I \\ \frac{N_I \cos B_I}{10 \rho''} dL_I &= \eta_I \end{aligned} \right\}. \quad (814)$$

Очевидно, коэффициенты  $\frac{M_I}{10 \rho''}$  и  $\frac{N_I \cos B_I}{10 \rho''}$  представляют собой длины дуг меридиана и параллели в  $0''$ , 1. В результате мы получаем

$$\begin{aligned} -10 \cos A_{IK}^\circ \xi_I - 10 \cos A_{KI}^\circ \xi_K - 10 \sin A_{IK}^\circ \eta_I - 10 \sin A_{KI}^\circ \eta_K + \\ + (s_{IK}^\circ - s_{IK}) = \delta s_{IK}; \end{aligned} \quad (815)$$

$$\begin{aligned}
& -\zeta_I + \frac{10 \rho''}{s_{I,K}} \sin A_{I,K}^\circ \xi_I + \frac{10 \rho''}{s_{I,K}} \sin A_{K,I}^\circ \xi_K - \frac{10 \rho''}{s_{I,K}} \left( \cos A_{I,K}^\circ - \frac{s_{I,K}}{N_I} \operatorname{tg} B_I \right) \eta_I - \\
& - \frac{10 \rho''}{s_{I,K}} \cos A_{K,I}^\circ \eta_K + [A_{I,K}^\circ - (\beta_{I,K} + z_I^\circ)] + v_{I,K}.
\end{aligned} \quad (816)$$

Для преобразования уравнения (813) имеем из (814)

$$dL_I \sin B_I = \frac{10 \rho'' \eta_I}{N_I \cos B_I} \sin B_I = \frac{10 \rho'' \operatorname{tg} B_I}{N_I} \eta_I. \quad (817)$$

Уравнение (813) принимает вид

$$\zeta_I - \frac{10 \rho'' \operatorname{tg} B_I}{N_I} \eta_I - [(\alpha_I - z_I^\circ) - (\lambda_I - L_I^\circ \sin B_I)] = u_I. \quad (818)$$

Для удобного перехода от неизвестных  $dB$  и  $dL$  к  $\xi$  и  $\eta$  проф. Урмаев дает табличку величин  $\frac{M}{10\rho''}$  и  $\frac{N \cos B}{10\rho''}$ .

Все величины, входящие в уравнениях (815), (816) и (818) в состав свободных их членов и в состав коэффициентов при неизвестных, определены при вычислениях величин  $s_{I,K}^\circ$ ,  $A_{I,K}^\circ$  и  $A_{K,I}^\circ$ , соответствующих точно по геодезической линии  $IK$  «приближенным» значениям координат  $B_I^\circ$ ,  $L_I^\circ$ ,  $B_K^\circ$  и  $L_K^\circ$ ; величины  $s_{I,K}$  и  $\beta_{I,K}$  получаются после уравнивания звеньев триангуляции I класса, как указано в § 106. До перехода от уравнений (815), (816) и (818) к соответствующим им нормальным уравнениям должно установить веса величин  $s_{I,K}$ ,  $A_{I,K}$ ,  $\alpha_i$  и  $\lambda_i$ . Это установление весов должно выполняться, конечно, и при применении способа проф. Красовского, и способа Гельмерта. Решение уравнений (815), (816) и (818) выполняется, конечно, под условием минимума

$$\Sigma p_s \delta s^2 + \Sigma p_A v_{I,K}^2 + \Sigma p u^2,$$

в то время как в способе Красовского и Гельмерта берется минимум от

$$\Sigma p_s \delta s^2 + \Sigma p_A v_{I,K}^2 + \Sigma p_\delta \delta \alpha^2 + \Sigma p_\lambda \delta \lambda^2.$$

Понятно, что из-за неправильного представления суммы квадратов поправок непосредственно измеренных величин способ Н. А. Урмаева дает не совсем правильные результаты, однако добавочные ошибки из-за этого будут малы и вряд ли имеют практическое значение.

Обратимся к вопросу установления весов. Так как предварительное уравнивание звеньев выполнено за условия фигур, базисов и азимутов, то следует воспользоваться формулами для поперечного  $q$  и продольного  $m_s$  сдвига звена, приведенными в I части Руководства по высшей геодезии

для  $n$  четного

$$m_s^2 = \frac{s^2}{2} \left\{ \frac{m_b^2}{b^2} + \left( \frac{2n^2 - 3n + 10}{9n} - \frac{5n^2 - 7n - 9}{150n^2} - \frac{(52 - n)^2}{60(25n + 17)n^2} \right) \frac{m''^2}{\rho''^2} \right\}; \quad (819)$$

для  $n$  нечетного

$$\begin{aligned}
m_s^2 = \frac{s^2}{2} \left\{ \frac{n^2 + 1}{n^2} \frac{m_b^2}{b^2} + \left( \frac{2n^2 - 3n + 10}{9n} - \frac{5n^2 - 7n - 9}{150n^2} - \right. \right. \\
\left. \left. - \frac{(52 - n)^2}{60(25n + 17)n^2} \right) \frac{m''^2}{\rho''^2} \right\}, \quad (820)
\end{aligned}$$

$$q^2 = \frac{s^2}{2} \left\{ \frac{(n+1)(n+2)}{6n} - \frac{25n^2 + 94n - 110}{250n} \right\} \frac{m''^2}{\varphi''^2}. \quad (821)$$

В этих формулах:  $s$  — расстояние между лапласовыми пунктами;  $m$  — средняя ошибка наблюденного угла треугольника триангуляции;  $n = \frac{N+1}{2}$  или  $n = \frac{N}{2}$ , где  $N$  — число треугольников звена; при  $N$  нечетном  $n = \frac{N+1}{2}$ ;  $\frac{m_b}{b}$  — относительная ошибка выходной стороны звена.

Очевидно,

$$m_{\beta}^2 = \frac{m^2 q^2}{2 s^2 \varphi''^2} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{(n+1)(n+2)}{6n} - \frac{25n^2 + 94n - 110}{250n} \right\} m''^2. \quad (822)$$

Далее,

$$m_u^2 = m_{\alpha^0}^2 + m_{\lambda}^2 \sin^2 \varphi, \quad (823)$$

где  $m_{\alpha^0}$  — ошибка непосредственно наблюденного астрономического азимута выходной стороны звена; ошибки  $m_{\alpha^0}$  и  $m_{\lambda}$  устанавливаются из обработки материалов по астрономическим определениям азимутов и долгот в триангуляции. Веса уравнений (815), (816) и (818) рассчитываются, принимая, что ошибке единицы веса соответствует в линейных измерениях средняя ошибка  $\pm 1$  м, а в угловых измерениях — средняя ошибка  $\pm 1''$ . Таким образом, получаем

$$\text{для (816)} \dots p_{\beta} = \frac{1}{m_{\beta}^2}; \text{ для (815)} \dots p_s = \frac{1}{m_s^2}; \text{ для (818)} \dots p_u + \frac{1}{m_u^2}, \quad (824)$$

причем  $m_s^2$  определяется по (819) или (820),  $m_{\beta}^2$  — по (822) и  $m_u^2$  — по (823). Этот расчет весов относится к способу Урмаева. В способе Красовского и Гельмерта веса величин  $s$  определяются также по (819) или (820), но вес направления  $IK$  геодезической линии, ошибка которого есть  $\nu_{IK}$ , должно выводить так

$$p_{IK} = \frac{1}{\frac{1}{2} \left[ \frac{(n+1)(n+2)}{6n} - \frac{25n^2 + 94n - 110}{250n} \right] m''^2}. \quad (825)$$

По (793)

$$\beta_I^0 = \alpha_I^0 - \nu_I.$$

Поэтому

$$\left. \begin{aligned} m_{\beta^0}^2 &= m_{\alpha^0}^2 + \frac{m^2}{2} \\ p_{\beta^0 I} &= \frac{1}{m_{\alpha^0 I}^2 + \frac{m^2}{2}} \end{aligned} \right\}. \quad (826)$$

В (826) попрежнему  $m$  — средняя ошибка измеренного угла в треугольнике триангуляции. Обычно в формулы (819), (820), (822), (825),

(826) вводят среднюю ошибку измеренного направления в триангуляции, которую мы назовем через  $\mu$ . Тогда имеем такую сводку

$$\left. \begin{aligned} m_s^2 &= \left\{ \left( \frac{2n^2+3n+10}{9n} - \frac{5n^2-7n-9}{150n^2} - \frac{(52-n)^2}{60(25n+17)n^2} \right) \frac{\mu^2}{\rho'^2} + \frac{m_b^2}{2b^2} \right\} s^2 \\ p_s &= \frac{1}{m_s^2} & s \text{ — в метрах} \\ m_\beta^2 &= \left\{ 1 + \frac{(n+1)(n+2)}{6n} - \frac{25n^2+94n-110}{250n} \right\} \mu'^2 \\ p_\beta &= \frac{1}{m_\beta^2} \\ p_{I,K} &= \frac{1}{\left\{ \frac{(n+1)(n+2)}{6n} - \frac{25n^2+94n-110}{250n} \right\} \mu'^2} \\ m_{u_I} &= m_{\alpha^\circ_I}^2 + m_{\lambda_I}^2 \sin^2 \varphi_I \\ p_{\delta^\circ_I} &= \frac{1}{m_{\alpha^\circ_I}^2 + 1} \end{aligned} \right\} \quad (827)$$

Проф. Урмаев дает ряд правил, облегчающих решение нормальных уравнений, соответствующих уравнениям погрешностей (815), (816) и (818); он же указывает, как поступать, когда к ранее уравниваемой сети по его способу прибавляются новые полигоны триангуляции. Оказывается возможным ввести в новое уравнивание не все старые полигоны, а лишь примыкающие к новым полигонам.

### § 117. Окончательное уравнивание звеньев триангуляции I класса

После общего уравнивания астрономо-геодезической сети по способу Красовского или по способу Гельмерта мы получаем величины  $\xi_1$  —  $\varphi_1$ ,  $\eta_1$ , поправки  $\delta s_{I,K}$  длин всех геодезических линий, поправки  $v_{I,K}$  их направлений и поправки  $\delta^\circ_I$  «астрономических ориентировок» на каждом пункте Лапласа. Величина  $\delta^\circ_I$  равна  $\delta\alpha^\circ_I - v^\circ_I$ , причем  $\delta\alpha^\circ_I$  есть ошибка астрономического азимута *выходной* стороны звена триангуляции I класса в  $I$ , а  $v^\circ_I$  — ошибка наблюдаемого направления в  $I$  этой выходной стороны. Величины  $v^\circ_I$  из уравнивания не определяются; величины  $v^\circ_I$  и  $v_{I,K}$  соответствуют ошибкам направлений при *воображаемом* измерении угла  $\beta_{I,K}$  (черт. 159). Отсюда

$$\delta\alpha_{I,K} = \delta\alpha^\circ_I - v_I + v_{I,K} = \delta^\circ_I + v_{I,K} \text{ [см. (793)]}.$$

Если мы оставили бы в уравнениях Лапласа (805) величины  $\delta\alpha^\circ_I - v^\circ_I$  (в уравнениях широт и долгот они вовсе не входят) и определили бы их из решения всех условных уравнений сети по способу наименьших квадратов, то не трудно видеть, что мы получили бы

$$\delta\alpha^\circ_I = \frac{\delta^\circ_I \frac{1}{p_1}}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}}; \quad v_I^\circ = - \frac{\delta^\circ_I \frac{1}{p_2}}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}}; \quad (828)$$

причем  $\delta^\circ_I$  есть то его значение, которое получается из решения уравнений (805), (804) и (803), а  $p_1$  и  $p_2$  — относительные веса величин  $\delta\alpha^\circ_I$  и  $v^\circ_I$ .



В способе Гельмерта установление исходных дат должно быть выполнено по (796). В способах Красовского и Урмаева исходные даты предполагаются уже установленными; назовем их, как и ранее, через  $B_1$ ,  $L_1$  и  $A_{1,2}$ .

Из соответственно измененных уравнений (796)

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \varphi_1 - (\xi_1 - \delta\varphi_1) \\ L_1 &= \lambda_1 + \varepsilon\lambda_1 - \eta_1 \sec \varphi_1 \\ A_1 &= \alpha_1^\circ + \delta\alpha_1^\circ - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 \end{aligned} \right\} \quad (796)$$

вытекает, что в способах Красовского и Урмаева приходится положить в (805) при выполнении общего уравнивания астрономо-геодезической сети

$$\left. \begin{aligned} \delta\lambda_1 &= 0 \\ \delta\alpha_1^\circ &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (829)$$

что и должно быть принято во внимание при составлении уравнений Лапласа по геодезическим линиям, исходящим из начальной точки триангуляции  $I$ , которую мы называли также в ряде параграфов через  $A$ . Имея величины  $\varepsilon s_{I,K}$ ,  $\nu_{I,K}$  и  $\nu_{K,I}$ , мы в способе Красовского переходим к исправленным значениям длин геодезических линий и углов между ними и затем выполняем на принятом референц-эллипсоиде и с исходными датами  $B_1$ ,  $L_1$ ,  $A_{1,2}$  окончательное вычисление геодезических координат лапласовых пунктов и геодезических азимутов линий, из них исходящих, применяя формулы «со средней широтой и со средним азимутом». Контролем вычисления, между прочим, должно служить выполнение условия Лапласа на каждом лапласовом пункте

$$(\alpha_{I,K} + \delta\alpha_{I,K}) - (A_{I,K}) = [(\lambda_I + \delta\lambda_I) - (L_{I,K})] \sin B_I. \quad (830)$$

В (830):  $\delta\alpha_{I,K}$  выведено по (793) после уравнивания сети по величинам  $\delta\alpha_1^\circ$  и  $\nu_{I,K}$ ;  $\delta\lambda_I$  получено при уравнивании сети;  $(A_{I,K})$  и  $(L_{I,K})$  получены при указанном окончательном вычислении геодезических координат и азимутов по выведенным после общего уравнивания сети длинам геодезических линий и углам между ними;  $\alpha_{I,K}$  и  $\lambda_I$  выведены после уравнивания звеньев триангуляции, как указано в § 109.

В способе Урмаева мы получаем сразу после уравнивания сети

$$\begin{aligned} (B_I) &= B_I^\circ + dB_I; \\ (L_I) &= L_I^\circ + dL_I; \\ (A_{I,K}) &= A_{I,K}^\circ + dA_{I,K} = A_{I,K}^\circ + \frac{M_I}{s_{I,K}} \sin A_{I,K} dB_I + \frac{M_K}{s_{I,K}} \sin A_{K,I} dB_K - \\ &\quad - \frac{N_I}{s_{I,K}} \cos B_I \left( \cos A_{I,K} - \frac{s_{I,K}}{N_I} \operatorname{tg} B_I \right) dL_I - \\ &\quad - \frac{N_K}{s_{I,K}} \cos B_K \cos A_{K,I} dL_K. \end{aligned} \quad (831)$$

При переходе к вставке треугольников звеньев I класса между лапласовыми пунктами, теперь окончательно установленными, надлежит в способе Красовского предварительно по (828) вывести величины  $\nu_1^\circ$ . В § 109 указано, как после уравнивания звеньев получаются величины  $\alpha_{I,K}$ ,  $A_{I,K}$ ,  $\alpha_1^\circ$  и  $A_1^\circ$ , причем  $\alpha_1^\circ$  и  $A_1^\circ$  относятся к выходной стороне  $Ia$  (черт. 159) звена в его начальной точке  $I$ .

Мы, конечно, имеем

$$\alpha_{I,K} - \alpha_I^\circ = A_{I,K} - A_I^\circ = \beta_{I,K}.$$

Отсюда

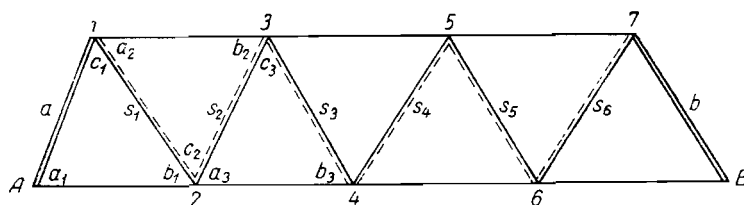
$$(A_I^\circ) = (A_{I,K}) - \beta_{I,K} - \nu_{I,K} + \nu_I^\circ = \alpha_{I,K} - \alpha_I^\circ + \nu_{I,K} - \nu_I^\circ. \quad (832)$$

По (832) мы получим окончательные геодезические азимуты  $(A_I^\circ)$  выходных сторон звеньев.

В способе Урмаева должно по (816) вывести  $\nu_{I,K}$ , являющееся в этом способе поправкой угла  $\beta_{I,K}$ , и далее вычислять

$$(A_I^\circ) = (A_{I,K}) - \beta_{I,K} - \nu_{I,K}. \quad (833)$$

После всех этих действий треугольники каждого звена триангуляции I класса будут заключены между двумя выходными сторонами с твердыми значениями их длин и твердыми значениями их геодезических азимутов и между двумя конечными пунктами Лапласа с твердыми значениями их геодезических координат  $B$  и  $L$ , установленными из общего уравнивания астрономо-геодезической сети. Новое и последнее уравнивание звена выполняется, следовательно, за условия фигур, базисов, азимутов и за условие координат. Оно выполняется по способу, предложенному проф. Н. А. Урмаевым. При этом уравнивание треугольников звена ведется не *по направлениям*, а *по углам*; возможность такой постановки в данном случае, когда предварительно звенья уже были уравнены и притом по направлениям за условия фигур, доказана мною в моей статье «К вопросу об оценке точности триангуляции» — см. «Геодезист» № 10 за 1938 г.



Черт. 160

Обращаемся к этому способу уравнивания. Пусть наше звено изображено на черт. 160. Назовем связующие стороны в нем через  $s_1, s_2, s_3, \dots$ ; азимуты этих сторон назовем через  $A_{1,2}, A_{2,3}, A_{3,4}, \dots$ . Пусть длины выходных сторон суть  $a$  и  $b$ . Связующие углы назовем через  $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots$  согласно тому, как показано на черт. 160; промежуточные углы будут называться через  $c_1, c_2, c_3, \dots$ . Твердые точки пусть будут 1 и 7, координаты которых назовем через  $B_1, L_1$  и  $B_7, L_7$ . Ходовую линию при составлении азимутального уравнения и условий широты и долготы возьмем по ломаной линии 1-2-3-4-5-6-7, обозначенной на черт. 160 пунктиром. Для стороны  $IK$  ходовой линии напишем

$$\left. \begin{aligned} B_K - B_I &= (1) s_1 \cos A_{I,K}^m \\ L_K - L_I &= (2) s_1 \sin A_{I,K}^m \sec B_{I,K}^m \\ A_{K,I} - A_{I,K} &= \pm 180^\circ + (2) s_1 \sin A_{I,K}^m \operatorname{tg} B_{I,K}^m \end{aligned} \right\}. \quad (834)$$

В формулах (834), очевидно, отброшены члены третьего порядка, если под  $A_{I,K}^m$  и  $B_{I,K}^m$  понимать среднюю широту и средний азимут стороны  $IK$ . Из (834) мы получаем

$$d(B_K - B_I) = (1) \cos A_{I,K}^m ds_I - (1) s_I \sin A_{I,K}^m dA_{I,K}^m; \quad (835)$$

$$\begin{aligned} d(L_K - L_I) = & (2) \sin A_{I,K}^m \sec B_{I,K}^m ds_I + \\ & + (2) s_I \cos A_{I,K}^m \sec B_{I,K}^m dA_{I,K}^m + \\ & + (2) s_I \sin A_{I,K}^m \sin B_{I,K}^m \frac{dB_{I,K}^m}{\cos^2 B_{I,K}^m}. \end{aligned} \quad (836)$$

Используем сперва формулу (835). Принимая во внимание, что

$$\frac{ds}{s} = \frac{d \lg s}{\mu 10^7}$$

(если  $d \lg s$  выражено в 7-м знаке логарифма), где  $\mu$  — модуль неперевых логарифмов, мы получим из (835)

$$d(B_K - B_I) = \frac{(B_K - B_I)}{\mu 10^7} d \lg s_I - \frac{(1) \cos B_{I,K}^m}{(2) \rho''} (L_K - L_I) dA_{I,K}^m. \quad (837)$$

Обозначим теперь через  $\Delta a_i$  и  $\Delta b_i$  изменения логарифмов синусов соответственно связующих углов  $a_i$  и  $b_i$  при изменении этих углов на  $1''$  и, кроме того, положим

$$\Delta a_i(a_i) - \Delta b_i(b_i) = \Delta_i. \quad (838)$$

Мы имеем, конечно,

$$\left. \begin{aligned} d \lg s_1 &= \Delta_1 \\ d \lg s_2 &= \Delta_1 + \Delta_2 \\ d \lg s_3 &= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \\ &\dots \\ d \lg s_6 &= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6 \end{aligned} \right\}. \quad (839)$$

Для изменений азимутов связующих сторон напомним

$$\left. \begin{aligned} dA_{1,2}^m &= -(c_1) \\ dA_{2,3}^m &= -(c_1) + (c_2) \\ dA_{3,4}^m &= -(c_1) + (c_2) - (c_3) \\ &\dots \\ dA_{6,7}^m &= -(c_1) + (c_2) - (c_3) + (c_4) - (c_5) + (c_6) \end{aligned} \right\}. \quad (840)$$

При этом, очевидно, мы в (840) пренебрегаем изменениями величин  $(2) s_I \sin A_{I,K}^m \operatorname{tg} B_{I,K}^m$ . По нашим подсчетам, если даже принять, что  $dA$  достигнет  $2''$ , что мало вероятно, влияние этих упрощений в (840) скажется на сумму  $d(B_K - B_I)$  по всему звену всегда менее  $0'',0007$  в наших широтах. При помощи (839) и (840) теперь (837) переписывается так

$$\begin{aligned} dB_K - dB_I = & \frac{(B_K - B_I)}{\rho 10^7} (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots + \Delta_I) - \\ & - \frac{(1) \cos B_{I,K}^m}{(2) \rho''} (L_K - L_I) \times \\ & \times \{ -(c_1) + (c_2) - (c_3) + \dots + (-1)^I (c_I) \}. \end{aligned} \quad (841)$$

Обозначим

$$- \frac{(1) \cos B_{I,K}^m \mu 10^7}{(2) \rho''} = a_1 \quad (842a)$$

и будем считать в (841) постоянным  $\cos B_{l,K}$ , взяв его для *средней* широты звена. Суммируя выражения (841), составленные по всем связующим сторонам звена, с использованием при этом обозначения (842a), мы получим

$$\begin{aligned} dB_n - dB_1 = \frac{60}{\mu 10^7} \{ & (B_n - B_1)' \Delta_1 + (B_n - B_2)' \Delta_2 + \\ & + (B_n - B_3)' \Delta_3 + \dots + (B_n - B_{n-1})' \Delta_{n-1} \} + \\ & + a_1 [(L_n - L_1)' (-c_1) + (L_n - L_2)' (+c_2) + \dots + \\ & + (-1)^{n-1} (L_n - L_{n-1})' (c_{n-1})] \}. \end{aligned} \quad (842)$$

В (842) величины  $(B_n - B_1)'$ ,  $(B_n - B_2)'$ , ...,  $(L_n - L_1)'$ ,  $(L_n - L_2)'$  ... суть соответственно разности широт и долгот, *выраженные в минутах*;  $n$  есть номер последней точки ходовой линии, совпадающей с *твердой* точкой; номером 1 обозначена начальная твердая точка звена, для которой, конечно,  $dB_1 = 0$ . Уравнение широты мы получим в таком виде

$$\begin{aligned} B'_n - B_1 + dB_n - dB_1 &= B_n - B_1; \\ dB_n + (B'_n - B_n) &= 0; \end{aligned} \quad (843)$$

$B'_n$  есть широта точки  $n$ , полученная вычислением по ходовой линии 1-2-3-4, ...,  $n$  при исходной широте  $B_1$  твердой точки 1;  $B_n$  — широта той же точки  $n$ , данная для нее, как для *жесткой* точки. Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{60}{\mu 10^7} \{ & (B_n - B_1)' \Delta_1 + (B_n - B_2)' \Delta_2 + (B_n - B_3)' \Delta_3 + \dots + \\ & + (B_n - B_{n-1})' \Delta_{n-1} \} + a_1 [(L_n - L_1)' (-c_1) + (L_n - L_2)' (+c_2) + \\ & + (L_n - L_3)' (-c_3) + \dots + (L_n - L_{n-1})' (c_{n-1}) (-1)^{n-1}] \} + \\ & + B'_n - B_n = 0; \end{aligned} \quad (844)$$

В (844) теперь надлежит ввести поправки связующих углов по (838). Мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{60}{\mu 10^7} \{ & (B_n - B_1)' \Delta a_1(a_1) - (B_n - B_1)' \Delta b_1(b_1) + \\ & + (B_n - B_2)' \Delta a_2(a_2) - (B_n - B_2)' \Delta b_2(b_2) + \\ & + (B_n - B_3)' \Delta a_3(a_3) - (B_n - B_3)' \Delta b_3(b_3) + \dots + \\ & + (B_n - B_{n-1})' \Delta a_{n-1}(a_{n-1}) - (B_n - B_{n-1})' \Delta b_{n-1}(b_{n-1}) \} + \\ & + a_1 \{ (L_n - L_1)' (-c_1) + (L_n - L_2)' (c_2) + \\ & + (L_n - L_3)' (-c_3) + \dots + (L_n - L_{n-1})' (c_{n-1}) (-1)^{n-1} \} + \\ & + B'_n - B_n = 0. \end{aligned} \quad (845)$$

Уравнение (845) можно короче написать так

$$\begin{aligned} \sum_1^{n-1} (B - B_K)' \Delta a_K(a_K) - \sum_1^{n-1} (B_n - B_K)' \Delta b_K(b_K) + \\ + a_1 \sum_1^{n-1} (L_n - L_K)' (c_K) (-1)^K + 72\,382,4 (B'_n - B_n) = 0. \end{aligned} \quad (846)$$

В (846) множитель 72382,4 равен  $\frac{\mu 10^7}{60}$ .

Подобным же образом из (836) получается уравнение долготы. Мы напишем сперва

$$d(L_K - L_I) = \frac{(L_K - L_I)}{\mu 10^7} d \lg s_I + \frac{(2)}{(1) \rho''} (B_K - B_I) \sec B_{IK}^m dA_{IK}^m + \\ + (L_K - L_I) \operatorname{tg} B_{IK}^m dB_{IK}^m. \quad (847)$$

Использование в (847) выражений для  $dA$  в виде формул (840) приведет к погрешности в сумме  $d(L_K - L_I)$ , распространенной на всю ходовую линию 1-2-3, ...,  $n$ , меньшей в наших широтах  $0''0004$ . Точно так же сумма  $\sum (L_K - L_I) \operatorname{tg} B dB$  будет, при длине ряда в 225 км, вообще менее  $0''001$ . Пренебрегая такими погрешностями, мы напишем

$$d(L_K - L_I) = \frac{(L_K - L_I)}{\mu 10^7} d \lg s_{IK} + \frac{(2)}{(1)} (B_K - B_I) \sec B_{IK}^m dA_{IK}^m; \\ d(L_K - L_I) = \frac{(L_K - L_I)}{\mu 10^7} (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots + \Delta_I) + \\ + \frac{(2) \sec B_{IK}^m}{(1) \rho''} (B_K - B_I) [(-c_1) + (c_2) - \\ - (c_3) + \dots + (-1)^I (c_I)]. \quad (848)$$

Вводим теперь коэффициент

$$a_2 = \frac{\mu 10^7}{\rho''} \frac{(2)}{(1)} \sec B, \quad (849)$$

понимая под  $B$  в (849) среднюю широту нашего звена.

Теперь перепишем (848) так

$$d(L_K - L_I) = \frac{60}{\mu 10^7} \{ (L_K - L_I)' (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots + \Delta_I) + \\ + a_2 [(B_K - B_I)' [(-c_1) + (c_2) + (-c_3) + \dots + \\ + (-1)^I (c_I)]] \}. \quad (850)$$

Суммируя выражения (850), составленные для всех сторон ходовой линии 1-2-3, ...,  $n$ , мы получим

$$dL_n - dL_1 = \frac{60}{\mu 10^7} \{ [(L_n - L_1)' \Delta_1 + (L_n - L_2)' \Delta_2 + \\ + (L_n - L_3)' \Delta_3 + \dots + (L_n - L_{n-1})' \Delta_{n-1}] + \\ + a_2 [(B_n - B_1)' (-c_1) + (B_n - B_2)' (c_2) + \\ + (B_n - B_3)' (-c_3) + \dots + \\ + (B_n - B_{n-1})' (c_{n-1}) (-1)^{n-1}] \}. \quad (851)$$

В (851) величины  $(B_n - B_K)'$  и  $(L_n - L_K)'$  суть соответственно разности широт и долгот, выраженные в минутах. Конечно  $dL_1 = 0$ . Из (851) получаем следующее выражение для уравнения долготы

$$\begin{aligned} & \frac{60}{\rho'' 10^7} \{[(L_n - L_1)' \Delta_1 + (L_n - L_2)' \Delta_2 + (L_n - L_3)' \Delta_3 + \dots + \\ & + (L_n - L_{n-1})' \Delta_{n-1}] + a_2 [(B_n - B_1)' (-c_1) + \\ & + (B_n - B_2)' (c_2) + \dots + \\ & + (B_n - B_{n-1})' (c_{n-1}) (-1)^{n-1}]\} + \\ & + L'_n - L_n = 0. \end{aligned} \quad (852)$$

В (852) величина  $L'_n$  есть долгота второй твердой точки звена, вычисленная передачей по ходовой линии 1-2-3, ...,  $n$  от исходной точки 1, с координатами  $B_1$  и  $L_1$ , причем точка 1 является начальной твердой точкой звена.

Окончательно уравнение долготы напомним так

$$\begin{aligned} & \sum_1^{n-1} (L_n - L_K)' \Delta a_K (a_K) - \sum_1^{n-1} (L_n - L_K)' \Delta b_K (b_K) + \\ & + a_2 \sum_1^{n-1} (B_n - B_K)' (c_K) (-1)^K + 72382,4 (L'_n - L_n) = 0. \end{aligned} \quad (853)$$

Коэффициенты  $a_1$  и  $a_2$  в (846) и (853) определяются формулами

$$a_1 = - \frac{\rho'' 10^7}{\rho''} \frac{(1)}{(2)} \cos B_m; \quad a_2 = \frac{\rho'' 10^7}{\rho''} \frac{(2)}{(1)} \sec B_m. \quad (854)$$

Переходим теперь к составлению азимутального уравнения. Из (834) мы напомним

$$\begin{aligned} d(A_{K,I} - A_{I,K}) &= (2) \sin A_{I,K}^m \operatorname{tg} B_{I,K}^m ds_I + \\ &+ (2) s_I \cos A_{I,K}^m \operatorname{tg} B_{I,K}^m dA_{I,K}^m + \\ &+ (2) s_I \sin A_{I,K}^m \frac{dB_{I,K}^m}{\cos^2 B_{I,K}^m}. \end{aligned} \quad (855)$$

Вычтем из (855) уравнение (836), умноженное на  $\sin B_{I,K}^m$ ; мы получим

$$\begin{aligned} d(A_{K,I} - A_{I,K}) - d(L_K - L_1) \sin B_{I,K}^m &= \\ &= (2) s_I \sin A_{I,K}^m dB_{I,K}^m. \end{aligned} \quad (856)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} dA_{2,1} &= (-c_1) + d(L_2 - L_1) \sin B_{1,2}^m + (2) s_1 \sin A_{1,2}^m dB_{1,2}^m; \\ dA_{3,2} &= (-c_1) + (c_2) + d(L_2 - L_1) \sin B_{1,2}^m + d(L_3 - L_2) \sin B_{2,3}^m + \\ &+ (2) s_1 \sin A_{1,2}^m dB_{1,2}^m + (2) s_2 \sin A_{2,3}^m dB_{2,3}^m; \\ dA_{4,3} &= (-c_1) + (c_2) - (c_3) + d(L_2 - L_1) \sin B_{1,2}^m + \\ &+ d(L_3 - L_2) \sin B_{2,3}^m + d(L_4 - L_3) \sin B_{3,4}^m + \\ &+ (2) s_1 \sin A_{1,2}^m dB_{1,2}^m + (2) s_2 \sin A_{2,3}^m dB_{2,3}^m + \\ &+ (2) s_3 \sin A_{3,4}^m dB_{3,4}^m; \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dA_{n'n-1} &= (-c_1) + (c_2) - (c_3) + \dots + (c_{n-1}) (-1)^{n-1} + \\
&+ \sum_1^{n-1} d(L_{I+1} - L_I) \sin B_{I,I+1}^m + \\
&+ \sum_1^{n-1} (2) s_I \sin A_{I,I+1}^m dB_{I,I+1}^m; \\
dA_{n'B} &= (-c_1) + (c_2) - (c_3) + \dots + (c_n) (-1)^n + \\
&+ \sum_1^{n-1} d(L_{I+1} - L_I) \sin B_{I,I+1}^m + \\
&+ \sum_1^{n-1} (2) s_I \sin A_{I,I+1}^m dB_{I,I+1}^m. \quad (857)
\end{aligned}$$

В (857) линия  $n.B$  есть вторая выходная сторона ряда, для которой имеется твердый азимут (на черт. 160 — это линия 7-В)  $A_{n'B}$ . Если в (857) мы заменим  $\sin B_{I,I+1}^m$  просто через среднюю широту ряда, то из-за этого внесем в это уравнение ошибку, вряд ли большую  $0'',0001$ ; не большую ошибку мы сделаем в этом уравнении, если отбросим в нем член с  $dB_{I,I+1}^m$ . С другой стороны

$$\sin B_m \sum_1^{n-1} d(L_{I+1} - L_I) = (L_n - L'_n) \sin B_m,$$

поэтому

$$\begin{aligned}
A'_{n'B} + dA_{n'B} &= A_{n'B} = A'_{n'B} + \\
&+ \{(-c_1) + (c_2) - (c_3) + \dots + c_n(-1)^n\} + \\
&+ (L_n - L'_n) \sin B_m, \quad (858)
\end{aligned}$$

причем под  $A'_{n'B}$  понимается азимут второй выходной стороны звена, полученный вычислением по ходовой линии  $I-2-3, \dots, n.B$ .

Окончательный вид азимутального уравнения имеем следующий

$$\begin{aligned}
&- (c_1) + (c_2) - (c_3) + \dots + c_n (-1)^n + \\
&+ (A'_{n'B} - A_{n'B}) - (L'_n - L_n) \sin B_m = 0. \quad (859)
\end{aligned}$$

Конечно, условия фигур, базисов, условие азимутальное и условия широты и долготы составляются с углами, полученными в результате уравнивания звена, предшествовавшего общему уравниванию астрономо-геодезической сети. Поэтому во всех условиях фигур свободные члены будут равны нулю, также будет равен нулю свободный член базисного условия, и составление его будет заключаться лишь в том, что в ранее составленном (при уравнивании звена) базисном условии свободный член заменяется нулем. Далее, как указано в § 109, после уравнивания звена у нас вычисляются геодезические широты, долготы и азимуты всех пунктов звена. Очевидно, для получения  $B'_n$ ,  $L'_n$  и  $A'_{n'B}$  нужно лишь будет учесть изменение широты и долготы точки  $I$  (черт. 160) и изменение азимута стороны  $I-A$ , полученные в результате общего уравнивания сети.

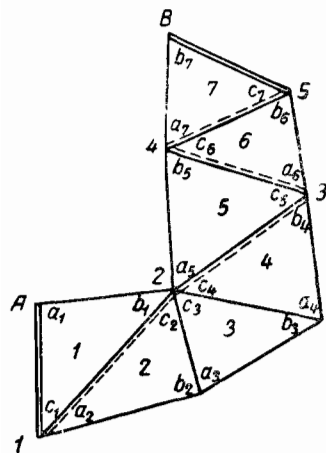
Мы, конечно, имеем

$$\left. \begin{aligned} B'_n &= B^n + p_1^{1..n} dB_1 + p_4^{1..n} dA_{1..A} \\ L'_n &= L^n + dL_1 + q_1^{1..n} dB_1 + q_4^{1..n} dA_{1..A} \\ A'_{n..B} &= A^n_{n..B} + r_1^{1..n} dB_1 + r_4^{1..n} dA_{1..A} \end{aligned} \right\}. \quad (860)$$

В (860):  $B^n$ ,  $L^n$  и  $A^n_{n..B}$  — те значения геодезических широты, долготы и азимута, которые получены в точке  $n$  (второй твердой точке звена) при вычислениях по § 109 с предварительно уравненными элементами звена;  $dB_1$ ,  $dL_1$ ,  $dA_{1..A}$  — те изменения, которые получили  $B^0_1$ ,  $L^0_1$ ,  $A^0_{1..A}$

при общем уравнивании астрономо-геодезической сети. По (860) могут быть легко соображены свободные члены уравнений широты, долготы и азимутального. Конечно, если мы уравниваем звено *по углам*, то относим условия фигур к первой группе, а базисное, азимутальное условие и условие широты и долготы — во вторую группу, и применяем правила двухгруппового уравнивания, изложенные в Руководстве по высшей геодезии части I.

Допустим, что вполне однообразное построение звена, изображенное на черт. 160, нарушается; например, имеем построение, данное на черт. 161. Прежний вид уравнений (846), (853) и (859) сохраняется и в этом случае, только надо твердо придерживаться правила: *вести ходовую линию через вершины промежуточных*



Черт. 161

*углов*. Поэтому вершина 2 (черт. 161) в уравнении (846) и в (853) войдет в каждую из сумм

$$\begin{aligned} \sum_1^{n-1} (B_0 - B_K)' \Delta a_K(a_K), & \quad \sum_1^{n-1} (B_n - B_K)' \Delta b_K(b_K), \\ \sum_1^{n-1} (L_n - L_K)' \Delta a_K(a_K), & \quad \sum_1^{n-1} (L_n - L_K)' \Delta b_K(b_K) \end{aligned}$$

трижды, давая в каждой из этих сумм три слагаемых

$$\begin{aligned} (B_n - B_2)' \Delta a_2(a_2); & \quad (B_n - B_2)' \Delta b_2(b_2); \\ (B_n - B_2)' \Delta a_3(a_3); & \quad (B_n - B_2)' \Delta b_3(b_3); \\ (B_n - B_2)' \Delta a_4(a_4); & \quad (B_n - B_2)' \Delta b_4(b_4); \\ (L_n - L_2)' \Delta a_2(a_2); & \quad (L_n - L_2)' \Delta b_2(b_2); \\ (L_n - L_2)' \Delta a_3(a_3); & \quad (L_n - L_2)' \Delta b_3(b_3); \\ (L_n - L_2)' \Delta a_4(a_4); & \quad (L_n - L_2)' \Delta b_4(b_4). \end{aligned}$$

Изменяется лишь правило знаков в слагаемых сумм

$$\begin{aligned} \sum_1^{n-1} (L_n - L_K)' (c_K) (-1)^k, \\ \sum_1^{n-1} (B_n - B_K)' (c_K) (-1)^k, \end{aligned}$$



а также в уравнении (859): очевидно,  $c_2$ ,  $c_3$  и  $c_4$  войдут для примера черт. 161 *все со знаком минус*. Но вместо множителя  $(-1)^k$ , который соответствует только черт. 160, следует держаться правила: поправка промежуточного угла в (846), в (853) и в (859) *вводится со знаком плюс, если этот промежуточный угол лежит влево от ходовой линии, и со знаком минус — если этот промежуточный угол лежит вправо от ходовой линии*; это правило будет общим во всех случаях. Проф. Урмаев дает для коэффициентов  $a_1$  и  $a_2$  табличку, но предполагая, что

$$a_1 = - \frac{\mu 10^6}{\rho''} \frac{(1)}{(2)} \cos B_m; \quad a_2 = \frac{\mu 10^6}{\rho''} \frac{(2)}{(1)} \sec B_m$$

и, следовательно, выражая  $\Delta a_k$  и  $\Delta b_k$  в единицах *шестого* знака логарифма. Соответственно этому, множитель 72 382,4 в (846) и в (853) замещается через 7 238,24.

# ГЛАВНАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ОСНОВА В СССР

(Общая оценка постановки и программ работ; вопросы правильной обработки астрономо-геодезической сети)

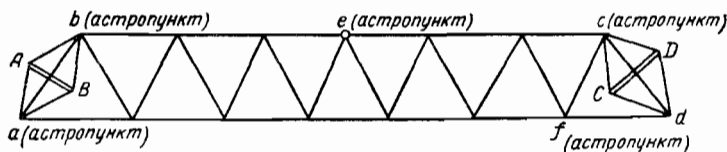
## § 1. Построение главной геодезической основы в СССР

Главная геодезическая основа представляется во всех государствах в виде триангуляции I класса. Эта главная основа должна быть построена с наивысшей точностью: координаты точек триангуляции I класса, длины ее треугольников и азимуты этих сторон во всех дальнейших геодезических построениях принимаются как исходные, как неискаженные как будто бы никакими ошибками, как доставляющие твердый контроль во всех последующих геодезических операциях.

В действительности результаты по триангуляции I класса искажены неизбежными ошибками, но эти ошибки должны быть малыми по сравнению с ошибками в триангуляциях следующих разрядов, опирающихся на триангуляцию I класса. Уже отсюда очевидны высокие требования, которые предъявляются к наблюдениям и измерениям в триангуляции I класса и к обработке результатов этих измерений.

С другой стороны, главная геодезическая основа во всех государствах всегда использовалась в научных целях, именно в целях определения размеров и фигуры Земли; поэтому программа работ и их постановка в триангуляции I класса должны иметь в виду и эту цель, а также и другие научные цели, связанные с изучением твердой оболочки земного шара.

Триангуляция I класса в СССР строится, как известно, в виде рядов по меридианам и по параллелям, причем ряды одноименного направления (по меридианам или по параллелям) отстоят друг от друга на



Фиг. 1

200—250 км. Ряд триангуляции I класса образуется из «звеньев»: через 200—250 км, по ряду измеряют базисы  $AB$  и  $CB$ , строят базисные сети  $AbBa$  и  $CcDd$  (фиг. 1) и на двух пунктах базисной сети выполняют точные астрономические определения широт, долгот и азимутов; цепь треугольников, проложенных между двумя смежными базисными сетями

или, вернее, между «выходными» сторонами  $ab$  и  $cd$  базисных сетей, называется звеном триангуляции I класса.

Ряды триангуляции I класса, пересекаясь, образуют полигоны, причем вершины полигонов совпадают с началами и концами звеньев, так что каждая сторона полигона I класса является звеном триангуляции и имеет длину в 200—250 км. Эта «нормальная» схема построения триангуляции I класса, понятно, не распространяется еще на необжитые районы Сибири и Дальнего Востока; здесь положение рядов триангуляции I класса диктуется прежде всего условиями транспорта, и, конечно, здесь ряды триангуляции I класса, в первый период освоения указанных территорий придется строить в расстояниях друг от друга и в 800 км и в 1000 км, и, кроме того, ряды I класса будут местами, достаточно уклоняющимися и от меридианов и от земных параллелей.

Звенья триангуляции I класса в СССР образуются простыми цепями треугольников, тогда как в США они образуются цепями геодезических четырехугольников, в Германии (в последнее время) двойными цепями треугольников. Вообще, в заграничной геодезии, как правило, звенья триангуляции I класса образуют из сложных фигур, тогда как у нас — из простых фигур.

Средняя ошибка в длине диагонали звена у нас получается, при средней ошибке  $\pm 0'',7$  измеренного угла треугольника триангуляции, около  $\pm 0,6$  —  $\pm 0,7$  м; средний поперечный сдвиг конца звена относительно его начала — также около  $\pm 0,6$  —  $\pm 0,7$  м.

Эти же средние ошибки в заграничных работах меньше, но главным образом из-за меньшей средней ошибки измеренного угла и в малой степени — из-за построения звена из сложных, а не простых фигур.

Вообще, с точки зрения действия случайных ошибок измерений преимущества построения звеньев триангуляции из сложных фигур невелики, но, конечно, при условии длины звена 200—250 км и при условии заключения его между двумя базисами  $AB$  и  $CD$  (фиг. 1) и двумя надежно определенными лапласовыми азимутами по выходным сторонам  $ab$  и  $cd$  (фиг. 1). Однако в цепях из сложных фигур мы имеем, во-первых, несравненно больший и более надежный контроль полевых измерений, а во-вторых, большую гарантию ослабления действия систематических ошибок измерений.

Поэтому и у нас, в СССР, должно стремиться к более совершенному построению звеньев триангуляции I класса из сложных фигур и к увеличению тем самым жесткости построения главной геодезической основы. Наша беспримерная дореволюционная отсталость в области развития основных геодезических работ и небывалый спрос со стороны народного хозяйства на геодезическую основу после Октябрьской революции обусловили, конечно, необходимость и неизбежное приспособление в постановке работ по главной геодезической основе к этим условиям, но в перспективе мы должны иметь в виду переход на более совершенную их постановку.

Базисные сети в нашей триангуляции I класса принято строить в виде одного ромба  $aAbB$  (фиг. 1), между тем как заграничная практика предпочитает построение в виде двойного ромба: основанием к этому является стремление избежать ответственных углов, меньших  $40^\circ$ , и ослабить влияние возможных систематических ошибок в углах. Точность определения выходных сторон характеризуется у нас средней ошибкой около 1 : 500 000, т. е. как будто бы и не остается ничего желать лучшего. Однако все-таки здесь имеется некоторый формальный

подход, а с другой стороны, нередко это достигается у нас за счет увеличения длины базиса с выбором для него явно неудобной местности. На вопросах построения базисных сетей нужно остановить внимание наших геодезистов. Базисы триангуляции измеряются в СССР с достаточной точностью. Однако важный вопрос хранения эталонов длины остается без должного внимания.

Астрономическое оснащение рядов триангуляции I класса заключается в следующем: на концах выходных сторон, т. е. в точках  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ , определяют с хорошей точностью астрономические широты и долготы, а по сторонам  $ab$ ,  $ba$ ,  $cd$  и  $dc$  — астрономические азимуты, кроме того, в пункте  $e$  (фиг. 1), примерно посередине каждого звена, определяют его астрономические широту и долготу.

Двухстороннее определение азимутов по выходным сторонам имеет существенное значение. Эти двухсторонние определения уже показали, что высокая точность самих астрономических наблюдений по определению азимута погашается действием боковой рефракции; средний вывод из двухсторонних определений должен в большинстве случаев, при соответствующем распределении наблюдений на пунктах  $a$  и  $b$  (или на  $c$  и  $d$ ), приводить к заметному уменьшению искажения азимута боковой рефракцией. Однако последнее предположение — лишь вероятное, в действительности оно может и не иметь места в ряде отдельных случаев.

Ввиду громадного значения лапласовых азимутов в контроле триангуляции и в повышении качеств ее результатов (по отношению к определению направлений сторон триангуляции азимуты Лапласа играют ту же роль, что и базисы по отношению к определению длин сторон треугольников), вопрос высокой точности их определения является совершенно актуальным. Здесь нельзя удовлетвориться теми подходами, которые имеют место в нашем геодезическом производстве, и двухсторонность определения азимутов одна, сама по себе, еще далеко не дает полных гарантий.

Представляется желательным проведение следующих мер: 1) на пунктах  $a$  и  $b$  обычные астрономические кирпичные столбы заменить постаментами, высотой от 6 до 8 метров; 2) двухсторонние астрономические определения азимутов выполнять тремя сериями, разделенными друг от друга месячными промежутками; 3) при выборе стороны, по которой должны быть взяты астрономические азимуты (в прямом и обратном направлении), должно оценивать местность с точки зрения возможных рефракционных влияний, и, если сторона  $cd$  не подходит в этом отношении, определение лапласовых пунктов и азимутов переносить на сторону  $cf$  или  $fd$ , может быть, укорачивая несколько ту и другую; 4) в программу астрономических наблюдений по определению азимутов должна включаться некоторая метеорологическая часть.

Ввиду того, что уравнивание звеньев за азимутальные условия наталкивается на препятствие при определении поправок астрономических азимутов и долгот, и в производстве эти поправки перекладывают на поправки углов треугольников, что неправильно, то поэтому надлежит ввести в схему построения триангуляции I класса определение фундаментальных астрономических азимутов, которые следует намечать по рядам триангуляции через 1000—1200 км друг от друга. Такие фундаментальные азимуты должны иметь среднюю ошибку (включая и действие рефракции) не выше  $\pm 0",3$  и при обработке звеньев триангуляции должны считаться жесткими. Выбор места для

них и самое их определение должны сопровождаться метеорологическими исследованиями.

Нужно отметить, что вопросами точного определения лапласовых азимутов занимаются сейчас и за границей. Вопросы эти достаточно сложны, и нам также не следует оставлять их без внимания, ограничиваясь лишь выполнением двухсторонних определений «по инструкции».

Астрономические определения в триангуляции I класса обращают ее в астрономо-геодезическую сеть, причем астрономические определения азимутов и долгот имеют существенное значение в повышении точности построения этой сети, в устранении в ней накопления влияний систематического характера, в осуществлении контроля триангуляции. Астрономические долготы и азимуты, приводя к определениям лапласовых азимутов, необходимы и важны в чисто производственных геодезических целях. С другой стороны, определения астрономических широт и долгот обращают ряды триангуляции I класса в градусные измерения и служат, следовательно, для осуществления научных задач геодезии; но они же необходимы для получения уклонов отвесных линий, а это, в свою очередь, нужно для правильной обработки триангуляции.

Все измерения в триангуляции отнесены к отвесным линиям и к уровенной поверхности океана; между тем их нужно относить к нормальным к принятому в геодезии эллипсоиду и к его поверхности. Поэтому те уклоны отвесных линий, которые мы получаем посредством определения в ряде пунктов триангуляции астрономических широт и долгот, нужны и для производственных геодезических целей.

Таким образом, вовсе не нужно считать, что астрономические определения в триангуляции являются добавочной нагрузкой к производственному заданию, служащей только для выполнения научных исследований и задач. Нет, астрономическая часть является органической частью в современной триангуляции I класса, которая неизбежно должна строиться в виде астрономо-геодезической сети, а не просто геодезической сети I разряда. Астрономическое оснащение в нашей триангуляции I класса более богато, чем в США и в Западной Европе.

Обратимся, однако, снова к построению триангуляции СССР. Как и во всех государствах, она образует клетки, полигоны I класса, которые подлежат дальнейшему заполнению триангуляцией II класса и следующих классов. Неточность построения полигона I класса, деформации в нем, непременно скажутся на дальнейших построениях внутри этого полигона.

Нужно ставить работу по триангуляции I класса и по развитию триангуляции II класса таким образом, чтобы деформации в полигоне I класса, во-первых, не вносили сколь-нибудь практически значащих изменений в элементы отдельных треугольников II класса, вызывая лишь общие сдвиги отдельных групп треугольников, мало и медленно изменяющиеся при переходе от группы к группе; во-вторых, мало влияли бы на противоречия в координатах и азимутах пунктов II класса по сравнению с влиянием ошибок самой триангуляции II класса. Для выполнения последнего условия нужно предъявлять особенно строгие требования к триангуляции I класса. Заметим, что средняя ошибка угла треугольника I класса у нас принимается равной  $\pm 0'',7 - 0'',9$ .

Однако большой уже опыт наших работ и работ по США показывает, что очень трудно добиваться при развитии триангуляции в большой стране средних ошибок угла, меньших  $\pm 0'',7$ . Причины лежат отчасти в условиях нашей местности: в северных лесных районах заболоченность и избыток влаги являются очень неблагоприятными при точных наблюдениях на расстоянии в 30—35 км (средняя длина стороны в треугольнике I класса); в более южных безлесных и степных районах громадные колебания приземных воздушных слоев всем известны. Но имеются и другие причины, например принятый у нас тип геодезических сигналов, с которых выполняют наблюдения.

Можно все-таки считать, что при наличии природных условий, играющих немаловажную роль, и условий, вытекающих из огромности подлежащей срочному обслуживанию территории, та точность построения главной геодезической основы, которая достигается в наших работах, является оптимальной.

Если представить себе, что вся площадь полигона I класса заполнена треугольниками триангуляции II класса и что эта сплошная сеть II класса сразу вся уравнена в рамках полигона I класса, то указанное выше требование, чтобы деформации полигона I класса вызывали лишь общие сдвиги для целых групп треугольников II класса, изменяющиеся медленно и ничтожно при переходе от одной такой группы треугольников к смежной и без внесения при уравнивании триангуляции II класса, сколь-нибудь заметных искажений в элементы треугольников II класса, будет выполнено и при получающихся в наших работах деформациях полигонов I класса. Что касается второго из указанных выше требований, т. е. малости части, обусловленной ошибками триангуляции I класса, в противоречиях и невязках в сети II класса по сравнению с частью, обусловленной в этих же противоречиях ошибками самой триангуляции II класса, то и это требование достаточно удовлетворяется, хотя и без особого запаса, особенно, когда в заполняющей сети II класса имеют среднюю ошибку измерения угла около  $\pm 1'',5$ , а стороны треугольников этой сети доводят до 18—20 км.

Но при заполнении сразу сетью II класса площади полигона I класса получается 150—180 треугольников, и, несомненно, контроль построения сети из такого огромного числа треугольников посредством рамки полигона I класса становится достаточно слабым. Следует выделить из сети II класса ряды, исполненные с значительно большей тщательностью и этими рядами разбить всю сеть II класса на части с тем, чтобы контролирование выполнять в каждой из таких частей. Таким образом, мы приходим к мысли, осуществляемой и в действительных работах, о разбивке полигона I класса на четыре части — двумя основными и рядами II класса: заполняющая сеть II класса вставляется между основными рядами II класса и рядами I класса; постановка работ по выполнению основных рядов II класса должна приближаться к постановке работ по триангуляции I класса. Конечно, во многих случаях разбивка полигона I класса на четыре части основными рядами II класса дает значительные выгоды в организации топографо-геодезических работ.

Однако приходится иметь в виду, что основные ряды II класса, давая хороший контроль заполняющей сети II класса в отношении длин и азимутов сторон треугольников, все же в координатах своих пунктов имеют искажения, обусловленные как деформациями полигона I класса, так и ошибками построения рядов II класса. Отсюда вытекает целесооб-

разность предложения — основные ряды II класса уравнивать и окончательно вычислять не отдельно, а вместе со всеми треугольниками заполняющей триангуляции II класса, придавая лишь углам треугольников основного ряда соответствующий вес.

Остановимся теперь еще на связи построения главной геодезической основы с работами гравиметрическими. Работы гравиметрические следует подразделить: на общую гравиметрическую съемку страны и на астрономо-гравиметрическое нивелирование, выполняемое по тем рядам триангуляции I класса, которые должны отвечать запросам градусных измерений.

Астрономо-гравиметрическое нивелирование включает в себя: 1) астрономические определения широты и долготы на пунктах триангуляции, отстоящих друг от друга на 70—100 км, что, собственно, входит в программу и схему производственных астрономических работ в триангуляции I класса по каждому ее ряду; 2) выполнение общей гравиметрической съемки в полосе шириной 220—240 км вдоль ряда I класса, что, собственно, входит в программу общей гравиметрической съемки на всей территории СССР; 3) пополнение добавочными гравиметрическими пунктами общей гравиметрической съемки так, чтобы обеспечить точное определение для любого пункта триангуляционного ряда той части «гравиметрического» отклонения отвесной линии, которая обусловлена аномалиями силы тяжести в пределах окружности, радиуса 110—120 км от рассматриваемого пункта.

Астрономо-гравиметрическое нивелирование доставляет высоты геоида относительно принятого при обработке триангуляции I класса референц-эллипсоида и отклонения отвесных линий в геодезических пунктах относительно нормалей к тому же референц-эллипсоиду; эти данные нужны для надлежаще точной обработки триангуляции I класса. Но они же доставляют профиль геоида относительно референц-эллипсоида вдоль соответствующего триангуляционного ряда, и, конечно, здесь мы получаем ценнейшие материалы для изучения фигуры Земли.

Общая гравиметрическая съемка, вместе с астрономическими определениями широт и долгот на пунктах триангуляции I класса, доставляет возможность вывода тех же высот геоида над референц-эллипсоидом и относительных отклонений отвесных линий, что и астрономо-гравиметрическое нивелирование, но с точностью, заметно меньшей. Существовавшее отметить, что комплекс проводимых в СССР работ по триангуляции I класса, по астрономическим определениям на пунктах триангуляции I класса и по гравиметрической съемке обеспечивает в результате полноту использования астрономо-геодезической сети в научных целях и доставляет беспримерный по объему и по содержанию материал для изучения и исследования фигуры Земли. Одновременно астрономические и гравиметрические работы обеспечивают надлежащую обработку нашей грандиозной триангуляции I класса.

## **§ 2. Соображения о влиянии отступлений геоида от эллипсоида на геодезические результаты. Выбор референц-эллипсоида**

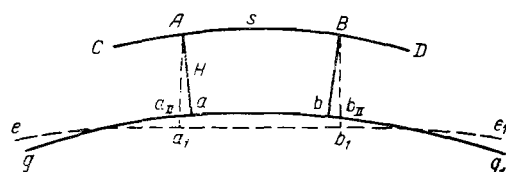
Получаемые в астрономо-геодезических работах из наблюдений и измерений величины мы относим, по введению в них некоторых поправок, к уровню океана или к поверхности геоида. Мы приводим измеренные базисы к уровню океана, мы вводим в измеренные горизонтальные

направления поправки за высоту наблюдаемого предмета над уровнем океана, мы приводим астрономические широты за высоту станции над уровнем океана.

Поверхность геоида — неправильная, сложная и нам неизвестная поверхность. Поэтому в геодезии мы от нее переходим на поверхность некоторого эллипсоида, референц-эллипсоида, являющуюся, в сущности, вспомогательной координатной поверхностью.

Можем ли мы считать, что отнесенные на поверхность геоида измеренные базисы и углы триангуляции совсем нечувствительно, практически несущественно изменятся при переносе их с геоида на референц-эллипсоид?

Вместо общего ответа на этот вопрос дадим сперва ответ частный. Пусть на фиг. 2  $AB$  — измеренный нами базис, расположенный на у-



Фиг. 2

ровнейшей поверхности  $CD$ , высота которой над поверхностью геоида  $dabd$  равна  $H$ ;  $ab$  — проекция базиса  $AB$ , имеющего длину  $s$ , на уровень океана, причем проектирование выполняется отвесными линиями  $Aa$  и  $Bb$ . Пусть  $ea_1b_1e_1$  — поверхность референц-эллипсоида, относительно которой геоид в

районе базиса имеет некоторое повышение. Прямые  $Aa_1$  и  $Bb_1$  — нормали к поверхности референц-эллипсоида, и  $a_1b_1$  — проекция базиса на референц-эллипсоид.

Мы требуем, чтобы высота  $H$  для правильного получения редукции базиса при переходе от  $AB$  —  $s$  к  $ab$  определялась из геометрического нивелирования с ошибкой, не превышающей трех метров. Тогда казалось бы логичным и последовательным требовать при переходе от  $ab$  к  $a_1b_1$  учета влияния высоты  $ab$  над  $a_1b_1$ , если такая высота превышает три метра.

Однако в геодезии строгие требования, выполняемые неукоснительно при редукции измеренных величин к поверхности геоида, считаются почему-то подлежащими отмене, раз дело идет о переходе от величин, отнесенных к поверхности геоида, к величинам, которые должно получить на поверхности референц-эллипсоида. Отступления геоида от наилучше определенного и наилучше установленного, в смысле исходных координат, азимута и исходной высоты, референц-эллипсоида будут для СССР иметь среднее квадратическое значение около  $\pm 20$  м, достигая местами и 40, и 50, и даже, может быть, иногда 80 метров.

Если мы говорим о математически ясном проектировании точек местности на поверхность референц-эллипсоида, из которого далее вытекает и совершенно отчетливое и строгое понятие геодезических координат этих точек местности и все математические соотношения в геодезии, то, конечно, указанными отступлениями геоида от даже вполне безупречно взятого референц-эллипсоида мы пренебрегать не можем, так как это пренебрежение внесет в линейные величины средние их искажения порядка 1 : 250 000, среднее колебание масштаба триангуляции на референц-эллипсоиде порядка 1 : 180 000 и возможны искажения длин местами до 1 : 80 000. Масштаб звеньев триангуляции оказывается изме-



нящимся в зависимости от того, на какую волну геоида попали базисы. Заметим, что обычно в геодезии применяют такую формулу

$$ab = s - \frac{Hs}{R_0}, \quad (1)$$

где  $R_0$  — радиус кривизны референц-эллипсоида под широтой базиса и в его азимуте.

По этой формуле в действительности получается не проекция  $ab$  базиса на геоид отвесными линиями, а дуга  $a_{11}b_{11}$ , то есть проекция базиса на геоид, но не отвесными линиями, а нормальными к поверхности референц-эллипсоида, то есть получается какой-то смешанный результат.

Общий ответ на поставленный выше вопрос будет следующий:

1) обработка большой триангуляции становится только тогда вполне строгой и вполне математически определенной, когда мы отнесем все измеренные величины не на поверхность геоида, а на поверхность референц-эллипсоида — или прямым переходом или переходом через геоид;

2) редукции измеренных величин с геоида на референц-эллипсоид вовсе не пренебрегаемы в отношении базисов триангуляции, но при безупречно выбранном референц-эллипсоиде может быть будут практически мало значащими в отношении углов треугольников;

3) редукции эти всегда включают в себя некоторую часть систематического характера.

Первое положение думается вполне очевидно, и я отказываюсь понимать тех геодезистов, иногда очень крупных, которые считают почему-то возможным обходить это положение и вместо прямого и ясного пути находить какие-то обходы, вроде разворачивания геоида на референц-эллипсоиде. Казалось бы, что именно геодезисты должны отстаивать ту обработку геодезических сетей, которая непосредственно вытекает из математических обоснований геодезии.

Второе положение уже доказано приведенными примерами влияния высоты геоида над референц-эллипсоидом при вычислении длин базисов; в отношении редукций углов треугольников триангуляции мы на нем остановимся ниже.

Третье положение имеет очень существенное значение. Погрешности из-за пренебрежения различием спроектированных элементов на поверхность геоида от спроектированных тех же элементов на поверхность референц-эллипсоида могут быть не пренебрегаемыми, однако если они для разных районов знакопеременны и варьируют свои числовые значения, то тогда получает как будто бы основание такой взгляд: происходящие искажения в геодезической сети будут иметь местный характер и, меняясь по своему характеру и размеру, мало скажутся на общем построении большой геодезической сети.

Нам представляется, что и такой взгляд не имеет, однако, оснований; все части государственной триангуляции I класса должны быть одинаковы, точны в отношении определения длин сторон и углов треугольников триангуляции, и влияния отступлений геоида от эллипсоида должны быть учитываемы, если эти отступления превышают известные пределы. Если эти различия в элементах триангуляции, спроектированных на геоид, от тех же элементов, спроектированных на референц-эллипсоид, имеют систематический характер, то их должно учитывать при обработке значительной геодезической сети даже при малых значе-

ниях этих различий. Здесь приходится напомнить, что систематические погрешности в углах треугольников триангуляции дают уже такой же эффект, как и случайные ошибки этих углов, если эти систематические погрешности в пять-шесть раз менее средней ошибки измерения углов. Если мы не пренебрегаем  $0'',02$  при редукции углов «за высоту», при замене нормального сечения геодезической линией и т. п., то мы не имеем оснований пренебрегать различием того же порядка в углах, отнесенных к геоиду, от углов, отнесенных к референц-эллипсоиду, если эти различия имеют систематический характер, хотя и выражаются может быть всего  $0'',02$ .

Систематическая часть редукций обуславливается ошибками в большой полуоси и в сжатии принятого референц-эллипсоида и ошибками принятых геодезической широты, геодезического азимута и высоты геоида над референц-эллипсоидом в исходном пункте геодезической сети и, конечно, широкими волнами геоида.

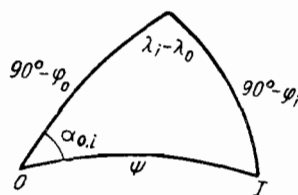
Мною в 1934 году была дана следующая формула

$$h_r = \left( k_i - \frac{\cos \psi_i}{k_0} + e^2 \sin \varphi_i \sin \varphi_0 \right) \Delta a - \frac{a_r \sin^2 \varphi_0}{k_0^3} \left[ \cos \psi_i - \frac{\sin \varphi_i}{\sin \varphi_0} \left( 2 - \frac{\sin \varphi_i}{\sin \varphi_0} \right) \right] \Delta \mu - \frac{M_0}{\rho''} \sin \psi_i \cos \alpha_{0,i} \delta \varphi''_0 - \frac{N_0}{\rho''} \cos \varphi_0 \sin \psi \sin \alpha_{0,i} \delta \lambda''_0 + \cos \psi \cdot h_0. \quad (2)$$

В этой формуле большая полуось  $a_0$  и сжатие  $\mu_0$  относятся к референц-эллипсоиду; в исходной точке  $O$  на этом эллипсоиде имеем широту  $\varphi_0$ , долготу  $\lambda_0$  и главные радиусы кривизны  $M_0$  и  $N_0$ ; точка  $I$  имеет широту  $\varphi_i$  и долготу  $\lambda_i$ ; величина  $\psi_i$  определяется согласно фиг. 3 по формуле

$$\cos \psi_i = \sin \varphi_0 \sin \varphi_i + \cos \varphi_0 \cos \varphi_i \cos (\lambda_i - \lambda_0).$$

Величина  $\alpha_{0,i}$  есть азимут с  $O$  на  $I$ ,  $k = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_i}$ ,  $k_0 = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}$ . Эллипсоид ( $E$ ) с размерами  $a_0 + \Delta a$  и  $\mu_0 + \Delta \mu$  ориентирован относительно референц-эллипсоида так: высота его над точкой  $O$  есть  $h_0$ ; в точке  $O$  нормаль к референц-эллипсоиду уклоняется от нормали к эллипсоиду ( $E$ ) так, что слагающая этого уклонения в меридиане равна  $-\delta \varphi_0$ , а слагающая этого же уклонения в первом вертикале равна  $-\delta \lambda_0 \cos \varphi_0$ . Высота эллипсоида ( $E$ ) над точкой  $I$  равна  $h_r$ .



Фиг. 3

При определении наилучшего подходящего к геоиду, в пределах данной страны, эллипсоида мы получаем всегда его большую полуось и сжатие с теми или другими ошибками, точно так же с теми или иными ошибками определяем исходные геодезическую широту, долготу и азимут и исходную высоту над геоидом. (Обычно последнюю и вовсе не определяют).

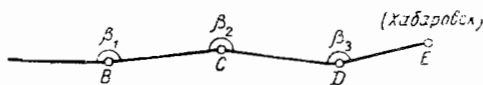
Из современных астрономо-геодезических работ в СССР вряд ли для наилучшего подходящего эллипсоида мы имеем ошибку в  $a$ , меньшую 50 м, ошибку в  $\mu$ , меньшую двух единиц в знаменателе сжатия, ошибку в исходной широте и долготе, меньшую  $\pm 0'',5$ .

Приняв определенный нами наилучше подходящий эллипсоид за референц-эллипсоид, очевидно, мы будем иметь отступления  $h_r$  этого референц-эллипсоида от действительного, наилучше подходящего к геоиду эллипсоида, которые вычисляются по формуле (2), если в ней  $\Delta a$ ,  $\Delta p$ ,  $\delta\varphi_0$ ,  $\delta\lambda_0$  заменить соответственно ошибками большой полуоси и сжатия референц-эллипсоида и ошибками установления исходных геодезической широты и долготы на референц-эллипсоиде. Для Дальнего Востока при  $\psi = 60^\circ$  мы получим в  $h_r$  такие значения слагаемых:

слагаемое с $\Delta a$	25 м
„ „ $\Delta p$	43 „
„ „ $\delta\varphi_0$	6 „
„ „ $\delta\lambda_0$	12 „

Для Новосибирска первые два слагаемых будут около 6 м и 15 м. Знаки этих слагаемых нам остаются неизвестными, но, очевидно,  $h_r$ , обусловленное ими, будет к востоку от Новосибирска выражаться величинами порядка 20—30—50 м, причем остается еще неучтенным член  $h_0 \cos \psi$ , который имеет наибольшее значение как раз вблизи исходного пункта триангуляции.

Для нас важно отметить, что при указанных условиях систематическая часть отступлений геоида от референц-эллипсоида будет иметь место и будет выражаться такими величинами, при которых пренебрегать приведениями измеренных базисов с геоида на этот эллипсоид не приходится. Что касается влияния на горизонтальные углы, то если  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$  (фиг. 4) суть геодезические линии, соединяющие конечные точки звеньев триангуляции I класса, то углы  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  в звеньях, примыкающих к Хабаровску, при длине звеньев в 200 км, могут оказаться каждый искаженным в одну и ту же сторону на  $0''{,}07$ ; в более западных звеньях это искажение будет меньшим, достигая около Новосибирска значения около  $0''{,}03$ – $0''{,}04$ , но сохраняя свой знак; для звеньев вблизи Урала это искажение углов  $\beta$  будет менее  $0''{,}02$ .



Фиг. 4

Систематические отступления геоида от референц-эллипсоида, как видно, вызывают добавочные поперечные сдвиги звеньев триангуляции, «закручивание» этих звеньев, и именно, вследствие односторонности этого влияния, в значительных сетях суммарный эффект окажется заметным. Так, при сделанных выше предположениях относительно размеров  $\Delta a$  и  $\Delta p$  геодезический азимут в Хабаровске, передаваемый от Пулково, получит искажение в  $0''{,}9$ , а поперечный сдвиг звена в Хабаровске может достичь почти 8 м! Вот каков будет результат этих мелких влияний в каждом звене, но действующих постоянно в одну сторону! Можно считать, конечно, такие искажения в триангуляции, простирающейся на 8000 км, совсем несущественными, но можно и поставить задачу от них избавиться соответствующей постановкой дела.

Ошибочность размеров и ориентирования референц-эллипсоида и отступления геоида от эллипсоида влияет не только на значения проек-

ций базисов, но и на невязки полигонов триангуляции, и на лапласовы азимуты.

На фиг. 5 изображен схематически триангуляционный полигон  $abcd$ , в котором стороны  $ab$  и  $cd$  располагаются по меридианам, а геодезические линии  $ac$  и  $bd$  имеют в своей средней точке азимут, равный  $90^\circ$ . Невязка по широте такого полигона, по моим исследованиям, представляется так:

$$\delta\varphi = \varphi_a - \varphi'_a = -\frac{s^3}{R^3} \rho'' \frac{\Delta a}{a_0}. \quad (3)$$

Невязка по долготе

$$\delta L = \left[ \frac{1}{\cos \varphi_m} \cdot \frac{s^2}{R^3} + \frac{4\mu s^2}{R^2} \sin \varphi_m \right] \frac{\Delta a}{a_0} \rho'', \quad (4)$$

причем эти невязки обусловлены различием размера большой полуоси эллипсоида, наилучше подходящего к геоиду в пределах нашего полигона, от полуоси  $a_0$  референц-эллипсоида. Это различие  $\Delta a$  может с большой вероятностью достигать  $\pm 2,5$  км при стороне полигона  $s = 400$  км, так что  $\frac{\Delta a}{a} = \frac{1}{2600}$ . Поэтому при  $s = 400$  км имеем

$$\delta\varphi = \frac{1''}{53} \approx 0,6 \text{ м.}$$

Такую добавочную невязку должно считать достаточно ощутимой, тем более, что в ряде случаев она может быть и заметно большей — в зависимости от крупных местных искривлений поверхности геоида. Имели место случаи, когда  $\Delta a$  оказывалось равным 10 км, и тогда  $\delta\varphi$  обращается в 2,4 м! Для полигонов со сторонами в 200 км среднее значение добавочной невязки по широте или по долготе следует полагать около  $\pm 0,4$  м, причем нередко могут быть случаи и заметно больших значений этих добавочных невязок. По сравнению со средней невязкой в  $\pm 1,6$  м, обусловленной ошибками наблюдений в полигоне со сторонами в 200 км, такая добавочная невязка в  $\pm 0,3$ — $0,4$  м, как обусловленная ошибками обработки полигона, не должна считаться пренебрегаемой.

Уравнение Лапласа для звена триангуляции между лапласовыми пунктами  $I$  и  $K$  можно написать так

$$\left. \begin{aligned} & (\alpha_k - A_k) - (\alpha_i - A_i) - (\lambda_k - L_k) \sin \varphi_k + (\lambda_i - L_i) \sin \varphi_i + \\ & + dL_i \frac{(\varphi_k - \varphi_i)^\circ}{\rho^\circ} \cos \Phi - \sin l_{i,k} \cos \Phi d B_i + \delta\alpha_k - \delta\alpha_i - \\ & - \delta\lambda_k \sin \varphi_k + \delta\lambda_i \sin \varphi_{k,i} + \frac{s^2}{2R^2} dA_i - \\ & - l_{i,k} \frac{(\varphi_k - \varphi_i)^3}{\rho''} \cos^3 \varphi_i \sin \varphi_i \Delta\mu - \Sigma\Delta = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (5)$$

В формуле (5):

$\alpha_k$  и  $\alpha_i$  — астрономические азимуты выходных сторон звена в точках  $I$  и  $K$ ;

$A_k$  и  $A_i$  — геодезические азимуты тех же сторон, причем  $A_k$  вычисляется по  $A_i$  и по неуравненным элементам треугольников звена;

$\lambda_k$  и  $\lambda_i$  — астрономически определенные долготы пунктов  $I$  и  $K$ ;

$\varphi_k$  и  $\varphi_i$  — астрономические (или все равно, геодезические) широты точек  $I$  и  $K$ ;

$l_{i,k}$  — геодезическая разность долгот точек  $I$  и  $K$ ;

$L_i$  и  $L_k$  — геодезические долготы точек  $I$  и  $K$ , причем  $L_k$  вычислена по  $L_i$  и  $A_i$  и по неуравненным элементам треугольников звена;

$\Delta$  — поправки тех измеренных углов, которые использовались при вычислении  $L_k$  и  $A_k$ ;

$s$  — длина геодезической линии  $IK$ ;

$\delta\alpha_k$  и  $\delta\alpha_i$  — ошибки астрономических азимутов  $\alpha_k$  и  $\alpha_i$ ;

$\delta\lambda_k$  и  $\delta\lambda_i$  — ошибки астрономических долгот  $\lambda_k$  и  $\lambda_i$ ;

$\Delta u$  — поправка сжатия референц-эллипсоида;

$dL_i$  и  $dB_i$  — ошибки геодезических широты  $B_i$  и долготы  $L_i$  точки  $I$ , обусловленные, во-первых, ошибками геодезической передачи широт, долгот и азимутов от исходного пункта триангуляции  $O$  до пункта  $I$ , а во-вторых, — различием принятого референц-эллипсоида по его размерам, сжатию и ориентировке от наилучше подходящего к геоиду в пределах звена эллипсоида.

Приходится подчеркнуть, что уравнение (5) выводится, предполагая эллипсоидальность уравнений поверхности в районе звена. Другими словами, мы при выводе этого уравнения (5) пренебрегаем теми поправками углов треугольников звена, которые обусловлены волнами геоида относительно эллипсоида, наилучше подходящего к геоиду, и в силу этого вносим добавочные погрешности в это уравнение, именно в его свободный член.

Но существенно отметить еще одно обстоятельство: при уравнивании астрономо-геодезической сети уравнения Лапласа, т. е. уравнения (5), считают все отнесенными к одному и тому же эллипсоиду, к эллипсоиду, наилучше подходящему к геоиду в пределах всей обрабатываемой астрономо-геодезической сети. Это, конечно, неизбежно, так как нельзя вводить для каждого звена свой эллипсоид — хотя бы просто по его неизвестности.

По установившемуся на основании работ крупнейшего ученого геодезиста Гельмерта порядку, в геодезии считается, что правильное составление уравнений (5) требует предварительного установления размеров, сжатия и ориентировки наилучше подходящего к геоиду эллипсоида в пределах уравниваемой астрономо-геодезической сети; к этому эллипсоиду считаются отнесенными измеренные элементы триангуляции, без всяких их редукций с геоида на этот эллипсоид.

Как уже указывалось выше, ошибки вывода наилучше подходящего эллипсоида и ошибка его ориентирования вызовут систематические отступления референц-эллипсоида от геоида. При ошибочности большой полуоси на  $\pm 50$  м и при ошибочности сжатия эллипсоида на две единицы в знаменателе сжатия, влияние членов с  $dB_i$  и  $dL_i$  в уравнении (5) может достичь  $\pm 0'',07$  в звеньях первой классной триангуляции близ

Хабаровска и  $\pm 0'',03-0'',04$  в звеньях близ Новосибирска. Эти искажения, накапливаясь всегда в одну сторону, могут привести к систематическим искажениям лапласовых азимутов в несколько десятых долей секунды (до  $0'',9$  в Хабаровске) и к поперечным сдвигам рядов триангуляции, которые будут довольно заметными. Об этом уже сказано выше, когда мы говорили об искажениях углов  $\beta$ , показанных на фиг. 4. Здесь важно отметить, что пренебрежение членами с  $dL_i$  и  $dB_i$  в уравнении (5) при неудачном выборе референц-эллипсоида и при неучете отступлений его от геоида даст громадное искажение в лапласовых азимутах триангуляции и приведет к значительным боковым сдвигам рядов триангуляции. Это как раз и имеет место при обработке триангуляции СССР; референц-эллипсоид с размерами по Бесселю имеет  $\Delta a$ , примерно равное 800 м: систематическое искажение лапласовых азимутов достигает близ Хабаровска значения около  $7''$ , близ Новосибирска  $3''$ , поперечный сдвиг крайнего звена триангуляции I класса достигает 120 м. Эти расчеты, полагая, заставляют весьма призадуматься.

Обычно при обработке триангуляции I класса применяют не перенос или проектирование элементов триангуляции на геоиде нормальными к поверхности референц-эллипсоида для получения триангуляции на этом эллипсоиде, а разворачивание фигур, полученных на геоиде, на поверхности референц-эллипсоида.

При этом разворачивании или укладывании фигур, относящихся к поверхности геоида, на поверхности референц-эллипсоида принимают, что при сохранении длин сторон фигур будут сохранены и углы в них, или, вернее, пренебрегают неизбежными искажениями, возникающими при таком разворачивании. Конечно, это разворачивание не выражается математически; результаты, получаемые при применении его, теряют математическую определенность и ясность, и уже это обстоятельство само по себе, казалось бы, является достаточным, чтобы такой метод обработки больших астрономо-геодезических сетей считать маложелательным. С другой стороны, это разворачивание сопровождается и теми или иными искажениями и деформациями в значительной геодезической сети. Когда оценивают эти деформации, то обычно применяют такой прием: берут геодезическую сеть, расположенную на эллипсоиде с большой полуосью  $a_0$  и сжатием  $\mu_0$ , и разворачивают ее на другом эллипсоиде с большой полуосью  $a_0 + \Delta a$  и сжатием  $\mu_0 + \Delta \mu$ ; далее подсчитывают невязки и другие искажения, происходящие от того, что элементы, отнесенные к первому эллипсоиду, укладываются на поверхности второго эллипсоида, имеющей иную кривизну; однако при этом  $\Delta a$  и  $\Delta \mu$  берут те, которые соответствуют, например различию эллипсоида по Бесселю от эллипсоида по Кларку.

В действительности каждый полигон триангуляции на геоиде имеет свой «подходящий» эллипсоид, для которого  $\Delta a$  и  $\Delta \mu$  могут весьма значительно отличаться от соответствующих сопоставлений эллипсоида Бесселя с эллипсоидом Кларка. Таким образом, внесение заметных добавочных невязок, в отдельных полигонах триангуляции при применении метода разворачивания неизбежно; неизбежны и те колебания масштабов в триангуляции, на которые мы уже указывали и которые обусловлены, конечно, волнами геоида того или иного характера. Но особенно резко недочеты метода разворачивания сказываются на лапласовых азимутах: этот метод ведет к пренебрежению в уравнении (5) членов с  $dL_i$  и  $dB_i$  и к последующему заметному искажению лапласовых азимутов и к заметным поперечным сдвигам рядов триангуляции.

Из всего изложенного в этом параграфе надлежит сделать такие заключения:

1) строгая обработка астрономо-геодезической сети СССР требует редуцирования измеренных в ней элементов триангуляции (базисов, углов треугольников) не на геоид, а на референц-эллипсоид;

2) при обработке этой астрономо-геодезической сети следует применять метод проектирования геодезических пунктов на референц-эллипсоид нормальными к его поверхности;

3) только при уверенности:

а) что большая полуось референц-эллипсоида отличается от большой полуоси наилучшего подходящего к геоиду в пределах СССР эллипсоида менее чем на 50 м;

б) что различие сжатий двух этих эллипсоидов не превышает и менее двух единиц в знаменателе сжатия;

в) что ошибки ориентирования референц-эллипсоида менее  $0'',5$  по широте и менее  $0'',5 \sec \varphi_0$  по долготе;

г) что высота  $h_0$  референц-эллипсоида в исходном пункте относительно геоида правильно выражена — можно применить метод развертывания относительно углов треугольников триангуляции, однако, редуцируя на референц-эллипсоид базисы триангуляции и редуцируя и углы в районах заметных местных отклонений отвесных линий от нормалей к референц-эллипсоиду, а также в районах, приходящихся на некоторые частями широких волн геоида.

Для выполнения требований, указанных в пунктах 1 и 2 (и отчасти в пункте 3), должно располагать высотами геоида над референц-эллипсоидом и отклонениями отвеса относительно нормалей к этому референц-эллипсоиду. Эти высоты доставляются выполнением по рядам триангуляции I класса астрономо-гравиметрического нивелирования с меньшей точностью — общей гравиметрической съемкой страны и, наконец, определением в достаточном количестве астрономических пунктов по рядам триангуляции. Отклонения отвеса доставляются астрономо-гравиметрическим нивелированием вместе с общей гравиметрической съемкой страны.

Принятый в СССР референц-эллипсоид имеет размеры и сжатие по Бесселю и ориентирован по астрономическим данным в Пулкове, причем здесь его поверхность касается геоида; большая его полуось имеет погрешность порядка 800 м, а его сжатие довольно близко подходит для СССР. По формуле (5) мы находим, при  $\Delta\mu = 0$ ;  $\delta\varphi_0 = 0$ ;  $\delta\lambda_0 = 0$  и  $h_0 = 0$ , что в Хабаровске этот референц-эллипсоид располагается ниже геоида на 370 м, в Новосибирске — на 90 м. Конечно, это громадные величины. Пренебрегая этими отступлениями нашего референц-эллипсоида от геоида, мы, конечно, далеки от получения правильных результатов при обработке астрономо-геодезической сети СССР. Понятно, что

астрономо-гравиметрическое нивелирование, общая гравиметрическая съемка страны и в соответствующих рядах триангуляции — достаточно часто расположенные астрономические пункты служат для проектирования элементов на любой референц-эллипсоид, в частности, и на принятый референц-эллипсоид Бесселя. Здесь, математически рассуждая, вовсе не играет никакой роли неизвестное, оцениваемое только по средним ошибкам, различие принятого референц-эллипсоида от наилучше подходящего для страны эллипсоида: мы взяли некоторый референц-эллипсоид, определили относительно его поверхности высоты геоида, и относительно нормалей к этой поверхности — отклонения отвесной линии, и далее имеем все нужное для проектирования геоида на этот, вполне определенный по размерам и положению его в земном теле, эллипсоид. Значение будет иметь только трудность и точность вывода этих высот и отклонений отвеса: чем несудачнее взять размеры и ориентирование референц-эллипсоида, тем более осложняется точный вывод числовых значений отклонений отвеса и высот геоида над этим эллипсоидом.

Таким образом, мы могли бы, не считаясь с добавочными хлопотами при выводе редуций, удовлетворить требования правильной обработки нашей астрономо-геодезической сети, сохранив эллипсоид Бесселя и его ориентировку в Пулковке и выполнив при этой обработке все указанные выше условия. Но, конечно, полученные строгие результаты на таком эллипсоиде отразили бы неудачу его выбора: все линейные размеры в триангуляции и в съемках на Дальнем Востоке и в Восточной Сибири были бы менее на  $1 : 18\,000$ — $1 : 20\,000$  против размеров в натуре; геодезические координаты и азимуты для тех же районов отличались бы на значительные величины от астрономических координат и азимутов в тех же точках. Все это приводило бы к значительным отступлениям геодезических результатов от того, что имеется в натуре. Отсюда как будто появляется даже обоснование мысли: а не лучше ли будет, оставаясь на эллипсоиде Бесселя, остаться и при принятом теперь методе «развертывания» триангуляции на нем? Заметим, что «ненатуральность» геодезических координат и азимутов останется и при таком порядке обработки триангуляции, но в ней (в триангуляции) появятся заметные искажения систематического характера, однако линейные размеры, имеющие место на геоиде, будут в значительной степени сохранены, выведенные же отклонения отвеса и высоты геоида будут сильно искажены, т. е. попутное использование геодезических результатов делается невозможным.

Полагаю, что все изложенное достаточно говорит за то, что следует отказаться от эллипсоида Бесселя и перейти на другой референц-эллипсоид.

Этот референц-эллипсоид может быть лишь достаточно близким к наилучше подходящему для СССР эллипсоиду, если измеренные и отнесенные на поверхность геоида элементы будут проектироваться и редуцироваться на поверхность этого референц-эллипсоида. Мы можем допустить ошибку в большой полуоси этого эллипсоида в  $\pm 100$  м, ошибки установления исходной широты и исходного азимута до одной секунды и ошибку установления исходной высоты  $h_0$  до  $\pm 30$  м, потому что все эти ошибки не будут иметь, как сказано выше, никакого влияния на результаты обра-



ботки триангуляции. (Мы приняли такой-то эллипсоид и все на него относили с полной правильностью). Но, конечно, при указанных допусках в установлении большой полуоси, сжатия и исходных геодезических дат, наш референц-эллипсоид будет достаточно близок к геоиду, и расхождения геодезических координат и азимутов от астрономических будут, за исключением районов значительных аномалий силы тяжести, укладываться в среднем в неизбежные  $\pm 2''{,}5$ , а линейные размеры на таком эллипсоиде будут максимально отличаться от соответствующих размеров на геоиде на 1 : 150 000, что неощутимо для топографических работ.

Конечно, если практическое осуществление предлагаемого метода проектирования геоида на референц-эллипсоид, с редуцированием при этом на поверхность этого последнего измеренных элементов, почему-либо натолкнется на препятствия, например, на замедления в выполнении астрономо-гравиметрического нивелирования и в выполнении общей гравиметрической съемки страны, то придется использовать применяемый и теперь метод развертывания геоида на референц-эллипсоиде, но тогда нужно не только ввести вместо эллипсоида Бесселя новый эллипсоид, но и очень тщательно установить размеры и ориентировку этого нового референц-эллипсоида, и лучше будет исходный пункт триангуляции взять в середине страны.

Но должно отметить, что почти для всей Европейской части СССР мы уже имеем, благодаря работам ЦНИИГАиК, все необходимое для выполнения точного редуцирования измеренных элементов в триангуляции I класса на поверхность референц-эллипсоида.

Полагаю, что надлежащее развитие гравиметрических работ в Азиатской части СССР южнее 56-й — 57-й параллели — дело ближайших лет, двух или трех. Таким образом, все как будто складывается благоприятно для проведения той обработки астрономо-геодезической сети СССР, которая вполне научно обоснована и которая соответствует достоинству СССР.

Нужно уяснить себе, что бесцельны усилия в получении высокоточных результатов полевых геодезических работ, если эти результаты в дальнейшем будут подвергаться искажениям из-за производительности методов обработки геодезических сетей.

Астрономо-геодезическая сеть СССР, несмотря на колоссальность выполненных по ней к настоящему времени работ, все-таки не распространяется еще на значительную часть нашей территории, располагающуюся севернее 56-й параллели в Азиатской части СССР. Поэтому мы не располагаем еще материалом, чтобы уверенно выводить размеры, сжатие и ориентировку эллипсоида, наилучшего подходящего к геоиду на всей территории СССР: площадь, непокрытая астрономо-геодезической сетью, составляет немного менее половины всей территории СССР. Однако вследствие громадности этой территории можно полагать, что наилучший подходящий для нее эллипсоид будет достаточно близок к общему земному эллипсоиду, выводимому из всех градусных измерений всех стран. Именно эта мысль по моему предложению проводилась в работах ЦНИИГАиК по выводу эллипсоида для СССР и проведена и в моих работах. С другой стороны, введение в наших больших геодезических работах эллипсоида, возможно приближающегося к общему земному эллипсоиду, имеет свое значение с точки зрения международного значения вывода самого эллипсоида и возможной унификации геодезических работ всех стран.

Мои работы, в которых использовались градусные измерения СССР, США и Западной Европы, привели к выводу:

$$\left. \begin{array}{l} \text{большая ось эллипсоида } a = 6\,378\,210 \text{ м} \\ \text{полярное сжатие } \mu = 1 : 298,6 \end{array} \right\} \quad (\text{а})$$

Из дальнейших работ А. А. Изотова по ЦНИИГАиК, в которых взяты те же материалы по США и по Европе, но с использованием при этом большего материала по СССР, мы имеем:

с учетом трехосности

$$\left. \begin{array}{l} a = 6\,378\,245 \pm 19 \text{ м} \\ \mu = 1 : 298,3 \pm 0,4 \end{array} \right\} \quad (\text{б})$$

без учета трехосности

$$\left. \begin{array}{l} a = 6\,378\,295 \pm 16 \text{ м} \\ \mu = 1 : 298,4 \pm 0,4 \end{array} \right\} \quad (\text{в})$$

Заметим, что вывод приведенных средних ошибок, как и всегда при обработке градусных измерений, достаточно формален и вряд ли отвечает действительности. Заметим, кстати, что последний вывод сжатия Земли на основании обширных гравиметрических материалов дает  $\mu = 1 : 298,3$ .

Используя градусные измерения только одного СССР, в ЦНИИГАиК получено:

без учета трехосности

$$\left. \begin{array}{l} a = 6\,378\,273 \pm 47 \text{ м} \\ \mu = 1 : 298,2 \pm 1,1 \end{array} \right\} \quad (\text{г})$$

Выводы, показанные под литерами (а), (б), (в) и (г), должно считать просто совпадающими. Они показывают, что эллипсоид, выводимый из одних градусных измерений СССР, имеет размеры и сжатие, очень близкие к получаемым из использования градусных измерений всего мира. Этим косвенно доказывается положение, что большая полуось и сжатие эллипсоида по выводу (г) близки к большой полуоси и сжатию наилучше подходящего для СССР эллипсоида.

Нужно отметить, что выводы (б), (в) и (г) получены с использованием не только астрономо-геодезического, но по СССР и гравиметрического материала, что является новостью в градусных измерениях; эта новая постановка обеспечена развитием общей гравиметрической съемки в Европейской части СССР. Любой из эллипсоидов, определяемых выводами (а), (б), (в) и (г), мы можем принять за референц-эллипсоид для геодезических, топографических и картографических работ по СССР.

«Международный» эллипсоид, имеющий большую полуось и сжатие по Хейфорду, рекомендуется Международным геодезическим союзом для принятия во всех странах; для этого эллипсоида

$$\begin{aligned} a &= 6\,378\,388 \text{ м} \\ \mu &= 1 : 297,0. \end{aligned}$$

Мои работы и работы, проведенные по ЦНИИГАиК, показывают, что сжатие общего земного эллипсоида — между 1 : 298 и 1 : 299; существенное значение имеет последний вывод Хейсканена, упомянутый уже ранее и устанавливающий сжатие, как 1 : 298,3. Отсюда ясно, что в отношении сжатия позиция эллипсоида Хейфорда достаточно поколеблена. Но надлежит эту позицию эллипсоида Хейфорда считать поколебленной и в отношении размера большой полуоси: прибавление больших астрономо-геодезических материалов по СССР, конечно, делает свое дело при выводе общего земного эллипсоида; если материалы по градусным измерениям в Западной Европе, по присоединении их к материалам по США, ничтожно влияли на вывод общего эллипсоида, и он оставался, собственно, тем, который вытекал из одних материалов по США, то картина резко меняется при присоединении к градусным измерениям по США градусных измерений по СССР и по Западной Европе: прибавляемый материал не ничтожен по сравнению с североамериканским, а несколько более его.

Если вопрос о выборе референц-эллипсоида для СССР решен приведенными выше числами, то остается вопрос о надлежащем ориентировании этого референц-эллипсоида. В этом вопросе особенное значение имеет правильность ориентировки азимутальной, но также следует внимание обратить и на ориентировку по высоте.

При получении вывода (г) одновременно были получены в ЦНИИГАиК и величины —  $\xi_0$ , —  $\eta_0$  и  $dA$ , т. е. поправки астрономической широты и долготы в Пулкове (вернее, в Саблинс) и поправка исходного азимута; эти величины получены с хорошей надежностью, их и следует принять для получения исходных геодезических дат по СССР. При этом следует за исходную геодезическую долготу принять не  $\lambda_0 - \gamma_0 \sec \varphi_0$ , а просто  $\lambda_0$ , т. е. астрономическую долготу в Пулкове; придется только тогда при вычислении лапласовых азимутов вместо геодезической долготы  $L$  вводить в поправку Лапласа  $L - \gamma_0 \sec \varphi_0$ . Что касается ориентировки нового референц-эллипсоида по высоте, то следует использовать выводимые в ЦНИИГАиК высоты  $N_r$  геоида над референц-эллипсоидом по ЦНИИГАиК. Эти высоты  $N_r$  получаются из астрономо-гравиметрического нивелирования, а также и по материалам общей гравиметрической съемки для всех рядов триангуляции I класса, лежащих южнее 57-й параллели в Европейской части СССР; с меньшей точностью они могут быть получены по ряду Челябинск — Новосибирск.

По принятии  $\Delta a$ ,  $\Delta \mu$ ,  $\delta \varphi_0$  и  $\delta \lambda_0$  равными нулю, в первой части уравнения (2) остается только член  $h_0 \cos \psi$ ; величина  $h_r$  обращается в высоту нового эллипсоида над референц-эллипсоидом по ЦНИИГАиК. Обозначим высоту геоида над этим новым эллипсоидом через  $N'_r$ . Тогда имеем

$$\left. \begin{aligned} N_r - N'_r &= h_0 \cos \psi \\ N'_r &= N_r - h_0 \cos \psi \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

Нанесем вычисленные величины  $N_r$  на карту сравнительно мелкого масштаба, например 1 : 10 000 000, и вычертим кривые равных высот  $N_r$ . Сообразаясь с ходом этих кривых, отберем ряд высот  $N'_r$  и подставим их в уравнения (6). Далее, принимая величины  $N'_r$  за случайные, по способу наименьших квадратов выведем

$$h_0 = \frac{[N_r \cos \psi]}{[\cos^2 \psi]}. \quad (7)$$

Определенная указанным образом величина  $h_0$  и будет равна высоте нового референц-эллипсоида в исходной точке триангуляции над геоидом; следовательно, в этой точке его поверхность должна стоять выше геоида (уровня моря) на эту величину  $h_0$ . Впрочем, должно оговориться, что надежность определения  $h_0$  по указанному методу мы не имели возможности исследовать, но определенно можно сказать, что применение его основывается на охвате вычисленными  $N$ , очень значительной территории. Понятно, возможны и другие методы вывода  $h_0$ , которые, однако, должны опираться на иной по составу полевой материал.

Но не лишним будет еще раз отметить, что если даже в  $h_0$  мы сделаем предельную ошибку в  $\pm 10$  м, то этим самым мы лишь изменим положение референц-эллипсоида, что никак не отзовется на результатах того метода проектирования на него геодезических точек, который был приведен в настоящем параграфе; изменится лишь соотношение между масштабами на этом эллипсоиде и на геоиде, но это изменение не превысит 1 : 640 000, что практически не существенно, и, кроме того, эти изменения будут точно известны для любого района.

Представляется заслуживающим внимания стремление дать ориентировку советскому эллипсоиду, возможно приближающуюся к ориентировке общего земного эллипсоида. Но для этого нужно иметь в астрономо-геодезической сети по крайней мере один пункт, вокруг которого гравиметрическое изучение территории распространялось бы в радиусе не менее 2000 км; тогда мы получили бы исходные геодезическую широту, долготу и азимут, отнесенные к общему земному эллипсоиду со средними ошибками: в широте  $\pm 0'',6 - \pm 0'',7$ , в долготе  $\pm 0'',6$  сек  $\varphi_0$  и в азимуте  $\pm 0'',6 \operatorname{tg} \varphi_0$ , понимая под  $\varphi_0$  широту пункта с гравиметрической изученностью в радиусе 2000 км. Мы получили бы и высоту геоида в этом пункте над общим земным эллипсоидом, однако со средней ошибкой около  $\pm 20 - 25$  м. Думается, что выполнение полного гравиметрического изучения территории в радиусе не менее 2000 км для некоторого пункта СССР, который приходится несколько восточнее Молотова (Перми), потребует около 4—5 лет.

Кроме того, конечно, является крупноватой и средняя ошибка в  $h_0$ . Мне представляется, что, если ставить осуществление перехода на новый референц-эллипсоид в СССР на ближайшие годы, то следует принять ту ориентировку по Пулковку, которая дается работами ЦНИИГАиК, а величину  $h_0$  получить по формуле (7); так как принимаемый референц-эллипсоид имеет размеры и сжатие, близкие к общему земному эллипсоиду, то и полученные одновременно и в связи с ними величины —  $\xi_0 = \delta\varphi_0$ , —  $\eta_0 = \delta\lambda_0 \cos \varphi_0$  и  $dA$  будут близки к соответствующим общему земному эллипсоиду.

Таким образом, представляется, что следует довольно пезамедлительно переходить на новый референц-эллипсоид, установленный уже достаточно надежно в отношении его большой полуоси и сжатия, и ориентировка которого определена достаточно надежно, с пополнением, однако, этой ориентировки — ориентировкой по высоте, вывод которой, полагаю, не представит затруднений.

Конечно, переход на новый эллипсоид представляет практически очень большое дело: нужно будет составить новые геодезические таблицы; нужно будет выполнить переуравнивание всех до сих пор выполнен-

ных триангуляций; нужно будет выполнить заново вычисление координат всех триангуляционных точек; объем этих работ очень большой. Но гораздо более существенным является смещение рамок планшетов и листов топографической карты, вызываемое переходом на новый эллипсоид. Несомненно, это дело требует достаточных добавочных расходов, и проведение его составит значительную работу, но представляется, что выполнение его обязательно, как обязательно в СССР все делать не как-нибудь, а наилучшим образом, тем более, что в данном случае идет речь о переходе на правильную постановку обработки результатов точнейших работ, достаточно дорого стоящих государству, и что замедление с переходом уже вызвало путаницу в виде введения «свободного» эллипсоида.

---

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	
Предисловие . . . . .	

## Глава I

### Земной сфероид

§ 1. Основные размеры . . . . .	
§ 2. Референц-эллипсоид . . . . .	
§ 3. Системы координат, применяемые в высшей геодезии . . . . .	
§ 4. Связь между некоторыми системами координат . . . . .	
§ 5. Главные радиусы кривизны в данной точке эллипсоида . . . . .	
§ 6. Средний радиус кривизны $R$ . . . . .	
§ 7. Радиус кривизны произвольного нормального сечения . . . . .	
§ 8. Вычисление длины дуги меридиана . . . . .	
§ 9. Длина дуги параллели . . . . .	
§ 10. Вычисление площадей части и всей поверхности эллипсоида . . . . .	
§ 11. Расчет рамок съемочных трапеций . . . . .	

## Глава II

### Исследование кривых на эллипсоиде

§ 12. Понятие о взаимных нормальных сечениях, геодезической линии и кривой проецирования . . . . .	
§ 13. Приближенные формулы для разностей широт, долгот и азимутов на эллипсоиде вращения . . . . .	
§ 14. Сравнение длины дуги нормального сечения с длиной дуги окружности . . . . .	
§ 15. Расхождение взаимных нормальных сечений и угол между ними . . . . .	
§ 16. Сравнение геодезической линии с нормальной кривой . . . . .	
§ 17. Дифференциальные уравнения геодезической линии и ее свойства . . . . .	
§ 18. Вывод угла между геодезической линией и взаимными нормальными сечениями. Разность азимутов геодезической линии и прямого и обратного нормального сечения . . . . .	
§ 19. Положение геодезической линии относительно взаимных нормальных сечений . . . . .	
§ 20. Сравнение длины нормального сечения и геодезической линии . . . . .	
§ 21. «Приведенная» длина геодезической линии . . . . .	
§ 22. Дифференциальные формулы полярных геодезических координат. Определение величины $n$ . . . . .	

## Глава III

## Решение сферодических треугольников

§ 23. Решение сферических треугольников по теореме Лежандра; поправочные члены к теореме Лежандра . . . . .	96
§ 24. Решение сферических треугольников по способу аддитансов . . . . .	102
§ 25. Связь между геодезическими полярными и поверхностными прямоугольными координатами . . . . .	105
§ 26. Решение сферодического треугольника — определение его избытка . . . . .	112
§ 27. Решение сферодического треугольника — сравнение соответственных углов сферодического и сферического треугольников . . . . .	114
§ 28. Редукции измеренных углов в треугольниках триангуляции. Поправка азимута за высоту наблюдаемого предмета . . . . .	119

## Глава IV

## Вычисление геодезических широт, долгот и азимутов (прямая геодезическая задача). Обратная геодезическая задача

§ 29. Общие соображения . . . . .	123
§ 30. Решение геодезической задачи для расстояний, не превышающих 25 км . . . . .	126
§ 31. Выражение разностей широт, долгот и азимутов в виде рядов, расположенных по возрастающим степеням расстояния $s$ . . . . .	133
§ 32. Вывод формул Шрейбера для вычисления геодезических широт, долгот и азимутов в триангуляции I класса . . . . .	137
§ 33. Формулы «с средней широтой и средним азимутом» для вычисления геодезических широт, долгот и азимутов . . . . .	143
§ 34. Формулы «с средней широтой и средним азимутом» для расстояний, не превышающих 40 км. Формулы Гаусса для вычислений в триангуляции I класса . . . . .	150
§ 35. Формулы Крюгера . . . . .	151
§ 36. Формулы прямоугольных сферодических координат для расстояний до 800 км . . . . .	157
§ 37. Формулы Крюгера для переноса геодезических широт, долгот и азимутов на значительное расстояние . . . . .	162
§ 38. Общая сводка формул для переноса геодезических координат и азимута на расстояние до 600—800 км . . . . .	167
§ 39. Бесселево изображение эллипсоида на шаре . . . . .	168
§ 40. Метод Бесселя решения прямой геодезической задачи при значительных расстояниях между геодезическими точками . . . . .	170
§ 41. Некоторые дополнительные замечания по поводу применения метода Бесселя . . . . .	174
§ 42. Обратная геодезическая задача для расстояний $s$ , меньших 40 км . . . . .	176
§ 43. Обратная геодезическая задача для расстояний $s$ до 200 км . . . . .	178
§ 44. Общее заключение по поводу формул для решения прямой и обратной геодезической задачи . . . . .	179

## Глава V

## Сферические и сферодические прямоугольные координаты

§ 45. Сферические прямоугольные координаты Зольднера . . . . .	182
§ 46. Значение и применение прямоугольных сферических координат Зольднера . . . . .	190
§ 47. Сферодические прямоугольные координаты. Переход от геодезических координат и азимутов к прямоугольным сферодическим координатам и дирекционным углам на эллипсоиде . . . . .	193

## Глава VI

## Прямоугольные плоские координаты Гаусса-Крюгера

§ 48. Основные соображения . . . . .	203
§ 49. Основные формулы . . . . .	207
§ 50. Формулы для определения конформных плоских координат по геодезическим координатам . . . . .	210
§ 51. Соотношения между сфероидическими прямоугольными координатами и координатами Гаусса-Крюгера . . . . .	212
§ 52. Выражение геодезических координат через координаты Гаусса-Крюгера . . . . .	214
§ 53. Сближение меридианов на плоскости и масштаб изображения в функции геодезических координат . . . . .	216
§ 54. Сближение меридианов на плоскости и масштаб изображения в функции конформных плоских координат . . . . .	218
§ 55. Формулы перехода от геодезических координат к координатам Гаусса-Крюгера . . . . .	220
§ 56. Перенос расстояний и направлений с эллипсоида на плоскость и обратно . . . . .	224
§ 57. Вычисление разностей плоских координат Гаусса-Крюгера по данным длине и направлению геодезической линии на эллипсоиде. Обратная задача . . . . .	234
§ 58. Переход из зоны в зону (трансформация координат Гаусса-Крюгера) . . . . .	237
§ 59. Расчет и нанесение «километровых» линий; вставка географической сети в прямоугольную и обратно . . . . .	246
§ 60. Вычисление редуций расстояний и направлений . . . . .	250

## Глава VII

## Приложение теории конформного отображения эллипсоида на шаре к решению геодезической задачи по методам Гаусса

§ 61. Основные формулы . . . . .	253
§ 62. Выбор произвольных постоянных . . . . .	255
§ 63. Выражение масштаба $m$ в виде ряда . . . . .	257
§ 64. Поправка азимута . . . . .	260
§ 65. Редукция расстояния . . . . .	264
§ 66. Решение сферического треугольника по одному из способов Гаусса . . . . .	265
§ 67. Применение формул § 61—66 к решению прямой геодезической задачи. Первый и второй способы Гаусса . . . . .	267

## Глава VIII

## Дифференциальные формулы

§ 68. Дифференциальные формулы первого рода для геодезической линии . . . . .	273
§ 69. Дифференциальные формулы первого рода для геодезической линии при длине ее порядка 250 км . . . . .	276
§ 70. Малой точности дифференциальные формулы первого рода . . . . .	280
§ 71. Дифференциальные формулы второго рода для геодезической линии . . . . .	281
§ 72. Зависимость между передвижениями концов геодезической линии и изменениями ее азимутов в конечных точках . . . . .	286
§ 73. Полярные координаты . . . . .	289

## Глава IX

## Об уклонениях отвесных линий и определении отступлений геоида от референц-эллипсоида

§ 74. Общие соображения . . . . .	292
§ 75. Влияние уклонения отвеса на астрономические широты, долготы и азимуты, на измеренные горизонтальные направления и углы и на зенитные расстояния. Лапласовы азимуты . . . . .	299



§ 76. Отнесение измеренного базиса к поверхности референц-эллипсоида . . .	304
§ 77. Определение высот геоида над референц-эллипсоидом из астрономического нивелирования . . . . .	309
§ 78. Определение высот геоида над референц-эллипсоидом из астрономо-гравиметрического нивелирования . . . . .	315
§ 79. О влиянии уклонений отвесных линий на результаты тригонометрического нивелирования. Выводы высот геоида над эллипсоидом посредством результатов тригонометрического нивелирования и из астрономических определений широт и долгот на пунктах триангуляции . . . . .	321
§ 80. Об ориентировании референц-эллипсоида по астрономическим данным .	328
§ 81. Взаимное расположение наилучшего подходящего эллипсоида и референц-эллипсоида, ориентированного по астрономическим данным . . . . .	336
§ 82. Дифференциальные формулы проф. Ф. Н. Красовского . . . . .	343
§ 83. Влияние уклонений отвесных линий и отступлений геоида от эллипсоида на постановку основных астрономо-геодезических работ, на постановку и результаты топографических и картографических работ . . . . .	346
§ 84. Вычисление уклонений отвесных линий, вызываемых действием топографического рельефа. Притяжение хребта . . . . .	350
§ 85. Вычисление уклонений отвесных линий, вызываемых действием топографического рельефа, по формулам Хуттона . . . . .	355
§ 86. Уклонение отвеса, вызываемое действием значительного, по близкого рельефа .	359
§ 87. Вычисление уклонений отвесной линии, обусловливаемых топографическим рельефом в далеких зонах . . . . .	361
§ 88. Примеры местных уклонений отвесных линий . . . . .	363

## Глава X

### Градусные измерения

§ 89. Градусное измерение по меридиану . . . . .	368
§ 90. Решение уравнений градусных измерений по меридиану . . . . .	374
§ 91. Градусное измерение по параллели . . . . .	377
§ 92. О точности и значении выводов из отдельных дуг по меридианам и по параллелям. Выгодное географическое распределение градусных измерений .	381
§ 93. Вывод размеров и сжатия эллипсоида и исходных геодезических дат из астрономо-геодезической сети. Метод площадей . . . . .	388
§ 94. Применение теории изостазии к обработке градусных измерений. Гипотезы Пратта и Эри . . . . .	400
§ 95. Применение теории изостазии Хейфордом к обработке градусных измерений в США. Учет влияния внешних масс (топографического рельефа) .	409
§ 96. Применение теории изостазии Хейфордом — учет влияния масс, компенсирующих действие наружных масс. Результаты и выводы Хейфорда .	414
§ 97. Об использовании гравиметрических материалов при обработке градусных измерений . . . . .	425
§ 98. Исторические сведения о градусных измерениях . . . . .	431
§ 99. Исторический обзор градусных измерений в первой половине XIX столетия .	449
§ 100. Краткий очерк градусных измерений во второй половине XIX и в начале XX столетия . . . . .	458
§ 101. О градусных измерениях в Америке и Африке и других странах . . .	462
§ 102. Развитие астрономо-геодезических работ в XX столетии . . . . .	465
§ 103. Классификация градусных измерений. Выводы из современных градусных измерений . . . . .	472
§ 104. Об исследовании местной фигуры геоида астрономо-геодезическим путем .	481

## Глава XI

## О методах обработки больших астрономо-геодезических сетей

§ 105. Общие соображения . . . . .	488
§ 106. Строгий вид азимутального условного уравнения в звене триангуляции I класса. Сравнение методов развертывания и проектирования триангуляции . . . . .	490
§ 107. Дополнительные указания по составлению азимутальных уравнений и по уравниванию звеньев I класса: вывод астрономических азимутов и долгот на концах выходной стороны звена . . . . .	503
§ 108. Дополнительные указания по уравниванию звеньев I класса: выполнение самого уравнивания . . . . .	505
§ 109. Заключительные соображения по уравниванию звеньев I класса. Предложения проф. Ф. Н. Красовского . . . . .	507
§ 110. Общее уравнивание астрономо-геодезической сети по способу Гельмерта . . . . .	512
§ 111. Уравнение Лапласа или азимутальное уравнение по некоторой геодезической линии по Гельмерту; сопоставление его с азимутальным уравнением по Красовскому . . . . .	517
§ 112. Продолжение изложения метода Гельмерта общего уравнивания астрономо-геодезической сети . . . . .	519
§ 113. Заключительные соображения по методу Гельмерта общего уравнивания астрономо-геодезической сети . . . . .	525
§ 114. Предложения проф. Ф. Н. Красовского по общему уравниванию астрономо-геодезической сети. Предварительные соображения . . . . .	527
§ 115. Способ проф. Ф. Н. Красовского общего уравнивания значительной астрономо-геодезической сети . . . . .	530
§ 116. Способ проф. Н. А. Урмаева общего уравнивания астрономо-геодезической сети . . . . .	536
§ 117. Окончательное уравнивание звеньев триангуляции I класса . . . . .	540

## Главная геодезическая основа СССР

(общая оценка постановки и программ работ; вопросы правильной обработки астрономо-геодезической сети)

§ 1. Построение главной геодезической основы в СССР . . . . .	550
§ 2. Соображения о влиянии отступлений геоида от эллипсоида на геодезические результаты. Выбор референц-эллипсоида . . . . .	555

Редактор *С. Г. Судаков*

Техн. редактор *И. А. Шленский*

Корректор *А. Д. Грудзинский*

---

Т-05127      Слано в набор 12/II 1954 г.      Подп. к печати 9/XII 1954 г.

Формат бумаги  $70 \times 108 \frac{1}{16}$ .      Бум. л. 18,25+5 вкл.      Печ. листов 50+5 вкл.

Колич. знаков в п. л. 35 000      Уч.-изд. лист. 44

Тир. 5000 экз.      Зак. № 761.      Цена 30 р. 80 к.+бум. переплет 1 руб.  
коленкоровый переплет 1 р. 50 к.

---

Рижская картографическая фабрика, Алтонавас, 43.

# ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧ

Страница	Строка	Напечатано
42	1 сверху	трапеции
69	Формула 127	$\frac{dp}{ds} =$
70	1 сверху	остановятся
146	7 сверху	$B^2 - B_1 =$
246	15 сверху	$x.$
255	1 снизу	широта
306	13 снизу	можем
399	6 сверху	$\left. \frac{B_{K^o} + B_{J^o}}{2} \right\}$

Красовский. Избранные сочинения, т. IV.

# АТКИ

Следует читать

трапецией

$$\frac{dq}{ds} =$$

становятся

$$B_2 - B_1 =$$

$x_1$ .

широте

может

$$\left. \frac{B_K^\circ + B_I^\circ}{2} \right\}$$